الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra

Faculté des Sciences et de la technologie

Département : Chimie Industrielle

جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم و التكنولوجيا

قسم :الكيمياء الصناعية

مطبوعة دروس سنة أولى علوم و تكنولوجيا

رياضيات 1

Mathématique 1

من تقديم الأستاذة: د. حسونة هدى

2021

محتوى المطبوعة

مقدمة.. 01

الفصل الأول: طرق الاستدلال الرياضياتي.. 02

1.1.مفاهيم في المنطق 03

2.1.الاستدلال الرياضياتي.. 06

الفصل الثاني: المجموعات, العلاقات و التطبيقات.. 09

1.2.نظرية المجموعات.. 10

2.2.علاقة الترتيب, علاقة تكافؤ... 14

3.2.التطبيقات... 16

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية بمتغير حقيقي.. 19

1.3.النهايات... 20

2.3.استمرارية دالة.. 22

3.3.اشتقاق دالة... 23

4.3. تفاضل دالة... 25

الفصل الرابع: تطبيقات على الدوال الأولية.. 26

1.4.الدالة قوة 27

2.4.الدالة اللوغاريتمية.. 27

3.4.الدالة الأسية 28

4.4.الدالة المثلثية... 28

4.5. الدالة المقلوب.. 29

الفصل الخامس: النشر المحدود... 30

1.5.صيغة تايلور... 31

2.5.النشر المحدود... 32

3.5. عمليات على النشر المحدود... 33

4.5.تطبيقات على النشر المحدود.. 34

الفصل السادس: الجبر الخطي.. 35

1.6.العمليات الداخلية.. 36

2.6.الفضاءات الشعاعية 40

3.6.التطبيقات الخطية 46

المراجع

مقدمة

تعتبر الرياضيات مجموعة من المعرفة المجردة الناتجة عن التفكير المنطقي المطبق على أشياء مثل المجموعات الرياضية والأرقام و الأشكال ..., وكذلك العلاقات والعمليات الحسابية الموجودة بين هذه الأشياء بالإضافة إلى هذا التعريف يوجد مفهوم الرياضيات التطبيقية أيضا. من أهم فروع الرياضيات: الجبر ، والتحليل ، والهندسة ، والمنطق الرياضي ...

ترتبط الرياضيات بالحياة اليومية للإنسان فهو يقوم باستعمال تطبيقاتها دون أن يدرك هذا في تفاصيل يومه بحثا عن التنظيم و التخلص من العشوائية في دراسته أو عمله أو حتى في قاعات اللعب و الرياضة, فقد قيل عن الرياضيات:

الرياضيات فن من يجيدها، يجيد فن اللعب بالأرقام

الرياضيات غذاء العقل

من خلال هذه المطبوعة أقوم بتقديم أهم ما يحتاجه طالب سنة أولى علوم و تكنولوجيا من تعريفات و قوانين و علاقات في مقياس رياضيات 1 **اعتمادا على المنهج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي و البحث العلمي** و يتكون هذا المقياس من ستة محاور أساسية حيث يحتوي الفصل الأول من هذه المطبوعة على المفاهيم الأساسية للمنطق و أهم أدواته المستعملة و كذلك طرق الاستدلال الرياضيات, أما الفصل الثاني نتعرف على نظرية المجموعات و العمليات التي تحدث بين مجموعتين أو أكثر من ثم نتطرق لعلاقة التكافؤ و علاقة الترتيب و أخيرا التطبيقات و أنواعها مثل التطبيق الغامر, التطبيق المتباين و التطبيق التقابلي.

في الفصل الثالث نتعرف على الدوال الحقيقية بمتغير حقيقي و نقوم بدراسة النهايات, الاستمرارية و الاشتقاق مرفقة بجداول مهمة لبعض النهايات و بعض المشتقات الشهيرة. يركز الفصل الرابع على النشر الحدود حيث نجد صيغة تايلور و أنواعها من ثم العمليات على النشور المحدودة و تطبيق النشر المحدود على النهايات.

نقوم في الفصل الخامس بدراسة بعض الدوال الأولية الابتدائية الشهيرة التي تستعمل كثيرا و منها نستطيع تركيب و إيجاد دوال أخرى من خلال العمليات على الدوال مثل الدالة الأسية, اللوغاريتمية, دالة قطع زائد و الدالة العكسية. أخيرا في الفصل السادس نعطي بصورة مفصلة للبنى الجبرية كالزمرة, الحلقة ... و مفهوم العملية الداخلية أو الخارجية من ثم الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية.

الفصل الأول:

طرق الاستدلال الرياضياتي

Méthodes des raisonnements mathématiques

1.1.مفاهيم في المنطق

1.1.1.المنطق الرياضياتي

2.1.1.القضية

3.1.1.المكممات

4.1.1.العمليات المنطقية

5.1.1.بعض خواص الروابط المنطقية

2.1.الاستدلال الرياضياتي

1.2.1.تعريف الاستدلال

2.2.1.طرق الاستدلال الرياضياتي

1.2.2.1.الاستدلال المباشر

2.2.2.1.الاستدلال بعكس النقيض

3.2.2.1.الاستدلال بالخلف

4.2.2.1.الاستدلال بالمثال المضاد

5.2.2.1.الاستدلال بالتراجع

1.1.مفاهيم في المنطق

1.1.1.المنطق الرياضياتي La logique mathématique

المنطق الرياضياتي فرع من فروع الرياضيات حيث يدرس العبارات و طرق الربط بينها و يحدد الخاطئ منها و الصواب باستخدام قواعد محددة تسمى قواعد المنطق أو القواعد المنطقية. يقدم المنطق الرياضياتي طرق البرهان لقضية معينة بتسلسل منطقي مع تبرير خطوات هذا البرهان ابتدءا بالمعطيات و وصولا للمطلوب إثباته.

2.1.1.القضية L’assertion

القضية أو العبارة في المنطق هي كل نص رياضياتي يمكن الحكم على المعنى الذي يحمله بالصحة أو الخطأ دون غموض و يرمز لها ب: $\mathfrak{R}, P, Q$ ... كل نص يحتوي على متغير x من مجموعة E يسمى دالة عبارية, اذا تم تعويض المتغير x بعنصر محدد من E تصبح الدالة العبارية عبارة.

مثال:

1) كل المثلثات قائمة (قضية)

2) ما ثمن الكتاب؟ (ليست قضية)

3) $15 \div 3 = 4$ (قضية خاطئة)

4) $2 + 2 = 4$ (قضية صحيحة)

3.1.1.المكممات Quantificateurs

لتكن $P(x)$ دالة عبارية للمتغير x من المجموعة غير الخالية E.

1) المكمم الوجودي:

العبارة $P: (\exists x \in E): P(x)$ تقرأ "يوجد على الأقل x من E يحقق $P(x)$ " أو تقرأ "يوجد على الأقل x من E حيث $P(x)$ ". يسمى الرمز $\exists$ بالمكمم الوجودي.

إذا كانت كل عناصر E لا تحقق $P(x)$ نقول أن العبارة $P(x)$ خاطئة.

مثال: $P_1: (\exists x \in \mathbb{N}): \ 5x = 10$

2) المكمم الكوني:

العبارة $P: (\forall x \in E): P(x)$ تقرأ "مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ " أو تقرأ "لكل x من E لدينا $P(x)$ ". يسمى الرمز $\forall$ بالمكمم الكوني.

مثال: $P_2: (\forall x \in \mathbb{R}): \ x^2 \geq 0$

ملاحظات:

1) يوجد عبارات بعدة مكممات مثل: $P_3: (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\exists x \in \mathbb{R}) \ : \ y = x^2$

2) إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فان ترتيبها ليست له أهمية في تحديد معنى العبارة و العكس إذا كانت المكممات من طبيعة مختلفة.

4.1.1. العمليات المنطقية Les opérations logiques

استعمال هذه العمليات المنطقية يسمح لنا بإنشاء قضايا جديدة من قضايا معلومة مسبقا.

1) النفي المنطقي: Négation logique

نفي العبارة P هي العبارة $\overline{P}$ و الناتجة عن إدخال أداة النفي على العبارة P و تكون العبارة الجديدة $\overline{P}$ صحيحة إذا كانت العبارة P خاطئة و العكس صحيح.

مثال: $P:\ \ 2+2=4$ اذن $\overline{P}:\ \ 2+2\neq 4$ و نفي العبارة $(\forall x\in E): P(x)$ هو العبارة $(\exists x\in E): \overline{P}(x)$

ملاحظة: $\overline{(\overline{P})}=P$

جدول حقيقة عملية النفي:

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

أو

P	$\overline{P}$
F (Faux)	V (Vrai)
V	F

2) الوصل المنطقي: Conjonction logique

وصل القضيتين P و Q هو القضية الجديدة و التي نرمز لها ب: $P\wedge Q$ و نقرأ:" P و Q " و التي تكون صحيحة في الحالة الوحيدة لما يكون P و Q صحيحتين معا.

مثال: $\underbrace{(\sqrt{2}\in\mathbb{N})}_{0}\wedge\underbrace{(9=3^2)}_{1}$ قضية خاطئة.

