République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

ROUINA Youcef

Titre :

La Moyenne : Estimation et application

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	SAYAH Abdallah	UMKB	Président
Dr.	KHEIREDDINE Souraya	UMKB	Encadreur
Dr.	BENELMIR Imen	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail à

mes chers parents

mes frères et mes sœurs

mes amis

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie mon Dieu qui m'a donné la force et le courage afin d'accomplir ce travail.

Un grand merci pour mon encadreur ***Dr. Kheireddine Souraya*** *pour la confiance qu'il nous a accordée, et surtout ses encouragements, et ses précieux conseils.*

Je tiens aussi à remercier également membres de jury ***Pr. Sayah Abdallah*** *et* ***Dr. Benelmir Imen****, pour avoir fait l'honneur d'accepter de jurer ce travail.*

Je remercie tous ceux qui nous ont enseignés durant toutes nos études à département de mathématiques.

Finalement, un grand merci à mes familles, mes chères amies et à toutes les personnes qui nous ont encouragés pendant la réalisation de mon mémoire.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'importance de la moyenne empirique en estimation paramétrique, ainsi en test paramétrique et on a abordé ses propriétés asymptotiques, et nous avons donné quelques exemples sur cet estimateur.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le concept de la moyenne théorique, ou simplement la moyenne est l'un des concepts les plus fondamentaux en statistique, il est largement utilisé pour représenter de manière concice les valeurs d'une variable aléatoire. Les distributions et les propriétés statistiques de la moyenne est crucial pour de nombreuses applications dans des domaines tels que l'économie, analyse de données...

L'estimation de la moyenne est un processus crucial dans la prise de décision et la modélisation statistique. Elle permet d'obtenir une valeur approximative de la moyenne d'une population a partir d'un échantillon de données. Cette estimation est largement utilisée dans de nombreux domaines. En effet, la moyenne est souvent utilisé pour résumer des données et en extraire des informations utiles pour la prise de décision.

Dans ce mémoire nous aborderons deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux quelques notions et définitions de base en statistique, propriétés d'un estimateur, estimation paramétrique ....et enfin le convergence des suites des variables aléatoires.

Le deuxième chapitre représente le concept de l'estimateur de la moyenne (c'ést-a-dire la moyenne empirique) et son intervention en estimation paramétrique ainsi son importance en test paramétrique, en plus de mentionner certaines de ses propriétés distinctives.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques notions élémentaires, définitions et exemples dans l'estimation paramétrique.

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Echantillon

Définition 1.1.1 (Echantillon) *On appelle n-échantillon de la loi P_k, la donnée d'un vecteur $X = (X_1, ...X_n)$ constitué de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées* $(i.i.d)$.

1.1.2 Statistique

Définition 1.1.2 (Statistique) *Une statistique T est une fonction mesurable des variables aléatoires qui donne des informations sur un paramètre de la population*

$$T = f(X_1, X_2, ..., X_n) \tag{1.1}$$

– La variance empirique :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{1.2}$$

– La fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}} \tag{1.3}$$

1.1.3 Estimateur

Définition 1.1.3 (Estimateur) *Un estimateur T de θ sera une statistique $T = f(X_1, ..., X_n)$ et sa réalisation sera notée $t = f(X_1, ...X_n)$.*

1.1.4 Biais

Définition 1.1.4 (Biais) *Le biais de l'estimateur $\widehat{\theta}$ de θ est la fonction définie sur $\ominus$ par :*

$$B(\theta) = E(\widehat{\theta}) - \theta, \qquad \theta \in \ominus \tag{1.4}$$

1.2 Propriétés générales d'un estimateur

1.2.1 Estimateur sans biais

Définition 1.2.1 *On dit que $\widehat{\theta}$ un estimateur de θ est sans biais si*

$$B(\theta) = E(\widehat{\theta}) - \theta = 0 \tag{1.5}$$

1.2.2 Estimateur asymptotiquement sans biais

Définition 1.2.2 *On dit qu'un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ est asymptotiquement sans biais si*

$$\lim_{n\to\infty} B(\theta) = 0 \text{ où } \lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta.$$

Exemple 1.2.1 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n échantillon d'espérence μ et de variance σ^2*

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$, la variance empirique est un estimateur asymptotiquement sans biais en effet :

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(\overline{X}^2) = E(X^2) - E(\overline{X}^2) \\ &= (Var(X) + E^2(X)) - (Var(\overline{X}) + E^2(\overline{X})) \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\lim_{n\to\infty} E(S^2) = \lim_{n\to\infty} (\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \sigma^2$$

Définition 1.2.3 *On dit que $\widehat{\theta}$ est un estimateur convergent ou consistant si $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ quand $n \to \infty$, c'est-a-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon) = 0 \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.1 *Si un estimateur est sans biais ou asymptotiquement sans biais et si sa variance tend vers 0 alors, il est convergent.*

Définition 1.2.4 *On appelle erreur quadratic moyenne d'un estimateur $\widehat{\theta}$ par rap-*

port à θ, la quantité :

$$R(\theta) = Var(\widehat{\theta}) + B^2(\theta). \tag{1.7}$$

Proposition 1.2.2 *Soit $\widehat{\theta}$ un estimateur convergent du paramétre θ, et soit φ une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue au point θ. Alors $(\varphi(\widehat{\theta}))$ est un estimateur convergent.*

