République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Ghanemi Selma

Titre

Intégrale Stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	CHAOUCHKHOUANE Nassima	UMKB	Président
Dr.	BERROUIS Nassima	UMKB	Encadreur
Dr.	GATT Rafika	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Je tiens à dédier ce travail à

Mes chers parents en premier lieu,

Ma sœur, mes frères, et toute ma famille,

à tous ceux qui étaient à côté de moi.

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout ALLAH qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercier mon encadreur BERROUIS Nassima pour l'orientation et les conseils qu'elle m'a prodigués pendant la période du travail.

Je remercie également les membres du jury GATT Rafika et CHAOUCHKHOUANE Nassima pour accepte d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens également à remercier tous mes professeurs pour leur aide et leur soutien pendant toutes mes périodes d'études à l'université.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui nous ont encouragés pendant la réalisation de ce travail, famille, collège, amis, sans exception.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous intéressons à l'étude de calcul des intégrales stochastiques, l'un des processus stochastiques auxquels le calcul stochastique est appliqué est le processus de Wiener en l'honneur du scientifique Norbert Wiener où il est utilisé pour modéliser le mouvement Brownien.

Lorsqu'il s'agit de fonctions aléatoires par exemple les fonctions de mouvement Brownien, nous notons que l'intégrale de Riemann ne peut pas être utilisée pour ces fonctions, c'est pourquoi le scientifique Japonais Kiyoshi Itô a résolu ce problème en introduisant la théorie de l'intégrale stochastique.

En général, l'intégrale stochastique a été utilisée dans divers domaines par exemple les mathématiques financières, la physique statistique et l'ingénierie des systèmes complexes.

L'objectif de cette étude est de présenter le concept d'intégrale stochastique. Pour atteindre cet objectif, l'étude est divisée en deux chapitres :

- Le premier chapitre explique les concepts généraux d'espace de probabilité, variables aléatoires, espérance conditionnelle, processus stochastiques et le mouvement Brownien et ses principales caractéristiques.

- Le deuxième chapitre présente l'intégrale stochastique de manière générale, y compris l'intégrale de Wiener et l'intégrale d'Itô.

Chapitre 1

Processus stochastiques

Ce chapitre contient quelques définitions de base : espace de probabilité, variables aléatoires, espérance conditionnelle, processus stochastiques et le mouvement Brownien.

1.1 Probabilité

1.1.1 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sachant que Ω est un ensemble non vide, $\mathcal{F}$ est une tribu (σ-algebra en Anglais) et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur espace mesurable.

Définition 1.1.1 *On dit que $\mathcal{F}$ est une σ -algèbre si :*

- $\Omega \in \mathcal{F}$,

- $(A \in \mathcal{F}) \implies (A^c \in \mathcal{F})$,

- $\left((A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}\right) \implies \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{F}\right)$,

La paire $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé un espace mesurable indexé.

Définition 1.1.2 ($\textit{Mesure de probabilité}$) *Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω, une mesure de* *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application*

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], \text{ telle que}$$

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *et* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *disjoints* $(ie,\ A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m) \Longrightarrow \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

1.1.2 Variables aléatoires

Définition 1.1.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, une variable aléatoire est une application* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\{w \in \Omega : X(w) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Proposition 1.1.1 X *une variable aléatoire ssi :*

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.4 *(Mesurabilité) Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ε) *deux espaces mesurables une application* f *de* Ω *dans* E *est dit* (E, ε) *mesurable si :*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \ ,\ \forall A \in \varepsilon \ ,\ \text{où} \ \ f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{w \in \Omega \ ,\ f(w) \in A\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur les tribus employées, on dit simplement que f *est mesurable. Une fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est Borélienne si elle est* $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$*-mesurable, soit* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *,* $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*. Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles* A*. Les fonctions continues sont Boréliennes.*

Définition 1.1.5 (*tribu engendrée*) *La tribu engendrée par une variable aléatoire* X

définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F})$ *est l'ensemble* $\sigma(X)$ *défini comme suit :*

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(A) \ , \ A \in \mathcal{G}\right\},$$

tel que : $X^{-1}(A) = \{w \in \Omega : X(w) \in A\}$. *Cette tribu est la plus petite tribu sur* Ω *qui rend* X *mesurable.*

1.1.3 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, avec A et B deux événements de $\mathcal{F}$, et supposons que la probabilité de B est non nulle.

Définition 1.1.6 $($*Conditionnement par rapport à un événement* $B \in \mathcal{F})$ *La probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *est :*
Soit $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$; *si* $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Définition 1.1.7 *(Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à un évènement) L'espérance conditionnelle de la variable aléatoire* X *sachant* B, *est définie comme suit :*

$$\mathbb{E}[X \backslash B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$

Définition 1.1.8 *(Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à une tribu) Si* $\mathcal{G}$ *sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *alors l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire* X *sachant* $\mathcal{G}$ *est la seule variable aléatoire* $\mathcal{G}$*-mesurable telle que :*

$$\int_A \mathbb{E}[X \backslash \mathcal{G}] = \int_A X d\mathbb{P} \ , \ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires et si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, on a :

a) Linéarité : soit α et β deux constantes alors

$$\mathbb{E}\left[\alpha X+\beta Y \backslash \mathcal{G}\right]=\alpha \mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right]+\beta \mathbb{E}\left[Y \backslash \mathcal{G}\right].$$

b) Croissance : si $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \backslash \mathcal{G}\right].$$

c) Positivité : si $X \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right] \geq 0.$$

d) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right]\right]=\mathbb{E}\left[X\right].$

e) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable alors

$$\mathbb{E}\left[XY \backslash \mathcal{G}\right]=Y\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right].$$

f) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable alors

$$\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right]=X.$$

g) Si X est indépendant de $\mathcal{G}$ alors

$$\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right]=\mathbb{E}\left[X\right].$$

h) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{G}\right] \backslash \mathcal{H}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{H}\right] \backslash \mathcal{G}\right]=\mathbb{E}\left[X \backslash \mathcal{H}\right].$

i) Si (X, Y) sont indépendantes, ϕ une fonction Borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(X,Y\right)\backslash Y\right] = \left[\mathbb{E}\left(\phi\left(X,y\right)\right)\right]_{y=Y}.$$

Proposition 1.1.2 *(Inégalité de Jensen) Soient X une variable aléatoire, $\mathcal{G}$ une sous -tribus de $\mathcal{F}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(X\right)\right|\right] < \infty$. Alors*

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left[X\backslash\mathcal{G}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\backslash\mathcal{G}\right], \ \ p.s.$$

En particulier, pour tout $p \geq 1$, à condition que $\mathbb{E}\left[|X|^p\right]$ existe, nous avons

$$\left|\mathbb{E}\left[X\backslash\mathcal{G}\right]\right|^p \leq \mathbb{E}\left[|X|^p\backslash\mathcal{G}\right], \ \ p.s.$$

1.2 Processus stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastiques est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Définition 1.2.1 (*Filtration*) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Définition 1.2.2 (*Filtration naturelle*) *La filtration naturelle ou canonique de processus X_t est définie comme suit :*

$$\mathcal{F}_t^x = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right), \ \ pour\ tout\ t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable $\forall 0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration sur cet espace. Alors l'espace probabilisé filtré est donné par $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$.*

On définit l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega \ , \ \exists A \in \mathcal{F} / N \subset A \ , \ \mathbb{P}(A) = 0\} .$$

Définition 1.2.3 (*Filtration standard*) *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$-satisfait les conditions usuelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ -contient l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$.*

Définition 1.2.4 *La filtration engendrée par un processus X_t, notée $\mathcal{F}^X$ est une suite croissante de tribus $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t \geq 0}$-engendrée par $(X_t)_{t \geq 0}$. En d'autres termes, $\mathcal{F}_t^X$ est défini comme σ -algèbre générée par*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, s \leq t\right), \forall t \geq 0.$$

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires (X_t) indexée par un ensemble T.*
En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexé par le temps T. Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(w)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $w \in \Omega$. Pour $t \in T$ fixé, $w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \in T \rightarrow X_t(w)$ est une fonction à valeur réelle appelée trajectoire du processus.

