République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

NACI Samia

Titre :

Équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	YAKHLEF Samia	UMKB	Président
Dr.	GATT Rafika	UMKB	Encadreur
Dr.	BERROUIS Nassima	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Louange à **Allah**, par Sa grâce s'accomplissent les bonnes actions. Louange à **Allah**, toujours et à jamais, louange abondante pour cette grâce dont je commence à récolter les fruits après plusieurs années d'efforts et de travail, malgré toutes les difficultés et les obstacles rencontrés en chemin. Merci à toutes les personnes qui ont partagé ma joie, merci à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien.

Je dédie ce travail à l'âme de mon cher père (**Naci Massaoud**) qui a toujours été intéressé par notre éducation et l'acquisition du plus haut niveau de connaissance.

À celle dont les prières ont été la clé de mon succès, à ma chère mère (**Haffar Ramlia**).

À mes précieux enfants, "**Abd Elouahab** et **Maram Hibat Errahmene**", mes trésors les plus chers, que Dieu les protège et leur accorde une longue vie, je les vois, Inchallah, atteindre les plus hauts sommets.

À mes proches, mes soutiens dans les moments de joie et de peine, depuis mon enfance, mes chères sœurs, chacune avec son nom : **Leila**, **Samira**, **Samra**, **Mounia**, **Hanane**, et son fils **Iyad**, **Ayat Errahmene**, **Abir**, et ses filles **Alaa Errahmene** et **Ritaj**.

À mes chers frères, que Dieu les protège : **Nour al-Dinne**, **Sassi**, **Saddam Hussein** et **Mohammed**.

À ceux qui sont proches de mon cœur, mes soutiens dans les moments de joie et de peine, merci à vous, restez à mes côtés. Je tiens à mentionner spécialement : **Fayza Zaamoune**, **Khouloud Makhlouf**, **Anfale Zerroug** et ses chers parents, **Badra, Hakima, MS Amina Ourchani**. Et à toutes mes amies.

À l'enseignante de mes enfants, **Sultana**, et au président de l'association, Monsieur **Mebarki Anas**.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie **Allah** Tout-Puissant de m'avoir permis d'accomplir cet humble travail.

Ensuite, je voudrais exprimer ma profonde appréciation et ma gratitude à mon superviseur : le Dr.**GATT Rafika**, qui m'a guidé avec soin et patiemment pendant que j'effectuais ce travail, pour ce que j'ai appris au contact d'elle, et je lui souhaite le meilleur dans sa carrière.

Je remercie vivement les membres du jury : Dr.**YAKHLEF Samia** et Dr.**BERROUIS Nassima**, pour avoir accepté d'évaluer et de juger mon mémoire et de l'enrichir par leurs

propositions. Votre participation à mon jury de soutenance a été un grand honneur pour moi

J'exprime mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à toute la famille enseignante de la Faculté de Mathématiques de Biskra chacun en son nom, sans exception.

Je remercie profondément **Khouloud Makhlouf, Fayza Zaamoune, Anfale Zerroug**

Je remercie ma mère, mes chères sœurs, mes frères et mes amies, et mes précieux enfants, "**Abd Elouahab** et **Maram Hibat Errahmene**", un grand merci du fond du coeur, grâce à leur soutien moral.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Généralité sur le Processus stochastique **4**

1.1 Processus stochastique 4

1.2 Martingale 7

1.3 Mouvement Brownien 8

1.4 Intégrale d'Itô 9

1.5 Formule d'Itô 10

1.6 Résultats utiles 11

2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) **15**

2.1 Présentation du problème 15

2.2 Notations et définitions 17

2.3 Le cas Lipschitz 22

2.3.1 Le résultat de Pardoux–Peng 22

2.4 Théorème de comparaison 32

2.4.1 EDSR linéaires : 32
2.4.2 Théorème de comparaison : 32

3 EDSR avec une croissance quadratique : 34

3.1 Notations : 34
3.2 L'Existence : 35
3.3 Unicité et stabilité : 54

Conclusion 59

Bibliographie 60

Annexe B : Abréviations et Notations 62

Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades ($EDSRs$ en abrégé), qui sont d'autres types des équations différentielles stochastiques ($EDSs$), leurs valeur est donnée en temps finale T. Les $EDSRs$ sont été introduites pour la première fois en 1973 par J. M. Bismut [1] dans le cas linéaire lorsqu'il étudiant l'équation adjointe associée au principe de maximum stochastique en contrle optimal. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) prolonge sa théorie et montre l'éxistence d'un solution unique bornée de l'$EDSR$ de Riccati. La théorie des $EDSRs$ a trouvé beaucoup d'applications telles que la théorie du contrôle stochastique, économie, et à des problèmes de mathématiques financières.

les équations différentielles stochastiques rétrogrades sont des équations de la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

avec $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ est un mouvement brownien standard $d-$dimensionnel dans $(\mathbb{R}^d)$, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, avec $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien standard. La fonction aléatoire $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \rightarrow \mathbb{R}^k$, une fonction mesurable (f appelée générateur), T un temps déterministe fini fixé (appelé aussi l'horizon), La variable aléatoire ξ est $\mathcal{F}_T-$mesurable et carré intégrable ; (f, T, ξ) sont des paramètres de (1). Une solution est un couple $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ de processus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, qui ont certaines propriétés d'intégrabilité, en fonction du cadre imposé par le type d'hypothèses sur f. Afin de simplifier les notations, nous écrivons parfois (Y, Z) pour le processus $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$. Les $ESDRs$ non linéaires ont été introduites pour la première fois par Pardoux et Peng [10]. Lorsque f est lipschitzienne par rapport aux variables Y et Z et ξ est de carré intégrable, une solution est un couple de processus adaptés carré intégrables. Dans ce cadre, Pardoux et Peng ont donné les premiers résultats d'existence et d'unicité pour les $EDSRs$ d-dimensionnelles. Depuis lors, les $EDSRs$ ont été étudiées avec un grand intérêt. En particulier, de nombreux efforts ont été faits pour assouplir les hypothèses sur le conducteur ; par exemple, Lepeltier et San Martin [8] ont prouvé l'existence d'une solution pour les $EDSRs$ unidimensionnelles lorsque le coefficient est seulement continu avec une croissance linéaire.

L'objectif de cette mémoire est de fournir quelques d'étails sur les méthodes usuelles utilisées dans cette mémoire :

- dans les différentes preuves d'existence dont nous nous inspirerons, la procédure consiste essentiellement à justifier successivement les étapes suivantes : l'existence d'estimations a priori pour toute solution (Y, Z). Tout processus Y solution d'une telle $EDSR$ est ainsi comparé à la solution d'une équation différentielle ordinaire.
- La construction d'une suite de solutions (Y^n, Z^n) à des $EDSRs$ classiques (avec des générateurs f^n suffisamment réguliers, $i.e$ lipschitziens par rapport à y et z) : cette étape consiste en l'approximation du générateur par une suite monotone (f^n) de générateurs satisfaisant les hypothéses classiques.
- la justification d'un résultat de stabilité par monotonie : la propriété de monotonie est obtenue en exploitant les résultats de comparaison établis dans le cadre standard et ce résultat de stabilité repose essentiellement sur la convergence (forte) dans $L^2(W)$ de la suite de processus (Z^n) construites à l'étape précédente.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, propositions, théorémes faits sans démonstrations et des résultats de bases du calcul stochastique : Processus stochastique, Espérance conditionnelle, Martingale, Mouvement Brownien... etc.

Le deuxième chapitre : Ce chapitre est de présenter briévement le résultat d'existence et dunicité de la solution d'une $EDSR$ dont les coeffcients sont Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 [10], avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

Le troisième chapitre : Ce chapitre est d'étudier les $EDSRs$ à croissance quadratique qui reposent principalement sur les résultats des $EDSRs$ unidimensionnels car ce cadre est nécessaire pour déterminer le résultat de la comparaison et les résultats d'existence et d'unicité.

Chapitre 1

Généralité sur le Processus stochastique

Dans ce chapitre ,on sintéresse à la notation d'une calcul stochastique utiles pour ce travail, dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilié complet et (E, ε) un espace mesurable. Pour plus de détails voir cour de Jeanblanc [5],.et le livre Philippe Briand [3],

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Tribu où-σ-algébre) *Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une famille de parties de Ω vérifiant :*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ *(Stabilité par passage au complémentaire).*

3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{F}$ *(Stabilité par union dénombrable).*

Définition 1.1.2 (Variable aléatoire (v.a)) *On appelle variable aléatoire (réelle)*

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *tout application mesurable, c'est -à-dire :*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in, B(\mathbb{R})$$

où :

$$\forall B \in B(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

i) $((\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *est un espace mesurable.*

ii) $B(\mathbb{R})$ *est la tribu borélienne.*

Définition 1.1.3 (Tribu engendrèe) *La tribu engendrée par une v.a* X *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est l'ensemble*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), \forall B \in B(\mathbb{R})\}.$$

Définition 1.1.4 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille* $\{X_t, t \in I\}$ *des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité tel que l'indice* t *est souvent interprété comme le temps.*

1) *Si* $I \subseteq \mathbb{N}$ *on dit que le processus est à temps discret.*

2) *Si* $I \subseteq \mathbb{R}$ *on dit que le processus est à temps continu.*

Définition 1.1.5 (Filtration) *On appelle filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *une famille croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$*, i.e :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \forall s \leq t.$$

Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *est appelé espace de probabilité filtré.*

Remarque 1.1.1 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

i) *$\mathcal{F}$ est complète : si $B \subset A \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $B \in \mathcal{F}$.*

ii) *$\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables de $\mathcal{F}$.*

iii) *La filtration est continue à droite i.e :*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.1.6 (Processus à trajectoire continue) *On dit que le processus X est à trajectoires continues (ou est continu) si les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

i) *Un processus X est dit càdlàg (continu à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout ω.*

ii) *Un processus X est dit càglàd (continu à gauche et pourvu de limite à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite pour presque tout ω.*

Définition 1.1.7 (Processus mesurable) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application:*

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & [0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}^d \\ & (t, \omega) \to X_t(\omega), \end{aligned}$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.8 (Processus adapté) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.9 (Processus progressivement mesurable) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$*

l'application :

$$X \quad : \quad [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
$$(s,\omega) \to X_s(\omega),$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.10 (Modification et indistinguable) *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastique définies sur même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *on a :*

i) X *est une modification de* Y *si, pour tout* $t \geq 0$, *les variables aléatoires* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P}-p.s$:

$$\forall t \geq 0, \ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

ii) X *et* Y *sont indistinguables si,* $\mathbb{P}-p.s$, *les trajectoires de* X *et de* Y *sont les mêmes c'est à dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.1.11 (Temps d'arrêt) *Soit* τ *une variable aléatoire à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. τ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *−temps d'arrêt si, pour tout* t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Si τ *est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à* τ *la tribu définie par*

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall \ t \geq 0\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit* τ *un temps d'arrêt. Si* X *est progressivement mesurable, le processus arrêté* X^τ *(défini par* $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$*) est progressivement mesurable.*

1.2 Martingale

Définition 1.2.1 (Martingale, sous-martingale et sur-martingale) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale, sous-martingale ou sur-martingale si :*

i) *Pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

ii) *Pour tout* $t \geq 0$, X_t *est intégrable i.e.* $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < \infty$.

iii) *Pour tout* $0 \leq s \leq t$, *on a :*

1) $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale si :*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

2) $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une sous-martingale si :*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

3) $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une sur-martingale si :*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.2.2 (Semi-martingale) *Une semi-martingale* X *est un processus réel, adapté et càdlàg qui s'écrire de la forme :* $X = M + A$ *où :*

-M *est une martingale locale.*

-A *est un processus réel, càdlàg et à variation finie.*

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 (Mouvement Brownien (MB)) *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles telle que :*

i) *La fonction* $t \longmapsto W_t(\omega)$ *est une fonction continue* $\mathbb{P} - p.s$,

ii) *pour* $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t - s)$,

iii) *pour* $0 \leq s \leq t$*, la loi de* $W_t - W_s$ *est identique à celle de* $W_{t-s} - W_0$.