1.2.3 Estimateur avec biais(biaisé)

Définition 1.2.5 *On dit que $\widehat{\theta}$ est un estimateur avec biais de θ si :*

$$E(\widehat{\theta}) \neq \theta \text{ où } B(\widehat{\theta}) \neq 0.$$

Exemple 1.2.2 *Soit $(X_{1,\ldots}X_n)$ un n échantillon, S^2 est un estimateur biais de σ^2. (On sait que : $E(S^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2(\frac{n-1}{n}) \neq \sigma^2$, donc S^2 est un estimateur biais de σ^2).*

1.3 Estimation paramétrique

L'approche paramétrique consiste a supposer que les données suivent une distribution de probabilité dont la forme est connue, mais dont les paramètres exactes sont inconnus. L'objectif de cette approche est d'éstimer ces paramètres, il ya plusieurs méthodes pour éstimer ces paramètres comme la méthode de moment, la méthode du maximum de vraismblance et estimation par intervalle de confiance ce qu'on va éxpliquer dans le deuxième chapitre.

1.3.1 Modèle statistique

Définition 1.3.1 *On appelle modèle statistique, la donnée d'un éspace des observations E, d'une tribu ε d'évènement sur E et d'une famille de probabilités P sur* *l'éspace probabilisable (E, ε). On le note (E, ε, P) ou, quand il n'ya pas de risque de confusion, plus simplement P.*

1.3.2 Modèle paramétrique

Définition 1.3.2 *Un modèle paramétrique est un modèle dans lequelle on suppose que la loi de X est connue, mais qu'elle dépend d'une paramètre θ qui est inconnue elle s'écrit*

$$P = \{P_\theta : \theta \in \ominus \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Exemple 1.3.1 *Le modèle gaussien $\{N(u, \sigma^2), u \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$, le modèle de poisson $\{p(\lambda), \lambda > 0\}$ et le modèle exponentiel $\{\varepsilon(\lambda), \lambda > 0\}$ sont des modèles paramétriques.*

1.4 Convergence de suites de variable aléatoire

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoires réeles définies sur un éspace de probabilité.

1.4.1 Convergence en probabilité

Définition 1.4.1 *On dit qu'un suite des variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$

et on note :.$X_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{P}}{\to}} X$.

Théorème 1.4.1 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires sur le même éspace* *probabilisé* (Ω, P) *admettant des espérances et des variances vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0,$$

alors, les (X_n) *convergent en probabilité vers* l.

1.4.2 Convergence en loi

On rapelle que deux variables aléatoires ont même loi $(P_X = P_Y)$ si est seulement si elles ont la même fonction de répartition $(F_X = F_Y)$.

Définition 1.4.2 *Soient* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite des variables aléatoires reélles,* $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ *la suite des fonctions de répartitions correspondantes. On dit que* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* X *de fonction d répartition* F_X*, si*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t).$$

Proposition 1.4.1 *La suite de variables aléatoires* (X_n) *converge en loi vers* X *si est seulement si,*

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_{X_n}(t) = \Psi_X(t),$$

où Ψ_{X_n} *est la fonction génératrice de* X_n *et* Ψ_X *celle de* X.

1.4.3 Convergence en moyenne quadratique

Définition 1.4.3 *Une suite de variable aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$*, converge en moyenne quadratique d'ordre* q *vers* X *si* $E\left[(X_n - X)^q\right] \to 0$ *quand* $n \to \infty$

1.4.4 Convergence presque sûre

Définition 1.4.4 *On dit qu'une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge presque surement vers un variable aléatoire* X, *si*

$$\forall \omega \in A : \lim_{n\to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

On note $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}.\mathcal{S}}{\to}} X$.

Proposition 1.4.2 *Soit* (X_n) *telle que* $X_n \overset{\mathcal{P}.\mathcal{S}}{\to} X$ *et* g *une fonction continue alors :*

$$g(X_n) \underset{n\to\infty}{\overset{P.S}{\to}} g(X)$$

Proposition 1.4.3 *Soit* (X_n) *telle que* $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}.\mathcal{S}}{\to}} X$ *et* (Y_n) *telle que* $Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}.\mathcal{S}}{\to}} Y$ *si* f *est continue dans* $\mathbb{R}^2$ *alors :*

$$f(X_n, Y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}.\mathcal{S}}{\to}} f(X, Y)$$

Chapitre 2

Estimation de la moyenne

Dans ce chapitre, nous donnerons la formule de la moyenne empirique, et nous étudions les propriétés asymptotiques.

2.1 Estimateur empirique de la moyenne

Soit $(X_{1,\dots,}X_n)$ est un échantillon de même loi que X. On note que $m_\theta = E_\theta(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$.

Définition 2.1.1 (Moyenne empirique) *On appelle* ***moyenne empirique,*** *la statistique $\overline{X}$ définie pour une taille n d'échantillon par :*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.1}$$

Quand on peut écrire l'espérance de la v.a. X en fonction du paramètre du modèle, c'est -à-dire quand il existe une fonction g telle que $m_\theta = g(\theta)$ (ce qui est souvent le cas), alors on pourra donner le titre d'estimateur a $\overline{X}$. On dira alors qu'il estime m_θ.

