République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option :Probabilité

Par

MIZAB lamia

Titre :

Principe du maximum dans le cas non linéare convex

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	MANSOURI BADREDDINE	UMKB	Président
Pr.	ABBA ABEDELMAJID	UMKB	Encadreur
Dr.	GHOUL ABDELHAK	UMKB	Examinateur (rice)

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail À

tout d'abord,Mes chers parents Salima et Abedelhamid

Ma sœur Wissam , mon frère Khaled ,

mon mari DJEFFAL Salaheddine ,

et toute ma famille ,

Mes professeurs ,

Mes amis et tous ceux qui me sont chers

MIZAB LAMIA

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ***Dieu*** *le Tout-Puissant , de m'avoir accordé la volonté et les secrets du succès à chaque étape de ma vie académique, jusqu'à l'obtention de mon diplôme de master.2*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon superviseur, le ***Dr ABBA Abdelmejid*** , pour ses efforts, ses conseils et son aide dans la réalisation de ce travail.

Enfin, je tiens à remercier mes parents, ma famille, mon conjoint, tous les enseignants du département de mathématiques, mes amis et tous ceux qui m'ont encouragé et contribué à la réalisation de ce mémoire."

Introduction

Dans ce mémoire, on propose d'étudier les problémes de contrôles stochastiques gouverné par l'équation différentielle stochastique et on va étudier le principe du maximum dans le cas où le coeffecient de difusion ne dépend pas du contrôle et aussi le domaine du contrôle U est convexe, noté par l'ensemble des contrôles admissibles déffenie par :

$$U = \left\{ u : [0,T] \times \Omega \to A / u_t \text{ est mesurable et } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} - \text{adapté} \right\}$$

L'équation différentielle stochastique contrôlé de type Itô de la forme suivant :

$$Y_t = \xi + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s,\ 0 \leq t \leq T,$$

dont les paramètres sont la condition $Y_0 = \xi$.

Où b et σ sont deux fonctions boréliennes et $B = (B_t;\ t \in [0,T])$ désigne un mouvement brownien définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ continue a droite et contenant tous les ensembles P- négligables de $\mathcal{F}$, $u = (u_t,\ 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T})$ est un processus progressivement mesurable a valeurs dans un espace métrique compact A, appelle contrôle admissible, alors pour tout contrôle admissible

u ; on introduit une fonction de coût $J(u)$ définie par :

$$J(u) = E\left[g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u(t))\, dt\right]$$

L'objet du contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût J sur l'ensemble de tous les contrôles admisibles.

La solution $x = (x_t, s \leq t \leq T)$ de l'équation différentiel précédente est appelée réponse de contrôle u et le couple (u ; x) est appelé un couple admissible.

Alors l'objectif de ce mémoire est l'étude Les conditions nécessaire d'optimalités des contrôles convexes pour les EDS.

Ce travail est composé de trois chapitres :

chapiter 1 :Dans ce chapiter , on va donner quelques rappels de base sur le calcul stochastique les EDSs et des résultats utiles. Ce chapitre essentiellement une sorte d'introduction

chapitre 2 : Dans ce chapitre , on va présenter la théorie générale et la notation des équations différentielle stochastique (EDS) aprés ça on va prouver le théoréme d'existence et d'unicité des solutions pour les équation différentielle stochastique dans le cas où les coefficiens sont Lipschitzien.

chapitre 3 : a pour objectif l'etude du principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients de drifte b et de diffusion σ de l'équation d'état contient un terme de contrôle .On note par U L'ensemble de tous les contrôle admissible .

$$\begin{cases} dx_t^v = b(t, x_t^v, v_t)\, dt + \sigma(t, x_t^v, v_t)\, dB_t \\ x_0^v = \xi \end{cases}$$

où b est dit le génerateur de l'EDS, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$,satisfaisant les conditions habituelles. .Notre objectif dans ce chapitre, est d'établir les conditions nécéssaire d'optimalités sous formre principe de maximum stochastique, pour les contrôles convexe. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles convexe. Nous établissons les conditions d'optimalités nécéssair la méthode classique de la perturbation convexe (faible).

Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation d'état,et l'inégalité variationnelle d'après l'optimalité de v c'est-à-dire

$$0 \leq J(v^{\theta}) - J(v).$$

Pour parvenir à cette partie du chapitre, nous démontrons sous des hypothèses supplémentaires minimales, que les conditions nécessaires d'optimalités sont également suffisantes.

Chapitre 1

Généralités sur les calcul stochastique

le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base.

1.1 Rappal sur calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique) :*** *Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *Soit* T *un ensemble.On appelle Processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par* T *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, une famille* $(X_t)_{t\in T}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ *; pour tout* $t \in T; X_t$ *soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *La définition d'un processus stochastique seut etre plus generale en donnant un ensemble* T *plus generale et un autre espace d'etate que* $\mathbb{R}$ *pour un processus stochastique on* 2 *espace*

– *La famille* $X = (X_t)_{t\in T}$ *décrité de fonction aléatoires* $w \to f(w) = (X_t\ (w))_{t\in T}$ *la fonction* $f(w) : (t \to X_t(w))$ *est appllée trajectoire de* X_t

- *La famille* $X = (X_t)_{t\in T}$ *décrité un processus que est par rapport ou tems* t *la famille de variable aleatoire ordeniée* $t \to X_t$ $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}; X = (t.w) = X_t(w) = (X_t)_{t\in T}$

-On fixe $w \in \Omega, t \to X_t(w)$ fonction en trajectoire.

-On fixe $t \to w \to X_t(w)$ variable aléatoire.