جدول حقيقة عملية الوصل:

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أو

P	Q	$P\wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3) الفصل المنطقي: Disjonction logique

فصل القضيتين P و Q هو القضية الجديدة و التي نرمز لها ب: $P\vee Q$ و نقرأ:" P أو Q " و التي تكون صحيحة إذا كانت إحدى القضيتين P و Q على الأقل صحيحة.

مثال: $\underbrace{(\sqrt{2} \in \mathbb{N})}_{0} \vee \underbrace{(9 = 3^2)}_{1}$ قضية صحيحة.

جدول حقيقة عملية الوصل:

P	Q	P∨Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أو

P	Q	P∨Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4) الاستلزام: Implication

نسمي استلزاما بين القضيتين P و Q و نقول "P يستلزم Q" أو نقول "إذا كانت P فان Q " و نكتب $P \Rightarrow Q$ القضية $\bar{P} \vee Q$.

تكون العبارة $P \Rightarrow Q$ خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة.

جدول حقيقة عملية الاستلزام:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

مثال:

$\left(\underbrace{2+2=5}_{0} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{2}=2}_{0}\right)$ قضية صحيحة لأن القضيتين خاطئتين.

$\left(\underbrace{\sin\theta = 0}_{1} \Rightarrow \underbrace{\theta = 0}_{0}\right)$ قضية خاطئة على سبيل المثال: $\theta = 2\pi$ يجعل $\sin\theta = 0$

ملاحظة: العبارتان $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ لا يحملان نفس المعنى.

5) التكافؤ: Equivalence

تكافؤ القضيتين P وQ هو القضية التي نرمز لها ب: $P \Leftrightarrow Q$ و نقرأ:" P تكافئ Q " و التي تكون صحيحة إذا كانت القضيتين P وQ لهما نفس قيمة الحقيقة و يمكن أن نكتب $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

مثال:

$\underbrace{\left(x = 0 \text{ أو } \acute{x} = 0\right)}_{1} \Leftrightarrow \underbrace{(x.\acute{x} = 0)}_{1}$ من أجل x و $\acute{x}$ من $\mathbb{R}$ هي قضية صحيحة.

$\underbrace{\overbrace{(2+2=4)}^{P}}_{1} \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{(2+2\neq 4)}^{\overline{P}}}_{0}$ هي قضية خاطئة.

6) جدول حقيقة عملية التكافؤ:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)\wedge(Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

5.1.1.بعض خواص الروابط المنطقية

تثبت كل الخواص و النتائج التالية بواسطة جدول الحقيقة.

$$\begin{cases} P \wedge P \Leftrightarrow P \\ P \vee P \Leftrightarrow P \end{cases}, \quad \overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P, \quad \begin{cases} (P \wedge Q) \wedge \mathfrak{R} \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge \mathfrak{R}) \\ (P \vee Q) \vee \mathfrak{R} \Leftrightarrow P \vee (Q \vee \mathfrak{R}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{Q} \vee \overline{P} \\ \overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{Q} \wedge \overline{P} \end{cases}, \quad \begin{cases} P \wedge (Q \vee \mathfrak{R}) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \mathfrak{R}) \\ P \vee (Q \wedge \mathfrak{R}) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \mathfrak{R}) \end{cases}$$

2.1.الاستدلال الرياضياتي Le raisonnement mathématique

1.2.1.تعريف الاستدلال

هو عبارة عن عملية حيث ينتقل فيها الفكر من قضية منطقية أو أكثر تسمى مقدمة إلى قضية أخرى تلزم عنها و تسمى نتيجة(المطلوب إثباته) و عناصر الاستدلال المهمة هي: مقدمات, علاقة بين مقدمات و نتيجة, نتيجة.

2.2.1.طرق الاستدلال الرياضياتي

1.1.2.1.الاستدلال المباشر Raisonnement direct

تعريف: لنثبت أن القضية $Q \Rightarrow P$ صحيحة, نفرض أن القضية P صحيحة و نبرهن بتسلسل منطقي أن Q صحيحة.

مثال: أثبت أنه "إذا كان $a, b \in \mathbb{Q}$ فان: $a + b \in \mathbb{Q}$"

البرهان:

نأخذ $a \in \mathbb{Q}$ و $b \in \mathbb{Q}$ نعلم أن مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكتب على الشكل: $\frac{p}{q}$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$ و منه $a = \frac{p}{q}$ من أجل $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$

نفس الشيء $b = \frac{\acute{p}}{\acute{q}}$ من أجل $\acute{p} \in \mathbb{Z}$ و $\acute{q} \in \mathbb{N}^*$ إذن $a + b = \frac{p}{q} + \frac{\acute{p}}{\acute{q}} = \frac{p\acute{q} + q\acute{p}}{q\acute{q}}$

نلاحظ أن البسط $p\acute{q}+q\acute{p}$ هو عنصر من $\mathbb{Z}$ و $q\acute{q}$ هو عنصر $\mathbb{N}^*$ و نكتب $a+b=\frac{\grave{p}}{\grave{q}}$ حيث: $\grave{p}\in\mathbb{Z}$ و $\grave{q}\in\mathbb{N}^*$

إذن: $a+b\in\mathbb{Q}$

2.1.2.1.الاستدلال بالتناقض Raisonnement par l'absurde

تعريف: : لنبرهن أن القضية $P\Rightarrow Q$ صحيحة, نفرض العكس أي أن القضية $P\Rightarrow Q$ غير صحيحة لنصل إلى تناقض مع المعطيات التي لدينا مسبقا أو تناقض رياضياتيا واضحا. معناه نقوم بفرض أن القضية P صحيحة و القضية Q خاطئة و نبحث عن التناقض.

مثال: ليكن $a,b\geq 0$ أثبت أنه "إذا كان $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ فان: $a=b$"

البرهان:

نستخدم البرهان بالتناقض, نفرض $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ و $a\neq b$

بما أن: $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ فان: $a(1+a)=b(1+b)$ و منه $a+a^2=b+b^2$ و منه $a^2-b^2=b-a$

إذن $(a-b)(a+b)=-(a-b)$. حسب الفرضية فان $a-b\neq 0$ إذن نستطيع القسمة على $a-b$ و نتحصل على $a+b=-1$ لكن مجموع عددين موجبين لا يمكن أن يساوي عددا سالبا و هنا تحصلنا على تناقض.

و منه لدينا القضية التالية صحيحة: إذا كان $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ فان: $a=b$

3.1.2.1.الاستدلال بعكس النقيض Raisonnement par contraposition

تعريف: لإثبات صحة الاستلزام $P\Rightarrow Q$ يكفي إثبات صحة الاستلزام $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ لأنه لدينا التكافؤ التالي:

$$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P})$$

مثال: ليكن $n\in\mathbb{N}$ أثبت أنه "إذا كان n^2 عدد زوجي فان: n عدد زوجي".

البرهان: نفرض أن n عدد فردي (ليس زوجي) و نريد أن نبرهن أن n^2 عدد فردي.

بما أن n عدد فردي فانه يوجد $k\in\mathbb{N}$ حيث: $n=2k+1$

و منه: $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2l+1$ حيث: $l=2k^2+2k\in\mathbb{N}$ و منه n^2 عدد فردي.

و منه لدينا القضية التالية صحيحة: "إذا كان n^2 عدد فردي فان: n عدد فردي" و هذا يكافيء "إذا كان n^2 عدد زوجي فان: n عدد زوجي".

4.1.2.1.الاستدلال بالمثال المضاد Raisonnement par contre-exemple

تعريف: يستعمل هذا النوع من البراهين عادة لإثبات أن قضية معينة خاطئة يكفي إيجاد مثال يبين هذا و يسمى بالمثال المضاد.

لإثبات أن $(\forall x\in E):P(x)$ خاطئة هذا يكافيء البرهان أن $(\exists x\in E):\overline{P(x)}$ صحيحة.

مثال: أثبت أن القضية التالية غير صحيحة "كل عدد طبيعي هو مجموع مربعات ثلاثة أعداد طبيعية"

البرهان:

حيث المربعات هي: $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

أي كل عدد هو عبارة عن مجموع مربعات ثلاثة أعداد أقل منه.

المثال المضاد هو 7 لان المربعات الأقل من 7 هي $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$ و باستعمالها لا يمكن أن نحصل على 7 حسب الجدول التالي:

0^2	0^2	0^2	0=
1^2	0^2	0^2	1=
1^2	1^2	0^2	2=
1^2	1^2	1^2	3=
2^2	0^2	0^2	4=
2^2	1^2	0^2	5=
2^2	1^2	1^2	6=
?	?	?	7=

5.1.2.1.الاستدلال بالتراجع Raisonnement par récurrence

تعريف: لنبرهن أن العبارة $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نقوم بالخطوات التالية:

1) المرحلة الابتدائية: نبين صحة العبارة $P(n)$ من أجل $n = n_0$
2) المرحلة الثانية: نفرض أن العبارة $P(n)$ صحيحة من أجل n و نبرهن على صحتها من أجل $n+1$.