Remarque 1.3.1 *Un mouvement Brownien est dit standard si :*

$$W_0 = 0, \ \mathbb{P}-p.s \ \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Propriété 1.3.1 *Soit* W *est un mouvement Brownien, on a :*

i) $t \mapsto W_t(\omega)$ *est continu,*

ii) $t \mapsto W_t(\omega)$ *n'est pas dérivable en aucun point,*

iii) $t \mapsto W_t(\omega)$ *n'est pas à variation finie sur aucun intervalle* $[0, t]$.

1.4 Intégrale d'Itô

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement brownien W sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement brownien.

On définit l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien dû à Itô de la forme :

$$\int_0^t X(t)\, dW(t),$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité.

Définition 1.4.1 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô un processus* X *à valeurs réelles telle que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW(s), \ \mathbb{P}-p.s. \ \forall t \in [0, T].$$

On X_0 *et* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurable véri-*

fiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s.$

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty, \quad et \quad \int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < \infty.$$

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW(t), \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Le coefficient b *est le* ***drift*** *ou* ***la dérive,*** σ *est le* ***coefficient de diffusion.***

1.5 Formule d'Itô

Théorème 1.5.1 (Première formule d'Itô) *Supposons* f *de classe* C^2*. Alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt \\ &= \left(f'(X_t)\, b_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 \right) dt + f'(X_t)\, \sigma_t dW_t \\ &= f'(X_t)\, b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X \rangle_t + f'(X_t)\, \sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Avec la table de multiplication :

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

.

Théorème 1.5.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f_t^{'}(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left(f_t^{'}(t, X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, X_t)\, \sigma_t^2\right) dt + f_x^{'}(t, X_t)\, dX_t \\ &= f_t^{'}(t, X_t)\, dt + f_x^{'}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, X_t)\, d\langle X\rangle_t \\ &= \left(f_t^{'}(t, X_t) + f_x^{'}(t, X_t)\, b_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, X_t)\, \sigma_t^2\right) dt + f_x^{'}(t, X_t)\, \sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.1 (Formule d'Intégration par partie) *Soient X et Y deux processus d'Itô, alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t\,,$$

cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.6 Résultats utiles

Théorème 1.6.1 (Représentation des martingales Browniennes) *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$. Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Alors il existe un processus unique adapté H tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty,$$

et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Le théorème de représentation des martingales Browniennes, appelé aussi théorème de représentation des martingales d'Itô.

Théorème 1.6.2 (Inégalités de Burkhoder-Davis-Gundy"BDG") *Soit* $p > 0$ *un réel : Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* X*, nulle en zéro,*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.6.1 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Lemme 1.6.1 (Lemme de Gronwall) *Soit* $T > 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée telle que :*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds,$$

pour tout $t \leq T$*, où* a *et* b *sont des constantes positives. Alors :*

$$g(t) \leq ae^{bt}, \forall t \leq T.$$

Théorème 1.6.3 (Théorème stochastique De Fubini (voir ([4]))) *Supposons que* (E, ε) *est un espace mesurable et soit*

$$\phi : (t, \omega, x) \to \phi(t, \omega, x),$$

une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ *dans* $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. *On suppose en outre que :*

$$\int_E |||\phi(t,w,x)|||_T \, \mu(d_x) < +\infty,$$

alors $\mathbb{P} - p.s$,

$$\int_E \left[\int_0^T \phi(t,x) \, dW(t) \right] \mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \phi(t,x) \, \mu(dx) \right] dW(t).$$

Proposition 1.6.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires de* L^2 *on a :*

$$\int XY \le \left(\int X^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int Y^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.6.4 (Théorème du point fixe) *Soient* (E,d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \to E$ *une application contractante, i.e.lipschitzienne de rapport* $k < 1$ *: Alors,* φ *admet un unique poit fixe* $a \in E$ *tel que* $\varphi(a) = a$.

Théorème 1.6.5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* $(X_n)_{n\ge 1}$ *une suite de variables aléatoires convergeant p.s vers* X. *Supposons qu'il existe une variable aléatoire* Y *intégrable telle que* $|X_n| < Y$, *alors* $E(X_n)$ *converge vers* $E(X)$, *(i.e* $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ *quand* $n \to \infty$.*).*

Proposition 1.6.2 (Inégalité de Young) *Soient* $a \ge 0$, $b \ge 0$ *et* $p > 1$, $1 < q < +\infty$ *deux exposants conjugués i.e.*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *Alors :*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposition 1.6.3 (Inégalité de Hölder) *Soient* p, $q \in [1, +\infty[$ *des exposants* *conjugués* .$\left(i.e\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ *si* f, g *sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

En particulier, l'inégalité de Hölder (dans le cas $p=2$*) donne l'inégalité de Cauchy Schwarz* $|(f \mid g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Théorème 1.6.6 (Inégalité de Doob) *Si* $(X_t)_{t\in[0;T]}$ *est une martingale continue, on a, pour tout* $T>0$ *:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^P\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(|X_T|^p\right),\ \forall\ p>1.$$

Théorème 1.6.7 (Formule de Tanaka) *Soit* X *une semimartingale continue .Il existe* $(L_t^a)_{t\geq 0}$, $a\in\mathbb{R}$ *processus croissant continu, appelé temps local en* a *de la semimartingale* X, *tel que :*

$$\begin{aligned}
(X_t-a)^+ &= (X_0-a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s>a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a \\
(X_t-a)^- &= (X_0-a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s>a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a \\
|X_t-a| &= |X_t-a| + \int_0^t \mathbf{sgn}\,(X_s-a)\,dX_s + L_t^a
\end{aligned}$$

où :

$$sgn = \begin{cases} 1 & si\ x>0, \\ -1 & si\ x\leq 0. \end{cases}$$

De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a *associée* L_t^a *est portée par* $\{t\in\mathbb{R} : X_t=a\}$.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

L'objectif de ce chapitre est de présenter le résultat d'exisetence et d'unicité de la solution d'une équations différentielles stochastiques rétrogrades ($EDSRs$). Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 [10].

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ($EDSRs$) ont été introduites pour la prmière fois dans le cas linéaire dans un travail de J.M.Bismut [1]. Les $EDSRs$ sont un nouveau type d'équations différentielles stochastiques (EDS) qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes usuelles pour les $EDSs$. Une des principales raisons est qu'on ne pute pas renverser le "temps". Pour plus de détails voir cour de [3].

2.1 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, avec T le temps terminal. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -dY_t &= f(Y_t)dt, \quad \forall\, t \in [0,T], \\ Y_T &= \xi. \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation (disons dans L^2) adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes (1.6.1) permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s,$$

et on a :

$$Y_T = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T Z_s dW_s,$$

donc :

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^T Z_s dW_s \\ &= \int_0^t Z_s dW_s - \left(\int_0^t Z_s dW_s + \int_t^T Z_s dW_s \right) \\ &= -\int_t^T Z_s dW_s, \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$Y_t = Y_T - \int_t^T Z_s dW_s,$$

et pour $Y_T = \xi$, on a :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Ceçi est L'$EDSR$ simple sous sa forme intégrable. La forme différentielle de cette équation est :

$$\begin{cases} -dY_t & = & -Z_t dW_t, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = & \xi. \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t & = & f(t, Y_t, Z_t,) - Z_t dW_t, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = & \xi, \qquad\qquad\qquad\qquad si \quad t = T. \end{cases}$$

Ou de façon intégrable :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \forall\; 0 \leq t \leq T.$$

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un MB $d-$dimensionnel dans $(\mathbb{R}^d)$ sur cet espace $(i.e : W = \{W_t^i,\, 0 \leq t,\, 0 \leq i \leq d\})$. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du MB W $(i.e : \mathcal{F}_t = \sigma(W_s \cup N, 0 \leq s \leq t))$. On se donne T un temps déterministe fini fixé (appelé aussi l'horizon). On travaillera avec les espaces de processus suivante :

1) $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|_{\mathbb{S}^2}^2 :\; = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

2) $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$: le sous-espace formé par les processus continus.

3) $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 : = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z_t\|^2 = trace(zz^*)$.

4) $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach pour ces normes.

Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans ce chapitre, ensuite on définit f une application aléatoire :

$$\begin{array}{rcl} f & : & [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \rightarrow \mathbb{R}^k, \\ & : & (t, \omega, y_s, z_s) \rightarrow f(t, \omega, y_s, z_s). \end{array}$$

Telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, $\mathcal{F}_T-$mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. On donne l'équation différentielle stochastique rétrograde $(EDSR)$ suivante :

$$\begin{cases} -dY_t &= f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T &= \xi, \qquad\qquad\qquad\qquad si \quad t = T. \end{cases}$$

Ou, de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

où :

$$f \quad : \quad [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k,$$
$$\xi \quad : \quad \Omega \to \mathbb{R}^k.$$

Sont données présentons solution de l'$EDSR$ (2.1) telle que la fonction f s'appelle le générateur de l'$EDSR$, et ξ la condition terminale carré intégrable ($i.e$ $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$).

Définition 2.2.1 *Une solution de l'$EDSR$ (2.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1) *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$;

2) $\mathbb{P}-p.s.$

$$\int_0^T \left\{|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds < \infty;$$

$i.e$:

$$\mathbb{E}[\int_0^T \left\{|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds] < \infty;$$

3) $\mathbb{P}-p.s$, *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \forall 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.2.1 *Il est important de retenir les points suivants :*

i) *les intégrales de l'équation (2.1) étant bien définies ;*

ii) *Y est une semi-martingale continue, progressivement mesurable donc, il est adapté. En effet Y écrit sous la forme $Y_t = M_t + A_t$ telle que M_t est un martingale local et A_t est un processus stochastique a variation finie. En effet on a Y est continue car $Y \in S_c^2(\mathbb{R}^k)$ et telle que $A_t = \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds$ est un processus stochastique à variation finie où :*

$$\left\langle \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds, \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds \right\rangle = 0 < \infty,$$

et $M_t = -\int\limits_0^t Z_s dW_s$ *est un intégrale d'Itô alors est martingale, et comme tout martingale est un martingale locale ;*

iii) Y_0 *est* F_0-*mesurable alors,* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f*, le processus* Y *appartient à* S^2.