Définition 1.1.2 *(indistinguables) :Soit* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est* $Y = (Y_t)_{t\in T}$ *deux processus stochastique dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *, les processus* X *et* Y *sant dit indistinguables s'il existe* $N \subset \mathcal{F}$ *négligeable ,tel que,*$\forall \{w \in \Omega : X_t(w) = Y_t(w)\ t \in T\}$ *;on écrit* $\mathbb{P}$ $(X_t = Y_t\ , \forall t \in T) = 1$

Définition 1.1.3 *(modefication) : Soit* $X = (X_t)_{t\in I}$ *est* $Y = (Y_t)_{t\in I}$ *deux processus stochastique définite dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *, les processus* X *et* Y *sant dit modefication l'un de l'eutre si pour tout* $t \in T$ $\mathbb{P}$ $(X_t = Y_t\ ) = 1$

Définition 1.1.4 *(dimensionnelles) :Soit* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est* $Y = (Y_t)_{t\in T}$ *deux processus stochastique dans* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ *respectivement .Alors* X *et* Y *, les processus* X *et* Y *on le même distribition (loi fini)-dimensionnelles :pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $t_{1,\ldots,}t_p \in T$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}) = (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_p})$$

On écrira $X \overset{?}{=} Y$ *.*

Proposition 1.1.1 *indistinguables* $\Longrightarrow$ *modefication* $\Longrightarrow$ *même loi fini-dimensionnelles*

Définition 1.1.5 *(processus continu) : On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les application* $t \to X_t(w)$ *sont continues pour presque tout* w.

Définition 1.1.6 *(processus càdlàg (resp . càglad)) : Unprocessus est dit càdlàg (continu à droite , pourvu de limites à gouche) si ses trajectoires sont continues à droite , pourvu de limites à gouche . Même définition pour càglàd (continu à gauche et limité à droite) .*

Définition 1.1.7 *(processus mesurable) : Unprocessus $(X_t)_{t\in T}$ est dit mesurable si l'application définie sur$(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, w) \to X_t(w)$ est mesurable*

Filtration

Définition 1.1.8 *(**filtration**) :On appelle filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;est une famille croissente de sous-tribus $\mathcal{F}$.i :e.$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans*

Remarque 1.1.2 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfaitles conditions habituelles si :*

- *Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.*
- *La filtration est continue à droite i.e.$\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s\succ t} \mathcal{F}_s \forall t$.*

Définition 1.1.9 *(**filtration naturelle) :** La famille croissante de sous tribus*

$$G_t = \sigma(X_s, s \leq t)$$

s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique X Mais G_t ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables $\mathcal{N}$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \cup G_t)$ lors que nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.1.10 *(**filtration continue) :**On defénit*

$$\mathcal{F}_{t^-} = \left(\bigcup_{s\prec t} \mathcal{F}_s\right) \qquad \mathcal{F}_{0^-} = \mathcal{F}_0 \qquad \mathcal{F}_{t^+} = \left(\bigcap_{s\succ t} \mathcal{F}_s\right)$$

Une filtration est continue à droite (resp.à gouche) si $\forall t \geq 0; \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *(resp.*$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$*)*

Définition 1.1.11 (processus adapté) : *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté (par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$*),si* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable, pour tout* $t \in [0, T]$

Définition 1.1.12 (processus progressivement mesurable) *: Un processus* $(X_t)_{t\in I}$ *est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si* $\forall\ s \in t$ *la filtration l'application* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *estmesurable sur* $[0, s] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0, s]) \otimes \mathcal{F}$

Définition 1.1.13 (progressivement mesurable) *:Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.On note aussi que si* X *est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1.2 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$*un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X_t *est mesurable et progressivement mesurables s'ilest de lus adapté.Les variables aléatoires* $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$*, sont appelées les accroissements du processus stochastique* X_t*,*

$i)$ *Processus à accroissement indépendants :*

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^x = \sigma\left(X_r, 0 \leq r \leq s\right), \forall 0 \leq s \leq t.$$

$ii)$ *Processus à accroissement stationnaires :*

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.1.14 *(processus gaussien) :Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales* $\alpha_1 X_{t1} + ... + \alpha_n X_{tn}$ *suit* *une loi gaussienne (pour tout* $n \in \mathbb{N}, t_1...t_n \in T, \alpha_1...\alpha_n \in \mathbb{R})$.

Définition 1.1.15 *(temps d'arrêt) : Une variable* $T : \Omega \to \{\infty\}$ *est une temps d'arrêt par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *si* :$\forall t \geq 0; \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

1.1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.1.16 *(Mouvement Brownien) :On appelle mouvement brownien un processus stochastique* $(B_t)_{t \geq 0}$*à valeurs réelles tel que :i)Continuité* $P - p.s$; *la fonction* $s \to B_s(\omega)$ *est une fonction continue.ii)Indépendance des accroissements : si* $0 \leq s \leq t, B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$*et de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$ *iii)Stationnarité des accroissements : si* $0 \leq s \leq t$ *la loi de* $B_t - B_s$ *est identique à celle de* $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$ *on dit qu'un mouvement brownien par rapport à* x *si* $B_0 = x$.

Définition 1.1.17 *Comme*$\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0$ *car* $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ *sont à acroissement indépendantes. Pour montrer que*

$$\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a(mouvement brownien standard) :On appelle mouvement brownien standard si $B_0 = 0$ $P - p.s$, $\mathbb{E}[B_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[B_t^2] = t$*.dans ce cas la loi de* B_t *est une loi normale.*

Proposition 1.1.3 *Soit* $(B_t)_{t \geq 0}$*un mouvement brownien standard, alors* B_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n$,$(B_{t_1}, ...B_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Proposition 1.1.4 *Soit* B *un mouvement brownien Standard, on a*

1. *pour tout* $T > 0, \{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien indépendant de* $(B_u, u \leq T)$
2. $(-B_t)$*est aussi un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout* $c > 0, \{cB_{t\div c^2}\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien.*
4. *Le processus dé...ni par* $X_0 = 0$ *et* $X_t = tB_{1\div t}$ *est un mouvement Brownien*

Proposition 1.1.5 *Si B un mouvement Brownien on a :*

1. $\forall t, P - p.s, B_t$ *n'est pas dérivable en aucun point* t.
2. B_t*n'est pas à variation finie en aucun point* t.