مثال: برهن أن "من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان: $2^n > n$"

البرهان:

من أجل كل $n \geq 0$ نضع $P(n)$ هي القضية $2^n > n$

1) المرحلة الابتدائية: من أجل $n = 0$ لدينا $2^0 = 1 > 0$ و منه $P(0)$ صحيحة.
2) المرحلة الثانية: بتحديد $n \geq 0$ نفرض أن العبارة $P(n)$ صحيحة و نحاول أن نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \\ &> n + 1 \end{aligned} \quad (\text{لأن } 2^n > n \text{ و } 2^n > 1)$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة و منه العبارة $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.

الفصل الثاني:

المجموعات، العلاقات و التطبيقات

Ensembles, Relations et Applications

1.2. نظرية المجموعات

1.1.2. الاحتواء

2.1.2. المساواة

3.1.2. مجموعة تجزئة

4.1.2. مكمل مجموعة

5.1.2. عمليات على المجموعات

2.2. علاقة الترتيب, علاقة تكافؤ

1.2.2. علاقة ترتيب

2.2.2. علاقة تكافؤ

3.2. التطبيقات

1.3.2. تعاريف

2.3.2. عمليات على التطبيقات

3.3.2. أنواع التطبيقات

1.2. نظرية المجموعات Théorie des ensembles

لنظرية المجموعات دورا كبيرا في الرياضيات وتشكل إحدى أهم ركائز الرياضيات الحديثة حيث في بداية القرن العاشر، كان البروفيسور**Frege** يضع اللمسات الأخيرة على كتابة المجلد الثاني من العمل الذي يسعى إلى إعادة تأسيس الرياضيات على أساس منطقي لكنه تلقى رسالة من عالم رياضيات صغير جدًا آنذاك يقول :

« J'ai bien lu votre premier livre. Malheureusement vous supposez qu'il existe un ensemble qui contient tous les ensembles. Un tel ensemble ne peut exister. »

بمعنى: "قرأت كتابك الأول بتعمق و لسوء الحظ, أنت تفترض أن هناك مجموعة واحدة تحوي جميع المجموعات و مثل هذه المجموعة لا يمكن أن توجد "

أصبح هذا الشاب **Russell** أحد أعظم علماء المنطق والفلاسفة في عصره و قد حصل على جائزة نوبل للآداب عام 1950 و قد قام مع علماء آخرون ببناء أرضية صلبة متينة للمنطق و المجموعات. فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية:

المجموعة Ensemble: هي عبارة عن عناصر تجمعها خصائص مشتركة و قد تكون المجموعة ذات عدد عناصر منته و قد يكون غير منته.

مثال: $\{rouge, Vert\}, \{1, 2\}$.

العنصر Elément: هو كائن رياضياتي ينتمي لمجموعة معينة حيث تتحدد مجموعة $\mathcal{H}$ إذا تم تحديد مفهوم انتماء العنصر x بوضوح أي $x \in \mathcal{H}$ أو $x \notin \mathcal{H}$.

مثال: $rouge \in \{rouge, Vert\}$, $0 \notin \{1, 2\}$

المجموعة الخالية Ensemble vide : هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر و نرمز لها ب: $\emptyset$ أو$\{\ \}$.

مثال: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{N} /\quad x^2 = -1\}$ و منه $\mathcal{H} = \emptyset$.

بعض المجموعات المعروفة:

مجموعة الأعداد الطبيعية : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

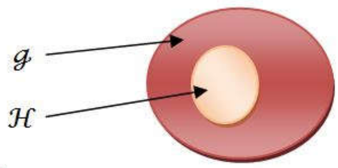
مجموعة الناطقة : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} / \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ مثال: 1, $\sqrt{2}$, π, $\ln 2$.

مجموعة الأعداد المركبة : $\mathbb{C}$

1.1.2. الاحتواء Inclusion

نقول أن المجموعة $\mathcal{H}$ محتواة في المجموعة $\mathcal{G}$ اذا كان كل عنصر من $\mathcal{H}$ هو عنصر من $\mathcal{G}$ و نكتب: $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$



$\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$

نقول $\mathcal{H}$ مجموعة جزئية أو جزء من $\mathcal{G}$.

$(\mathcal{H} \subset \mathcal{G})$ يكافئ $(\forall x:\ x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{G})$

الاحتواء علاقة متعدية أي: $(\mathcal{H} \subset \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \subset \aleph) \Rightarrow (\mathcal{H} \subset \aleph)$

2.1.2. المساواة Egalité

نقول أن المجموعة $\mathcal{H}$ تساوي المجموعة $\mathcal{G}$ إذا كان كل عنصر من $\mathcal{H}$ هو عنصر من $\mathcal{G}$ و كل عنصر من $\mathcal{G}$ هو عنصر من $\mathcal{H}$ و نكتب: $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ أي أن :

$(\mathcal{H} = \mathcal{G})$ يكافئ $(\forall x:\ x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x \in \mathcal{G})$ و نكتب أيضا $(\mathcal{H} = \mathcal{G})$ يكافئ $(\mathcal{H} \subset \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \subset \mathcal{H})$

مثال: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{Z} /\quad x \geq 0\}$ و منه $\mathcal{H} = \mathbb{N}$

3.1.2. مجموعة تجزئة Ensemble des parties

نقول أن $\wp(\mathcal{H})$ مجموعة تجزئة ل: $\mathcal{H}$ أي: $\wp(\mathcal{H}) = \{A /\quad A \in \mathcal{H}\}$ و $A \in \wp(\mathcal{H}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{H}$.

من عناصر مجموعة التجزئة $\wp(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}, \emptyset$ و إذا كان عدد عناصر $\mathcal{H}$ هو n فان عدد عناصر $\wp(\mathcal{H})$ هو 2^n.

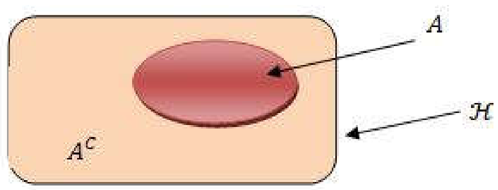
مثال: إذا كانت $\mathcal{H} = \{1, 2,3\}$ فان: $\wp(\mathcal{H}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathcal{H}\}$

عدد عناصر $\mathcal{H}$ هو 3 فان عدد عناصر $\wp(\mathcal{H})$ هو $2^3 = 8$.

4.1.2. مكملة مجموعة أو متممة مجموعة Ensemble complémentaire

إذا كانت $\mathcal{H} \subset A$ فان متممة A بالنسبة ل: $\mathcal{H}$ هي: $C_{\mathcal{H}}A$ و نكتب أيضا : $\mathcal{H} \setminus A$ و أحيانا: A^C أو $\bar{A}$.

$$C_{\mathcal{H}}A = \{x \in \mathcal{H} /\quad x \notin A\}$$



خواص:

$$C_{\mathcal{H}}\mathcal{H} = \emptyset \quad , \quad C_{\mathcal{H}}\emptyset = \mathcal{H}$$

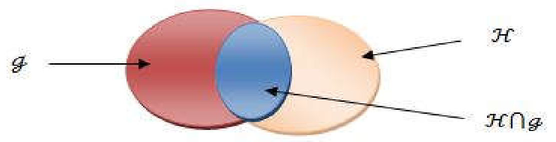
$$C_{\mathcal{H}}(C_{\mathcal{H}}A) = A \quad , \quad A \subset B \Rightarrow C_B \subset C_A$$

5.1.2. عمليات على المجموعات

1) التقاطع Intersection:

نسمي تقاطع المجموعتين $\mathcal{H}$ و g **المجموعة** الجديدة المكونة من العناصر المشتركة بين المجموعتين السابقتين و التي نرمز لها ب:

$\mathcal{H} \cap g$ حيث: $\mathcal{H} \cap g = \{x / \quad x \in \mathcal{H} \wedge x \in g\}$



مثال: لتكن المجموعتان $\mathcal{H} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ و $g = \left\{n \in \mathbb{N};\ n \text{ عدد زوجي}\right\}$

و منه $\mathcal{H} \cap g = \{0,2,4,6,8\}$

خواص:

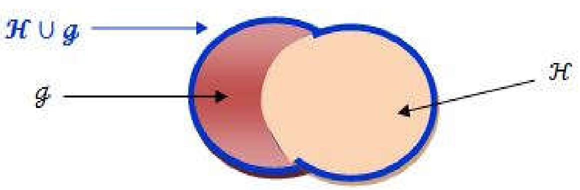
$$\mathcal{H} \cap \emptyset = \emptyset \quad , \quad \mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} \cap g = g \cap \mathcal{H} \quad , \quad (\mathcal{H} \cap g) \cap \aleph = \mathcal{H} \cap (g \cap \aleph)$$

2) الاتحاد Réunion:

نسمي اتحاد المجموعتين $\mathcal{H}$ و g المجموعة الجديدة المكونة من عناصر المجموعتين السابقتين معا و التي نرمز لها ب: $\mathcal{H} \cup g$ حيث:

$\mathcal{H} \cup g = \{x / \quad x \in \mathcal{H} \vee x \in g\}$



مثال: لتكن المجموعة $\mathcal{H} = \{0,3,6,9,12\}$ هي مضاعفات 3 الأقل من 13 و المجموعة $\mathcal{g} = \{0,2,4,6,8\}$ هي مضاعفات 2 الأقل من 9 فان: $\mathcal{H} \cup \mathcal{g} = \{0,2,3,4,6,8,9,12\}$.