Définition 1.2.6 *Un processus X_t est appelé un processus á trajectoires continues si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Définition 1.2.7 *Un processus est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites gauche.*

Définition 1.2.8 *Un processus est dit càglàd si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

Définition 1.2.9 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ *est dit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable pour tout* t*.*

Définition 1.2.10 *On dit que le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *mesurable si l'application suivante :*

$$\left(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right)\otimes\mathcal{F}\right)\longrightarrow\left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(t,w)\longrightarrow X_t\left(w\right),$$

est mesurable.

Définition 1.2.11 *(Processus progressivement mesurable) On dit qu'n processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ *est progressivement mesurable si l'application :*

$$X\left(.,.\right):\left([0,t]\times\Omega,\mathcal{B}\left(0,t\right)\otimes\mathcal{F}\right)\longrightarrow\left(E,\varepsilon\right)$$
$$(s,w)\longrightarrow X\left(s,w\right),$$

est $\left(\varepsilon,\ \mathcal{B}\left(0,t\right)\otimes\mathcal{F}\right)$ *-mesurable.*

Définition 1.2.12 *Un processus* $\{X_t,t\geq 0\}$ *est dit prévisible par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *ou* ($\mathcal{F}_t$*-prévisible) si pour tout* $t\geq 0$, X_{t+1} *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.2.13 *Un processus* $X=(X_t,t\geq 0)$ *est dit à variation bornée sur* $[0,T]$ *si*

$$\sup_{t_i}\sum_{i=1}^{n-1}\left|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right|<k.$$

Définition 1.2.14 *Un processus* $X=(X_t,t\geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0,T]$ *si*

$$\sup_{t_i}\sum_{i=1}^{n-1}\left|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right|<\infty.$$

Définition 1.2.15 *On définit la variation infinitésimale d'ordre* p *d'un processus* X *sur* $[0,T]$ *associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *de* $[0,T]$ *par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p.$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (convergence* $\mathcal{L}^p$, *convergence p.s.) lorsque*

$$\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0,$$

la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p *de* X *sur* $[0,T]$. *En particulier :*

- Si $p = 1$, *la limite s'appellera variation totale de* X *sur* $[0,T]$.

- Si $p = 2$, *la limite s'appellera variation quadratique de* X *sur* $[0,T]$ *notée* $\langle X \rangle_T$.

Définition 1.2.16 *Un processus est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* $t > 0$, *ie* $X_{t+h} - X_t \overset{\mathcal{L}}{=} X_h$.

Un processus X *est dit à accroissements indépendants si pour tout* $p \geq 1$ *et* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_P$, *les variables aléatoires* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ *sont indépendantes.*

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t,

1- Une martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) = X_s$.

2- Une sur-martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

3- Une sous-martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

1.3.1 Martingale locale

Définition 1.3.2 *(Temps d'arrêt) Un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ définie sur $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout instant $t \geq 0$:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.3.3 *Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale s'il existe une suite croissante $\{\tau_n, n \geq 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que*

$$\mathbb{P}\left(\tau_n \longrightarrow +\infty\right) = 1,$$

et le processus $X^n : t \longrightarrow X_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale pour tout $n \geq 0$.

1.4 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est un concept fondamental en probabilité et en statistique, utilisé pour modéliser le mouvement aléatoire de particules dans divers domaines tels que la finance, et la biologie. Il est généralement noté $(W_t; t \geq 0)$ en référence à Wiener, ou $(\mathbb{B}_t; t \geq 0)$ en référence à Brown. Nous allons maintenant présenter la description générale du mouvement Brownien.

1.4.1 Processus Gaussiens

Variable Gaussien

Définition 1.4.1 *Une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ si admet pour densité :*

$$t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si admet pour densité :

$$t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Proposition 1.4.1 *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors l'espérance égal $\mathbb{E}[X] = \mu$, et variance : $Var(X) = \sigma^2$.*

Processus Gaussien

Définition 1.4.2 *Un processus X est Gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire Gaussienne, c'est-á-dire si :*

$$\forall n,\ \forall t_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \forall \alpha_i,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{t_i} \text{ est une variable aléatoire réel Gaussienne.}$$

1.4.2 Mouvement Brownien standard

Définition 1.4.3 *On appelle mouvement Brownien standard un processus stochastique $(\mathbb{B}_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie :*

1. $\mathbb{B}_0 = 0$ p.s.
2. Pour tout $0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est normalement distribuée (variable Gaussienne) avec une moyenne de 0 et un variance $t - s$.
3. $\mathbb{B}_t$ est à trajectoires continues.
4. $\mathbb{B}_t$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

1.4.3 Propriétés du mouvement Brownien

Supposons que nous ayons un mouvement Brownien fixe $\mathbb{B}$, quelques caractéristiques importantes de ce processus stochastique :

Proposition 1.4.2 *Soit* $\mathbb{B}$ *un mouvement Brownien et* $\mathcal{F}_s = \sigma\left\{\mathbb{B}_r, 0 \leq r \leq s\right\}$, *alors :* $\forall t > s$, $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$.

Preuve. Puisque $\mathbb{B}$ à des incréments indépendants, alors $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est indépendant de $\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_0 = \mathbb{B}_s$. Aussi $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est indépendante de $\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_r$ pour tout $0 \leq r \leq s$.
Alors $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est indépendante de $\sigma\left(\mathbb{B}_s\right)$ et $\sigma\left(\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_r\right)$ et donc bien sûr $\sigma\left(\mathbb{B}_s\right) \vee \sigma\left(\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_r\right)$ pour tout $r \leq s$.
Où pour deux σ-algèbres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ nous utilisons la notation $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.
D'autre part, notez que $\mathbb{B}_r = -\left(\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_r\right) + \mathbb{B}_s$. Ainsi $\mathbb{B}_r$ est $\sigma\left(\mathbb{B}_s\right) \vee \sigma\left(\mathbb{B}_s - \mathbb{B}_r\right)$ -mesurable pour tous $0 \leq r \leq s$. Par conséquent d'en haut, nous déduisons que $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est indépendant de $\sigma\left(\mathbb{B}_r\right)$ pour tous $0 \leq r \leq s$, ce qui signifie que $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma\left\{\mathbb{B}_r, 0 \leq r \leq s\right\}, \forall 0 \leq s \leq t$. ■