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $(f_t)_{0\leq t\leq T}$*, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *tels que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR (2.1) telle que* $Z \in M^2$ *alors* Y *appartient à* $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall (voir : 1.6.1) et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a :

$$Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t f(s, Y_s, Z_s) ds + \int\limits_0^t Z_s dW_s, \quad \forall\ 0 \leq t \leq T,$$

donc :

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \left|\int\limits_0^t f(s, Y_s, Z_s) ds\right| + \left|\int\limits_0^t Z_s dW_s\right|,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse (2.2.1)sur f on a :

$$\begin{aligned}
|Y_t| &\leq |Y_0| + \left|\int\limits_0^T f_s + \lambda(|Y_s| + \|Z_s\|) ds\right| + \sup_{0\leq t\leq T} \left|\int\limits_0^t Z_s dW_s\right| \\
&\leq |Y_0| + \int\limits_0^T (f_s + \lambda \|Z_s\|) ds + \sup_{0\leq t\leq T} \left|\int\limits_0^t Z_s dW_s\right| + \lambda \int\limits_0^t |Y_s| \, ds.
\end{aligned}$$

On Pose :

$$K = |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda \|Z_s\|)ds + \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|.$$

Donc :

$$|Y_t| \le K + \lambda \int_0^t |Y_s| \, ds.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, d'après l'inégalité de Doob (1.6.6), on a :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2 \right) \le 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \left\| Z_s^2 \right\| ds \right).$$

($i.e$ le troisième terme $Z_s dW_s$ est de carré intégrable) ; il en est de même pour $(f_t)_{0 \le t \le T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que K est une variable aléatoire de carré intégrable.

Comme Y_t est un processus continu qui vérifié,

$$|Y_t| \le K + \lambda \int_0^t |Y_s| \, ds.$$

D'aprés le lemme de Gronwall (1.6.1), on obtient :

$$|Y_t| \le K e^{\lambda t},$$

d'où :

$$\sup_{0 \le t \le T} |Y_t| \le K e^{\lambda T},$$

comme K est de carré intégrable, alors Y appartient à $\mathcal{S}^2$. ■

Lemme 2.2.1 *Soient* $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$. *Alors* $\left\{ \int_0^t Y_s . Z_s dW s, t \in [0, T] \right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. *En combinant les inégalités de BDG (1.6.2) :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\right|\right) &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Young (1.6.2) $\left(ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\right|\right) &\leq C\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 + \int_0^T \|Z\|^2 ds\right)\right] \\
&\leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right]\right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Où $C' = \frac{1}{2}C$*, et* $\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle$ *est une martingale donc* $\mathbb{E}\left[\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\right] = 0$.
Puisque cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

2.3 Le cas Lipschitz

2.3.1 Le résultat de Pardoux–Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à E.Pardoux et S. Peng [10] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les $EDSRs$ dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

Hypothèses : Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P} - p.s.$,

1. condition de Lipschitz (uniforme) en (y, z) : pour tout t, y, y', z, z' :

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|);$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \, ds\right] < \infty.$$

Cas simple : Nous commençons par un cas très simple, celui où $f(t, y, z) = F_t$ ne dépend ni de y ni de z $i.e$, on se donne ξ de carré intégrable et un processus $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'$EDSR$

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.1 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_t)$ et $(F_t)_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve.

L'existence : Supposons que (Y, Z) est une solution de (2.2) telle que $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a alors, pour toute $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dW_s \mid \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dW_s \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s \mid \mathcal{F}_t\right) = 0,$$

Puisque $\int_t^T Z_s dW_s$ est une martingale nulle en 0. Alors :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini (1.6.3), comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$; en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds,
\end{aligned}$$

on posons

$$M_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds.$$

M_t est une martingale brownienne de carré intégrable ; par le théorème de représentation des martingales brownienneson (1.6.1) on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$M_t = \mathbb{E}\left(M_T\right) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds \\
&= \mathbb{E}\left(M_0\right) + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.
\end{aligned}$$

$$= Y_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'$EDSR$ étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= Y_t - \xi \\ &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds \right) \\ &= \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^T Z_s dW_s \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

Alors :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Unicité : L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.

Supposons que (Y_t, Z_t) et (Y'_t, Z'_t) sont deux solutions de l'$EDSR$ (2.2), et $Y_T = \hat{Y}_T = \xi$ et $F_s = F'_s$.

Soient $\hat{Y} = Y - Y'$, et $\check{Z} = Z - Z'$, alors :

$$\hat{Y}_t = \int_t^T \check{Z}_s dW_s, \forall 0 \leq t \leq T. \tag{2.3}$$

Nous allons prouvés que : $Y_t = Y'_t$ et $Z_t = Z'_t$; $d\mathbb{P} \times dt$. $\mathbb{P}-p.s.$ En effet, premièrement écrivons :

$$\hat{Y}_t = \int_0^T \check{Z}_s dW_s - \int_0^t \check{Z}_s dW_s, \forall 0 \leq t \leq T,$$

on applique l'inégalité martingale de Doob (1.6.6), pour $p = 2$ on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \hat{Y}_t \right|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}\left[\left| \hat{Y}_T \right| \right]^2 \leq 2 \int_0^t \check{Z}_s ds < \infty.$$

On applique la formule d'Itô (1.5) telle que $h(\hat{Y}_t) = \left|\hat{Y}_t\right|^2$, de t à T ,donc :

$$dh(\hat{Y}_t) = d\left|\hat{Y}_t\right|^2 = 2\hat{Y}_t d\hat{Y}_t + 2(\frac{1}{2}d\left\langle \hat{Y}_t\right\rangle_t)$$
$$= 2\hat{Y}_t d\hat{Y}_t + \left\|\check{Z}_t\right\|^2 dt.$$

En passant à l'intégrale et comme $\hat{Y}_T = 0$, alors :

$$\int_t^T d\left|\hat{Y}_s\right|^2 = 2\int_t^T \hat{Y}_s d\hat{Y}_s + \int_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds$$

$$0 - \left|\hat{Y}_t\right|^2 = 2\int_t^T \hat{Y}_s d\hat{Y}_s + \int_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds,$$

où d'aprés (2.3) on conclut

$$d\hat{Y}_s = d\left(-\int_t^T \check{Z}_s dW_s\right)$$
$$= -\check{Z}_s dW_s.$$

Alors :

$$\hat{Y}_s d\hat{Y}_s = -\hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s.$$

Donc :

$$-\left|\hat{Y}_t\right|^2 = 2\int_t^T - \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s + \int_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds.$$

Alors :

$$2\int_t^T \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s = \left|\hat{Y}_s\right|^2 + \int_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds.$$

En passe à l'espérance mathématique et comme $\int_t^T \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s$ est un intégrale d'Itô, donc $\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s\right] = 0$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\left|\hat{Y}_s\right|^2 + \int_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds\right] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left|\hat{Y}_s\right|^2 = 0 \text{ alors } \hat{Y}_s = 0 \ d\mathbb{P}-p.s \\ \int\limits_t^T \left\|\check{Z}_s\right\|^2 ds = 0 \ d\mathbb{P}-p.s, \text{ alors } \check{Z}_s = 0 \ d\mathbb{P}\times dt - p.s \end{cases}$$

alors $d\mathbb{P}\times dt - p.s$

$$\begin{cases} Y &= Y', \\ Z &= Z'. \end{cases}$$

Ceci démontre l'unicité de Y et Z. ■

Nous montrons à présent le théorème d'existence de Pardoux et Peng.

Cas où f dépend de Y et Z

Théorème 2.3.1 (Pardoux-Peng90 [10]) *:*

Sous l'hypothèse (2.3.1), l'$EDSR$ (2.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'$EDSR$ (2.1) si et seulement si (Y, Z) est un point fixe 1.6.4 de Ψ.Pour $(U, V) \in \mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'$EDSR$:

$$Y_t = \xi + \int\limits_t^T f(s, U_s, V_s)ds - \int\limits_t^T Z_s dW_s, \ \forall 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que f ne dépend ni de Y ni de Z alors l'$EDSR$ possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$\begin{aligned} |F_s| &\leq |f(s, U_s, V_s) - f(s, 0, 0)| + |f(s, 0, 0)| \\ &\leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|, \end{aligned}$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme(2.3.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2.(Y, Z)$ appartient $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition (2.2.1), $Y \in \mathcal{S}_c^2$. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même ($i.e$ $\Psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$) est donc bien définie. Soient (U, V) et (U_0, V_0) deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(Y', Z') = \Psi(U', V')$. Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. On a, $y_T = \xi - \xi = 0$ et :

$$dy_t = -\left\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\right\} dt + z_t dW_t.$$

Soit $\alpha > 0$.à choisir plus tard. On applique la formule de Itô à $\alpha e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
d(e^{\alpha t} |y_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt + 2e^{\alpha t} |y_t| dy_t + \tfrac{1}{2} 2e^{\alpha t} d\langle y\rangle_t \\
&= \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} |y_t| \left[\left\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\right\} dt + z_t dW_t\right] \\
&+ e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt \\
&= \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} |y_t| \left[\left\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\right\} dt\right] \\
&+ 2e^{\alpha t} |y_t| z_t dW_t + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt \\
&= e^{\alpha t} \left(\alpha |y_t|^2 - 2y_t \left[\left\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\right\}\right]\right) dt \\
&+ 2e^{\alpha t} |y_t| z_t dW_t + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_t^T d(e^{\alpha s} |y_s|^2) &= \int_t^T e^{\alpha s} \left(\alpha |y_s|^2 - 2y_s \left[\left\{f(s, U_s, V_s) - f(s, U_s', V_s')\right\}\right]\right) ds \\
&+ \int_t^T 2e^{\alpha s} |y_s| z_s dW_s + \int_t^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \\
e^{\alpha T} |y_T|^2 - e^{\alpha t} |y_t|^2 &= \int_t^T e^{\alpha s} \left(\alpha |y_s|^2 - 2y_s \left[\left\{f(s, U_s, V_s) - f(s, U_s', V_s')\right\}\right]\right) ds \\
&+ \int_t^T 2e^{\alpha s} |y_s| z_s dW_s + \int_t^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \\
-e^{\alpha t} |y_t|^2 &= \int_t^T e^{\alpha s} \left(\alpha |y_s|^2 - 2y_s \left[\left\{f(s, U_s, V_s) - f(s, U_s', V_s')\right\}\right]\right) ds \\
&+ \int_t^T 2e^{\alpha s} |y_s| z_s dW_s + \int_t^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Donc :

$$e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds=\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha|y_s|^2+2y_s\left[\{f(s,U_s,V_s)-f(s,U'_s,V'_s)\}\right]\right)ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_sz_sdW_s,$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant $u=U-U'$ et $v=V-V'$

$$e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds\leq\int_t^T e^{\alpha s}-\alpha|y_s|^2+2\lambda|y_s||u_s|+2\lambda|y_s|\|v_s\|)ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_sz_sdW_s.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a $2ab\leq\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds\leq\int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha+\frac{2\lambda^2}{\varepsilon})|y_s|^2 ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_sz_sdW_s+\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}(|u_s|^2+\|v_s\|^2)ds,$$

et prenant $\alpha=\frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on a, notant $R_\varepsilon=\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}(|u_s|^2+\|v_s\|^2)ds$,

$$e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds\leq R_\varepsilon-2\int_t^T e^{\alpha s}y_sz_sdW_s,\forall t\in[0,T]. \tag{2.4}$$