خواص:

$\mathcal{H} \cup \emptyset = \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \cup \mathcal{H} = \mathcal{H}$

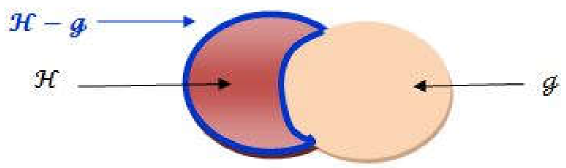
$\mathcal{H} \cup \mathcal{g} = \mathcal{g} \cup \mathcal{H}$, $(\mathcal{H} \cup \mathcal{g}) \cup \aleph = \mathcal{H} \cup (\mathcal{g} \cup \aleph)$

$\mathcal{H} \cup (\mathcal{g} \cap \aleph) = (\mathcal{H} \cup \mathcal{g}) \cap (\mathcal{H} \cup \aleph)$, $\mathcal{H} \cap (\mathcal{g} \cup \aleph) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{g}) \cup (\mathcal{H} \cap \aleph)$

$C_{(\mathcal{H} \cup \mathcal{g})} = C_{\mathcal{H}} \cap C_{\mathcal{g}}$, $C_{(\mathcal{H} \cap \mathcal{g})} = C_{\mathcal{H}} \cup C_{\mathcal{g}}$

3) الفرق بين مجموعتين **Différence entre deux ensembles :**

نسمي الفرق بين المجموعة $\mathcal{H}$ و المجموعة $\mathcal{g}$ المجموعة الجديدة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى $\mathcal{H}$ و لا تنتمي إلى $\mathcal{g}$ و التي نرمز لها ب: $\mathcal{H} - \mathcal{g}$ أو ب: $\mathcal{H} \setminus \mathcal{g}$ حيث: $\mathcal{H} - \mathcal{g} = \{x / \quad x \in \mathcal{H} \wedge x \notin \mathcal{g}\}$



مثال: لتكن المجموعتان السابقتان $\mathcal{H} = \{0,3,6,9,12\}$ و $\mathcal{g} = \{0,2,4,6,8\}$

فان: $\mathcal{H} - \mathcal{g} = \{3,9,12\}$ و كذلك $\mathcal{g} - \mathcal{H} = \{2,4,8\}$

خواص:

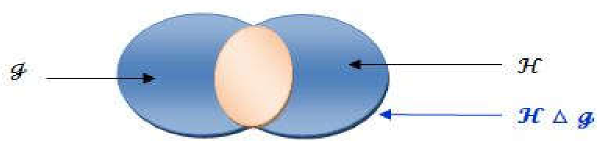
$\mathcal{H} - \mathcal{g} \neq \mathcal{g} - \mathcal{H}$, $\mathcal{H} - \mathcal{H} = \emptyset$

$\emptyset - \mathcal{H} = \emptyset$, $\mathcal{H} - \emptyset = \mathcal{H}$

4) الفرق التناظري **Différence symétrique:**

نسمي الفرق التناظري بين المجموعة $\mathcal{H}$ والمجموعة $\mathcal{g}$ المجموعة الجديدة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى $\mathcal{H}$ و لا تنتمي إلى $\mathcal{g}$ أو العناصر التي تنتمي إلى $\mathcal{g}$ و لا تنتمي إلى $\mathcal{H}$ و التي نرمز لها ب: $\mathcal{H} \triangle \mathcal{g}$

حيث: $\mathcal{H} \triangle \mathcal{g} = (\mathcal{H} \cup \mathcal{g}) - (\mathcal{H} \cap \mathcal{g})$



مثال: لتكن المجموعتان السابقتان $\mathcal{H} = \{0,3,6,9,12\}$ و $\mathcal{g} = \{0,2,4,6,8\}$

فان: $\mathcal{H} \triangle \mathcal{g} = \{2,3,4,8,9,12\}$

5) الجداء الديكارتي لمجموعتين Produit cartésien :

نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين $\mathcal{H}$ و $\mathcal{g}$ المجموعة المكونة من ثنائيات مرتبة (x, y) حيث: $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{g}$ التي نرمز لها ب: $\mathcal{H} \times \mathcal{g}$ حيث: $\mathcal{H} \times \mathcal{g} = \{(x, y)/ \quad x \in \mathcal{H} \wedge y \in \mathcal{g}\}$. إذا كان عدد عناصر المجموعة $\mathcal{H}$ هو n_1 وعدد عناصر المجموعة $\mathcal{g}$ هو n_2 فان عدد عناصر المجموعة $\mathcal{H} \times \mathcal{g}$ هو $n_1 \times n_2$.

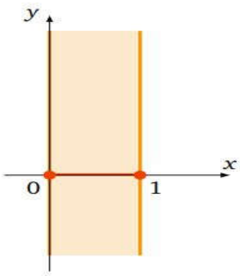
خواص:

$$\mathcal{H} \times \emptyset = \emptyset \times \mathcal{H} = \emptyset \qquad , \qquad \mathcal{H} \times \mathcal{g} \neq \mathcal{g} \times \mathcal{H}$$

أمثلة:

1) نعلم أن: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/ \quad x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

2) مثال أخر: $[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x, y)/ \ 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R}\}$ حسب التمثيل التالي:



2.2. علاقة الترتيب, علاقة تكافؤ

العلاقة الثنائية:

في الرياضيات، عدة ما نحاول مقارنة عنصرين من مجموعة أو الخاصية التي يحتمل أن تكون لعنصرين من مجموعة.

تحديد العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ في المجموعة $\mathcal{H}$ باختيار:

خاصية معينة تربط أو لا تربط عنصرين x, y من $\mathcal{H}$ و نكتب $x\mathcal{R}y$ و نقول أن العنصر x يتعلق بالعنصر y.

مجموعة جزئية من $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ و نكتب $x\mathcal{R}y$ إذا كان $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

ملاحظة: إذا كان $(x, y) \neq (y, x)$ فان: $x\mathcal{R}y \neq y\mathcal{R}x$ على سبيل المثال إذا كانت $\mathcal{R}$ هي العلاقة $>$ في $\mathbb{R}$.

جودة العلاقة الثنائية: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية في $\mathcal{H}$.

1) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة انعكاسية réflexive إذا كان: $\forall x \in \mathcal{H}:\ x\mathcal{R}x$

2) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية symétrique إذا كان: $\forall x,y \in \mathcal{H}:\ x\mathcal{R}y\ \Rightarrow\ y\mathcal{R}x$

3) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية anti-symétrique إذا كان: $\forall x,y \in \mathcal{H}:\ (x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

4) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة متعدية transitive إذا كان: $\forall x,y,z \in \mathcal{H}:\ (x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

أمثلة:

علاقة المساواة $=$ على المجموعة $\mathcal{H}$ هي علاقة انعكاسية, تناظرية, ضد تناظرية و متعدية.

العلاقات $\leq$ و $\geq$ على $\mathbb{R}$ هي علاقات انعكاسية, ضد تناظرية و متعدية.

العلاقات $<$ و $>$ على $\mathbb{R}$ هي علاقات ضد تناظرية و متعدية.

علاقة كلية أو جزئية: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية في $\mathcal{H}$.

نقول أن العنصرين x و y يمكن مقارنتهما comparable بالعلاقة $\mathcal{R}$ إذا كان $x\mathcal{R}y$ أو $y\mathcal{R}x$.

1) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة كلية totale إذا كان: أي عنصرين من $\mathcal{H}$ قابلين للمقارنة بالعلاقة $\mathcal{R}$.

2) نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة جزئية partielle في الحالة العكسية للعلاقة الكلية.

1.2.2. علاقة ترتيب Relation d'ordre

نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على $\mathcal{H}$ هي علاقة ترتيب إذا كانت علاقة انعكاسية وضد تناظرية و متعدية.

أمثلة:

علاقة المساواة $=$ على المجموعة $\mathcal{H}$ هي علاقة تكافؤ.

العلاقات $\leq$ و $\geq$ على $\mathbb{R}$ ليست علاقة تكافؤ لأنها ليست تناظرية.

العلاقات $<$ و $>$ على $\mathbb{R}$ ليست علاقة تكافؤ لأنها ليست انعكاسية.

مثال للتطبيق: لتكن $(\mathcal{H},\leq)$ مجموعة مرتبة. نعرف العلاقة $\prec$ على $\wp(\mathcal{H})$ كما يلي:

$$\mathrm{X} \prec \mathrm{Y}\ \ ssi\ \ (\mathrm{X} = \mathrm{Y}\ \ \text{ou}\ \ \forall x \in X, \forall y \in Y:\ \ x \leq y)$$

برهن أن هذه العلاقة هي علاقة ترتيب.

2.2.2. علاقة تكافؤ Relation d'équivalence

نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على $\mathcal{H}$ هي علاقة تكافؤ إذا كانت علاقة انعكاسية و تناظرية ومتعدية و نرمز لها أحيانا ب: $\sim$

أمثلة:

علاقة المساواة $=$ على المجموعة $\mathcal{H}$ هي علاقة ترتيب.