2.1.1 Etude numérique de la moyenne empirique

On considère un échantillon de $X_1, ..., X_n$ i.i.d de loi uniforme sur $[a, b]$ avec a et b supposés inconnus. Le problème est d'estimer l'espérance de cette loi uniforme

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Un estimateur naturel est la moyenne empirique $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple 2.1.1 *Pour fixer les idées, on suppose dans cette partie que* $a = 0$ *et* $b = 1$ *. L'espérance à estimer vaut donc* 0.5 *(on peut faire comme si on le la connaissait pas). On considère deux échantillons de taille* 500 *générées selon une loi uniforme entre* 0 *et* 1 *:*

Code R :

```
echantillon1=runif(500)

echantillon2=runif(500)

M=c(mean(echantillon1),mean(ech))antillon2

>M

[1] 0.5117967 0.4979988
```

2.2 Méthodes d'estimation paramétrique

2.2.1 Méthode des moments

Le principe de cette méthode est on suppose qu'il existe une fonction h bijective et continue de $\theta \subset \mathbb{R}^p$ vers $h(\Theta) \subset \mathbb{R}^p$, et φ une fonction mesurable de E vers $\mathbb{R}^p$ telle que $E_\theta(\varphi(x))$ existe et toutes les deux telles que l'on ait :

$$h(\theta) = E(\varphi(X)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

Définition 2.2.1 *La méthode de moment consiste alors a estimer θ par :*

$$\widehat{\theta}(X) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i))$$

Preuve. On a

$$h(\theta) = E(\varphi(X)),$$

alors

$$\widehat{h(\theta)} = E\widehat{(\varphi(X)})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i),$$

puisque h est continue alors

$$\widehat{h(\theta)} = h(\widehat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i),$$

donc

$$\widehat{\theta} = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)).$$

■

Exemple 2.2.1 *Soit $X \sim G(\alpha, \beta)$ alors, $f_{\alpha,b}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-bx}$. On chercher a déterminer les estimateurs de $\theta = (\alpha, \beta)$.*

– On a $\varphi(X) = (X, X^2)$, donc

$$h(\alpha, \beta) = E(\varphi(X)) = E(X, X^2) = (E(X), E(X^2)) = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta}),$$

alors,

$$h(\alpha,\beta) = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta}).$$

On calcule h^{-1} on obtient

$$h^{-1}(u,v) = (\frac{u^2}{v-u^2}, \frac{u}{v-u^2}),$$

donc

$$\widehat{(\alpha,\beta)} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$$
$$= \left(\frac{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}, \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2} \right).$$

On trouve

$$\widehat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2}.$$
$$\widehat{\beta} = \frac{\overline{X}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2}.$$

Exemple 2.2.2 *Soit $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ alors $f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$.*

– On cherche a déterminer les estimateurs $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

On a $\varphi(X) = (X, X^2)$ alors,

$$h(\mu, \sigma^2) = E(\varphi(X)) = E(X, X^2) = (E(X), E(X^2)) = (\mu, \sigma^2 + \mu^2).$$

Donc

$$h(\mu, \sigma^2) = (\mu, \sigma^2 + \mu^2)$$

On calcule h^{-1} on obtient

$$h^{-1}(u, v) = (u, v - u^2)$$

alors,

$$\begin{aligned}\widehat{(\mu, \sigma^2)} = (\widehat{\mu}, \widehat{\sigma^2}) &= h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2) \\ &= (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\widehat{\mu} &= \overline{X} \\ \widehat{\sigma^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 La méthode de maximum de vraisemblance

Définition 2.2.2 *On appelle fonction de vraisemblance de θ pour une réalisation $x = (x_1, ...x_n)$ de l'échantillon $X = (X_1, ...X_n)$ la fonction de θ :*

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Exemple 2.2.3 *$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$. Donc*

$$L(x_1, ..., x_n; (\mu, \sigma^2)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Définition 2.2.3 *L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est définie comme suit :*

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(x_1, ...x_n; \theta) = \arg\max_{\theta\in\Theta} \log L(x_1, ...x_n; \theta)$$

Remarque 2.2.1 *Si la foncion de vraisemblance est concave alors elle admet un maximum unique atteint en $\widehat{\theta}$.*

Exemple 2.2.4 *Soit $X \sim \varepsilon(\lambda)$ alors $f_\theta(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$.*

– La vraisemblance pour un échantillon $(x_1, ...x_n)$ est :

$$L(x_1, ...x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

et la log vraisemblance :

$$\log L(x_1, ...x_n; \lambda) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On a

$$\frac{\partial \log L(x_1, ...x_n, \lambda)}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

et

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{\partial^2\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0.$$