1.1.3 Martingales

Définition 1.1.18 *(martingale) :Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de cet espace Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$*est une martingale si :*

1. *Pour tout* $t \geq 0, X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable*
2. *Pour tout* $t \geq 0, X_t$ *est intégrable ,(c'est -à-dire vérifiant* $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ *Pour tout* $t \geq 0$
3. *Pour tout* $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) = X_s.P - p.s$

On définit de manière similaire une sous-martingale si 3 est remplacé par :

$$(\mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \geq X_s.P - p.s, \forall 0 \leq s \leq t).$$

Et une sur-martingale si 3 est remplacé par

$$(\mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \leq X_s.P - p.s, \forall 0 \leq s \leq t).$$

Proposition 1.1.6 *Le mouvement brownien standard* $(B_t, t \geq 0)$*est une martingale par rapport à sa filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_t^{\omega} = \sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq t\right)$$

Proposition 1.1.7 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien Les processus suivants sont des martingales par rapport à* $(\mathcal{F}_t^{\omega})$ *:*

1. $M_t = B_t^2 - t.$
2. $N_t = \left(\exp\left(\sigma B_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)\right).P$

1.2 calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann.Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien),$B : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô : $\int_0^T \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, s \leq t\right)$.L'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dB_s$ pour des processus ϕ :

Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé(ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i ,$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}-$ mesurables,appartienne à $\mathbb{L}^2$ () ou (carré intégrables) et que $\phi_t = \phi_i$ pour tout

$t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i,t_{i+1}]}(s) .$$

On définit :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) .$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \text{ et } \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right]$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right) .$$

Cas général

Soit l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t-$adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\phi_s^n - \phi_s^2\right) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi,pour tout $t > 0$,il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) .$$

$I_t(\phi)$est gaussien ,.car (B_t) est un processus gaussien alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right] \ , \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)=0\end{aligned}$$

comme $\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)=0$ cas $\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)$ sont à accroissements indépendantes.

Pour montre que :

$$\mathbb{V}ar\ \left[I_t(\phi)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet , on a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar\ \left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right)-\mathbb{E}\left(I_t(\phi)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right)=\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \phi_s dB_s\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\,\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\left(t_{i+1}-t_i\right)=\int_0^\infty \phi_s^2 ds.\end{aligned}$$

Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéarité :
$$\int_0^t\left(a\phi_s^1+b\phi_s^2\right)dB_s=a\int_0^t\phi_s^1 dB_s+b\int_0^t\phi_s^2 dB_s.$$
2. Additivité :Pour $0\leq s\prec u\prec t\leq T$

$$\int_s^t\phi_v dB_v=\int_s^u\phi_v dB_v+\int_u^t\phi_v dB_v.$$

3. Propriétés de martingale :Pour tout processus ϕ les processus :

$$t \to I_t(\phi) \text{ et } t \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ -martingales continues,ona :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t(\phi) - I_s(\phi)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_t^B\right].$$

4. Si $(\phi)_{t\in[0,T]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté et $\mathbb{E}\left(\int_0^t |\phi|^2 ds\right) \prec +\infty$,on a l'inégalté :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid \phi_s|^2 dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\int_0^t \mid \phi_s|^2 ds$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.2 processus d'Itô

Définition 1.2.1 *(processus d'Itô) : Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X = X_0 + \int_0^t |\varphi_s| ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P} - p.s$$

Avec X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$ -adapté vérifient les condition d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s| ds \prec +\infty \text{ et } \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds \prec +\infty$$

ou le coefficient φ et le drifter ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion . On note de maniére infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta dB_s.$$

1.2.3 formule d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-MBv défini dans cet espace.

Premiére formule d'Itô

Soit B un mouvement Brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et bornée.

Alors :

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(B_s)ds,$$

calculer $\int_0^t B_s dB_s$ tel que : $f(x) = x^2$

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds.$$

Ce qui donne , d'après l'intégration

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Deuxiéme formule d'Itô

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial t}(s, B_s)d\left\langle B\right\rangle_t.$$

sous formule différentielle

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t}(t, B_t)d\left\langle B\right\rangle_t .$$

Formule d'intégration par partie Soient

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t f(s)dB_s + \int_0^t g(s)ds, \\ Y(t) &= x_0 + \int_0^t h(s)dB_s + \int_0^t k(s)ds, \end{aligned}$$

deux processus d'Itô, avec les fonctions $f, g, h, k \in \mathbb{L}^2_{Loc}$, d'après la formule d'Itô vectorielle on a :

$$\phi(X(t), Y(t)) = X(t)Y(t),$$

donc

$$dX(t)dY(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d\left\langle X, Y\right\rangle_t$$

et on qobtient la formule d'intégration par parties suivantes

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t g(s)k(s)ds.$$

Chapitre 2

Existence et unicité de solution pour les EDSs

le but de ce chapiter est d'introduire l'existence et l'unicité de solution d'EDS

2.1 Equation différentielle stochastique

Définition 2.1.1 *(équation différentielle stochastique) :Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{2.1}$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

L'inconnue est le processus X. Le probléme est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients,l'équation différentielle a une unique solution.Il est utile de préciser les données.

Définition 2.1.2 *Soit b et σ sont deux fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeur réelles données On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$ et un $\mathcal{F}_t$mouvement brawnien B sur cet espace Une solution de (2.1) est un processus X continu $\mathcal{F}_t-$ adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{2.3}$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P}-p.s.$

Théorème 2.1.1 *On suppose que*

- *Les fonction b et σ sont continues*
- *il existe K tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \tag{2.4}$$

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x_t|^2). \tag{2.5}$$

La condition initiale $X_0 = \xi$ est idépendante de $(B_t, t \succeq 0)$ et est de carré intégrable,alors il existe une unique solution de (2.1) à trajictoires pout $t \leq T$.De plus cette solution vérifie

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] \prec \infty, \forall p > 1$$

Remarquant que la condition de Lipshitz (2.2) nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'equation (2.1)

Remarque 2.1.1 *La condition de croissance (2.4) nous évite l'éxplosition de la solution et si on n'a pas cette condition l'équation (2.1) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'éxplosition* la preuve l'existence et l'unicité de la solution est basée sur llemme de Granwall et inégalite de BDG..