D'après le Lemme (2.2.1), la martingale locale $\left\{\int_0^T e^{\alpha s}y_sz_sdW_s\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 $\left(i.e\ \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}y_sz_sdW_s\right]=0\right)$ puisque Y, Y' appartiennent à $\mathcal{S}^2$et Z, Z' appartiennent à M^2. En particulier, prenant l'espérance ((ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente)), on obtient facilement, pour $t=0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}|y_s|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds\right]\leq\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].$$

Ce que implique,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds\right]\leq\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.5}$$

Revenant à l'inégalité (2.4), les inégalités BDG fournissent (avec C universelle),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s}\left|y_s\right|^2\left\|z_s\right\| ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et d'après l'inégalité de Young (1.6.2) $\left(ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)$, avec $a = \sup\limits_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha s}{2}}\left|y_t\right|$ et $b = \left(\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.5), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C^2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\| ds\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}\left[\varepsilon\int_0^T e^{\alpha s}(\left|u_s\right|^2 + \left\|v_s\right\|^2) ds\right]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|ds\right] &\le \varepsilon(3+C^2)\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|u_s\right|^2 d_s+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&\le \varepsilon(3+C^2)\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2\int_0^T d_s+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&\le \varepsilon(3+C^2)\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2 T+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&\le \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|ds\right]\le \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|ds\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|U,V\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|V_s\right\|ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach, cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$. Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'$EDSR$ (2.1) dans $\mathcal{B}^2$. On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la Proposition (2.2.1) implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ■

Remarque 2.3.1 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'$EDSR$ » signifiera la solution de l'$EDSR$ vérifiant $Z\in M^2$.*

Le rôle de Z : Le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

2.4 Théorème de comparaison

2.4.1 EDSR linéaires :

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des $EDSRs$ linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite. On se place dans le cas $k = 1$, Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à diren un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.4.1 *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{0\leq t\leq T}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{0\leq t\leq T}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T-$mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles. L'EDSR linéaire*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_s Y_s + Z_s b_s + c_s\} ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right), \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec,

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\right), \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T.$$

2.4.2 Théorème de comparaison :

Ce paragraphe est consacré au « théorème de comparaison » qui permet de comparer les solutions de deux $EDSR$ (dans $\mathbb{R}$) dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng [11].

Théorème 2.4.1 *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, f), (ξ', f') vérifient l'hypothèse (2.3.1). On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des $EDSRs$ correspondantes. On* *suppose également que* $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi \leq \xi'$ *et que* $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}-p.p.$ *(m mesure de Lebesgue). Alors,*

$$Y_t \leq Y_t' \quad \mathbb{P}-p.s, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si de plus, $Y_0 = Y_0'$, *alors* $\mathbb{P}-p.s$ $Y_t = Y_t'$, $0 \leq t \leq T$ *et* $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}-p.p.$ *En particulier, dès que* $\mathbb{P}(\xi \leq \xi') > 0$ *ou* $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ *sur un ensemble de* $m \otimes \mathbb{P}-$*mesure strictement positive alors* $Y_0 \leq Y_0'$.

Chapitre 3

EDSR avec une croissance quadratique :

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les $EDSRs$ à croissance quadratique qui reposent principalement sur les résultats des $EDSRs$ unidimensionnels car ce cadre est nécessaire pour déterminer le résultat de la comparaison et les résultats d'existence et d'unicité (pour plus de détails, voir [7] et [9]).

3.1 Notations :

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré et W un MB $d-$dimensionnel dans $(\mathbb{R}^d)$ sur cet espace ($i.e$: $W = \{W_t^i, 0 \leq t,\ 0 \leq i \leq d\}$). On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB W ($i.e$: $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s \cup N,\ 0 \leq s \leq t)$), on se donne T un temps déterministe fini fixé. On travaillera avec les espaces de processus suivante :

En raison de la croissance quadratique du coefficient Z, nous recherchons des solutions telles que $(Y_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}_T^\infty(\mathbb{R})$, où $\mathcal{H}_T^\infty(\mathbb{R})$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables unidimensionnels qui sont presque sûrement bornés, pour presque tout t (en abrégé, $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus borné unidimensionnel) tandis que$(Z_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que :

$$\mathbb{E}\int_0^T |Z_s|^2\, ds < \infty,$$

(avec $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté intégrable).

3.2 L'Existence :

Pour justifier les hypothèses de la croissance quadratique du coefficient et pour prouver le résultat de l'existence nous présentons deux exemples :

Exemple 3.2.1 *Nous considérons l'équation suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2}|Z_s|^2\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.1}$$

le changement de variable exponentiel $y = \exp(Y)$ *transforme formellement cette équation en :*

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s dW_s, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

dernière équation (3.2) étant linéaire, nous avons, lorsque

$$\exp(\xi) \in L^2(\Omega), \tag{3.3}$$

l'existence d'une solution unique $(y, z) \in \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$ *de (3.2).Le processus* y *est donné explicitement par :*

$$y_t = \mathbb{E}\left[\exp(\xi) \mid \mathcal{F}_t\right], \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T,$$

et le processus z *est donné par le théorème de représentation des martingales conti-*

nues (voir, (1.6.1)).

Prendre $\xi \in L^\infty(\Omega)$ *est une hypothèse suffisante pour garantir (3.3). En effet, si* $\xi \in L^\infty(\Omega)$*, alors* $\exp(\xi) \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$*, et il existe une solution unique de (3.2). De plus,*

$$y_t \quad \geq \quad \exp\left(- \|\xi\|\right), \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T,$$

et on peut définir

$$Y_t = \ln(y_t), \quad Z_t = \tfrac{z_t}{y_t}, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T.$$

Il est alors facile de vérifier que le couple $(Y, Z) \in \mathcal{H}_T^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$ *est une solution de (3.1).*

L'unicité dans $\mathcal{H}_T^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$ *découle du fait que le changement de variable exponentiel n'est plus formel et de l'unicité pour l'équation (3.1).*

Exemple 3.2.2 (estimations a priori) *Soient* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *et* $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions et* C *une constante positive. Nous disons que le coefficient* f *satisfait la condition (3.4) avec* $a, b,$ *et* C *si pour tout* $(t, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$*,*

$$f(t, y, z) = a_0(t, y, z)y + f_0(t, y, z),$$

avec la condition :

$$\begin{cases} a_0(t, y, z) \leq a(t) & p.s. \\ |f_0(t, y, z)| \leq b(t) + C\,|z|^2, & p.s. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dans cet exemple, nous considérons une EDSR avec des paramètres (f, τ, ξ)*, où le temps terminal est un temps d'arrêt* τ *et la condition terminale* ξ *est bornée. Dans ce cas, nous appelons une solution de l'EDSR avec les paramètres* (f, τ, ξ) *un couple de processus adaptés*

$$(Y, Z) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d),$$

tel que :

1) $Y_t = \xi$ et $Z_t = 0$ sur l'ensemble $\{t \geq \tau\}$.

2) $\mathbb{E}\int\limits_0^\tau |Z_t|^2 \, dt < \infty$.

3) Pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$Y_t = Y_T + \int\limits_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int\limits_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dW_s.$$

Proposition 3.2.1 *Soit $(Y, Z) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$, une solution de l'EDSR avec les paramètrs (f, τ, ξ), et supposons que f satisfait la condition (3.4) avec a, b, et C, tels que :*

$$a^+ = \max(a, 0) \quad b \in L^1(0, T) \quad \text{et } C > 0 \quad \forall T > 0.$$

Alors pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{array}{rrcll} & Y_t & \leq & \left[\sup\limits_\Omega (Y_T)\right]^+ \exp\left(\int\limits_t^T a_s ds\right) + \int\limits_t^T b_s \exp\left(\int\limits_t^s a_\lambda d\lambda\right) ds & p.s. \\ resp. & Y_t & \geq & \left[\inf\limits_\Omega (Y_T)\right]^- \exp\left(\int\limits_t^T a_s ds\right) - \int\limits_t^T b_s \exp\left(\int\limits_t^s a_\lambda d\lambda\right) ds & p.s. \end{array}$$

De plus, il existe une constante K dépendant uniquement de $\|Y\|_\infty$, $\|a^+\|_{L^1}$ et C telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^\tau |Z_s|^2 \, ds\right] \leq K.$$

Une conséquence immédiate de cette proposition est le corollaire.

Corollaire 3.2.1 *Soit $(Y, Z) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$, une solution de l'EDSR avec les paramètrs (f, τ, ξ).*

i) *Si τ est bornée, ($\tau \leq T$ p.s), $\xi \in L^\infty(\Omega)$ et f satisfait la condition (3.4) avec a, b et C tels que $a^+, b \in L^1(0, T)$ et $C > 0$,*

$$\|Y\|_\infty \leq \left(\|\xi\|_\infty + \|b\|_{L^1(0,T)}\right) \exp\left(\|a^+\|_{L^1(0,T)}\right).$$

ii) *Si τ n'est pas bornée, $\xi \in L^{\infty}(\Omega)$ et f satisfait la condition (3.4) avec a, b, et C tels qu'il existe une constante α_0 telle que $a \leq \alpha_0 < 0$, $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ et $C > 0$,*

$$\|Y\|_{\infty} \leq \|\xi\|_{\infty} + \tfrac{\|b\|_{\infty}}{|\alpha_0|}.$$

Preuve. (Preuve de la Proposition (3.2.1)) Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $T \leq \|\tau\|_{\infty}$ et considérons la solution φ de l'équation différentielle ordinaire :

$$\varphi_t = \left[\sup_{\Omega} Y_T\right]^+ + \int_t^T (a_s\varphi_s + b_s)\, ds.$$

Et,

$$\varphi_t = \left[\sup_{\Omega} Y_T\right]^+ \exp\left(\int_t^T a_s ds\right) + \int_t^T b_s \exp\left(\int_t^s a_\lambda d\lambda\right) ds, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T.$$

Notre objectif est de prouver que $Y_t \leq \varphi_t$. Appliquons la formule d'Itô au processus $Y_t - \varphi_t$ et à une fonction croissante ϕ appartenant à $\mathcal{C}^2$, encore à déterminer :

$$\begin{aligned}\phi\left(Y_t - \varphi_t\right) = \phi\left(Y_T - \varphi_T\right) &+ \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \phi^{'}\left(Y_s - \varphi_s\right)\left[f(s, Y_s, Z_s) - (a_s\varphi_s + b_s)\right] ds \\ &- \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \frac{1}{2}\phi^{''}\left(Y_s - \varphi_s\right)|Z_s|^2 ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \phi^{'}\left(Y_s - \varphi_s\right) Z_s dW_s.\end{aligned}$$