Ainsi, la log vraisemblance est concave et son maximum est atteint en la valeur $\widehat{\lambda}$ telle que

$$\frac{n}{\widehat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

l'éstimateur du maximum de vraisemblace est donc

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}},$$

alors,

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Exemple 2.2.5 *Soit $X \sim B(1,p)$ alors $f_p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$. La vraisemblance pour un échantillon $x_1, ...x_n$ est :*

$$L(x_1, ..., x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f_p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

et la log vraisemblance est

$$\log L(x_1, ...x_n; p) = \log(p) \sum_{i=1}^{n} x_i + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \log(1-p).$$

On a

$$\frac{\partial \log L(x_1, ...x_n; p)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$$

et

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1, ...x_n; p)}{\partial^2 p} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{p^2} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^2} < 0$$

Ainsi, la log vraisemblance est concave et son maximum est atteint en la valeur $\widehat{p}$ telle que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\widehat{p}} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\widehat{p}} = 0,$$

alors, l'éstimateur de maximum de vraisemblance est

$$\widehat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

donc

$$\widehat{p} = \overline{X}.$$

2.2.3 Estimation par intervalle de confiance

Définition 2.2.4 *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi P. On appelle intervalle de confiance (IC) de niveau confiance $1-\alpha$ telles que $\alpha \in [0,1]$ donné, un intervalle aléatoire $[\theta_1, \theta_2]$ où $\theta_1 \leq \theta_2$ sont deux statistiques, telles que :*

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 1 - \alpha \tag{2.3}$$

Remarque 2.2.2 *α est donc la probabilité que $[\theta_1, \theta_2]$ ne recouvre pas la vraie valeur du paramètre.*

Théorème 2.2.1 *Soit $(X_1, ...X_n)$ un échantillon d'une v.a X qui suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$*

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ sa moyenne empirique et $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, alors :

1. $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale $N(0,1)$ (d'aprés la théorème de centrale limite).
2. $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ suit la loi de student T_{n-1} de degré de liberté $(n-1)$.

Estimation par intervalle de confiance de la moyenne de la loi normale

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une v.a X qui suit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. On cherche a éstimer la moyenne

Si la variance est connue On a $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ alors,

$$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$
$$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq (\overline{X}-\mu) \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$
$$P(\overline{X_n} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha.$$

Donc l'intervalle de confiance est :

$$IC = \left[\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'ordre $(1-\frac{\alpha}{2})$ de la loi $N(0,1)$.

Exemple 2.2.6 *Aprés des essais antérieurs, on peut supposer que la résistance a l'éclatement d'un certain type de résevoirs est une variable aléatoire suivant une loi normale $N(\mu,\sigma^2)$ ou $\sigma = 4kg/cm^2$. Des essais sur un échantillon de* 25 *réservoires donnent une résistance moyenne a l'éclatement égale a* 300 kg/cm^2*. Donc* $n = 25, \overline{X} = 300\ kg/cm^2, \sigma = 4\ kg/cm^2$*, le niveau de confiance :* $1-\alpha = 0.95, u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$*Alors*

$$P(300 - 1.96\frac{4}{5} \leq \mu \leq 300 + 1.96\frac{4}{5}) = 0.95$$

Donc

$$P(298.432 \leq \mu \leq 301.568) = 0.95.$$

L'intervalle de confiance est

$$IC = [298.432, 301.568].$$

L'intervalle $[298.432, 301.568]$ *a une probabilité égale a* 0.95 *de contenir la vraie valeur de la résistence a l'éclatement de ce type de réservoires.*

Si la variance est inconnue :

On n $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1} \sim T_{n-1}$ alors :

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$
$$P(-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{X}-\mu \leq \frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$
$$P(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha.$$

Donc, l'intervalle de confiance est :

$$IC(\mu) = \left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right],$$

où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ et le quantille d'ordre $(1-\frac{\alpha}{2})$ de la table de student a $(n-1)$ degré de liberté.

Exemple 2.2.7 *Soit un échantillon de taille $n = 20$ durées de vie d'un certain modèle de lampe on a obtenue comme moment empiriques $\overline{X} = 2000h$ et $S = 300h$. L'intervalle de confiance de niveau 0.95 pour la durée de vie moyenne μ est donc :*

$$P(2000 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{300}{\sqrt{19}} \leq \mu \leq 2000 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{300}{\sqrt{19}}) = 0.95$$

où $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.093$ d'ou l'intervalle de confiance de μ au niveau de confiance 0.95 est :

$$P(1855.95 \leq \mu \leq 2144.05) = 0.95,$$

Donc

$$IC(\mu) = [1855.95\ ;\ 2144.05]\,.$$

Remarque 2.2.3 *On remarque que tout les estimateurs dépends de la moyenne empirique d'ou l'importance de celle ci.*

2.3 Test statistique

Lors de l'estimation d'un (ou plusieurs) paramètre(s), on utilise des résultats échantillonaux afin d'approximer la valeur exacte inconnue du paramètre sans aucune idée préalable sur celle-ci, mais dans la majorité des applications, on peut avoire une certaine idée sur le paramètre de telle sorte qu'on puisse formuler une hypothèse concernant sa vraie valeur (toujour inconnue). Les résultats échantillonaux permettent alors de confirmer ou d'affirmer cette hypothèse.