Théorème 2.1.2 *(Théorème de Point fixe de Picard-Banach) : Soient une espace métrique complet et g une application -contractante . Alors*

1. g admet un unique point fixe $a \in E$,
2. Pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par g , définie par $x_n := g(x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,converge vers a ,
3. la convergence est géométrique ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, a) \leq \tfrac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

2.2 Unicité et existence

Définition 2.2.1 *pour l'equation (2.2) on dit qu'il y a :*

– Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de (2.2).

– Unicité trajectoirielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et le mouvement Brawnien B étant fixé , deux solution X et X' de (2.2).telle que $X = X'_t \ P \ . \ s$, sont indistinguables .

On dit de plus qu'une solution X de (2.2) est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B , il y a unicité forte pour l'EDS(2.2) si pour tout B, deux solution fortes associées à B sont indistinguables .

Théorème 2.2.1 *Soient $T \succ 0$ et $b\,(t,x)\ \sigma\,(t,x)$ sont des fonction mesurables satisfaisantes :*

1. (condition de lipschitz locale)

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \left|b\,(t,x) - b\,(t,y)\right| + \left|\sigma\,(t,x) - \sigma\,(t,y)\right| \leq k\left|x-y\right|, t \in [0,T]\,; x,y \in \mathbb{R},$$

2. (condition de croissance linéaire)

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \left|b\left(t,x\right)-b\left(t,y\right)\right|+\left|\sigma\left(t,x\right)-\sigma\left(t,y\right)\right| \leq k\left(1+\left|x\right|\right), t \in \left[0,T\right]; x \in \mathbb{R},$$

3. X_0 variable aléatoire indépandante de $B = (B_t)_{t\geq 0}$ et de carré intégrable (ie : $\mathbb{E}\left[\left|X_0^2\right|\right] \prec +\infty$) Alors l'équation (2.1) admet une unique solution forte $X = (X_t(w))_{t\geq 0}$ adapté par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t^{x_0} = \mathcal{F}_t \curlywedge \sigma\left(X_0\right)$ et vérife :

$$E\left[\int_0^T \left|X_t\right|^2 dt\right] \prec +\infty.$$

Preuve. Commençons par démontré l'unicité , Soient $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux solution fortes de condition initiale $X_0 = Y_0 = \xi$ telle que'

$$\begin{aligned}
\left|X_t - Y_t\right|^2 &= \left|\int_0^t b\left(s,X_s\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,X_s\right)dB_s - \int_0^t b\left(s,Y_s\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,Y_s\right)dB_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t \left[b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right]ds + \int_0^t \left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dB_s\right|^2,
\end{aligned}$$

On utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$;on a pour tout $0 \leq i \leq t \leq T$

$$\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2\left|\int_0^t \left[b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dB_s\right|^2$$

où

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left[b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dB_s\right|^2$$

Passant à lèspérence mathématique on obtient : ■

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]$$
$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dB_s\right|^2\right]$$

utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Ito on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T\left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right]$$

Par les inégalités de Cauchy-schawrtz et Buckolders-David-Gundy on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right]\\&=2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2+\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2\right)ds\right]\end{aligned}$$

comme les fonction b et σ sont Lipschizienne alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]&\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T|X_s-Y_s|^2ds\right]\\&\leq 2K^2\left(T+4\right)\int_0^T\mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds\\&\leq 2K^2\left(T+4\right)\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq i\leq s}|X_i-Y_i|^2\right]ds\end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Gronwall

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]\leq 0\exp(2K^2(T+4)=0$$

ce si implique que X et Y sont indistinguables c'est -à-dire

$$\mathbb{P}\left(X_t-Y_t,0\leq t\leq T\right)=1$$

A fin de prouver l'existence , on procéde comme pour les équations diférentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on posed

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= 0 \\
X_t^1 &= \xi + \int_0^t b(s,\xi)ds + \int_0^t \sigma(s,\xi)dB_s \\
X_t^2 &= \xi + \int_0^t b(s,X_s^1)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^1)dB_s \\
&\vdots \\
X_t^n &= \xi + \int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

On peut déterminer (X_t^n) pour tout n, on montre que (X_t^n) converge vers X_t et X_t vérifie notre EDS (2.1) D'abord on suppose on que les fonction b et σ vérifient la condition de croissance liniare et on prouve qu'il $\exists\ m \succ 0$ telque :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^2\right] \leq m,$$

si $n = 1$ on a

$$\left|X_t^1\right|^2 = \left|\xi + \int_0^t b\left(s,\xi\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,\xi\right)dB_s\right|^2,$$

et comme $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$,on trouve

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|\xi|^2 + \left|\int_0^t b\left(s,\xi\right)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma\left(s,\xi\right)dB_s\right|^2\right),$$

En utilisent de Cauchy-Schwarz, pour tout $0 \leq t \leq d \leq T$

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|\xi|^2 + T\int_0^d \left|b\left(s,\xi\right)\right|^2 ds + \left|\int_0^t \sigma\left(s,\xi\right)dB_s\right|^2\right),$$

Donc

$$\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\leq 3\left(|\xi|^2+T\int_0^d|b(s,\xi)|^2\,ds+\sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,\xi)\,dB_s\right|^2\right)$$

en passant aux ésperances,on obtien

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]\leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2+T\int_0^d|b(s,\xi)|^2\,ds+\sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,\xi)\,dB_s\right|^2\right]$$

d'ou on tire en utilisant de l'inégalité de Doob et l'isométrie delintegrale stochastique ,la croissance linéare de b et σ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]&\leq 3\left[\mathbb{E}|\xi|^2+T\int_0^d|b(s,\xi)|^2\,ds+4\int_0^d|\sigma(s,\xi)|^2\,dB_s\right]\\&\leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2+TK^2\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)ds+4K^2\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)ds\right]\\&\leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2+K^2(1+|\xi|)^2(T+4)\,d\right]\\&=3|\xi|^2+3K^2(1+|\xi|)^2(T+4)\,d,\end{aligned}$$

donc soit $m_1=3K^2(1+|\xi|)^2(T+4)$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]\leq 3|\xi|^2+m_1d$$

de la meme mainiére on trouve que d'aprés le fait que $(a+b+c)^2\leq 3a^2+3b^2+3c^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schawarz pour tout $0\leq t\leq d\leq T$

$$\begin{aligned}\left|X_t^2\right|^2&=\left|\xi+\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,X_s^1\right)dB_s\right|^2,\\&\leq 3\left(|\xi|^2+\left|\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)ds\right|^2+\left|\int_0^t\sigma\left(s,X_s^1\right)dB_s\right|^2\right),\end{aligned}$$