Proposition 1.4.3 *On dit que* $\left(\mathbb{B}_t\right)_{t \geq 0}$ *est un mouvement Brownien si seulement si* $\left(\mathbb{B}_t\right)_{t \geq 0}$ *est Gaussienne, continu, centré et de fonction de covariance*

$$cov(\mathbb{B}_t, \mathbb{B}_s) = min(s,t), \forall s,t \geq 0.$$

Preuve.

$$cov(\mathbb{B}_t, \mathbb{B}_s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s \mathbb{B}_s\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s\right] E\left[\mathbb{B}_t\right].$$

Maintenant, dans le contexte du processus $\mathbb{B}_t$, qui est un processus centré (ie : $\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t\right] = 0$).
Donc,

$$cov(\mathbb{B}_t, \mathbb{B}_s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t \mathbb{B}_s\right].$$

Si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t\mathbb{B}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t\mathbb{B}_s + \mathbb{B}_s^2 - \mathbb{B}_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s\right)\mathbb{B}_s + \mathbb{B}_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s^2\right] \\
&= 0 + s = \min\left(s, t\right).
\end{aligned}$$

Car $(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s)$ et $\mathbb{B}_s$ sont indépendant, de même pour $s \geq t$. ■

Proposition 1.4.4 $\forall t_0 \geq 0$, *le processus stochastiques*

$$\tilde{\mathbb{B}}_{(t)} = \mathbb{B}_{(t+t_0)} - \mathbb{B}_{(t_0)}\ ,\ t \geq 0,$$

est aussi un mouvement Brownien.

Preuve. Pour prouver que, pour tout $t_0 \geq 0$, le processus stochastique

$$\tilde{\mathbb{B}}_{(t)} = \mathbb{B}_{(t+t_0)} - \mathbb{B}_{(t_0)}, t \geq 0,$$

est également un mouvement Brownien, nous devons vérifier les propriétés caractéristiques d'un mouvement Brownien :

1- Déplacement nul à l'origine $\left(\mathbb{B}_{(0)} = 0\right)$: la propriété est claire, car

$$\tilde{\mathbb{B}}_{(0)} = \mathbb{B}_{(t_0)} - \mathbb{B}_{(t_0)} = 0.$$

2- Incréments indépendants et normalement distribués : nous devons montrer que pour tout $s < t$, la différence $\tilde{\mathbb{B}}_{(t)} - \tilde{\mathbb{B}}_{(s)}$ est normalement distribuée avec une moyenne de 0 et une variance de $(t+t_0)-(s+t_0)=t-s$.

3- Trajectoire continue : comme la différence de deux mouvements Browniens est un mouvement Brownien, le processus $\tilde{\mathbb{B}}_{(t)}$ est également une trajectoire continue.

4- Incrément indépendants : pour $\tilde{\mathbb{B}}_{(t)}$ on peut supposer que $t_0>0$, alors pour tout $0\leq t_1<t_2<...<t_n$.

Nous avons $0<t_0\leq t_1+t_0<...<t_n+t_0$, alors par condition 4 de $\mathbb{B}_{(t)}$, $\mathbb{B}_{(t_k+t_0)}-\mathbb{B}_{(t_{k-1}+t_0)}$, $k=1,2,...,n$, sont des variables aléatoires indépendantes. Donc les variables aléatoires $\tilde{\mathbb{B}}_{(t_1)}$, $\tilde{\mathbb{B}}_{(t_k)}-\tilde{\mathbb{B}}_{(t_{k-1})}$, $k=2,3...,n$, sont indépendantes.

En conclusion, nous avons démontré que le processus stochastique $\tilde{\mathbb{B}}_{(t)}$ est un mouvement Brownien pour tout $t_0\geq 0$. ■

Proposition 1.4.5 *On considère $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ comme un mouvement Brownien par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Selon le principe d'invariance d'échelle, pour $\beta>0$, le processus $\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{\beta^2 t}$, $t\geq 0$, est un mouvement Brownien standard.*

Preuve. Clairement, $\mathbb{B}_0=0$, car $\left(\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{\beta^2(0)}=\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(0)}=0\right)$.

Si $0\leq t_1\leq t_2\leq...\leq t_n$, alors $0\leq\beta^2 t_1\leq\beta^2 t_2\leq...\leq\beta^2 t_n$. Par la définition du mouvement Brownien,

$$\mathbb{B}_{(\beta^2 t_n)}-\mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-1})},\ \mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-1})}-\mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-2})},...,\ \mathbb{B}_{(\beta^2 t_2)}-\mathbb{B}_{(\beta^2 t_1)},\ \mathbb{B}_{(\beta^2 t_1)}$$

sont des variables aléatoires indépendantes. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_n)}-\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-1})},\ \frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-1})}-\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_{n-2})},...,\ \frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_2)}-\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_1)}\ ,\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t_1)},$$

sont aussi des variables aléatoires indépendantes. Ainsi $\left\{\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{\beta^2 t},\ t\geq 0,\right\}$ a des incréments indépendants.

On sait que $\mathbb{B}_{(\beta^2 t)} - \mathbb{B}_{(\beta^2 s)}$ est $\mathcal{N}\left(0, \beta^2 (t-s)\right)$. Il s'ensuit que, pour chaque $a < b$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{a \leq \frac{1}{\beta}\left(\mathbb{B}_{\beta^2 t} - \mathbb{B}_{\beta^2 s}\right) \leq b\right\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{\beta a \leq \mathbb{B}_{\beta^2 t} - \mathbb{B}_{\beta^2 s} \leq \beta b\right\}\right) \\
&= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi (t-s)}} \int_{\beta a}^{\beta b} \exp\left(\frac{-x^2}{2\beta^2 (t-s)}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi (t-s)}} \int_{a}^{b} \exp\left(\frac{-u^2}{2 (t-s)} du\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la substitution $u = \frac{x}{\beta}$. Donc $\frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t)} - \frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 s)}$ est $\mathcal{N}\left(0, \beta^2 (t-s)\right)$. La fonction $t \longmapsto \mathbb{B}_t$ étant presque sûrement continue, la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{\beta}\mathbb{B}_{(\beta^2 t)}$$

est la composition de fonctions (presque sûrement) continues et est donc presque sûrement continue. ∎

Remarque 1.4.1 *La propriété d'invariance d'échelle (avec $\beta = -1$) implique que le mouvement Brownien standard est symétrique par rapport à 0. En d'autres termes, si $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et $t \geq 0$, alors $\mathbb{B}_t$ a la même distribution que $-\mathbb{B}_t$.*

Proposition 1.4.6 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors*

$$\mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{B}_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \exp\left(\frac{-u^2}{2t}\right) du.$$

Exemple 1.4.1 *Dans cet exemple, calculons $\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}_t\right|\right]$ en appliquant la Proposition*

1.4.6 avec $f(u) = |u|$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_t|\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |u| \exp\left(\frac{-u^2}{2t}\right) du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \left[\int_0^{\infty} u \exp\left(\frac{-u^2}{2t}\right) du\right] \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-v)\, dv \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}},
\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $v = \frac{u^2}{2t}$.