العلاقات $\leq$ و $\geq$ على $\mathbb{R}$ ليست علاقة ترتيب.

العلاقات $<$ و $>$ على $\mathbb{R}$ ليست علاقة ترتيب لأنها ليست انعكاسية.

مثال للتطبيق: نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على $\mathbb{C}$ كما يلي:

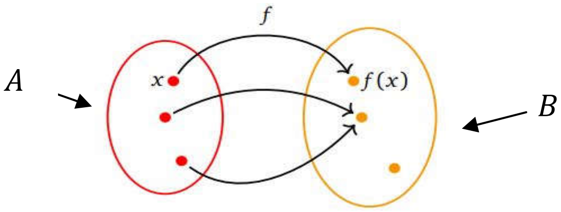
$$z\,\mathcal{R}\,\dot{z} \iff |z| = |\dot{z}|$$

برهن أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

3.2. التطبيقات Applications

1.3.2. تعاريف

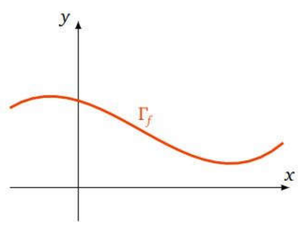
نسمي تطبيقا من المجموعة A (مجموعة البدء) في المجموعة B (مجموعة الوصول) كل علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر وحيد y من المجموعة B و نرمز له ب: $f, g, h, \ldots$ حيث تسمى x بالسابقة و y بالصورة.



و نكتب:

$$\begin{aligned} f:\quad & A \to \quad B \\ & x \mapsto \quad y = f(x) \end{aligned}$$

بيان التطبيق f Graphe يرمز له ب: Γ_f حيث : $\Gamma_f = \{(x,y) \in A \times B \setminus y = f(x)\}$



التطبيق المطابق Application Identique: نرمز له id_E حيث: $f:\ A \to A, f(x) = x$

الصورة المباشرة Image directe: ليكن $C \subset A$ و التطبيق $f : A \to B$

الصورة المباشرة ل C بواسطة f هي المجموعة: $f(C) = \{f(x)/\quad x \in C\} \subset B$

الصورة العكسية Image réciproque: ليكن $D \subset B$ و التطبيق $f:\ A \to B$

الصورة العكسية ل D بواسطة f هي المجموعة: $f^{-1}(D) = \{x \in A/\quad f(x) \in D\} \subset A$

2.3.2. عمليات على التطبيقات

المساواة Egalité:

نقول أن التطبيقين $g, f: A \to B$ متساويان إذا و فقط إذا كان من أجل كل $x \in A$ فان $f(x) = g(x)$ و نكتب $f = g$

الجمع Addition و الضرب Produit:

ليكن $f: A \to B$ و $g: A \to B$ تطبيقين اذن af و $f + g$ تطبيقين معرفين بـ:

$$(af)(x) = af(x)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

التركيب Composition:

وليكن $f: A \to B$ و $g: B \to C$ تطبيقين إذن $g \circ f$ تطبيق من A نحو C أي: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

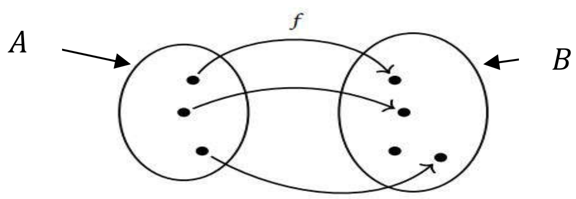
$$x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

3.3.2. أنواع التطبيقات

التطبيق المتباين Application injective:

نقول أن التطبيق $f: A \to B$ هو تطبيق متباين إذا كان لعنصرين من مجموعة البدء صورتان مميزتان دائمًا بواسطة f في مجموعة الوصول.

يمكن أن نقول أنه بالنسبة لأي $y \in B$، فإن المعادلة $y = f(x)$ تقبل دائمًا حلًا واحدًا على الأكثر.

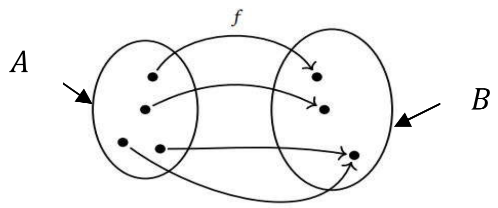


بتعريف أخر نقول أن التطبيق f متباينا إذا كان $\forall x, y \in A,\ \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

التطبيق الغامر Application surjective:

نقول أن التطبيق $f: A \to B$ هو تطبيق غامر إذا كان من أجل أي عنصر $y \in B$ فان المعادلة $y = f(x)$ تقبل دائمًا حلًا واحدًا على الأقل $x \in A$.

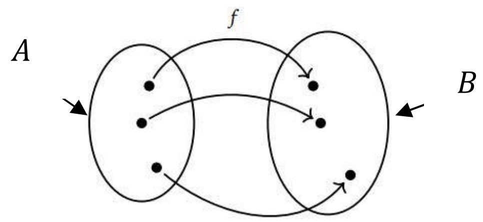
بتعريف أخر نقول أن التطبيق f غامرا إذا كان $\forall y \in B, \exists x \in A : \ y = f(x)$



التطبيق التقابلي Application bijective:

نقول أن التطبيق $f: A \to B$ هو تطبيق تقابلي إذا كان متباينا و غامرا أو إذا كان من أجل أي عنصر $y \in B$ المعادلة $y = f(x)$ لها حل وحيد. إذا كانت المجموعتان A, B منتهيتين فانه يجيب أن يكون لهما نفس عدد العناصر.

بتعريف أخر نقول أن التطبيق f متباينا إذا كان $\forall y \in B, \exists!\, x \in A : \ y = f(x)$



مثال: ليكن $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ المعرف ب: $f(x) = \sqrt{x}$.

هل هذا التطبيق متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

ما الذي يجب تغييره حتى يكون تطبيقا تقابليا؟

الحل: f تطبيق متباين لأن $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ و ليس غامر لأن $Imf = \mathbb{R}^+$ و صورة التطبيق لا تساوي $\mathbb{R}$ إذن فهو ليس تقابلي. يصبح هذا التطبيق تقابليا إذا كان من الشكل: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

الفصل الثالث:

الدوال الحقيقية بمتغير حقيقي

Les fonctions réelles à une variable réelle

1.3. النهايات

1.1.3. النهاية المنتهية بجوار عدد حقيقي

2.1.3. النهاية من اليمين و النهاية من اليسار

3.1.3. عمليات على النهايات

4.1.3. جدول لنهايات بعض الدوال

2.3. استمرارية دالة

1.2.3. الاستمرار عند نقطة

2.2.3. الاستمرار الجانبي

2.2.4. التمديد بالاستمرار

3.2.4. عمليات على الدوال المستمرة

3.3. اشتقاق دالة

1.3.3. المشتق من اليمين و المشتق من اليسار

2.3.3. الاشتقاق و الاستمرار

3.3.3. عمليات على التوابع القابلة الاشتقاق

4.3.3. بعض مشتقات الدوال

4.3. تفاضل دالة

في هذا الفصل ندرس الدوال المعرفة على A جزء من $\mathbb{R}$ و نأخذ قيمها في B جزء من $\mathbb{R}$ أيضا. نستطيع تعريف دالة f ب:

1) مجموعة البدء A و مجموعة الوصول B
2) قيمة f عند x و التي نرمز لها ب: $f(x)$
3) بيان التطبيق f و يرمز له ب: Γ_f حيث : $\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times B \setminus y = f(x)\}$

أمثلة:

4) **الدالة مربع Fonction carrée:** من الشكل $f: x \to x^2$ و معرفة على $\mathbb{R}$
5) **الدالة جذر Fonction racine carrée :** من الشكل $f: x \to \sqrt{x}$ و معرفة على $\mathbb{R}^+$
6) **الدالة مقلوب Fonction inverse:** من الشكل $f: x \to \frac{1}{x}$ و معرفة على $\mathbb{R}^*$
7) **الدالة المثلثية Fonctions trigonométrique :** مثل $f: x \to \cos(x)$ و معرفة على $\mathbb{R}$
8) **الدالة الأسية Fonction exponentielle :** من الشكل $f: x \to e^x$ و معرفة على $\mathbb{R}$
9) **الدالة اللوغاريتمية Fonction logarithmique :** من الشكل $f: x \to \ln x$ و معرفة على $\mathbb{R}_+^*$

نقول أن f :

دالة زوجية fonction paire إذا تحقق: $\forall x \in A:\ f(x) = f(-x)$

مثال: الدالة المثلثية $f(x) = \cos(x)$ هي دالة زوجية لأن $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$

دالة فردية fonction impaire إذا تحقق: $\forall x \in A:\ f(-x) = -f(x)$

مثال: الدالة المثلثية $f(x) = \sin(x)$ هي دالة زوجية لأن $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$

دالة دورية fonction périodique إذا تحقق: $\exists \mathrm{p} \in \mathbb{R}^*:\ f(x + p) = f(x),\ \forall x \in A$

مثال: الدالة المثلثية $f(x) = \cos(x)$ هي دالة دورية لأن $\exists \mathrm{k} \in \mathbb{Z}:\ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x),\ \forall x \in A$

دالة محدودة fonction bornée إذا تحقق: $\exists i, s \in \mathbb{R}: i \le f(x) \le s,\ \forall x \in A$

مثال: الدالة المثلثية $f(x) = \sin(x)$ هي دالة محدودة لأن $-1 \le \sin(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

1.3. النهايات Limites

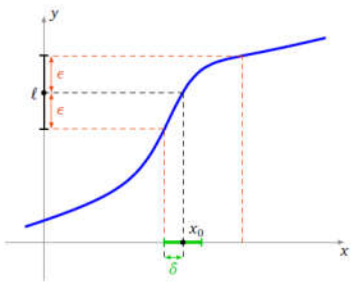
1.1.3. النهاية المنتهية بجوار عدد حقيقي Limite finie au voisinage d'un nombre réel

لتكن f تطبيق معرف على مجوعة تعريفها D_f من $\mathbb{R}$ و ليكن l عدد حقيقي و$x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من D_f.