En utilisent de Cauchy-Schwarz, pour tout $0 \leq t \leq d \leq T$

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|\xi|^2 + T\int_0^t \left|b\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds + \left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^1\right) dB_s\right|^2\right),$$

Donc

$$\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2 \leq 3\left(|\xi|^2 + T\int_0^d \left|b\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^1\right) dB_s\right|^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + T\int_0^d \left|b\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^1\right) dB_s\right|^2\right]$$

et par utilisant l'négalité de Doob et l'isométrie de l'integrale stochastique ,la croissance linéare de b et σ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + T\int_0^d \left|b\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds + 4\int_0^d \left|\sigma\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds\right] \\
&= 3\left(|\xi|^2 + T\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|b\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|\sigma\left(s, X_s^1\right)\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + T\mathbb{E}\left[\int_0^d K^2\left(1 + \left|X_s^1\right|^2\right) ds\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^d K^2\left(1 + \left|X_s^1\right|^2\right) ds\right]\right) \\
&= 3\left(|\xi|^2 + (T+4)\,K^2\mathbb{E}\left[\int_0^d 1 + \left|X_s^1\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(|\xi|^2 + (T+4)\,K^2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left(1 + \left|X_s^1\right|\right)^2 ds\right]\right)
\end{aligned}$$

soit $m_2 = (T+4) K^2$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] \leq 3\left(|\xi|^2 + 2m_2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left(1+\left|X_s^1\right|\right)^2 ds\right]\right)$$
$$\leq 3\left(|\xi|^2 + 2m_2\mathbb{E}\left[T+\int_0^d \left|X_s^1\right|^2 ds\right]\right)$$
$$\leq 3\left(|\xi|^2 + 2m_2\left(T+\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{tv\leq s}\left(\left|X_s^1\right|\right)^2 ds\right]\right)\right)$$
$$\leq 3\left(|\xi|^2 + 2m_2\left(T+\int_0^d \left(3|\xi|^2 + m_1 d\right) d_s\right)\right)$$
$$= 3\left(|\xi|^2 + 2m_2\left(T+3|\xi|^2 d + m_1\frac{d^2}{2} d_s\right)\right)$$

et par une récurrence nous avons donc

$$X_t^2 \leq |\xi|^2 + \sum_{k=0}^{n}\frac{d^k}{k!}2m_k \forall n \geq 1,$$

Ensuite , il reste à montrer que la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ coverge $P-p.s$, uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$

$$\left|X_t^2 - X_t^1\right| \leq \left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right) ds + \int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right) dB_s\right|$$
$$\left|X_t^2 - X_t^1\right| \leq 2\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right) ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right) dB_s\right|^2$$

alors

$$\sup_{t\leq d}\left|X_t^2 - X_t^1\right| \leq 2\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right) ds\right|^2 + 2\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right) dB_s\right|^2$$

en passant aux ésperance et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique , la croissance linéaire de b et σ

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^1 - X_t^2\right|\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right) ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right) dB_s\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^d \left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right)\right|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right) dB_s\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^d \left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s,\xi\right)\right)\right|^2 ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s,\xi\right)\right)\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|X_s^1 - \xi\right|^2 ds\right] + 8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^1 - \xi\right|^2 ds\right] \\
&\leq \left(2TK^2 + 8K^2\right)\int_0^d \left[\mathbb{E}\left|X_s^1 - \xi\right|^2\right] ds \\
&\leq \left(2TK^2 + 8K^2\right)\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1 - \xi\right|^2\right] ds
\end{aligned}
$$

alors

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^2 - X_t^1\right|\right] \leq 2(2TK^2 + 8K^2)\left(\int_0^d \mathbb{E}\left[\left|\xi\right|^2 ds\right] + \int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2 ds\right]\right)
$$

donc pour tout n

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^{n+1}\right) - b\left(s, X_s^n\right)\right) ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) dB_s\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique , la croissance linéaire de b et σ

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|\left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&= \left(2TK^2+8K^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|X_s^1-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&\leq \left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_s^1-X_s^{n-1}\right|^2\right] ds
\end{aligned}
$$

on répete ce procedure, on trouve

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right]\leq m_n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!}
$$

cela entraine que $p.s$

$$
\begin{aligned}
&= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(m_n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\infty
\end{aligned}
$$

cela entraine que

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\leq\infty
$$

et donc la suite$(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge $p.s$ uniformément sur$[0,T]$ vers un processus$(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ limite qui est continu. Aprés on vérifier que X_t^n une solution de l'EDS (2.1) soit une sous suite converge dans,en effet

$$
\begin{aligned}
\left\| X_t^l - X_t^n \right\|_{L^2} &\le \sum_{k=n}^{l-1} \left\| \sup_{t\le d} X_t^{k+1} - X_t^k \right\|_{L^2} \\
&\le \sum_{k=n}^{+\infty} \left(m_k \frac{d^{k+1}}{(k+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

en passant à la limite dans (2.6) et lemme de Fatou on obtient

$$
\mathbb{E} \int_0^T \left| X_t^n - X_t \right|^2 dt \le \lim_{n\to\infty} \inf \mathbb{E} \int_0^T \left| X_t^n - X_t^l \right|^2 dt \underset{n\to\infty}{\to} 0 \, .
$$

utilisant la condition de lipschitz, l'inégalité de Couchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et lisométrie de l'intégrale stochastique ,on a