Définition 2.3.1 *Un test statistique est une procédure de décision permettant de trancher entre deux hypothèses aprés l'observation de l'échantillion. les deux hypothèses sont généralement appelées hypothèses nulle et hypothèse alternative.*

Exemple 2.3.1 *Soit Θ_0 et Θ_1 deux sous ensembles disjoints de Θ. On veut savoire si la valeur du paramètre θ est dans Θ_0 ou dans Θ_1, alors on réalise le test dont les hypothèses sont :*

$$\begin{cases} H_0 = \theta \in \Theta_0 \\ H_1 = \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

2.3.1 Test paramétrique

Définition 2.3.2 *Un test est dit paramétrique si la population mère est de distribution connue, l'objet du test est alors de vérifier si certaines hypothèses relatives a un ou plusieurs paramètres de cette distribution.*

2.3.2 Hypothèses simples et hypothèses composites

Définition 2.3.3 *Pour les tests paramétriques on distingue : hypothèse simple et hypothèse composite :*

-*Une hypothèse H est dit simple si elle est de type $\theta = \theta_0$ ou $\theta_0 \in \Theta$.*

-*Une hypothèse H est dite composite si elle est de type $\theta \in A$ ou A est une partie de* Θ.

2.3.3 Erreurs et risque

Les deux hypothèses H_0 et H_1 sont telles que une et une seul vrai. Lors de la prise de décision qui aboutera a choisir H_0 ou H_1 quatre situations peuvent être envisagées :

– accepter H_0 est elle est vraie.

– rejeter H_0 elle est fausse.

– accepter H_0 elle est fausse.

– rejeter H_0 est elle est vraie.

Dans les deux premiers cas, la décision prise est bonne, mais les deux derniers cas, elle est erronée.

a. L'erreur qui consiste a rejeter une hypothèse vraie appelée erreur de première espèse et sa probabilité appelé risque de la première espèce. On le note α.

b. L'erreur commise en acceptant une hypothèse fausse est appelée erreur de la deuxième espèce et sa probabilité appelé risque de la deuxième espèce. On le note β

On a donc :

$$\alpha = P\left[\text{rejeter } H_0 \backslash H_0 \text{ est vraie}\right]$$

$$\beta = P\left[\text{accepter } H_0 \backslash H_0 \text{ est fausse}\right]$$

2.3.4 Région de rejet et région critique

La région de rejet d'un test est l'ensemble des points $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour lequel l'hypothèse nulle H_0 est écarté au profit de l'hypothèse alternative H_1. On appelle aussi région critique du test et on la note généralement par W, elle est définie par la relation :

$$P(W\backslash H_0) = \alpha$$

Le complémentaire de la région critique est appelé région d'acceptation du test, elle est notée par $\overline{W}$ et est définie par :

$$P(\overline{W}\backslash H_0) = \beta$$

2.3.5 Rapport de vraisemblance

La fonction de vraisemblance de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X, est définie

$$L_\theta(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \tag{2.4}$$

On pose

$$L_i(x_1, ..., x_n) = L_{\theta_i}(x_1, ..., x_n), \qquad i = 0, 1 \tag{2.5}$$

Le rapport

$$\frac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)}, \tag{2.6}$$

est appelé rapport de vraisemblance.

Exemple 2.3.2 (test entre deux hypothès simples) *Soit X une population normale d'espérence inconnue μ et $\sigma^2 = 2$ et $\alpha = 0,1$, on prélève un échantillion de taille 9 pour réaliser le test*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = -1 \end{cases}$$

D'abord on calcule le rapport de vraisemblance :

$$\frac{L_1(x_1,...,x_9)}{L_0(x_1,...,x_9)} = \frac{\prod_{i=1}^{9} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i+1)^2}{2}}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x_i{}^2}{2}}}$$
$$= e^{-\frac{9}{2}\overline{x}-\frac{9}{4}},$$

où $\overline{x}$ *est le moyenne empirique, la région de rejet (critique) est :*

$$W = (x_1,...,x_9) \in \mathbb{R}^9 : e^{-\frac{9}{2}\overline{x}-\frac{9}{4}} \geq k$$
$$= (x_1,...,x_9) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \leq \frac{-\frac{9}{4} - \ln(k)}{\frac{9}{2}} = c,$$

où la constante c est telle que :

$$P(W \backslash H_0) = P(W \backslash \mu = 0) = 0,1$$

Or, sous H_0, $\overline{X} \sim N(0, \frac{2}{9})$ *et* $Z = \frac{3\overline{X}}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$, *alors :*

$$P(\overline{X} \leq c) = 0.1$$
$$\Longrightarrow P(\frac{\overline{X}-0}{\sqrt{\frac{2}{9}}}) \leq \frac{c}{\sqrt{\frac{2}{9}}}) = 0.1$$
$$\Longrightarrow P(\frac{3\overline{X}}{\sqrt{2}}) \leq \frac{3c}{\sqrt{2}}) = 0.1$$
$$\Longrightarrow P(Z \leq \frac{3c}{\sqrt{2}}) = 0.1$$
$$\Longrightarrow \Phi(\frac{3c}{\sqrt{2}}) = 0.1$$
$$\Longrightarrow c = -0,6$$

Donc

$$W = (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \leq -0.6.$$

Remarque 2.3.1 *La moyenne empirique dans ce cas représente une statistique de test.*

2.4 Propriétes de l'estimateur

2.4.1 Convergence de l'estimateur

Théorème 2.4.1 *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n échantillon (i, i, d) d'éspérence u et de variance σ^2 alors l'éstimateur $\overline{X_n}$ de μ est faiblement convergent en probabilité (ou consistant)*

Preuve. On a

$$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu,$$

■

et

$$Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, Donc d'aprés l'inégalité de BienaymÈ-Tchebychev

$$P(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Alors $\overline{X}$ est un éstimateur consistant de μ.