نقول أن f يؤول إلى l لما x يؤول الى x_0 إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f: x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \Rightarrow f(x) \in\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ أو $\lim_{x_0} f(x) = l$



مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

2.1.3. النهاية من اليمين و النهاية من اليسار Limite à droite et limite à gauche

لتكن f تطبيق معرف على مجموعة تعريفها D_f من $\mathbb{R}$ و ليكن l عدد حقيقي و$x_0\in\mathbb{R}$ نقطة من D_f.

1) نقول أن f يؤول إلى l لما x يؤول إلى x_0 من اليمين إذا كان:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in D_f : x\in\ ]x_0,x_0+\delta[\ \Rightarrow f(x)\in\ ]l-\varepsilon,l+\varepsilon[$$

نكتب $\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$

2) نقول أن f يؤول إلى l لما x يؤول إلى x_0 من اليسار إذا كان:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in D_f : x\in\ ]x_0-\delta,x_0[\ \Rightarrow f(x)\in\ ]l-\varepsilon,l+\varepsilon[$$

نكتب $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$

مثال: $\lim_{x \underset{>}{\to} 1}\frac{1}{(x-1)^3}=+\infty$ و $\lim_{x \underset{<}{\to} 1}\frac{1}{(x-1)^3}=-\infty$

ملاحظة: إذا قبلت f نهاية من يمين x_0 و نهاية من يسارها متساويتان فإنها تقبل نهاية عند النقطة x_0 و العكس.

$$\left(\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x)=\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)=l\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)=l$$

مثال: $\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{x}{x}=1$ و $\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{-x}{x}=-1$ إذن $\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{|x|}{x}\neq\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{|x|}{x}$

الدالة $\frac{|x|}{x}$ لا تقبل نهاية بجوار $x_0=0$.

3.1.3. عمليات على النهايات: إذا كان كل من الدالتان f وg تقبلان نهاية عند النقطة x_0 فان:

1) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

اصطلاحات:

$l + \infty = +\infty,\quad l - \infty = -\infty,\quad \frac{1}{0^+} = +\infty,\quad \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\frac{1}{\pm\infty} = 0,\quad l \times \infty = \infty,\ l \neq 0,\quad \infty \times \infty = \infty,$ مع احترام الاشارات عند الضرب

حالات عدم التعيين: يمكن إزالتها بطرق معينة كالتحليل و الاختزال.

$$+\infty - \infty,\qquad 0 \times \infty,\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty}$$

4.1.3. جدول لنهايات بعض الدوال

الدالة f	c ثابت	x^n	$\frac{1}{x^n}$	e^x	$\ln x$
نهاية الدالة	$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = c$	$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

الدالة f	$x\ln x$	xe^x	$\frac{\ln x}{x^n}$	$\frac{1-cosx}{x}$	$\frac{e^x-1}{x}$	$\sqrt{x}$
نهاية الدالة	$\lim_{x\to0} f(x) = 0$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to0} f(x) = 0$	$\lim_{x\to0} f(x) = 1$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

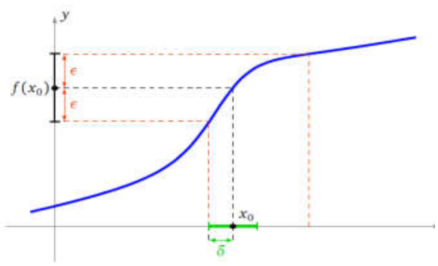
2.3. استمرارية دالة Continuité

1.2.3. الاستمرار عند نقطة

لتكن f تطبيق معرف على I من $\mathbb{R}$. نقول أن f مستمرة عند النقطة $x_0 \in I$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

أي أن f تقبل نهاية عند النقطة x_0 و هذه النهاية بالضرورة هي $f(x_0)$ و نقول أن f مستمرة على I إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من I.



2.2.3. الاستمرار الجانبي

لتكن f تطبيق معرف على مجوعة تعريفها D_f من $\mathbb{R}$ و ليكن l عدد حقيقي و$x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من D_f.

1) نقول أن f مستمرة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان: $\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

2) نقول أن f مستمرة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان: $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

ملاحظة: نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 اذاكانت الدالة مستمرة على يمين النقطة x_0 و على يسارها.

2.2.4. التمديد بالاستمرار : ليكن I مجال و x_0 نقطة من I. لتكن f تطبيق معرف على $I \setminus \{x_0\}$ في $\mathbb{R}$.

نقول أن f قابلة للتمديد بالاستمرار عند النقطة x_0 إذا كانت f تقبل نهاية منتهية عند النقطة x_0 و نكتب f

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

و نقول أن f مستمرة على I إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من I.

3.2.4. عمليات على الدوال المستمرة : إذا كانت الدالتان f وg مستمرتين عند النقطة x_0 فان:

1) الدالة $(f + g)$ مستمرة عند النقطة x_0

2) الدالة $(f.g)$ مستمرة عند النقطة x_0 و الدالة (f/g) مستمرة عند النقطة x_0 مع شرط الدالة $g(x) = 0$ بجوار النقطة x_0

3) اذا كانت الدالة $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مستمرة فان الدالة $(h \circ f)$ مستمرة عند النقطة x_0

3.3. اشتقاق دالة Dérivation

لتكن f تطبيق معرف على I من $\mathbb{R}$ و النقطة $x_0 \in I$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 اذا وجد عدد حقيقي نرمز له ب: $f'(x_0)$ يحقق:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

نقول أن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة منه. ونسمي$f'(x_0)$ بالدالة المشتقة fonction dérivée

مثال:

1) مشتق الدالة الثابتة هو 0.

2) مشتق الدالة $f(x) = |x|$ من أجل $x \neq 0$ هو: $f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

1.3.3. المشتق من اليمين و المشتق من اليسار: لتكن f تطبيق معرف من I إلى $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$.

نقول أن f قابل للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت هذه النهاية موجودة : $\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و تسمى بالمشتق من اليمين عند x_0.

نقول أن f قابل للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت هذه النهاية موجودة : $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و تسمى بالمشتق من اليسار عند x_0.

ملاحظة: نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كان المشتق من اليمين يساوي المشتق من اليسار عند نفس النقطة.

مثال:

مشتق الدالة $f(x) = |x|$ من أجل $x_0 = 0$ غير موجود لأن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 و هذا راجع لأن نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ عند هذه النقطة غير موجودة.(كما رأينا سابقا أن نهاية من اليمين و النهاية من اليسار غير متساويتان)

2.3.3. الاشتقاق و الاستمرار

لتكن f دالة معرفة من I إلى $\mathbb{R}$. اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 من المجال I فان الدالة f مستمرة عند هذه النقطة.

نلاحظ أن العكس غير صحيح أي: إذا كانت الدالة مستمرة عند نقطة فهذا لا يعني أنها بالضرورة قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

مثال: كما رأينا سابقا الدالة $f(x) = |x|$ مستمرة عند $x_0 = 0$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

3.3.3. عمليات على التوابع القابلة الاشتقاق: إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للاشتقاق على المجال I فان:

1) الدالة $(f+g)$ قابلة للاشتقاق على المجال I حيث: $(f+g)' = f' + g'$
2) الدالة $(f.g)$ قابلة للاشتقاق على المجال I حيث: $(f.g)' = f'.g + g'.f$

3) الدالة f لا تنعدم على المجال I فان $\left(\frac{1}{f}\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال I حيث: $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{f\prime}{f^2}$ و $\left(\frac{g}{f}\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال I حيث: $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g\prime.f+f'.g}{f^2}$

4) الدالة تركيب دالتين $f(g(x))$ قابلة للاشتقاق حيث: $[f(g(x))]' = g'(x).f'(g(x))$

5) الدالة قوة دالة $(f(x))^{g(x)}$ قابلة للاشتقاق حيث: $[(f(x))^{g(x)}]' = [g(x)\ln(f(x))]'(f(x))^{g(x)}$

4.3.3. بعض مشتقات الدوال

الدالة f	ثابتc	x	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	x^n	$\ln x$	e^x	c^x	$\sin x$	$\cos x$
الدالة المشتقة f'	0	1	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{-1}{x^2}$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	e^x	$c^x \ln c$	$\cos x$	$-\sin x$