Nous mettons,

$$\tilde{a}_s = a_0(s, Y_s, Z_s), \quad \forall \quad 0 \leq s \leq T.$$

La fonction ϕ étant en augmentation, pour tous $0 \leq t \leq s \leq T$, on a :

$$\begin{aligned}\phi^{'}\left(Y_s - \varphi_s\right)\left[f(s, Y_s, Z_s) - (a_s\varphi_s + b_s)\right] &\leq \phi^{'}\left(Y_s - \varphi_s\right)\left[\tilde{a}_s Y_s + b_s + C|Z_s|^2 - (a_s\varphi_s + b_s)\right] \\ &\leq \phi^{'}\left(Y_s - \varphi_s\right)\left[\tilde{a}_s\left(Y_s - \varphi_s\right) + \left(\tilde{a}_s - a_s\right)\varphi_s + C|Z_s|^2\right],\end{aligned}$$

et puisque $(\tilde{a}_s - a_s)\varphi_s \leq 0$,

$$\phi(Y_t - \varphi_t) \leq \phi(Y_T - \varphi_T) + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \tilde{a}_s \phi'(Y_s - \varphi_s)(Y_s - \varphi_s)\, ds \tag{3.5}$$
$$+ \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \left[C\phi' - \frac{1}{2}\phi''\right](Y_s - \varphi_s)|Z_s|^2\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \phi'(Y_s - \varphi_s) Z_s dW_s.$$

Nous mettons $M = \|Y\|_\infty + \|\varphi\|_\infty$ et nous définissons sur $[-M, M]$ la fonction ϕ par :

$$\phi(u) = \begin{cases} \exp(2Cu) - 1 - 2Cu - 2C^2u^2 & \text{si } u \in [0, M], \\ 0 & \text{si } u \in [-M, 0]. \end{cases}$$

Pour tout $u \in [-M, M]$ on peut vérifier facilement que :

$$\begin{aligned} &\phi(u) \geq 0 \text{ et } \phi(u) = 0 \text{ si et seulement si } u \leq 0, \\ &\phi'(u) \geq 0, \\ &0 \leq u\phi'(u) \leq 2(M+1)C\phi(u), \\ &0 \geq C\phi'(u) - \frac{1}{2}\phi''(u). \end{aligned}$$

Par conséquent, en fixant $k_t = a_t^+ 2(M+1)C$, la fonction k est positive et déterministe, pour tout $0 \leq t \leq T$

$$0 \leq \phi(Y_t - \varphi_t) \leq \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} k_s \phi(Y_s - \varphi_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \phi'(Y_s - \varphi_s) Z_s dW_s \quad p.s.$$

Et donc :

$$0 \leq \phi(Y_t - \varphi_t) \leq \int_t^T k_s \phi(Y_s - \varphi_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \phi'(Y_s - \varphi_s) Z_s dW_s \quad p.s.$$

Puisque $\left(\phi'(Y_s - \varphi_s)\right)_{t\leq s\leq T}$ est borné, $\left(\phi'(Y_s - \varphi_s) Z_s\right)_{t\leq s\leq T} \in \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$, et en prenant les attentes dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\phi\left(Y_t - \varphi_t\right)\right] \leq \int_t^T k_s \mathbb{E}\left[\phi\left(Y_s - \varphi_s\right)\right] ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall (1.6.1),

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(Y_t - \varphi_t\right)\right] = 0, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T,$$

donc puisque $\phi(u) \geq 0$,

$$\forall \quad 0 \leq t \leq T, \quad \phi\left(Y_t - \varphi_t\right) = 0 \qquad p.s,$$

et puisque $\phi(u) = 0$ si et seulement si $u \leq 0$ on obtient

$$\forall \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_t - \varphi_t \leq 0 \qquad p.s.$$

La preuve de

$$Y_t \quad \geq \quad \left[\inf_{\Omega}\left(Y_T\right)\right]^{-} \exp\left(\int_t^T a_s ds\right) - \int_t^T b_s \exp\left(\int_t^s a_\lambda d\lambda\right) ds,$$

repose sur les mêmes calculs. En effet, si φ est maintenant la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\varphi_t = \left[\inf_{\Omega}\left(Y_T\right)\right]^{-} + \int_t^T \left(a_s \varphi_s - b_s\right) ds,$$

en appliquant la formule d'Itô à ϕ définie comme ci-dessus et à $\varphi_t - Y_t$, on obtient

$$\phi\left(\varphi_t - Y_t\right) \leq \phi\left(\varphi_T - Y_T\right) + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} k_s \phi\left(\varphi_s - Y_s\right) ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} k_s \phi^{'}\left(\varphi_s - Y_s\right) Z_s dW_s,$$

et le même argument nous permet de conclure. Pour estimer $\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left|Z_s\right|^2 ds\right]$, nous utilisons à nouveau (3.5) avec $t = 0$, $\varphi = 0$ et $M = \|Y\|_\infty$ et ϕ défini sur $[-M, M]$

par :

$$\phi(u) = \frac{1}{2C^2}\left[\exp(2C(u+M)) - (1 + 2C(u+M))\right].$$

Il est facile de vérifier que, pour $u \in [-M, M]$,

$$\phi(u) \geq 0, \qquad \phi^{'}(u) \geq 0,$$

$$0 \leq u\phi^{'}(u) \leq \frac{M}{C}(\exp(4CM) - 1),$$

$$\frac{1}{2}\phi^{''}(u) - C\phi^{'}(u) = 1,$$

Par conséquent, (3.5) donne

$$0 \leq \phi(Y_0) \leq \phi(Y_T) + \int_0^{T\wedge\tau} a_s^+ \frac{M}{C}(\exp(4CM) - 1)\,ds$$
$$- \int_0^{T\wedge\tau} |Z_s|^2\,ds - \int_0^{T\wedge\tau} \phi^{'}(Y_s)\,Z_s dW_s.$$

qui conduit à

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s|^2\,ds\right] \leq \phi(M) + \frac{M}{C}(\exp(4CM) - 1)\left\|a^+\right\|_{L^1},$$

et la preuve se complète en laissant $T \to \infty$. ■

Les résultats d'existence et de stabilité monotone. Soit α_0, β_0, $b \in \mathbb{R}$ et c une fonction croissante continue. Nous disons que le coefficient f satisfait la condition (3.6) avec α_0, β_0, b, c $(t,y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$f(t,y,z) = a_0(t,y,z)\,y + f_0(t,y,z),$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_0 \leq a_0(t,y,z) \leq \alpha_0 & p.s, \\ |f_0(t,y,z)| \leq b + c(|y|)\,|z|^2 & p.s. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Existence) *Soit* (f, τ, ξ) *un ensemble de paramètres de l'EDSR (2.1) et supposons que le coefficient* f *satisfait (3.6) avec* $\alpha_0, \beta_0, b \in \mathbb{R}$, *et* $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ *croissante continue,* $\xi \in L^\infty(\Omega)$, *et :*

1) *Le temps terminal* τ *est soit borné,* $(\tau \leq T$ *p.s*$)$.

2) *Le temps terminal est tel que* $\tau < \infty$ *p.s. et* $\alpha_0 < 0$. *Alors l'EDSR (2.1) a au moins une solution* (Y, Z) *dans* $H_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times H_\tau^2(\mathbb{R}^d)$ *telle que le processus* Y *a des trajectoires continues. De plus, il existe une solution minimale* (Y_*, Z_*) *(ou une solution maximale* (Y^*, Z^*)*) telle que pour tout ensemble de paramètres* (g, τ, ξ), *si*

$$f \leq g \quad et \quad \xi \leq \zeta \quad (resp.\ f \geq g \ et\ \xi \geq \zeta)$$

et pour toute solution (Y_g, Z_g) *de l'EDSR avec les paramètres* (g, τ, ξ),

$$Y_* \leq Y_g \quad (resp.\ Y^* \geq Y_g).$$

Avant de donner la preuve du théorème (3.2.1), nous énonçons la proposition suivante qui donne l'argument principal de l'existence. Elle est présentée sous des hypothèses générales.

Proposition 3.2.2 (Stabilité monotone) *Soit* (f, τ, ξ) *un ensemble de paramètres et soit* $(f^n, \tau, \xi^n)_n$ *une suite de paramètres telle que :*

1) *La suite* $(f^n)_n$ *converge vers* f *localement uniformément sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, $\xi^n \in L^\infty(\Omega)$, *et* $(\xi^n)_n$ *converge vers* ξ *dans* $L^\infty(\Omega)$.

2) *Il existe* $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ *tel que pour tout* $T > 0$, $k \in L^1(0, T)$ *et il existe* $C > 0$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t, u, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad |f^n(t, u, z)| \leq k_t + C|z|^2. \tag{3.7}$$

3) *Pour chaque n, l'EDSR avec les paramètres (f^n, τ, ξ^n) a une solution*

$$(Y^n, Z^n) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d),$$

telle que la suite $(Y^n)_n$ est monotone, et il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Y^n\|_\infty \leq M$.

4) *Le temps d'arrêt τ est tel que $\tau < \infty$ p.s.*

Alors il existe un couple de processus (Y, Z) dans $H_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times H_\tau^2(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $T \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T} |Y_s^n - Y_s| = 0 \quad \mathbb{P}-p.s, \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int\limits_0^T |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds\right) = 0. \; (i.e \; Z^n \to Z \text{ dans } L^2(W).), \end{cases}$$

et (Y, Z) est une solution de l'EDSR avec les paramètres (f, τ, ξ).

En particulier, si pour chaque n, Y^n a des trajectoires continues, le processus Y a également des trajectoires continues.

Remarque 3.2.1 *Le coefficient limite f satisfait l'hypothèse de croissance quadratique, mais pas nécessairement un principe de comparaison. Par conséquent, la solution que nous trouvons ici peut ne pas être unique.*

Présentons le lemme suivant afin de prouver le Proposition (3.2.2).