$$
\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s\right) \right) ds \right|^2 \right] \le tK^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left| X_s^n - X_s \right|^2 ds \right] \underset{n\to\infty}{\to} 0
$$

$$
\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s\right) \right) dB_s \right|^2 \right] \le 4K^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left| X_s^n - X_s \right|^2 ds \right] \underset{n\to\infty}{\to} 0
$$

alors

$$
\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds \overset{L^2}{\to} \int_0^t \left(b\left(s, X_s\right) \right) ds
$$

et

$$
\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) ds \overset{L^2}{\to} \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s
$$

on déduit que X_t est une solution de l'EDS (2.1) et $n \to +\infty$

Exemple 2.2.1

$$
\begin{cases}
\frac{dx_t}{dt} = 3x_t^{\frac{2}{3}}, \\
x_0 = 0.
\end{cases}
$$

et

$$x_t = \begin{cases} 0 : si\ t \leq a \\ (t-a)^3 : si\ t > a, \end{cases}$$

$b(x_t) = 3x_t^{\frac{2}{3}}$ *n'est pas Lipshitzienne car les dérivées n'est pas bornnées, n'est pas dérivable au points* $x_0 = 0$.

Remarque 2.2.1 *La condition de croissance (2.5) nous évite l'éxplosition de la solution et si on n'a pas cette condition l'équation (2.1) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'éxplosition.*

Exemple 2.2.2 *On considere l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{dx_t}{dt} = x_t^2, x_0 = 1.$$

C'est-à-dire $b(x) = x^2, \sigma = 0$, *sont Lipchitziennes donc, il existe une solution unique donnée par :*

$$x_t = \frac{1}{1-t} : 0 \leq t \leq 1,$$

car

$$\lim_{t \to 1} x_t = +\infty.$$

Chapitre 3

Principe de maximum de le cas non linéaire, convexe

Dans ce chapitre on donne le principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients de drifte b et de diffusion σ de l'équation d'état contient un terme de contrôle .

3.1 Formulation du problème

.On note par U L'ensemble de touts les contrôle admissibe .

$$\begin{cases} dx_t^u = b\left(t, x_t^u, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) dB_t \\ x_0^u = \xi \end{cases} \tag{3.1}$$

La fonction côut à minimiser est de la forme :

$$J\left(u(\cdot)\right) = \mathbb{E}\int_0^T l(t, x(t), u(t)) + \alpha\left(x^u(T)\right) \tag{3.2}$$

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n \ , \ \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d},$$
$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$$

Hypothése (H_1) : U convexe, b, σ, l, α sont continûment différentiable par rapport à (x,u).Ils sont majorées par $C(1+|y|+|z|)$ et leurs dérivées, par rapport à (x,u) sont continues et uniformément bornées.et la fonction α est convexe .

Sous l'hypothèse ci-dessus, l'équation (3.1) a une unique solution forte et le coût J est bien définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous prenons la perturbation convexe (sous forme faible), suivante

$$\mu^{\varepsilon} = \mu + \varepsilon(v-u) \ , \ 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Pour obtenons l'quation variationnelle suivante :

$$J(\mu^{\varepsilon}) - J(\mu_t) \geq 0,$$

on a desoin de deux lemmes suivant

Lemme 3.1.1

$$\lim_{\eta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |x^{\varepsilon}(t) - x(t)|^2\right] = 0. \tag{3.3}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |x^{\varepsilon}(t) - x(t)|^2\right] \leq \mathbb{E}\int_0^t |b^{\varepsilon}(s) - b(s)|^2 \, ds + \mathbb{E}\int_0^t |\sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s)|^2 \, ds.$$

b, σ sont lipchitziennes par rapport a (x, v)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x^{\varepsilon}(t) - x(t)|^2\right] \leq C_T\mathbb{E}\int_0^t |x^{\varepsilon}(s) - x(s)|^2 \, ds + C\varepsilon^2\mathbb{E}\int_0^t |v(s)|^2 \, ds \quad (3.4)$$

En utilison (3.4) on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x^{\varepsilon}(t) - x(t)|^2\right] \leq C_T\mathbb{E}\int_0^t \sup_{s\in[0,s]} |x^{\varepsilon}(s) - x(s)|^2 \, ds + M_T\varepsilon^2.$$

D'aprés le lemme de Gronwall, d'aprés l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy , d'où resultat .

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|\frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - z(t)|^2 = 0, \quad (3.5)$$

où Z est la soulition de l'equation lineaire

$$\begin{cases} dZ(t) = \{b_x(t)x_1(t) + b_v(t)v(t)\} \, dt + \{\sigma_x(t)x_1(t) + \sigma_v(t)v(t)\}dW(t) \\ Z_0 = 0 \end{cases}$$

Pour simplifier ona :

$$x^{\rho,\varepsilon}(t) = x(t) + \rho\varepsilon(x^{\varepsilon}(t) + x_1(t)),$$

$$x^{\rho,\varepsilon}(t) = x(t) + \rho\varepsilon(x^{\varepsilon}(t) + \hat{x}_1(t)),$$

$$u^{\rho,\varepsilon}(t) = u(t) + \rho\varepsilon v(t),$$

on pose $\bar{x} = \frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - z(t)$,on a

$$d\bar{x}^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}[\{b(t, x^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) - b(t, x(t), u(t))\}dt + \{\sigma(t, x^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) - \sigma(t, x(t), u(t))\}dW_t$$
$$- [\{b_x(t)Z(t) + b_v(t)v(t)\}dt + \{\sigma_x(t)Z(t) + \sigma_v(t)v(t)\}dW(t)]$$

$x^{\varepsilon}(0) = 0.$

Dévlopment d'ordre 1 de reste intégrale :

$$d\bar{x}^{\varepsilon}(t)=\{\int_0^1[b_x(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))(x^{\varepsilon}(t)+Z(t))+b_v(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))v(t)]d\rho\}dt$$
$$+\{\int_0^1[\sigma_x(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))(x^{\varepsilon}(t)+Z(t))+\sigma_v(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))v(t)]d\rho\}dW_t$$

On définie les quantités suinantes

Preuve.