الدالة f	$\tan x$	$\cot x$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{x^n}$	f^n	$\ln f$	$\arcsin x$	$\arccos x$
الدالة المشتقة f'	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$nf'f^{n-1}$	$\frac{f'}{f}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3. تفاضل دالة Différentiabilité

لتكن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 من المجال I. نسمي التطبيق df_{x_0} تفاضل الدالة f عند النقطة x_0 حيث:

$$\begin{aligned} df_{x_0}: \quad & \mathbb{R} \to \quad \mathbb{R} \\ & h \to \quad f'^{(x_0)}h = df_{x_0}(h) \end{aligned}$$

ملاحظة:

في العلوم الفيزيائية يستعمل الرمز $\frac{df}{dx}$ عوضا عن f' و نصطلح الصيغة التفاضلية $df = f'(x)dx$ بوضع $h = dx$

الفصل الرابع:

تطبيقات على الدوال الأولية

Application aux fonctions élémentaires

1.4. الدالة قوة

2.4. الدالة اللوغاريتمية

3.4. الدالة الأسية

4.4. الدالة المثلثية

5.4. الدالة المقلوب

1.4. الدالة قوة Fonction puissance

الدالة قوة معرفة كما يلي: $f(x) = x^a$ من أجل كل $x > 0$ و حيث $a \in \mathbb{R}$

هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}_*^+$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ حيث $f'(x) = (x^a)' = ax^{a-1}$

خواص: من أجل كل $x > 0$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

2.4. الدالة اللوغاريتمية Fonction logarithmique

يوجد دالة وحيدة نرمز لها ب: $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ حيث: هي الدالة الأصلية للدالة $\frac{1}{x}$ و $\ln(1) = 0$

هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}_*^+$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ حيث $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

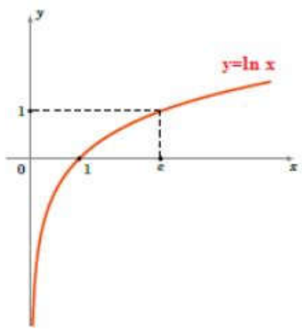
خواص: من أجل كل $x, y > 0$

$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$ و $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

من أجل كل $a > 0$ و x عدد حقيقي فان: $\ln(a^x) = x\ln(a)$



3.4. الدالة الأسية Fonction exponentielle

ترتبط الدوال اللوغاريتمية والأسية ارتباطًا وثيقًا بدراسة ظواهر النمو.

الدالة الأسية هي الدالة العكسية للدالة لوغاريتم معرفة كمايلي: $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$

هي دالة مستمرة على$\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$حيث $(e^x)' = e^x$

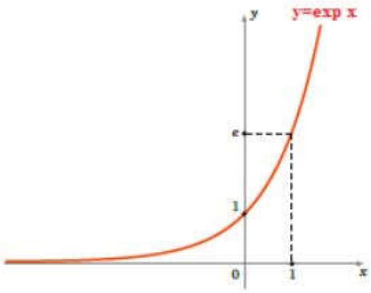
خواص: من أجل كل عدد حقيقي x

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \quad \text{و} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$



4.4. الدالة المثلثية Fonction trigonométrique

من بين الدوال المثلثية يوجد $cos, sin, tan, cotan$ ...

الدالة المثلثية جب sin

هي دالة زوجية معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و هي دالة دورية دورها 2π. الدالة sin قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $(\sin x)' = \cos x$

خواص:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

الدالة المثلثية جب تمام cos

هي دالة زوجية معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و هي دالة دورية دورها 2π. الدالة cos قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $(\cos x)' = -\sin x$

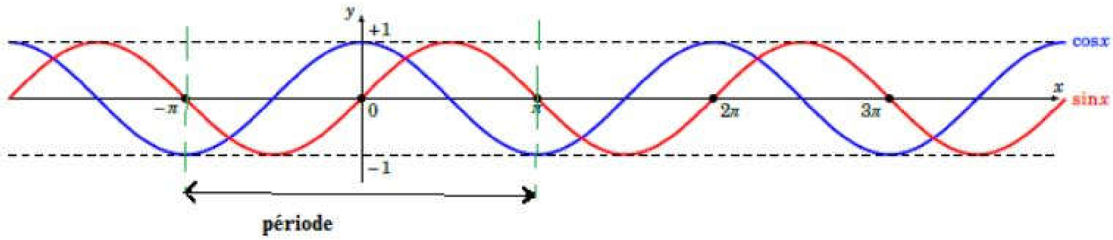
خواص:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

يمكننا قصر مجال الدراسة على مجال طوله 2π

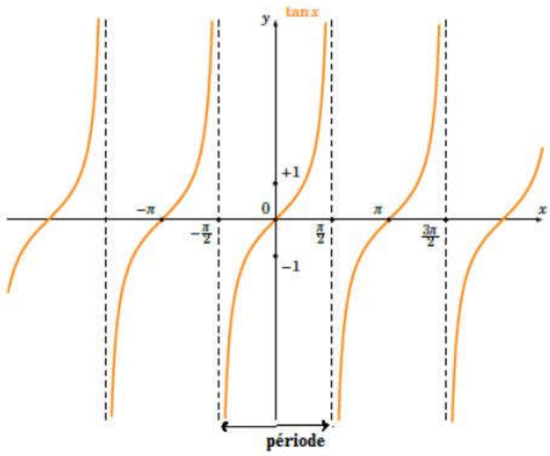


الدالة المثلثية ظل $\boldsymbol{tan}$

هي دالة من الشكل: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معرفة و مستمرة على $D_{tan} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. و هي دالة دورية دورها π .

الدالة tan قابلة للاشتقاق على D_{tan} حيث $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tan^2\, x$.

يمكننا قصر مجال الدراسة على مجال طوله π



الدالة المثلثية تظل $\boldsymbol{cotan}$

هي دالة من الشكل: $cotan\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ معرفة و مستمرة على $D_{cotan} = \mathbb{R} - \{k\pi\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}\}$. و هي دالة دورية دورها π .

الدالة $cotan$ قابلة للاشتقاق على D_{cotan} حيث $(\tan x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -[1 + cotan^2\, x]$

5.4. الدالة المقلوب Fonction inverse

الدالة العكسية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x}$ و هي دالة فردية على مجال تعريفها.

هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

الفصل الخامس:

النشر المحدود

Développement limité

1.5. صيغة تايلور

1.1.5.صيغة تايلور بباقي التكامل

2.1.5.صيغة تايلور بباقي لاغرونج

3.1.5.صيغة تايلور بباقي يونغ

2.5. النشر المحدود

1.2.5.النشر المحدود بجوار الصفر

2.2.5.النشر المحدود بجوار نقطة

3.2.5.النشر المحدود بجوار مالا نهاية

3.5. عمليات على النشر المحدود

1.3.5. الجمع و الضرب

2.3.5. التركيب

4.5. تطبيقات على النشر المحدود

في هذا الفصل، بالنسبة لأي دالة سنجد كثير حدود الدرجة n التي تقترب بشكل أفضل من الدالة .النتائج صالحة فقط لـ x التي تكون حول قيمة ثابتة (غالبًا ما تكون حوالي 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة المعتبرة.

1.5. صيغة تايلور Formules de Taylor

سنرى ثلاث صيغ تايلور ، سيكون لديهم جميعًا نفس الجزء متعدد الحدود لكنهم يقدمون معلومات أكثر أو أقل عن الباقي .سنبدأ بصيغة تايلور مع الباقي المتكامل الذي يعطي تعبيرًا دقيقًا عن الباقي ثم صيغة تايلور مع باقي لاغرونج التي تسمح بالحصول على إطار للباقي وننتهي بصيغة تايلور مع باقي يونغ العملية جدًا إذا لم نكن بحاجة إلى معلومات حول الباقي.

1.1.5. صيغة تايلور بباقي التكامل Formule de Taylor avec reste intégral

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة من صنف C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$ و ليكن $a, x \in I$ فان:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt$$

نرمز ل: $T_n(x)$ جزء كثير الحدود لصيغة تايلور (تتعلق ب n لكن أيضا تتعلق ب a و f)

2.1.5. صيغة تايلور بباقي لاغرونج Formule de Taylor-Lagrange

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة من صنف C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$ و ليكن $a, x \in I$ فانه يوجد عدد حقيقي c بين a و x حيث:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

3.1.5. صيغة تايلور بباقي يونغ Formule de Taylor-Young

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة من صنف C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$ و ليكن $a \in I$ فانه من اجل كل $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$$

حيث ϵ عبارة عن دالة معرفة على I حيث: $\epsilon(x) \to 0$ لما $x \to a$

2.5. النشر المحدود Développements limités

1.2.5. النشر المحدود بجوار الصفر Développements limités au voisinage de zéro

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة و $n \in \mathbb{N}$ و ليكن $0 \in I \subset \mathbb{R}$ فان: الدالة f تقبل نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n اذا وجد كثير حدود $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ من الدرجة أقل أو تساوي n و o تابع حقيقي معرف على المجال I ومستمر عند الصفر $\lim_{x\to 0} o(x^n) = 0$ بحيث : $f(x) = \underbrace{A_n(x)}_{\text{الجزء النظامي}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{الخطأ او الباقي}}$.