Proposition 1.4.7 *Si $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -mouvement Brownien standard, alors :*

1- $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

2- $X_t = \mathbb{B}_t^2 - t$, $\forall t \geq 0$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Preuve. 1- Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbb{B}_s,\ 0 \leq s \leq t)$. Il est évident que $\mathbb{B}_t$ est $\sigma(\mathbb{B}_t)$ -mesurable $t \geq 0$, et donc $\mathbb{B}_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable $\forall t \geq 0$. Deuxièmement, de l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_t|^2\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t^2\right]} = \sqrt{t} < \infty, \forall t \geq 0,$$

montrant que $\mathbb{B}_t$ est intégrable.

Soit $s \leq t$ et écrire $\mathbb{B}_t = \mathbb{B}_s + (\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t \backslash \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s + (\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s) \backslash \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s \backslash \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s) \backslash \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{B}_s + \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s\right] \\
&= \mathbb{B}_s + 0,
\end{aligned}$$

$\forall s \leq t$ et ça montre que $\mathbb{B}$ est une martingale.

2- Depuis $X_t = \mathbb{B}_t^2 - t$ est une fonction de $\mathbb{B}_t$, il est donc mesurable en $\mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$ ce qui implique que X_t est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ -adapté.

Depuis $|X_t| = |\mathbb{B}_t^2 - t| \leq \mathbb{B}_t^2 + t$ on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}_t^2 - t\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}_t^2 + t\right|\right] \\ &= 2t < \infty, \forall t \geq 0.\end{aligned}$$

$(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, pour $s \leq t$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_t^2 - t\right)\backslash \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s + \mathbb{B}_s\right)^2 \backslash \mathcal{F}_s\right] - t \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s\right)^2 \backslash \mathcal{F}_s\right] + 2\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s\left(\mathbb{B}_t - \mathbb{B}\right)_s \backslash \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_s^2 \backslash \mathcal{F}_s\right] - t \\ &= t - s + 0 + \mathbb{B}_s^2 - t \\ &= \mathbb{B}_s^2 - s.\end{aligned}$$

La proposition est prouvée. ■

1.4.4 Variation quadratique du mouvement Brownien standard

Proposition 1.4.8 *Soit* $(\mathbb{B}_t, t \geq 0)$ *un mouvement Brownien standard, la variation quadratique sur l'intervalle* $[0, T]$ *existe dans* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *et vaut* T, *ce qui signifie que la variation infinitésimale converge dans la norme* $\mathbb{L}^2$. *De plus, si la subdivision* Π_n *satisfait* $\sum_{n=1}^{n} \pi_n < \infty$, *alors on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\langle \mathbb{B} \rangle_T = T.$$

Preuve. La variation infinitésimale d'ordre 2 du mouvement Brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left|\mathbb{B}_{t_i^n} - \mathbb{B}_{t_{i-1}^n}\right|^2.$$

On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2 \text{ et } Var\left[X^2\right] = 2\sigma^4.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}\left[V_T^2(\Pi_n)\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_i^n} - \mathbb{B}_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) = T.$$

Et en notant $\pi_n = \max\limits_{i \le n}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|$, on obtient :

$$Var\left[V_T^2(\Pi_n)\right] = \sum_{i=1}^{n} Var\left[\left(\mathbb{B}_{t_i^n} - \mathbb{B}_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right)^2 \le 2T\pi_n \underset{\pi_n \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\left\|V_T^2(\Pi_n) - T\right\|_2 = Var\left[V_T^2(\Pi_n)\right] \to 0 \text{ quand } \pi_n \to 0.$$

Pour obtenir la convergence presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout ϵ :

$$\mathbb{P}\left[\left|V_T^2(\Pi_n) - T\right| > \epsilon\right] \le \frac{Var\left[V_T^2(\Pi_n)\right]}{\epsilon} \le \frac{2T\pi_n}{\epsilon}.$$

Donc si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi_n < \infty$, on a pour tout ϵ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[\left|V_T^2(\Pi_n) - T\right| > \epsilon\right] < \infty,$$

ce qui (par Borel-Cantelli) entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2(\Pi_n)$ vers T.

■

Proposition 1.4.9 *Pour toute subdivision* Π_n *satisfaisant* $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n < \infty$, *la variation infinitésimale d'ordre* 1 *sur* $[0,T]$ *du mouvement Brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers* $+\infty$. *Donc, la variation totale du mouvement Brownien vaut* $+\infty$ *p.s.*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) = \infty \ p.s.$$

Preuve. Soit $\Pi_n$une suite de subdivision de $[0,T]$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n < \infty$. Alors, sur presque tout chemin ω, on a la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v|\leq\pi_n} |\mathbb{B}_u(\omega) - \mathbb{B}_v(\omega)|\, V_T^1(\Pi_n)(\omega).$$

Le terme de gauche tend vers T car on a la convergence p.s de la variation quadratique. Le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement Brownien a ses trajectoires uniformément continues sur $[0,T]$ en tant que fonctions continues sur un compact. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini. En conclusion, la variation quadratique du mouvement Brownien est non nulle, elle vaut T dans $\mathcal{L}^2$, mais que sa variation totale est infinie presque surement. ■

Chapitre 2

Intégrale stochastique

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{B}$ un mouvement Brownien sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbb{B}_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. L'intégrale stochastique en générale nous cherchons à déterminer $\int\limits_0^t X_s d\mathbb{B}_s$ pour des processus stochastiques $(X_s, s \geq 0)$.

2.1 Intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener est une intégrale d'une fonction déterministe $f(s)$ par rapport à un mouvement Brownien $\mathbb{B}$, telle que $f \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$.
Cette intégrale peut être définie comme une intégrale de Riemann-Stieltjes car les trajectoires Browniennes sont à p -variation bornée sur tout intervalle fini, à condition que $p > 2$. Considérons une fonction déterministe $f(s)$ sur l'intervalle $[0, T]$.

2.1.1 Construction de l'intégrale Wiener

Soit $f(s)$ est une fonction déterministe alors l'intégrale $\int\limits_0^T f(s)\, d\mathbb{B}_s$ est appelé simplement une intégrale de Wiener. Nous fixons l'horizon déterministe $(T > 0)$.

On considéré $\mathbb{L}^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)=\left\{f:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\int\limits_0^T|f(s)|^2\,ds<+\infty\right\}.$

Soit $B=\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ une base de fonction de $\mathbb{L}^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ peut être constituée de fonction en escalier, où $p_n\in\mathbb{N}$ les $X_i\in\mathbb{R}$ et $\left(t_i^{(n)}\right)$ une suite croissante de $[0,T]$.

$$f_n(t)=\sum_{i=0}^{p_n}X_i1_{]t_i^n,t_{i+1}^n[}(t).$$

a. Intégrale de Wiener d'une fonction en escalier

Définition 2.1.1 *Si $f(t)$ est la fonction définie par la décomposition précédente que l'on note*

$$f(t)=\sum_{i=0}^{p_n}X_i1_{]t_i,t_{i+1}[}(t).$$

Alors on définit l'intégrale de Wiener sous la forme :

$$I_T(f)=\sum_{i=0}^{p_n}X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right).$$