Lemme 3.2.1 *Il existe une sous-suite $(Z^{n_j})_j$ de $(Z^n)_n$ telle que $(Z^{n_j})_j$ converge presque sûrement vers Z et telle que $\tilde{Z} = \sup_j |Z^{n_j}| \in \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. (Proposition (3.2.2)) Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ la suite $(Y_t^n)_n$ est monotone et bornée, elle a une limite que l'on note Y_t. En vue de la (3.2.1), il existe une constante $\tilde{K}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^\tau |Z_s|^2 \, ds\right] \leq \tilde{K}.$$

Donc, il existe un processus $Z \in \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d)$ et une sous-suite $(Z^{n_j})_j$ de $(Z^n)_n$ telle que

$$Z^{n_j} \to Z \text{ faiblement dans } \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d). \tag{3.8}$$

L'objectif est maintenant de montrer que en fait toute la suite converge fortement vers Z dans $\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d)$. Nous remarquons que, par l'inégalité (3.7), en fixant $K = 5C$,

$$\left|f^n(t,v,z) - f^p\left(t,v^{'},z^{'}\right)\right| \leq 2k_t + k\left(\left|z-z^{'}\right|^2 + \left|z^{'}-z^{''}\right|^2 + \left|z^{''}\right|^2\right).$$

Étape 1 : La convergence forte de $(Z^n)_n$ dans $\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d)$. Les principaux arguments de cette étape sont adaptés de [2]. Nous avons, pour tout n, $p \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(Y^n,Z^n) - f^p(Y^p,Z^p)| \leq 2k_t + k\left(\left|z^n - z^p\right|^2 + |z^n - z|^2 + |z|^2\right).$$

Appliquons la formule d'Itô au processus $(Y^n_t - Y^p_t)_{0\leq t\leq T}$ pour $n, p \in \mathbb{N}$, $n \leq p$, et à une fonction croissante ψ appartenant à $C^2[0,2M]$, telle que $\psi^{'}(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$. La fonction ψ est encore à choisir :

$$\begin{aligned}\psi(Y^n_0 - Y^p_0) = \psi(Y^n_T - Y^p_T) &+ \int_0^{T\wedge\tau} \psi^{'}(Y^n_s - Y^p_s)\left(f^n(Y^n_s,Z^n_s) - f^p(Y^p_s,Z^p_s)\right)ds \\ &- \frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau}\psi^{''}(Y^n_s - Y^p_s)\left|Z^n_s - Z^p_s\right|^2 ds - \int_0^{T\wedge\tau}\psi^{'}(Y^n_s - Y^p_s)(Z^n_s - Z^p_s)\,dW_s.\end{aligned}$$

Comme $\psi^{'}(Y^n_s - Y^p_s) \geq 0$,

$$\begin{aligned}\psi(Y^n_0 - Y^p_0) &\leq \psi(Y^n_T - Y^p_T) \\ &+ \int_0^{T\wedge\tau}\psi^{'}(Y^n_s - Y^p_s)\left[2k_s + K\left(|Z^n_s - Z^p_s|^2 + |Z^n_s - Z_s|^2 + |Z_s|^2\right)\right]ds \\ &- \frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau}\psi^{''}(Y^n_s - Y^p_s)\left|Z^n_s - Z^p_s\right|^2 ds - \int_0^{T\wedge\tau}\psi^{'}(Y^n_s - Y^p_s)(Z^n_s - Z^p_s)\,dW_s.\end{aligned}$$

Nous transférons maintenant les termes en $|Z_s^n - Z_s^p|^2$ et $|Z_s^n - Z_s|^2$ du côté gauche de l'inégalité, et nous prenons l'espérance. Comme $Y^n - Y^p$ est borné,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(Z_s^n - Z_s^p\right) dW_s\right] = 0,$$

et,

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(Y_0^n - Y_0^p\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \left(\frac{1}{2}\psi'' - K\psi'\right)\left(Y_s^n - Y_s^p\right)|Z_s^n - Z_s^p|^2 - K\psi'\left(Y_s^n - Y_s^p\right)|Z_s^n - Z_s|^2 ds\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\psi\left(Y_T^n - Y_T^p\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(2k_s + K|Z_s|^2\right) ds\right].$$

On veut passer à la limite lorsque $p \to \infty$ le long de la sous-suite $(n_j)_j$ définie en (3.8). La convergence de $Y^p \to Y$ se fait dans une direction ponctuelle, et Y^p étant borné, on a, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (1.6.5),

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(Y_0^n - Y_0\right)\right] + \lim_{p\to\infty}\inf_{p\in(n_j)} \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \left(\frac{1}{2}\psi'' - K\psi'\right)\left(Y_s^n - Y_s\right)|Z_s^n - Z_s^p|^2 ds\right]$$
$$- \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} K\psi'\left(Y_s^n - Y_s\right)|Z_s^n - Z_s|^2 ds\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\psi\left(Y_T^n - Y_T\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s\right)\left(2k_s + K|Z_s|^2\right) ds\right],$$

et comme

$$\lim_{p\to\infty}\inf_{p\in(n_j)}\left[-\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s\right)|Z_s^n - Z_s^p|^2 ds\right]\right] \leq -\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s\right)|Z_s^n - Z_s|^2 ds\right],$$

nous obtenons,

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(Y_0^n - Y_0\right)\right] + \lim_{p\to\infty}\inf_{p\in(n_j)} \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \left(\frac{1}{2}\psi'' - 2K\psi'\right)\left(Y_s^n - Y_s\right)|Z_s^n - Z_s^p|^2 ds\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\psi\left(Y_T^n - Y_T\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi'\left(Y_s^n - Y_s\right)\left(2k_s - K|Z_s|^2\right) ds\right].$$

Nous mettons :

$$h = \left(\frac{1}{2}\psi^{''} - 2K\psi^{'} \right) (Y_s^n - Y_s) .$$

Nous choisissons maintenant ψ de telle manière que $h = 1$, à savoir,

$$\psi (u) = \frac{1}{4} [\exp (4Ku) - 4Ku - 1] .$$

Il est facile de vérifier que ψ est une fonction de $\mathcal{C}^{\infty}$, croissante sur $[0, 2M]$ et telle que $\psi^{'} (0) = \psi (0) = 0$. Notant que par la convexité de la fonctionnelle $l.s.c$,

$$J (Z) = \mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds \right],$$

on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds \right] \leq \lim_{p\to\infty} \inf_{p\in(n_j)} \mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds \right],$$

nous obtenons

$$\mathbb{E} [\psi (Y_0^n - Y_0)] + \mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds \right] \leq \mathbb{E} [\psi (Y_T^n - Y_T)] + \mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} \psi^{'} (Y_s^n - Y_s) \left(2k_s + K |Z_s|^2 \right) ds \right].$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (1.6.5), le membre de droite de cette inégalité converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, ainsi que le premier terme du membre de gauche. Maintenant, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, nous trouvons, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{E} \left[\int_0^{T\wedge\tau} |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds \right] = 0.$$

En conséquence, toute la suite $(Z^n)_n$ converge vers Z dans $\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$.

Étape 2 : La convergence uniforme d'une sous-suite de $(Y^n)_n$ à Y. À ce stade de la preuve, nous savons que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} Y_t^n = Y_t$, la suite $(Z^n)_n$ converge vers Z dans $\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$. Nous procédons comme dans [8] , en appliquant le lemme (3.2.1). Pour simplifier les notations, nous désignons toujours par $(Z^n)_n$ la sous-suite $(Z^{n_j})_j$

donnée par le Lemme (3.2.1) $\left(\text{resp.}\ (Y^n)_n \text{ et } (f^n)_n \text{ les suites } (Y^{n_j})_j \text{ et } (f^{n_j})_j\right)$, et donc on a :

$$Z^n \to Z \ p.s \ dt \otimes d\mathbb{P} \quad et \quad \tilde{Z} = \sup_n |Z^n| \in \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}).$$

Rappelant que la suite $(f^n)_n$ converge localement uniformément vers f, nous obtenons, pour presque tous $\omega \in \Omega$ et $t \in [0, \tau]$,

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) = f\left(t, Y_t, Z_t\right).$$

Comme f^n satisfait la condition (3.7), nous avons,

$$\begin{aligned} \left|f^n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right)\right| &\leq k_t + C \sup_n |Z_t^n|^2 \\ &= k_t + C\tilde{Z}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour presque tous les $\omega \in \Omega$ et, uniformément en $t \in [0, \tau]$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (1.6.5) donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f^n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) ds = \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds.$$

D'autre part, à partir des propriétés de continuité de l'intégrale stochastique, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s^n dW_s - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dW_s \right| = 0 \text{ en probabilité.}$$

En extrayant éventuellement une sous-suite, nous pouvons supposer que cette dernière convergence est $\mathbb{P}-p.s.$ Enfin,

$$\begin{aligned} |Y_t^n - Y_t^m| \leq |Y_T^n - Y_T^m| &+ \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \left|f^n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f^m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right)\right| ds \\ &+ \left| \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s^n dW_s - \int_t^\tau Z_s^m dW_s \right|. \end{aligned}$$

En prenant des limites sur m et le supremum sur $t \in [0, \tau]$, nous obtenons, pour presque tous les $\omega \in \Omega$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t| \leq |Y_T^n - Y_T| + \int_0^{T \wedge \tau} |f^n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f^m(s, Y_s, Z_s)|\, ds$$
$$+ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^\tau Z_s dW_s \right|,$$

de là, nous déduisons que $(Y^n)_n$ converge uniformément vers Y pour $t \in [0, T]$ (en particulier, Y est un processus continu si les Y^n le sont). Nous pouvons maintenant passer à la limite dans,

$$Y_t^p = Y_T^p + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} f^p(s, Y_s^p, Z_s^p)\, ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s^p dW_s,$$

pour obtenir que (Y, Z) est une solution du $EDSR$ avec les paramètres (f, ξ). ■

Preuve. (**Preuve du Théorème (3.2.1)**) La preuve consiste maintenant à trouver une bonne approximation de f, afin d'appliquer le théorème précédent. Nous utilisons un argument de troncature pour contrôler la croissance de f en y et un changement exponentiel pour contrôler sa croissance en z.Nous supposons d'abord que au lieu de (3.6), le coefficient f satisfait la condition suivante : il existe α_0, $\beta_0 \in \mathbb{R}$, et, B, $C \in \mathbb{R}^+$, tels que, pour tout $(t, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$f(t, y, z) = a_0(t, y, z)\, y + f_0(t, y, z),$$

avec

$$\begin{cases} \beta_0 \leq a_0(t, y, z) \leq \alpha_0, \\ |f_0(t, y, z)| \leq B + C|z|^2 \quad p.s, \end{cases} \tag{3.9}$$

et de plus, soit :

1) Le temps terminal est borné $\tau \leq T$ $p.s.$

2) Le temps terminal est fini $\tau < \infty$ $p.s.$ et $\alpha_0 < 0$.