2.4.2 Biais de l'estimateur

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n échantillon $(i.i.d)$ d'espérence μ et de variance σ^2. Alors la moyenne empirique $\overline{X}$ est un éstimateur sans biais de μ.

$$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu,$$

2.4.3 Loi faible des grands nombres

Théorème 2.4.2 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire et de même loi d'espérence μ et de variance σ^2 alors $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers $E(X) = u$ lorsque $n \to \infty$ autrement dit*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon) = 0$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, d'aprés l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

■

2.4.4 Théorème limite central

Le théorème centrale limite ou théorème de la limite centrale établit la convergence en loi de la somme de $v.a$ indépendantes et de même loi vers la loi normale, et nous verrons ci-dessous ce que dit cette théorème.

Théorème 2.4.3 *Soit (X_n) une suite de $v.a$ indépendantes et de meme loi, et de* *carré intégrable d'éspérence μ et de variance σ^2 alors :*

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0,1) \text{ où}$$

Preuve. Pour $k \geq 1$,Posons $Y_k = \frac{X_k-\mu}{\sigma}$

Les v.a Y_k sont indépendants et de meme loi, avec

$$E(Y_k) = \frac{1}{\sigma}(E(X_k)-\mu) = 0 \text{ et } Var(Y_k) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X_k) = 1$$

Pour tout $k \geq 1$,

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_k-\mu) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_k$$

Donc

$$\varphi_{Z_n}(t) = E(e^{itZ_n}) = E(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Yn}) = E(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}Y_1}\times ... \times e^{\frac{it}{\sqrt{n}}Y_n}) = \prod_{i=1}^{n}E(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}Y_k})$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\varphi_{Y_k}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = (\varphi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$$

En utilisant le développement limité au voisinage de 0

$$\varphi_{Y_1}(u) = \varphi_{Y_1}(0) + u\varphi'_{Y_1}(0) + \frac{u^2}{2}\varphi''_{Y_1}(0) + O(u^2)$$

On a $\varphi_{Y_1}(0) = 1$ et $\varphi'_{Y_1}(0) = 0$ et $\varphi''_{Y_1}(0) = -1$

Donc

$$\varphi_{Y_1}(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^2)$$

Alors

$$\varphi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + O(\frac{t^2}{2n})$$

Pour n assez grand on a

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t^2}{2n} + O(\frac{1}{2n}))^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Donc $(Z_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une v.a de loi $N(0,1)$. ■

2.4.5 Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$une suite de variable aléatoire indépendante et de meme loi, alors $\overline{X_n}$ converge presque surement vers $E(X_1) = u$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ autrement dit,

$$\overline{X} \underset{n\to\infty}{\overset{P.S}{\to}} E(X_1) = \mu$$

La loi forte des grands nombres permet d'affirmer que pour une loi admettant une espérance μ et une variance σ^2, la moyenne empirique $\overline{X}$ converge vers μ alors que le théorème de la limite centrale dit que la loi de la moyenne empirique $\overline{X}$ peut être approchée de mieux en mieux quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini par une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2/n.On peut illustrer ces propriétés par des expériences aléatoires appropriés, programmées avec R de la manière suivante.

Exemple 2.4.1 *Pour un échantillon de la loi uniforme sur* $[0, 1]$ *de taille* $n = 4000$*, voir la figure [2.1])*

Code R Fig2.1 :

```
n=4000

X=runif(n)

Y=cumsum(X)

N=seq(1,n, by=1)

LE=Y/N
```

```
plot(N, LE)

abline(h=0.5,col="red")
```

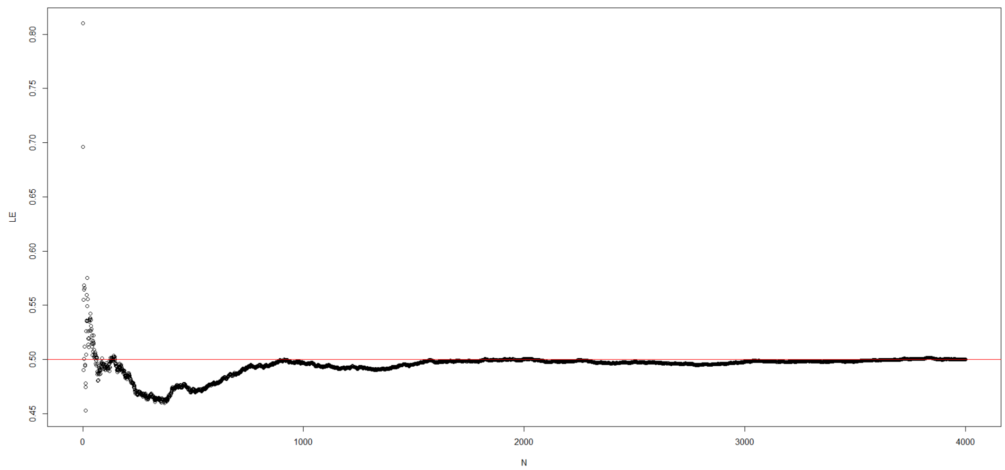

FIG. 2.1 – Illustration de la loi des grands nombres

On observe que la moyenne empirique converge bien vers la valeur $\mu = 0.5$ représentée par une droite horizontale rouge sur le graphique.