Théorème 2.1.1 *Soit f une fonction en escalier, alors la variable $I_T(f)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\mathbb{E}[I_T(f)]=0$, et de variance*

$$\begin{aligned}var[I_T(f)]&=var\left[\sum_{i=0}^{p_n}X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)\right]\\&=\sum_{i=0}^{p_n}X_i^2var\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)\\&=\sum_{i=0}^{p_n}X_i^2\left(t_{i+1}-t_i\right)=\int\limits_0^T f^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

b. Le cas général

Lemme 2.1.1 *(Lemme Gaussien) Soit* $\{X_n, n \geq 0\}$ *une suite de variables aléatoires Gaussiennes* $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ *convergeant vers une variable aléatoire* X *dans* $\mathbb{L}^2$, *telle que*

$$\mathbb{E}\left[|X - X_n|^2\right] \to 0, \ \textit{quand}\ n \to +\infty.$$

Alors, $\mu_n \to \mu$ *et* $\sigma_n \to \sigma$ *quand* $n \to +\infty$ *et* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Lemme 2.1.2 *Soit* $f \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$, *alors il existe une suite de fonction en escalier* $\{f_n\}$ *qui converge vers* f *dans* $\mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$ *c'-à-d qui vérifie,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \to 0.$$

Définition 2.1.2 *Les intégrales de Wiener* $I_T(f_n)$ *qui sont des Gaussiennes centrées qui par isométrie forment une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert* $\mathbb{L}^2(\Omega)$.
L'espace $\mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$ *étant complet, cette suite converge vers une variable aléatoire Gaussienne notée* $I_T(f)$.
Alors on définit l'intégrale de Wiener de f *comme étant cette limite :*

$$I_T(f_n) = \int_0^T f_n(t) \, d\mathbb{B}_t \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^2} \int_0^T f(t) \, d\mathbb{B}_t = I_T(f).$$

Proposition 2.1.1 *Soit* $f \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$, *l'intégrale de Wiener* $I_T(f)$ *est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle, et de variance* $\int_0^T f^2(t) \, dt$.

Remarque 2.1.1 $I(f)$ *est bien définie, car* $I(f)$ *est indépendante du choix de la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$.
En effet : soit $(g_m)_{m\geq 1}$ *une autre suite de fonctions en escalier, convergente vers* f.

Et montrons que

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{m\to\infty} I(g_m) = I(f).$$

2.1.2 Propriétés de l'intégrale de Wiener

Soient f et $g \in \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R})$, $I(f)$ et $I(g)$ les intégrales de Wiener des fonctions f et g respectivement.

Alors on a les propriétés suivantes :

– Linéarité : $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$I_T(\alpha f+\beta g) = \alpha I_T(f) + \beta I_T(g).$$

– Isométrie : $\forall t\in[0,T]$ on a,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_T(f)\,\mathbb{B}_t] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(s)\,d\mathbb{B}_s\right)\left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s)\,d\mathbb{B}_s\right)\right]\\ &= \int_0^T f(s)\,1_{[0,t]}(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds.\end{aligned}$$

– Propriété du produit,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_T(f)\,I_T(g)] &= \frac{1}{2}\left[var(I_T(f)+I_T(g)) - var(I_T(f)-I_T(g))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^T (f+g)^2(s)\,ds - \int_0^T f^2(s)\,ds - \int_0^T g^2(s)\,ds\right]\\ &= \int_0^T f(s)\,g(s)\,ds.\end{aligned}$$

2.1.3 Exemple de l'intégrale de Wiener

Exemple 2.1.1 *Dans le cas où $f(t) = c$, constant les sommes partielles peuvent être calculées explicitement*

$$\begin{aligned} I_T(f) &= \sum_{i=0}^{p_n} X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p_n} c \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \\ &= c\left(\mathbb{B}_T - \mathbb{B}_0\right), \end{aligned}$$

et comme la réponse ne dépend pas de p_n, nous avons

$$\int_0^T c d\mathbb{B}_t = c\left(\mathbb{B}_T - \mathbb{B}_0\right).$$

En particulier, en prenant $c = 1$, puisque le mouvement Brownien commence à 0, nous avons la formule suivante :

$$\int_0^T d\mathbb{B}_t = \mathbb{B}_T.$$

Intégration par parties

Théorème 2.1.2 *Si f est une fonction de classe C^1,*

$$\int_0^t f(s)\, d\mathbb{B}_s = f(t)\,\mathbb{B}_t - \int_0^t f'(s)\,\mathbb{B}_s ds.$$

On peut aussi écrire cette formule

$$d\left(\mathbb{B}_t f(t)\right) = f(t)\, d\mathbb{B}_t + \mathbb{B}_t f'(t)\, dt.$$

Exemple 2.1.2 *Soit $X_t = \int_0^t s d\mathbb{B}_s$.*

On a $f(t) = t$, *et* f *de classe* C^1 *donc* $f'(t) = 1$, *alors d'après intégration par parties on a*

$$\begin{aligned}\int_0^t s d\mathbb{B}_s &= f(t)\,\mathbb{B}_t - \int_0^t f'(s)\,\mathbb{B}_s ds \\ &= t\mathbb{B}_t - \int_0^t \mathbb{B}_s ds.\end{aligned}$$

2.2 Intégrale d'Itô

Pour généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t f_s d\mathbb{B}_s$ pour des processus stochastiques f_s, on définit l'intégrale d'Itô.

L'intégrale d'Itô est définie d'une manière similaire à l'intégrale de Riemann. L'intégrale d'Itô est prise par rapport à des incréments infinitésimaux d'un mouvement Brownien $d\mathbb{B}_t$, qui sont des variables aléatoires, tandis que l'intégrale de Riemann considère l'intégration par rapport aux changements infinitésimaux prévisibles dt. Il convient de noter que l'intégrale d'Itô est une variable aléatoire, tandis que l'intégrale de Riemann n'est qu'un nombre réel.

2.2.1 Construction de l'intégrale d'Itô

On définit l'intégrale stochastique sous la forme :

$$\int_0^t f_s d\mathbb{B}_s,$$

avec f_s est une processus stochastique.

On définit l'ensemble $H(T) = \left\{ \begin{array}{c} (f_t)_{t\geq 0} \text{ processus } \mathcal{F}_t^{\mathbb{B}}\text{-adapté, càglàd et vérifiant :} \\ \|f\| = \mathbb{E}\left[\int_0^t |f_s|^2 ds\right] < \infty, \text{ pour tout } t > 0. \end{array} \right\}.$

a. Intégrale d'Itô d'un processus stochastique en escalier

Définition 2.2.1 *On appelé* $(f_t)_{t\geq 0}$ *processus étagé ou processus simple prévisible (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*) les processus du type :*

$$f_t = \sum_{i=0}^{p_n} X_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(t),$$

$p_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{p_n} = T$ *et* X_i *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_t^{\mathbb{B}}$ *-mesurable et bornée* $\forall i \in \{0, \ldots p_n\}$. *Il est clair que* $f \in H(T)$, *alors on définit*

$$I_t(f) = \int_0^t f_s d\mathbb{B}_s = \sum_{i=0}^{p_n} X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right).$$

Théorème 2.2.1 *Soit* f *un processus étagé de l'ensemble* $H(T)$. *Alors la moyenne nulle* $\mathbb{E}[I_T(f)] = 0$, *et*

$$\mathbb{E}\left[I_T(f)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (f_s)^2 ds\right] = var[I_T(f)],$$

est appelée isométrie d'Itô.

Preuve.