Soit (g, τ, ζ) un ensemble de paramètres tel que :

$$g \leq f \quad \text{et} \quad \zeta \leq \xi, \tag{3.10}$$

et supposons qu'il ait une solution $(Y_g, Z_g) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$. Notre objectif est de trouver une solution $(Y, Z) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$ de l'$EDSR$ avec les paramètres (f, τ, ξ) tel que :

$$Y_g \leq Y.$$

D'après la Proposition (3.2.1), configuration

$$\tilde{M} = \begin{cases} \left(\|\xi\|_\infty + BT\right) \exp\left(\alpha_0^+ T\right), & \text{dans le cas } (1)\,, \\ \|\xi\|_\infty + \frac{B}{|\alpha_0|}, & \text{dans le cas } (2)\,, \end{cases}$$

pour toute solution (Y, Z) de (f, τ, ξ), on a

$$\|Y\|_\infty \leq \tilde{M}.$$

Nous définissons

$$M = \max\left(\tilde{M}, \|Y_G\|_\infty\right). \tag{3.11}$$

Pendant la preuve, nous utiliserons à plusieurs reprises des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, $\phi_K : \mathbb{R} \to [0,1]$ telles que :

$$\phi_K(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } |u| \leq K \\ 0, & \text{si } |u| \geq K+1 \end{cases} \tag{3.12}$$

Étape 1 : (Le changement exponentiel.) Le changement exponentiel $y = \exp(2Cu)$ transforme formellement une $EDSR$ avec les paramètres (f, τ, ξ) en une $EDSR$ avec les paramètres $(F, \tau, \exp(2Cu))$ où

$$F(t,y,z) = 2Cyf\left(t, \frac{\ln(y)}{2C}, \frac{z}{2Cy}\right) - \frac{1}{2}\frac{|z|^2}{y},$$

et

$$G(t,y,z) = 2Cyg\left(t, \frac{\ln(y)}{2C}, \frac{z}{2Cy}\right) - \frac{1}{2}\frac{|z|^2}{y}.$$

Nous considérons une fonction $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que :

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in [\exp(-2CM), \exp(2CM)] \\ 0, & \text{si } u \notin [\exp(-2C(M+1)), \exp(2C(M+1))], \end{cases}$$

Nous utilisons la convention $0 \times \infty = 0$ pour simplifier les notations ; nous définissons, pour $(t,y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\tilde{F}(t,y,z) = \psi(y) F(t,y,z) \quad \text{et} \quad \tilde{G}(t,y,z) = \psi(y) G(t,y,z).$$

On a :

$$l(y) = \psi(y)(\alpha_0 y \ln(y) + 2CBy),$$

et,

$$\psi(y)\left(\beta_0 v \ln(y) - 2CBy - \frac{|z|^2}{y}\right) \leq \tilde{F}(t,y,z) \leq l(y).$$

Nous remarquons que l est une fonction Lipschitz continue bornée par une constante, disons, L.

Nous remarquons également que si nous définissons

$$y_g = \exp(2CY_g) \quad \text{et} \quad z_g = 2CZ_g \exp(2CY_g),$$

la paire (y_g, z_g) est une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres $(G, \tau, \exp(2C\xi))$.

Étape 2 : L'approximation. Nous pouvons approximer $\tilde{F}$ par une suite décroissante de fonctions uniformément Lipschitz continues $(F^p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $(t,y,z)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$,

$$\tilde{G}(t,y,z)\leq\tilde{F}(t,y,z)\leq F^p(t,y,z)\leq l(y)+\frac{1}{2^p}.$$

Par exemple, si $\tilde{F}^p$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ tel que :

$$F+\frac{1}{2^{p+1}}\leq\tilde{F}^p\leq F+\frac{1}{2^p}$$

(l'existence de telles fonctions est garantie par un argument standard de régularisation), et si les fonctions ϕ_p sont définies comme dans (3.12), une manière de les obtenir est de définir, pour tout $p\in\mathbb{N}$

$$F^p(t,y,z)=\tilde{F}^p(t,y,z)\,\phi_p(|y|+|z|)+\left(l(y)+\frac{1}{2^p}\right)(1-\phi_p(|y|+|z|)).$$

Ensuite, des résultats classiques d'existence et de comparaison pour les coefficients Lipschitz continus donnent pour chaque p l'existence et l'unicité d'une solution (y^p,z^p) de l'$EDSR$ avec les paramètres (F^p,τ,ξ), et

$$y_g\leq y^{p+1}\leq y^p\leq y^1.$$

De plus, dans le cas (2), nous remarquons que le processus $(\exp(2CM),0)_{t\leq\tau}$ est la solution de la $EDSR$ avec les paramètres $(0,\tau,\exp(2CM))$ et le processus $(\exp(-2CM),0)_{t\leq\tau}$ est la solution de la $EDSR$ avec les paramètres $(0,\tau,\exp(-2CM))$. Puisque pour p suffisamment grand,

$$\exp(2CM)\geq\exp(2C\xi)\quad\text{et}\quad 0\geq F^p(\exp(2CM),0),$$

et pour tout p,

$$\exp\left(-2CM\right) \leq \exp\left(2C\xi\right) \quad \text{et} \quad 0 \leq F^p\left(\exp\left(-2CM\right), 0\right),$$

Le résultat de comparaison pour les coefficients continus de Lipschitz (voir [6]) donne, pour tout p suffisamment grand,

$$\exp\left(-2CM\right) \leq y^{p+1} \leq y^p \leq \exp\left(2CM\right) \quad p.s \quad \forall\ t \geq 0.$$

On revient au premier problème via le étape

$$f^p\left(t, u, z\right) = \frac{F^p\left(t, \exp\left(2Cu\right), 2C\exp\left(2Cu\right)z\right)}{2C\exp\left(2Cu\right)} + C\left|z\right|^2,$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(t, u, z\right) &= \frac{\tilde{F}\left(t, \exp\left(2Cu\right), 2C\exp\left(2Cu\right)z\right)}{2C\exp\left(2Cu\right)} + C\left|z\right|^2 \\ &= \psi\left(\exp\left(2Cu\right)\right) f\left(t, u, z\right) + \left(1 - \psi\left(\exp\left(2Cu\right)\right)\right) C\left|z\right|^2.\end{aligned}$$

La paire (Y^p, Z^p) définie par :

$$Y_t^p = \tfrac{\ln\left(y_t^p\right)}{2C} \quad \text{et} \quad Z_t^p = \tfrac{z_t^p}{2Cy_t^p},$$

est une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres (f^p, τ, ξ). Récapitulons ce que nous avons obtenu.

1) La suite $\left(\tilde{f}^n\right)$ converge vers $\tilde{f}$ localement uniformément sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\xi^n \in L^\infty\left(\Omega\right)$ et $\left(\xi^n\right)_n$ converge vers ξ dans $L^\infty\left(\Omega\right)$.

2) Il existe K, $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\left(t, u, z\right) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \left|f^n\left(t, u, z\right)\right| \leq K + C\left|z\right|^2.$$

3) Pour chaque n, l'$EDSR$ avec les paramètres $\left(\tilde{f}^n, \tau, \xi^n\right)$ a une solution,

$$(Y^n, Z^n) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d),$$

telle que la suite $(Y^n)_n$ est décroissante, et il existe $\overline{M} > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Y^n\|_\infty \leq \overline{M}$ $\left(\text{avec } \overline{M} = M \text{ dans le cas } (2)\right)$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_g \leq Y^n$.

Par conséquent, en appliquant le Proposition (3.2.2), le processus $(Y^p)_p$ converge uniformément vers Y et il existe Z dans $\mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$, tel qu'une sous-suite de $(Z^p)_p$ converge vers Z et (Y, Z) est une solution de

$$Y_t = \xi + \int_t^T \tilde{f}(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

De plus, nous prouvons que

$$\|Y^n\|_\infty \leq M. \tag{3.13}$$

À la lumière de l'observation ci-dessus, nous n'avons besoin de donner la preuve que dans le cas (1). En effet, cela découle de la Proposition (3.2.1) comme :

$$\tilde{f}(t, y, z) = \tilde{a}_0\,(t, u, z) + \tilde{f}_0(t, u, z),$$

avec

$$\tilde{a}_0\,(t, u, z) = \psi\,(\exp\,(2Cu))\, a_0\,(t, u, z) \leq \alpha^+,$$

et

$$\tilde{f}_0(t, u, z) = \psi\,(\exp\,(2Cu))\, \tilde{f}_0(t, u, z) + (1 - \psi\,(\exp\,(2Cu)))\, C\,|z|^2\,;$$

par conséquent,

$$\left|\tilde{f}_0(t, u, z)\right| \leq B + 3C\,|z|^2\,.$$

Par le corollaire (3.2.1), nous avons :

$$\|Y\|_\infty \leq (\|\xi\|_\infty + BT)\exp\left(\alpha^+ T\right) = \widetilde{M} \leq M.$$

Par conséquent, (Y, Z) est également une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres (f, τ, ξ).De plus,

$$Y_g \leq Y \quad \text{et} \quad \|Y\|_\infty \leq M.$$

Étape 3 : La troncature. Supposons maintenant que f satisfait (3.6). Soit (g, τ, ζ) un ensemble de paramètres tel que (3.10) est vraie et soit $(Y_g, Z_g) \in \mathcal{H}_\tau^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}^d)$, une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres (g, τ, ζ). M défini par (3.11), nous posons pour tout $(t, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\overline{f}(t, y, z) = a_0(t, y, z)\, y + f_0(t, \phi_M(y)\, y, z), \quad \overline{g}(t, y, z) = g(t, \phi_M(y)\, y, z).$$

Le coefficient $\overline{f}$ satisfait (3.9), et (Y_g, Z_g) est également une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres $(\overline{g}, \tau, \zeta)$. En appliquant les **étapes 1** et **2**, nous obtenons une solution (Y, Z) de l'$EDSR$ avec les paramètres $\left(\overline{f}, \tau, \xi\right)$ tels que $Y_g \leq Y$. Comme $\|Y\|_\infty \leq M$, le processus (Y, Z) est également une solution avec le coefficient f. Nous avons ainsi prouvé l'existence d'une solution maximale. La preuve de l'existence d'une solution minimale repose sur la même preuve mais avec le changement de variable $y = \exp(-2Cu)$. $\blacksquare$

3.3 Unicité et stabilité :

le cadre unidimensionnel nous permet de prouver un principe de comparaison entre les sous-solutions et les sur-solutions, ce qui implique l'unicité comme corollaire. Nous le donnons pour les $EDSRs$ avec une condition terminale bornée ξ et avec un coefficient f qui est localement continu de Lipschitz et qui a une croissance quadratique en Z au sens fort (c'est-à-dire que les dérivées partielles de f ont une croissance linéaire). Nous rappelons d'abord qu'une sur-solution (resp. une sous-solution) d'une $EDSR$ avec un coefficient f et une condition terminale ξ est un processus adapté $(Y_t, Z_t, C_t)_{0\leq t\leq T}$ tels que :

$$Y_t \;=\; \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T dC_s \left(resp - \int_t^T dC_s \right), \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $(C_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus croissant continu à droite ($C \in CCD$). Dans le cadre classique (c'est-à-dire lorsque f est continu de Lipschitz en Y et Z, et lorsque ξ est carré intégrable), on suppose que le processus $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est supposé carré intégrable (cette notion est introduite dans[6]). En raison de la croissance quadratique du coefficient, nous supposerons ici que $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus borné unidimensionnel et que $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus intégrable sur le carré $\left((Y_t, Z_t) \in \mathcal{H}_T^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_T^2(\mathbb{R}^d)\right)$.
Nous disons que le coefficient f satisfait la condition (3.14) sur $[-M, M]$ avec l, k et C si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $u \in [-M, M]\,, z \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{cases} |f\,(t, u, z)| \leq l\,(t) + C\,|z|^2 \quad p.s, \\ \left|\frac{\partial f}{\partial z}\,(t, u, z)\right| \leq k\,(t) + C\,|z| \quad p.s. \end{cases} \tag{3.14}$$

et le coefficient f satisfait la condition (3.15) avec c_ε et ε si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\,(t, u, z)\right| \leq l_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\,|z|^2 \quad p.s \tag{3.15}$$

Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 (Principe de comparaison) *Soient (f^1, τ, ξ^1) et (f^2, τ, ξ^2) deux ensembles de paramètres pour les $EDSRs$ et supposons que :*

i) *$\xi^1 \leq \xi^2$ p.s et $f^1 \leq f^2$.*

ii) *Pour tout* ε, $M > 0$ *il existe* l, $l_\varepsilon \in L^1_\tau$, $k \in L^2_\tau$, $C \in \mathbb{R}$ *tel que soit* f^1 *ou* f^2 *satisfait à la fois la condition (3.14) sur* $[-M, M]$ *avec* l, k *et* C *et satisfait à la fois la condition (3.15) sur* $[-M, M]$ *avec* l_ε *et* ε.