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{\rho} &= \int_0^1 b_x(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))d\rho,\\
\alpha_2^{\rho} &= [\alpha_1^{\rho}-b_x(t)]\,Z(t)+\int_0^1\{[b_v(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))-b_v(t)]v(t)\}d\rho,\\
\alpha_4^{\rho} &= \int_0^1 \sigma_x(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))d\rho,\\
\alpha_5^{\rho} &= [\alpha_4^{\rho}-\sigma_x(t)]Z(t)+\int_0^1\{[\sigma_v(t,x^{\rho,\varepsilon}(t),u^{\rho,\varepsilon}(t))-\delta_v(t)]v(t)\}d\rho,
\end{aligned}$$

Donc ona

$$\begin{cases} d\bar{x}^{\varepsilon}(t)=[\alpha_1^{\rho}x^{\varepsilon}(t)+\alpha_2^{\rho}]\,dt+[\alpha_4^{\rho}x^{\varepsilon}(t)+\alpha_5^{\rho}]\,dB_t \\ x^{\varepsilon}(0)=0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

On applique isométrié d'Itô $|x^{\varepsilon}(t)|^2$ on obtien

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\bar{x}^{\varepsilon}(t)|^2 &= \mathbb{E}\int_0^T[\langle(2\bar{x}^{\varepsilon}(t),\alpha_1^{\rho}x^{\varepsilon}(t)+\alpha_2^{\rho})\rangle+|\alpha_4^{\rho}x^{\varepsilon}(t)+\alpha_5^{\rho}|^2dt\\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^T|x^{\varepsilon}(t)|^2dt+\sigma(\alpha)
\end{aligned}$$

D'aprés le lemme de Gronwall d'où résultat (3.5) .

Lemme 3.1.2 *Si u est un contrôle optimal alors ona :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T l_x(t)Z(t)+l_v(t)v(t)dt\right]+\mathbb{E}[\alpha_x(x(T))Z_T]\geq 0. \tag{3.6}$$

Preuve. Si $u(\cdot)$ optimal control alors ■

$$\frac{J(u^\varepsilon)-J(u_t)}{\varepsilon}\geq 0$$

ona

$$\begin{aligned}
\frac{J(u^\varepsilon)-J(u_t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\alpha(x^\varepsilon)-\alpha(x_T)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_0^T\left[l^\varepsilon(t)-l(t)\right]dt\right],\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)\right)\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)d\lambda\right]\right.\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right)d\lambda\right)dt\right]\right]\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(u_t^\varepsilon-u_t^\mu\right)d\lambda]\,dt\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(\frac{x_T^\varepsilon-x_T^\mu}{\varepsilon}\right)d\lambda\right]\right.\\
&\times\left(\frac{x_t^\varepsilon-x_t^\mu}{\varepsilon}\right)\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right)dt\right]\right]\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\lambda]\,dt,\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)\right)Z_Td\lambda\right]\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)Z_t\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\lambda dt
\end{aligned}$$

d'aprés lemme (1), lemme (2) , l_x, l_ε , α_x sont continue et bornéeψ

$$\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)\right)\rightarrow_{\varepsilon\rightarrow 0}\alpha_x\left(x_T^\mu\right)$$

$$l_x\left(x_t^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\rightarrow_{\varepsilon\rightarrow 0}l_x\left(x_t^\mu,u_t\right)$$

$$l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\rightarrow_{\varepsilon\rightarrow 0}l_v\left(x_t^\mu,u_t\right)$$

$$0\leq\frac{J\left(u^\varepsilon\right)-J\left(u_t\right)}{\varepsilon}=\mathbb{E}\left[\alpha_x\left(x_T^\mu\right)Z_T+\int_0^T l_x\left(x_t^\mu,x_t^\mu,u_t\right)Z_t+l_v\left(x_t^\mu,x_t^\mu,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)dt\right].$$

3.2 Equation varitionnelle processus adjoint et equation adjointé

A partir de l'inégalité varitionnelle on va établier les conditions nécessaires d'optimalité verifies le contrôle optimale u.

Soit φ la solution fondamentable matricielle associée à l'équation léniare

$$\begin{cases} -d\varphi(t)=b_x\left(t,x,u\right)\varphi(t)dt+\varphi\left(t,x,u\right)\sigma_x\left(t\right)dB_t, \\ \varphi_0=Id, \end{cases}$$

φ est inversible et son inverse ψ verifie

$$\begin{cases} -d\psi(t)=\left(D_t\psi D_t^*-A_t\psi_t\right)dt-D_t\psi_t dB_t \\ \psi_0=Id \end{cases}$$

telque :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\varphi_t|^2\right]<\infty,$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\psi_t|^2\right]<\infty.$$

On définie le Hamiltonien H de $[0,T]\times\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$H(t,x(t),\mu,v,P,p)=l(t,x,v)+b(t,x,v)p-\sigma(t,x,v)P.$$

On pose

$$p_t=\psi_t Y_t$$

avec

$$dY_t=-\varphi_t^X l_x\left(t,x_t^u,u_t\right)dt+\varphi_t dB_t,$$

Pour obtenir l'équation adjointe vérifiée par le processus adjoint p ,il suffit d'appliquent la formule d'Itô sur $p_t=\psi_t Y_t$:

$$\begin{aligned} dp_t &= \psi_t dY_t+Y_t d\psi_t+\langle\psi_t,Y_t\rangle_t \\ &= -H_x\left(t,x_t^u,u_t,p_t^u,P_t^u\right)dt-p_t dB_t, \end{aligned}$$

telque

$$H_x\left(t,x_t^u,u_t,p_t^u,P_t^u\right)=l_x\left(t,x_t^u,u_t\right)+p_t^u b_x\left(t,x_t^u,u_t\right)-P_t^u\sigma_x\left(t,x_t^u,u_t\right),$$

$$\begin{cases} \beta_t = \psi_t \left(x_t^v - x_t^u \right), \\ X = \varphi_T g_x \left(x_T^u \right) + \int_0^T \varphi_t^x h_x \left(t, x_t^u, u_t \right) dt, \\ p_t = \psi_t Y_t \\ P = \sigma_x^X p_t - \psi_v \psi_t, \\ Y = \mathbb{E} \left(X | \mathcal{F}_t \right) - \int_0^t \varphi_s l_x \left(t, x_t^u, u_t \right) dt, \end{cases}$$

$$p_0 = \psi_0 Y_0 = Y_0$$

$$; p_T = \psi_T Y_T = \psi_T \mathbb{E} \left(X | \mathcal{F}_T \right) - \psi_T \int_0^t \varphi_s l_x \left(t, x_t^u, u_t \right) dt.$$