- Moyenne nulle.

$$I_T(f) = \sum_{i=0}^{p_n} X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_T\left(f\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)\right], \text{ car } \mathbb{E} \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[X_i\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_{t_i}^{\mathbb{B}}\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[X_i\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right]\right]=0.\end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que X_i est $\mathcal{F}_{t_i}^{\mathbb{B}}$ mesurable et $\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)$ indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$.

- Pour isométrie, on calcule,

$$I_T\left(f\right)^2=\sum_{i=0}^{p_n}X_i^2\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)^2+2\sum_{0\leq i\leq j\leq p_n}X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)X_j\left(\mathbb{B}_{t_{j+1}}-\mathbb{B}_{t_j}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_T\left(f\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n}X_i^2\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)^2+2\sum_{0\leq i\leq j\leq p_n}X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)X_j\left(\mathbb{B}_{t_{j+1}}-\mathbb{B}_{t_j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i^2\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)^2\backslash\mathcal{F}_{t_i}^{\mathbb{B}}\right]\right] \\ &+ 2\sum_{0\leq i\leq j\leq p_n}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)X_j\left(\mathbb{B}_{t_{j+1}}-\mathbb{B}_{t_j}\right)\backslash\mathcal{F}_{t_i}^{\mathbb{B}}\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[X_i^2\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right]\right]+2\sum_{0\leq i\leq j\leq p_n}\mathbb{E}\left[X_iX_j\left(\mathbb{B}_{t_{j+1}}-\mathbb{B}_{t_j}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n}\mathbb{E}\left[X_i^2\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]+0 \text{ car } \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}-\mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right]=t_{i+1}-t_i\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[I_T\left(f\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n}X_i^2\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}X_i^2ds\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T f_s^2ds\right]=var\left[I_T\left(f\right)\right].$$

■

Remarque 2.2.1 *Pour être tout à fait exact, isométrie d'Itô dit encore que si f et g deux processus étagé de l'ensemble $H\left(T\right)$ alors* $\mathbb{E}\left[I_T\left(f\right)I_T\left(g\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T f_sg_sds\right]$.

b. Le cas général

Lemme 2.2.1 *Soit f un élément de l'ensemble $H(T)$, alors il existe une suite de processus étagé $\{f^n, n \geq 0\}$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (f_s^n - f_s)^2\, ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Définition 2.2.2 *Soit $(f_n)_{n\geq 1} \in H(T)$ une suite de processus stochastique étagé qui converge vers f_s dans $H(T)$, alors l'intégrale d'Itô du processus f_s est définie par :*

$$I_t(f) = \int_0^t f_s d\mathbb{B}_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^n d\mathbb{B}_s.$$

Maintenant, nous définissons l'intégrale stochastique par $I_t(f) = \int_0^t f_s d\mathbb{B}_s,\ \forall t \geq 0.$

Proposition 2.2.1 *Soit $f \in H(T)$, l'intégrale d'Itô $I_t(f)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle*

$$\mathbb{E}[I_t(f)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_s d\mathbb{B}_s\right] = 0,$$

et de variance

$$\begin{aligned} var[I_t(f)] &= \lim_{n\to\infty} var[I_t(f^n)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[I_t(f^n)]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} X_i^2 \mathbb{E}(t_{i+1} - t_i)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t f_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 *L'intégrale d'Itô est indépendante du choix de la suite $\{f_n, n \geq 1\}$.*

2.2.2 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Soient f et $g \in H(T)$, les propriétés suivantes :

– Linéarité : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$I_t(\alpha f + \beta g) = \alpha I_t(f) + \beta I_t(g).$$

– Propriété de partition :

$$\int_0^T f_t d\mathbb{B}_t = \int_0^c f_t d\mathbb{B}_t + \int_c^T f_t d\mathbb{B}_t, \ \forall 0 < c < T.$$

– Propriété du produit :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_t d\mathbb{B}_t\right)\left(\int_0^T g_t d\mathbb{B}_t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_t g_t dt\right].$$

Proposition 2.2.2 (*Propriété martingale*) *Soit $f \in H(T)$, alors le processus stochastique*

$$X_t = \int_0^t f_s d\mathbb{B}_s, 0 \leq t \leq T,$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Preuve. *D'abord, considérons le cas où f est un processus stochastique en escalier. Nous devons montrer que pour toute : $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$\mathbb{E}[X_t \backslash \mathcal{F}_s] = X_s, \ \textit{Presque sûrement.}$$

Mais

$$X_t = X_s + \int_s^t f_u d\mathbb{B}_u.$$

Donc montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f_u d\mathbb{B}_u \backslash \mathcal{F}_s\right] = 0, \ p.s.$$

Soit f *donné par*

$$f_u = \sum_{i=1}^{p_n} X_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(u),$$

où $s = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *et* X_i *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_t^{\mathbb{B}}$ *-mesurable. Alors*

$$\int_s^t f_u d\mathbb{B}_u = \sum_{i=1}^{p_n} X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right).$$

$\forall i \in \{0, \ldots p\}$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \backslash \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \backslash \mathcal{F}_i\right] \backslash \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \backslash \mathcal{F}_i\right] \backslash \mathcal{F}_s\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) \backslash \mathcal{F}_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right] = 0$. *Donc*

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f_u d\mathbb{B}_u \backslash \mathcal{F}_s\right] = 0, \ \ p.s.$$

Maintenant, nous considérons le cas général. Soit $f \in H(T)$, *prendre une suite* $f_n \in H(T)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (f_u - f_u^n)^2 \, du\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Pour chaque n, *définir un processus stochastique*

$$X_t^{(n)} = \int_0^t f_u^{(n)} d\mathbb{B}_u.$$

Dans le premier car $X_t^{(n)}$ est une martingale pour $s < t$, écrivez

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= X_t + X_t^{(n)} - X_t^{(n)} + X_s^{(n)} - X_s^{(n)} - X_s \\ &= \left(X_t - X_t^{(n)}\right) + \left(X_t^{(n)} - X_s^{(n)}\right) + \left(X_s^{(n)} - X_s\right), \end{aligned}$$

et ensuite prendre l'espérance conditionnelle pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[X_t - X_s \backslash \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_t - X_t^{(n)} \backslash \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_s^{(n)} - X_s \backslash \mathcal{F}_s\right]. \tag{1}$$

Par inégalité de Jensen, nous notons

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X_t - X_t^{(n)} \backslash \mathcal{F}_s\right]\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left|X_t - X_t^{(n)}\right|^2 \backslash \mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[\left|X_t - X_t^{(n)}\right|^2\right].$$

Ensuite, nous appliquons propriété isométrie de la théorème 2.2.1 pour trouver que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X_t - X_t^{(n)} \backslash \mathcal{F}_s\right]\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(f_u - f_u^n\right)^2 du\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_u - f_u^n\right)^2 du\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant une sous-suite si nécessaire, nous constatons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_t - X_t^{(n)} \backslash \mathcal{F}_s\right] &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ p.s \\ \mathbb{E}\left[X_s - X_s^{(n)} \backslash \mathcal{F}_s\right] &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ p.s. \end{aligned}$$

Donc par (1), *nous avons* $\mathbb{E}\left[X_t - X_s \backslash \mathcal{F}_s\right] = 0$ *p.s, et* $\mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] = X_s$.