Alors si $(Y^1_t, Z^1_t, C^1_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}^\infty_T(\mathbb{R})\times\mathcal{H}^2_T(\mathbb{R}^d)\times CCD(\mathbb{R})$, *(resp* $(Y^2_t, Z^2_t, C^2_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}^\infty_T(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2_T(\mathbb{R}^d) \times CCD(\mathbb{R})$*) est une sous-solution (resp. une sur-solution) de l'EDSR avec les paramètres* (f^1, τ, ξ^1) *(resp* (f^2, τ, ξ^2)*), on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad Y^1_t \le Y^2_t \quad p.s.$$

Remarque 3.3.1 *Cela reste vrai si soit* $f^1(t, Y^1_t, Z^1_t) \le f^2(t, Y^1_t, Z^1_t)$ *p.s. pour tout* t *et que* f^2 *satisfait (3.14) et (3.15), ou si* $f^1(t, Y^2_t, Z^2_t) \le f^2(t, Y^2_t, Z^2_t)$ *p.s, pour tout* t *et que* f^1 *satisfait (3.14) et (3.15).*

Nous présentons le Théorème suivant.

Théorème 3.3.2 (Stabilité des $EDSRs$**)** *Soit* (f^n, τ, ξ^n) *une suite de paramètres de* $EDSR$ *telle que :*

i) *Il existe* α_0, β_0, $b \in \mathbb{R}$ *et une fonction croissante* c *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le coefficient* f^n *satisfait la condition (3.6) avec* α_0, β_0, $b \in \mathbb{R}$ *et* c.

ii) *Pour tout* n *il existe une solution* (Y^n, Z^n) *à l'*$EDSR$ *avec les paramètres* (f^n, τ, ξ^n).

Soit (f, τ, ξ) *un ensemble de paramètres de* $EDSR$ *tel que le coefficient* f *satisfait les hypothèses du Théorème (3.3.1).*

En suite, si la suite $(f^n)_n$ *converge vers* f *localement uniformément sur* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, *et si la suite* $(\xi^n)_n$ *converge vers* ξ *dans* L^∞, *il existe une paire de processus adaptés* $(Y, Z) \in \mathcal{H}^\infty_\tau(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d)$, *telle que la suite* $(Y^n)_n$ *converge uniformément vers* Y *sur* $[0, T]$ *pour tout* T, $(Z^n)_n$ *converge vers* Z *dans* $\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}^d)$ *et* (Y, Z) *soit la solution de l'*$EDSR$ *avec les paramètres* (f, ξ).

Preuve. Nous définissons

$$g^n = \sup_{p \geq n} f^p, \qquad H^n = \inf_{p \geq n} f^p,$$

et

$$\xi^{n*} = \sup_{p \geq n} \xi^p, \qquad \xi_*^n = \inf_{p \geq n} \xi^p,$$

et nous considérons les solutions maximales (Y^{n*}, Z^{n*}) de l'$EDSR$ avec les paramètres (H^n, ξ^{n*}) et les solutions minimales (Y_*^n, Z_*^n) de l'$EDSR$ avec les paramètres (g^n, ξ_*^n), comme tous deux :

i) La suite $(\xi^{n*})_n$ est décroissante et la suite $(g^n)_n$ est décroissante et converge localement uniformément vers f.

ii) La suite $(\xi_*^n)_n$ est croissante et la suite $(H^n)_n$ est croissante et converge localement uniformément vers f.

Ensuite, nous avons :

i) La suite $(Y^{n*})_n$ est bornée et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$Y^{n*} \geq Y^n,$$

donc par le Proposition (3.2.2), il existe (Y^*, Z^*) tel que $(Y^{n*})_n$ converge uniformément vers Y^{n*}, et (Y^*, Z^*) est une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres (f, τ, ξ).

ii) La suite $(Y_*^n)_n$ est bornée et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_*^n \leq Y^n,$$

donc par le Proposition (3.2.2), il existe (Y_*, Z_*) tel que $(Y_*^n)_n$ converge uniformément vers Y_*, et (Y_*, Z_*) est une solution de l'$EDSR$ avec les paramètres (f, τ, ξ).

iii) Par le Théorème (3.3.1), nous avons à la fois

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_*^n \leq Y^n \leq Y^{n*} \quad \text{et} \quad Y_* = Y^* = Y;$$

donc la suite $(Y^n)_n$ converge uniformément vers Y. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'intéressé à étudier les solutions l'$EDSR$. Premièrement, on a présenté quelques rapples préliminaires sur les $EDSRs$. Ensuite, on a démontré le théorème fondamental d'existence et d'unicité d'une solution pour les $EDSRs$ dû à Pardoux et Peng (1990) dans le cas où le générateur f est non-linéaire et lipschitzien par rapport aux deux variables y et z. La preuve est basée sur le théorème du point fixe. Le deuxième résultata étudié le problème de l'existence et et l'unicité des solutions pour une $EDSR$ dont le générateur f est de croissance quadratique et convergente vers f, on va montrer $EDSR$ générale, dont le coefficient est continu avec une croissance quadratique, dont le temps terminal n'est pas nécessairement déterministe ni borné et dont la condition terminale peut être un temps d'arrêt. on va donner d'abord des résultats d'existence sous des hypothèses générales. on va donner ensuite un résultat d'unicité : le cadre unidimensionnel. nous permet de fournir un résultat de comparaison qui implique l'unicité en tant que sous-produit. Finalement, pour le prouver, nous utilisons des hypothèses plus fortes sur le coefficient f que sur le résultat d'existence : la croissance quadratique s'entend grosso modo comme une croissance linéaire sur les dérivées partielles de f par rapport à Z. Nous donnons également un résultat de stabilité : les solutions (Y^n, Z^n) des $EDSRs$ de paramètres (F^n, ξ^n) convergent vers l'unique solution (Y, Z) des $EDSRs$ de paramètres (f, ξ) sous des hypothèses très générales de convergence de $(f^n)_n$ vers f lorsque f satisfait aux hypothèses requises pour que le résultat d'unicité soit valable.

Bibliographie

[1] Bismut, J.M (1973) Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Anal. Appl. 44 : 384-404.

[2] Boccardo, L, Murat, F. and Puel, J.-P. (1983). Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique. In Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Research Notes in Math. 84 19–73. Pitman, London.

[3] Briand, P. (2001). equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] G. Fubini, (1907), Sugli integrali multipli, Rom. Acc. L. Rend. 5, pp. 608-614, (1907).

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7

[6] El Karoui, N. Peng, S. and Quenez, M.-C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. Math. Finance 7 1–71.

[7] Kobylanski, M, (2000), Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth, Ann. Probab, 28(2) : 558–602, 2000.

[8] Lepeltier, J -P. and San Martin, J. (1997). Backward stochastic differential equations with continuous coefficients. Statist Probab. Lett. 32 425–430.

[9] Marie Amélie Morlais, 2007. Equations différentielles stochastiques rétrogrades à croissance quadratique et applications. Mathématiques [math]. Université

Rennes 1, 2007. Français. NNT : tel-00179388

[10] Pardoux, E, & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1). 55-61.

[11] S. Peng, (1992), Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations, SIAM J. Control Optim. 30 (1992), no. 2, 284–304

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Abréviations		La signification
$\mathbb{E}(.)$	:	Espérence par rapport à la probabilié $\mathbb{P}$ (espérence mathématique).
$a \wedge b$	:	min(a,b).
$\langle ., . \rangle$	:	Produit scalaire ($\lvert . \rvert$: la norem induite par $\langle ., . \rangle$).
$i.e$	:	c'est-à-dire.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel eclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{k \times d}$	:	Ensemble des matrices réelles $\mathbb{R}^{k \times d}$.
$\mathbb{P} - p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilié $\mathbb{P}$.
$(.) \otimes (.)$	:	Produit tensoriel, (si $x,\ y \in \mathbb{R}^d,\ x \otimes y = xy^*$).
$dt \otimes d\mathbb{P}$	:	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$.
z^*	:	Transposée de la matrice z.
L^1	:	Espace des processus intégrables.
L^2	:	Espace des processus de carré intégrables.

Les lettres grecs

ζ	ϕ	ξ	β	α	ε	τ	ψ, Ψ	$\Omega,\ \omega$
zeta	phi	xi	beta	alpha	varepsilon	tau	psi	omega

.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة،بدراسة المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية. مع التركيز على دراسة هذه المعادلات في الحالة التربيعية. للقيام بذلك، نبدأ بالتذكير بالأدوات الرياضية الضرورية، والتي تلعب دورًا أساسيًا في الحساب العشوائي. ثم سنعرض نتيجة وجود وتفرد حل المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية.وأخيرا سوف نقوم بدراسة طرق حل هذه المعادلات ومعالجة حالات المتغيرات العشوائية بمعاملات ليبتشيتز، بالإضافة إلى دراسة وجود وتفرد الحلول في ظل الظروف التربيعية للمتغيرات في المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية.

كلمات مفتاحية: **المعادلات التفاضلية العشوائية** التراجعية، **المعادلات التفاضلية العشوائية** التراجعية التربيعية،وجود ووحدانية،**عملية عشوائية.**

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs). On s'intéresse à l'étude de ces équations dans le cas quadratiques. Pour cela, on commence par un rappel des outils mathématiques nécessaires, qui jouent un rôle essentiel dans le calcul stochastique. Ensuite on va montrer un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de L'EDSR. En fin on va étudierles méthodes de résolution de ces équations et de traiter les cas des variables aléatoires avec des coefficients Lipschitz, en plus d'étudier l'existence et l'unicité des solutions sous des conditions quadratiques pour les variables dans les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Mots-clés :Équations différentielles stochastiques rétrogrades(EDSR), Équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques, l'existence et l'unicité, Processus stochastique.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of backward stochastic differential equations (BSDEs). We are interested in the study of these equations in the quadratic case. For this, we start with presenting somedefinitions and results doing a basic role in stochastic calculus. Next, we will proof existence and uniqueness results of solution of BSDE. Finally, we will study the methods for solving these equations and treating the cases of random variables with Lipschitz coefficients, in addition to studying the existence and uniqueness of solutions under quadratic conditions for the variables in backward stochastic differential equations (BSDEs).

Keywords: backward stochastic differential equations (BSDE), backward stochastic differential equations with quadratic growth, existence and uniqueness, stochastic process.