Exemple 2.4.2 *On génère un échantillon de taille n qui suit la loi poisson de paramètre λ et chaque foit on change la taille n et on estime le paramètre λ en utilisant la moyenne empirique (Figure [**2.2**]).*

Code R Fig 2.2 :

```
n=5000

N=20:n

s=length(N)

LE=numeric(s)

for(i in 1:s){X=rpois(i,2)

LE[i]=mean(X)}
```

```
plot(N,LE,type="l",ylim=c(0,6))
abline(h=2,col="red")
```

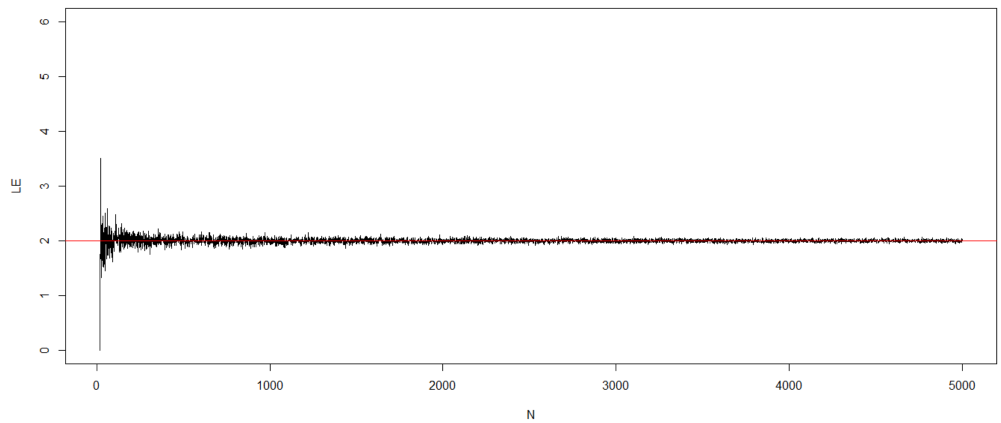

FIG. 2.2 – Estimation de paramètre lamda de loi Poisson

Si l'on simule maintenant 500 réalisations d'échantillons de tailles respectives $n = 10$ et $n = 100$, issus d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ on peut tracer sur un même graphique l'histogramme des moyennes empiriques associées et illustrer le fait que cet histogramme est proche de la densité de la loi normale de moyenne $\mu = 0.5$ et de variance σ^2/n avec $\sigma^2 = 1/12$. Voir la figure [2.3]

Code R fig 2.3

```
X=matrix(runif(500*10),ncol=10,nrow=500)
X1=apply(X,1,mean)
Y=matrix(runif(500*100),ncol=100,nrow=500)
Y1=apply(Y,1,mean)
par(mfrow=c(1,2))
hist(X1,main="Taille d'echantillon 10",prob=T)
curve(dnorm(x,0.5,sqrt(1/120)),add=T,col='red')
```

```
hist(Y1,main="Taille d'echantillon 100",prob=T)
curve(dnorm(x,0.5,sqrt(1/1200)),add=T,col='red')
```