Alors X est une martingale. ■

2.2.3 Exemple de l'intégrale d'Itô

Exemple 2.2.1 *Calculons* $\int_0^T \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s$.

On sait qu'on peut approcher $\mathbb{B}$ *par* $f^n = \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{B}_{t_i} \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$, $t_i = iT/n$.

On obtient donc dans $\mathbb{L}^2$.

$$\int_0^T \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_s^n d\mathbb{B}_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{B}_{t_i} \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]} d\mathbb{B}_s$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{B}_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mathbb{B}_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{B}_{t_i} \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right).$$

Depuis,

$$xy = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 - x^2 - y^2\right],$$

location $x = \mathbb{B}_{t_i}$ *et* $y = \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)$, *alors,*

$$\mathbb{B}_{t_i}\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{B}_{t_i} + \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)\right)^2 - \mathbb{B}_{t_i}^2 - \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)^2.$$

Ensuite, la somme devient,

$$\int_0^T \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n} \left[\frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p_n} \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}}^2 - \mathbb{B}_{t_i}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p_n} \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right],$$

ainsi,

$$\int_0^T \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s = \frac{1}{2}\left[\mathbb{B}_T^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n} \left(\mathbb{B}_{t_{i+1}} - \mathbb{B}_{t_i}\right)^2\right].$$

Alors,

$$\int_0^T \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s = \frac{1}{2}\left[\mathbb{B}_T^2 - T\right].$$

2.3 Processus d'Itô

Le processus d'Itô est un type spécifique de processus stochastique développé par le mathématicien Japonais Kiyoshi Itô en collaboration avec le mathématicien Français Paul Lévy.

Un processus d'Itô peut être exprimé sous la forme d'une intégrale stochastique par rapport à un autre processus, généralement un mouvement Brownien.

Définition 2.3.1 *On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles telle que* $\forall\ 0 \leq s \leq t$, *écrits sous la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t k_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s,$$

avec :

- x *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,*

- k_s*et* σ_s *sont deux processus* $\left(\mathcal{F}_t^{\mathbb{B}}\right)$*-adapté,*

- $\int_0^t |k_s|\ ds < +\infty$ *p.s* $\forall t \geq 0$ *et* $\int_0^t |\sigma_s|^2 ds < +\infty$ *p.s* $\forall t \geq 0$.

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = k_t dt + \sigma_t d\mathbb{B}_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient k est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'analyse du processus Itô est unique, ce qui veut dire que si :

$$X_t = x + \int_0^t k_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s = \tilde{x} + \int_0^t \tilde{k}_s ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s d\mathbb{B}_s.$$

Alors $x = \tilde{x}$, $k_s = \tilde{k}_s$ et $\sigma_s = \tilde{\sigma}_s$.

En particulier, si X_t est une martingale locale alors $k_s = 0$ et réciproquement, on peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que : $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ p.p.s.

La partie $x + \int_0^t k_s ds$ est la partie à variation finie de X, et la partie $\int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s$ s'appelle partie martingale de X.

2.4 Formule d'Itô

La formule d'Itô est une relation fondamentale en calcul stochastique qui permet de déterminer la différentielle d'une fonction d'une variable aléatoire.

Formule d'Itô dans le cas Brownien

Théorème 2.4.1 *Soit $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et F de classe C^2. Alors :*

$$F(\mathbb{B}_t) = F(\mathbb{B}_0) + \int_0^t F'(\mathbb{B}_s)\, d\mathbb{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(\mathbb{B}_s)\, ds.$$

Cette formule s'écrit sous forme différentielle

$$dF(\mathbb{B}_t) = F'(\mathbb{B}_t)\, d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2} F''(\mathbb{B}_t)\, dt.$$

Théorème 2.4.2 *Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport* *à t, de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$F(t,\mathbb{B}_t) = F(0,0) + \int_0^t F'_t(s,\mathbb{B}_s)\,ds + \int_0^t F'_x(s,\mathbb{B}_s)\,d\mathbb{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''_{xx}(s,\mathbb{B}_s)\,ds.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle

$$\begin{aligned} dF(t,\mathbb{B}_t) &= F'_t(t,\mathbb{B}_t)\,dt + F'_x(t,\mathbb{B}_t)\,d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,\mathbb{B}_t)\,dt \\ &= \left[F'_t(t,\mathbb{B}_t) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,\mathbb{B}_t)\right]dt + F'_x(t,\mathbb{B}_t)\,d\mathbb{B}_t. \end{aligned}$$

Formule d'Itô pour le processus d'Itô

Théorème 2.4.3 *On se donne un processus d'Itô $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de la forme,*

$$X_t = x + \int_0^t k_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s.$$

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, alors,

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,\sigma_s^2 ds.$$

Remarque 2.4.1 *1- Si F est à dérivées bornées, le processus*

$$F(X_t) - \int_0^t F'(X_s)\,k_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,\sigma_s^2 ds,$$

est martingale.

2- Les règles de calcul de dX_t^2 sont résumées dans le tableau suivant :

	dt	$d\mathbb{B}_t$
dt	0	0
$d\mathbb{B}_t$	0	dt

3- La formule d'Itô s'écrit aussi sous forme différentielle

$$dF(X_t) = F'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} F''(X_t)\, \sigma_t^2 dt.$$

Fonction dépendant du temps

Théorème 2.4.4 *Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t F_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t F_x'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}''(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= F_t'(t, X_t)\, dt + F_x'(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, X_t)\, \sigma_t^2 dt \\ &= \left[F_t'(t, X_t) + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, X_t)\, \sigma_t^2 \right] dt + F_x'(t, X_t)\, dX_t. \end{aligned}$$

2.4.1 Exemple de la formule d'Itô

Exemple 2.4.1 *Calculons l'intégrale :*

$$I_t = \int_0^t \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_t, \ t \geq 0.$$

$\mathbb{B}_t$ *est un mouvement Brownien.*

On pose $X_t = \mathbb{B}_t$ *et* $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. *Alors*

$$Y_t = f(\mathbb{B}_t) = \frac{1}{2}\mathbb{B}_t^2.$$

En utilisant la formule d'Itô : $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \ f'(x) = x, \ f''(x) = 1,$

$$\begin{aligned}
Y_t &= f(x) + \int_0^t f'(X_s)\, d\mathbb{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\langle d\mathbb{B}_s\rangle^2 \\
dY_t &= f'(X_t)\, d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\langle d\mathbb{B}_t\rangle^2 \\
dY_t &= df(\mathbb{B}_t) = \mathbb{B}_t d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2}dt \\
d\left(\frac{1}{2}\mathbb{B}_t^2\right) &= \mathbb{B}_t d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2}dt \\
\frac{1}{2}\mathbb{B}_t^2 &= \int_0^t \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t dt \\
\int_0^t \mathbb{B}_s d\mathbb{B}_s &= \frac{1}{2}\mathbb{B}_t^2 - \frac{1}{2}t.
\end{aligned}$$