X est $\mathcal{F}_T$ mesurable donc $\mathbb{E} \left(X | \mathcal{F}_T \right) = X$,

$$\begin{cases} dp = -H_x \left(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u \right) dt - P_t dB_t, \\ p_T = g_x \left(x_T^u \right), \end{cases} \tag{3.7}$$

L'équation (3.7) est une equation stochastique rétrogarde

Théorème 3.2.1 ($\textit{sous forme faible}$) *pour qu'un contrôle $u \in U$ soit optimal, il faut et il suffit que*

$$H_v \left(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u \right) \left(v_t - u_t \right) \geq 0$$

Où (p, P) est la solution unique de (E, A) , C-à-d

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v) \Rightarrow H_v \left(v_t - u_t \right) \geq 0, \ \forall v \in U.$$

Conclusion

Ce mémoire donne une idé générale sur principe du maximum dans le cas non linéaire convexe. Plus précisément, nous utilisons lemme de Granwall et inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ainsi avec une technique on obtient un principe du maximum telque le domaine de contrôle est convexe ,et pour étudé les condition nécessaire d'optimalités des contrôles pour les EDS , et minimese la fonction de côut

Bibliographie

[1] Bouhssaya Nesrine. (2020). LE PRINCIPE DU MAXIMUM EN CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE. Mémoire de Master, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

[2] Breton , J.c. (2013) . Processus stochastique . Université de Rennes1

[3] Bismut , J.M. (1973) . Analyse convexe et probabilités (Doctoral dissertation).

[4] Bismut , J.M. (1973) . Conjugate convex funtion in optimal stochastic control . Journal of Mathematical Analysis and Application , 44(2) , 384 - 404 . 4 .

[5] Chassagneux, J.F, Chotai.H, and Muûls. M, (2017). A Forward-Backward SDEs Ap-proach to Pricing in Carbon Markets. Springer.

[6] Dellacherie, C et Mayer. P.A, (1980). Probabilités et Potentiel. Hermann.

[7] jeanblan,M.(2006) . Cours de calcul stochastique Master 2IF EVRY . Lecture Notes , University of Évry . Available at http :// www . maths . univ - evry.fr / pages – perso / jeanblanc.

[8] Le Gall , J . (2010) Calcule stochastique et processus de markove . Notes de cours .

[9] POPIER, A . Calcul stochastique application en finance .

[10] Pardoux, E.& Peng, S. G. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett., 14(1), 55 – 61.

[11] Philippe Briand, (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

[12] Skorokhod, A.V, (1965). Studies in theory of random processes. Reading Mass. Addi-son Wesley.

-Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilisé filtré .
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilisé complét .
$(\Omega, \mathcal{F})$	Espace mésurable .
$\mathcal{F}_t$	Filtration .
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique du processus stochastique X
u_t	Variable de contrôle strict.
$\mathcal{U}$	L'ensemble des contrôles stricts admrssibles.
$\mathcal{A}$	L'ensemble des valeures des contrôles stricts.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	Equation différentielle stochastique rétrograde
$\lvert.\rvert$	valeur absolue d'un nombre
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$
q_t	Variable de contrôle relaxé.
$\mathcal{R}$	L'ensemble des contrôles relaxés admrssibles.
$\mathbb{P}(\mathcal{A})$	L'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}$.
δ_v	Masse de Dirac concentrée en un point v.

ξ	La condition initiale de l'EDS.
b	Le générateur de de l'EDS.
B_t	Un mouvement Brownien.
$\mathcal{H}\left(t, x(t), \mu, v, P, p\right)$	Le Hamiltonien.

الملخص:

نهتم في هذه المذكرة بدارسة مشكلات التحكم العشوائي المثلى حيث ندرس التحكم الأمثل العشوائي لنظام تحكمه المعدلات التفاضلية العشوائية الزمنية، في الفصل الأول نقدم بعض المعلومات العامة عن حساب التفاضل والتكامل العشوائي،أما الفصل الثاني تم تخصيصه لدارسة وجود و وحدانية الحل لهذا النوع من المعادلات التفاضلية،والفصل الثالث كان هو الهدف حيث تكلمنا فيه عن تهيئة

الظروف اللازمة في شكل مبدأ أقصى عشوائي من Pontriagin.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية، التحكم الأمثل العشوائي، وجود و وحدانية الحل.

Résumer:

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des problèmes de contrôle stochastique optimal, où nous examinons le contrôle stochastique optimal d'un système régi par des équations différentielles stochastiques temporelles. Dans le premier chapitre, nous présentons quelques informations générales sur le calcul stochastique. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de ce type d'équations différentielles. Le troisième chapitre est l'objectif principal où nous avons discuté de la préparation des conditions nécessaires sous forme du principe du maximum stochastique de Pontriagin.

Mots-clés: équations différentielles stochastiques, contrôle stochastique optimal, existence et unicité de la solution

Abstract:

In this thesis, we focus on the study of optimal stochastic control problems, where we examine the optimal stochastic control of a system governed by temporal stochastic differential equations. In the first chapter, we provide some general information about stochastic calculus. The second chapter is dedicated to studying the existence and uniqueness of the solution for this type of differential equations. The third chapter is the main objective, where we discuss the preparation of the necessary conditions in the form of Pontryagin's stochastic maximum principle.

Keywords: stochastic differential equations, optimal stochastic control, existemal, and uniqueness of the solution.