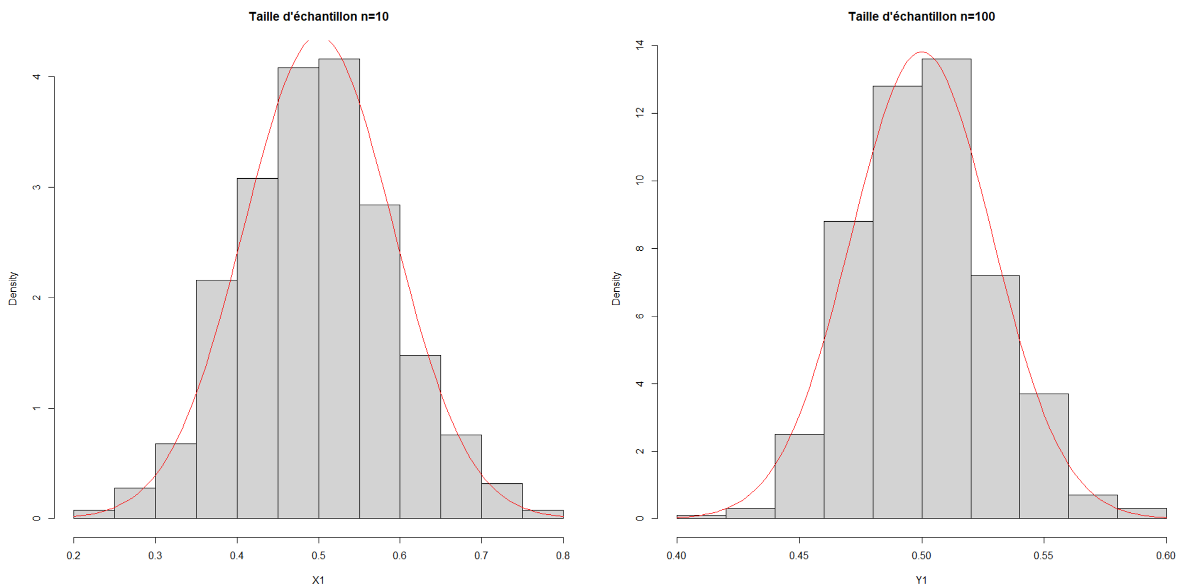

FIG. 2.3 – Illustration de la convergence en loi

Conclusion

La moyenne empirique revet une importance dans les méthodes d'estimation des paramètres et les tests paramétriques en statistique. En tant qu'un estimateur de la moyenne populationnelle, il permet d'estimer un paramètre inconnu dans une population a partir d'un échantillon. Dans les méthodes d'estimations (comme la méthode de moment et la méthode de maximum de vraisemblance), de plus dans le test paramétrique la moyenne empirique représente une statistique de test comme une variable de désicion. Ainsi la moyenne empirique est une mesure centrale joue un role essentiel dans de nombreuse analyses statistiques, offrant un outil précieux pour la compréhention et l'interprétation des données.

Parmi les avantages, l'estimateur de la moyenne empirique est considéré comme un estimateur simple et directe, ce qui la rend facile a comprendre et a appliquer. De plus, il est considéré comme un estimateur non biaisé, car il ne dépend pas d'une distribution spécifique.

Bibliographie

[1] Delmas, J. F. (2013). Introduction au calcul des probabilités et à la statistique (p. 315). Les Presses de l'ENSTA..

[2] GRAMMONT, L. (2003). COURS DE STATISTIQUES INFERENTIELLES Licence d'économie et de gestion.

[3] Lecoutre, J.P. (2002) *Statistique et probabilités*. Dunod, Paris.

[4] Lejeune, M. (2004). Statistique : La théorie et ses applications. Springer Science & Business Media.

[5] Millot, G. (2018). Comprendre et réaliser les tests statistiques à l'aide de R : manuel de biostatistique. De Boeck Supérieur.

[6] Pierre,D.(2017).Cours de statistique inférentielles.Licence 2-S4.SI-Mass.

[7] Saporta, G. (2006). Probabilités, analyse des données et statistique. Editions technip.

[8] Tassi,P.(1989).Méthodes statistiques.Economica,Paris.

[9] Veysseyre, R. (2014). Aide-mémoire-Statistique et probabilités pour les ingénieurs. Dunod.

Annexe A : Logiciel R

2.5 Qu'est-ce-que le langage R ?

est un système qui est communément appelé logiciel : R Development Core Team (2010). : A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http ://www.R-project.org/..

permet de réaliser des analyses des statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyennes qui rendent possibles la manipulation des données, les calculs et les représentations graphique, R à aussi la possibilité d'exécuter des programmes stokes dans des fichiers textes. En effet R possède :

1. déférentes opérateurs pour calcul sur tableaux, en particulier les matrices,
2. un grand nombre d'outils pour l'analyse des données et les méthodes statistique,
3. des moyennes graphiques pour visualiser les analyses,
4. un langage de programmation simple et performât comportant,
5. Conditions, boucles, moyennes d'entrées sorties...

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$v.a$	Variable aléatoire
$i.i.d$	indépendantes et identiquement distribuées
$E(X)$	Espérence mathématique ou moyenne du $v.a$ X
$Var(X)$	Variance du $v.a$ X
$\widehat{\theta}$	Estimateur de θ
$B_{\widehat{\theta}_n}(\theta)$	Le biais de l'estimateur $\widehat{\theta}_n$
$\overset{p}{\to}$	Convergence en probabilité
$\overset{p.s}{\to}$	Convergence presque sûre
$\xrightarrow{m.p}$	convergence en moyenne d'ordre p.
$R(\widehat{\theta}_n, \theta)$	Erreur quadratic moyenne de $\widehat{\theta}_n$ par rapport a θ
IC	Intervalle de confiance
EMV	Estimateur de maximum de vraisemblance
EMV	Estimateur de moments
T	Une Statistique
$(X_1, .., X_n)$	échantillon de taille n de v.a's
E	un éspace des observations

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'importance de la moyenne empirique en estimation paramétrique ainsi en test paramétrique et on a abordé ses propriétés asymptotiques, et nous avons donné quelques exemples sur cet estimateur.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة أهمية المتوسط التجريبي في التقدير الوسيطي وكذلك في الاختبار الوسيطي وناقشنا خصائصه التقاربية، وقدمنا بعض الأمثلة على هذا المقدر.

Abstract

In this work, we studied the importance of the empirical mean in parametric estimation, as well as in parametric testing and we discussed its asymptotic properties, and we gave some examples of this estimator.