2.4.2 Formule d'intégration par partie

Proposition 2.4.1 *Le crochet de deux processus d'Itô* X *et* Y, *noté* $\langle X, Y\rangle_t$ *est défini comme le produit scalaire de deux intégrales stochastiques. Dans ce cas, nous avons :*

$$\langle X, Y\rangle_t = \left\langle \int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s, \int_0^t \tilde{\sigma}_s d\mathbb{B}_s \right\rangle = \int_0^t \sigma_s \tilde{\sigma}_s ds,$$

avec

$$X_t = x + \int_0^t k_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbb{B}_s$$

$$Y_t = y + \int_0^t \tilde{k}_s ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s d\mathbb{B}_s.$$

Proposition 2.4.2 *Soient X_t, Y_t deux processus d'Itô. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t .$$

Qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y \right\rangle_t .$$

Preuve. En appliquant simplement la formule d'Itô à la fonction $G(X) = X^2$, sur les processus X, Y et $X + Y$ on obtient :

1- Processus X_t,

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\left\langle X \right\rangle_s .$$

2- Processus Y_t,

$$Y_t^2 = Y_0^2 + \int_0^t 2Y_s dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\left\langle Y \right\rangle_s .$$

3- Processus $X_t + Y_t$,

$$\left(X_t + Y_t\right)^2 = \left(X_0 + Y_0\right)^2 + \int_0^t 2\left(X_s + Y_s\right) d\left(X + Y\right)_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\left\langle X + Y \right\rangle_s .$$

Le résultat est alors obtenu du fait que :

$$X_tY_t = \frac{1}{2}\left[(X_t + Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2\right], \text{ et } \langle X+Y\rangle_s = 2\langle X,Y\rangle_s + \langle X\rangle_s + \langle Y\rangle_s .$$

En notation différentielle, la preuve précédente permet de constater que la formule d'intégration par partie peut s'écrire

$$d\,(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\,\langle X,Y\rangle_t .$$

■

2.4.3 Application à la formule de Black-Scholes

On considéré un marché financier comportant :

- Un actif sans risque dont le prix S_0 vérifie

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \text{ et } S_0^0 = 1 \Rightarrow S_t^0 = e^{rt}, \ t \in [0,T], \text{ où } r \text{ est une constante.}$$

- Un actif risque dont le prix S_t vérifie

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s\left(\alpha ds + \beta d\mathbb{B}_s\right), \qquad (2)$$

avec $\mathbb{B}$ est un mouvement Brownien, et α, β des constantes. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué en temps continu tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements de l'actif sont normaux. Les coefficients α et β sont respectivement appelés tendance et volatilité de l'actif S.

Pour tout $t \in [0,T]$, la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(S_r, r \leq t\right),$$

la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors appelée probabilité historique.

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black - Scholes.

Théorème 2.4.5 *L'EDS* (2), *admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 \exp\left[\beta \mathbb{B}_t + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right) t\right], \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \alpha S_s$ et $\sigma_s = \beta S_s$.

Preuve. Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Itô à $f\left(t, \mathbb{B}_t\right)$ avec :

$$f(t, x) = S_0 \exp\left[\beta x + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right) t\right].$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
df\left(t, \mathbb{B}_t\right) &= f_t\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt + f_x\left(t, \mathbb{B}_t\right) d\mathbb{B}_t + \frac{1}{2} f_{xx}\left(t, \mathbb{B}_t\right) d\left\langle \mathbb{B}\right\rangle_t \\
&= \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right) f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt + \beta f\left(t, \mathbb{B}_t\right) d\mathbb{B}_t + \frac{\beta^2}{2} f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt \\
&= \alpha f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt - \frac{\beta^2}{2} f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt + \beta f\left(t, \mathbb{B}_t\right) d\mathbb{B}_t + \frac{\beta^2}{2} f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt,
\end{aligned}$$

ce qui se réécrit donc :

$$df\left(t, \mathbb{B}_t\right) = \alpha f\left(t, \mathbb{B}_t\right) dt + \beta f\left(t, \mathbb{B}_t\right) d\mathbb{B}_t.$$

$$dS_t = \alpha S_t dt + \beta S_t d\mathbb{B}_t.$$

Donc S_t, processus $\mathcal{F}$-adapté est bien solution de l'EDS (2). ■

Conclusion

Le but de ce mémoire était d'étudier l'intégrale stochastique, considérée comme un élément essentiel dans l'étude des processus stochastiques tels que le mouvement Brownien et d'autres phénomènes stochastiques. Pour expliquer ce mémoire, nous avons présenté deux chapitres, le premier traitant des fondements généraux des processus stochastiques, suivi d'une discussion sur l'intégrale stochastique sous ses diverses formes.

Bibliographie

[1] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[2] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[3] Jean-François, L. E. (2011). Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique.

[4] Lévêque, O. (2005). Cours de probabilités et calcul stochastique EPFL.

[5] May Ibrahim Saleh Alomar , (April 2021).Doctoral thesis on Forward-backward Doubly Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces ,University College of Science Department of Mathematics, Kingdom of Saudi Arabia

[6] Monique, J. (Septembre 2002). Cours de Calcul stochastique DESS IM EVRY Option Finance Professeur chez Université d'Évry Val d'Essonne.

[7] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliqué la Finance. polycopié disponible sur http ://www. ceremade. dauphine. fr/elie/elie.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\langle X \rangle_s$	:	Variation quadratique (crochet stochastique) de X.
$\mathbb{L}^2$	:	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$\mathbb{E}\left[X \backslash B\right]$	:	L'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant B.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	:	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F})$	:	Espace mesurable.
$\mathbb{P}$	:	Une probabilité sur espace mesurable.
Ω	:	Ensemble non vide.
$\mathcal{F}$	:	Une tribu (σ-algebra en Anglais).
$Cov(X, Y)$	:	Covariance mathématique du couple (X, Y).
$Var\,(X)$	:	Variance mathématique.
$(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$	:	Un mouvement Brownien.

RÉSUMÉ

Le scientifique Japonais Kiyoshi Itô a prêté attention à l'inapplicabilité de l'intégration de Riemann aux fonctions liées au mouvement Brownien, il a donc résolu ce problème en introduisant la théorie de l'intégration stochastique. Cette théorie a été étudiée dans ce travail, et parmi les plus importantes de ces intégrales aléatoires se trouve l'intégrale d'Itô, qui revêt une grande importance dans les domaines de la géométrie différentielle et des mathématiques financières.

Mots clés: intégrale d'Itô, mouvement Brownien, processus stochastique.

ملخص

توجه العالم الياباني كيوشي إيتو بانتباه إلى عدم إمكانية تطبيق التكامل الريماني على الدوال المتعلقة بالحركة البراونية، ولذلك قام بحل هذه المشكلة من خلال تقديم نظرية التكامل العشوائي. وقد تمت دراسة هذه النظرية في المذكرة، ومن بين أهم هذه التكاملات العشوائية يأتي تكامل إيتو الذي يحمل أهمية كبيرة في مجالات الهندسة التفاضلية والرياضيات المالية .

كلمات مفتاحية: تكامل إيتو, الحركة البراونية, العمليات العشوائية.

ABSTRACT

The Japanese scientist Kiyoshi Itô paid attention to the inapplicability of Riemann integration to functions related to Brownian motion, Therefore he solved this problem by introducing the theory of stochastic integration. This theory has been discussed in this work, and among the most important of these random integrals is the Itô integral, which holds great importance in the fields of differential geometry and financial mathematics.

Key works: Brownian motion, Itô's integral, stochastic process.