جدول لنشور بعض الدوال

الدالة	النشر المحدود للدالة بجوار 0
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n1}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
$(1+x)^a$	$1+\frac{ax}{1!}+\frac{a(a-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)x^n}{n!}+o(x^n)$
$\arcsin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o(x^{2n+2})$

2.2.5.النشر المحدود بجوار نقطة Développements limités au voisinage d'un point

لتكن $f: I\to\mathbb{R}$ دالة و $n\in\mathbb{N}$ و ليكن $x_0\in I\subset\mathbb{R}$ فان: الدالة f تقبل نشرا محدودا بجوار x_0 اذا كانت الدالة الجديدة $F(X)=f(X+x_0)$ تقبل نشرا محدودا بجوار 0 حيث: $F(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n+X^n\epsilon_1(X)$

و $\epsilon(X)=\epsilon_1(x-x_0)$ و $\lim_{x\to x_0}\epsilon(x)=0$

مثال: نشر lnx بجوار 2 عند الرتبة 2

$$lnx=ln(2+h)=ln\,2+ln\left(1+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+o((x-2)^2)$$

3.2.5.النشر المحدود بجوار مالا نهاية Développements limités au voisinage d'un infinie

لتكن $f: I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بجوار ∞ فان: الدالة f تقبل نشرا محدودا بجوار ∞ إذا كانت الدالة الجديدة $F(X)=f(\frac{1}{x})$ تقبل نشرا محدودا بجوار 0 حيث: $F(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n+o(X^n)$ أي $f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+o(\frac{1}{x^n})$

مثال:

$$\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\ln 2+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{24x^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^nx^n}+o(\frac{1}{x^n})$$

3.5. عمليات على النشر المحدود Opérations sur les développements limités

1.3.5. الجمع و الضرب

لتكن الدالتان f و g تقبلان نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n .

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \quad , \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

فان:

1) الدالة $f+g$ تقبل نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n حيث:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_n + d_n)x^n + x^n \epsilon(x)$$

2) الدالة $f \times g$ تقبل نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n حيث:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث كثير الحدود الناتج $(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \times (d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n)$ هو الجزء النظامي $T_n(x) =$.

مثال: نشر الدالة $f(x) = \sin x \cos x$ بجوار 0 حتى الرتبة 3 حيث النشر المحدود للدالتين بجوار 0 حتى الرتبة 3 هو:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \ , \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

و منه نتحصل على :

$$f(x) = \sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

2.3.5. التركيب

لتكن الدالتان f و g تقبلان نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n .

$$f(x) = C(x) + x^n \epsilon_1(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$$

$$g(x) = D(x) + x^n \epsilon_2(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

فانه إذا كان $g(0) = 0$ فان $f \circ g$ تقبل نشرا محدودا بجوار 0 من رتبة n حيث كثير الحدود الناتج $C(D(x))$ هو الجزء النظامي.

مثال: نشر الدالة $f(x) = e^{\cos x}$ بجوار 0 حتى الرتبة 4 .

نضع $F(x) = e^{\cos x} = f(u(x))$ حيث: $u(x) = \cos x - 1$ و $f(u) = ee^u$

$$u(x) = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4)$$

$$e^{u} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + o(u^4)$$

$$f(u) = ee^{u} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{3!}x^4 + o(u^4)$$

$$F(x) = e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{3!}x^4 + o(x^4)$$

4.5. تطبيقات على النشر المحدود Applications des développements limite

حساب النهايات

النشر المحدود فعال للغاية في حساب النهايات بأشكال غير محددة فيكفي أن نلاحظ انه إذا كان $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots$

فان: $\lim_{x\to a} f(x) = c_0$

مثال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sin 3x}{sh(-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(3x + o(x))}{(-2x + o(x))} = \frac{-3}{2}$$

الفصل السادس:

الجبر الخطي

Algèbre linéaire

1.6.القانون الداخلي و التركيب الداخلي

1.1.6.العمليات الداخلية

2.1.6.الزمرة

3.1.6.الزمرة الجزئية

4.1.5.الحلقة

5.1.6.الحقل

2.6.الفضاءات الشعاعية

1.2.6.قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

2.2.6.الفضاءات الشعاعية الجزئية

3.2.6.مجموع فضاءين شعاعين جزئين و الفضاء الشعاعي الجزئي المكمل

4.2.6.أساس فضاء شعاعي

3.6.التطبيقات الخطية

1.3.6.تعاريف

2.3.6.نواة و صورة تطبيق خطي

3.3.6.عمليات على التطبيقات الخطية

4.3.6.نظرية التمييز

1.6.القانون الداخلي و التركيب الداخلي

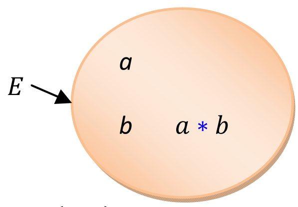
1.1.6.العمليات الداخلية

تعريف 1: نسمي عملية داخلية (قانون داخلي) على المجموعة E كل تطبيق f معرف على الجداء الديكارتي $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ و يأخذ قيمه في E.

$$f:\quad \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathrm{E}$$
$$(x;y)\to z=f(x;y)$$

القيمة $z=f(x;y)$ تسمى تركيب x و y و يرمز له برموز مختلفة مثل: $x*y\,,x\oplus y,x+\ y,\ldots$

رسم توضيحي 1: نكتب $(\mathrm{E},*)$ و نقول أن E مزودة بالعملية $*$.



$$\forall(a,b)\in\mathrm{E}\times\mathrm{E};\ a*b\in\mathrm{E}$$

تعريف 2: لتكن المجموعة E ذات العناصر $a;b;c,\ldots$ و المجموعة F ذات العناصر $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ نسمي عملية خارجية (قانون خارجي) بين عناصر E و عناصر F كل تطبيق f من $\mathrm{F}\times\mathrm{E}$ في E .

$$f:\mathrm{F}\times\mathrm{E}\to\ \mathrm{E}$$
$$(\alpha;a)\to f(\alpha;a)$$

القيمة $f(\alpha;a)$ تسمى تركيب α و a حيث $(\alpha;a)\in\mathrm{F}\times\mathrm{E}$.

أمثلة:

1) في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ فالجمع و الجداء تعتبران عمليتان داخليتان.

2) ليكن E مجموعة إذن عملية التقاطع $\cap$ و عملية الاتحاد $\cup$ هي عمليات داخلية على $\wp(\mathrm{E})$.

مثال توضيحي 2: نعتبر المجموعة $\mathrm{E}=\{0,1,2\}$ و نسمي $*$ قانون داخلي في E و المعرفة كما يلي:

$$\forall a,b\in\mathrm{E};\ \ (a*b)=a+b-ab$$

كما هو موضح في الشكل التالي:

جدول $(\mathrm{E},*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

تعريف 3: نقول أن العملية الداخلية $*$ المعرفة على المجموعة E:

1) تجميعية إذا تحقق : $\forall a,b,c \in \mathrm{E};\ \ (a*b)*c = a*(b*c)$

2) تبديلية إذا تحقق : $\forall a,b \in \mathrm{E};\ \ a*b = b*a$

تعريف 4: لتكن $*$ عملية داخلية معرفة على المجموعة E. نسمي عنصرا حياديا لهذه العملية كل عنصر $e \in \mathrm{E}$ بحيث:

$$\forall x \in \mathrm{E};\ \ x*e = e*x = x$$

تعريف 5: لتكن $*$ عملية داخلية معرفة على E تقبل عنصر حيادي e نسمي نظير العنصر x كل عنصر $\acute{x} \in \mathrm{E}$ يحقق :

$$x*\acute{x} = \acute{x}*x = e$$

أمثلة :

1) في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فان الجمع و الجداء عمليتان تجميعيتان و تبديليتان.

2) في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فان 0 هو العنصر الحيادي من أجل عملية الجمع و 1 هو العنصر الحيادي من أجل عملية الجداء.

3) في مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة $\mathbb{Z}^*$ فان $(\acute{x} = -x)$ هو العنصر النظير من أجل عملية الجمع.

4) في مجموعة الأعداد الناطقة غير المعدومة $\mathbb{Q}^*$ فان $\left(\acute{x} = \frac{1}{x}\right)$ هو العنصر النظير من أجل عملية الجداء.

ملاحظة: قانون تركيب الدوال $\circ$ في مجموعة الدوال هو قانون تجميعي لكن ليس تبديلي $(f \circ g \neq g \circ f)$.

مثال توضيحي 3: لتكن العلاقة $*$ في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x*y = 2x+y$$

- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا $x*y = 2x+y$

بما أن $x \in \mathbb{R}$ و منه $2x \in \mathbb{R}$ و منه $2x+y \in \mathbb{R}$ و منه $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

- ليكن x و y و z من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (2x+y)*z\\ &= 2(2x+y)+z\\ &= 4x+2y+z\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\begin{aligned}x*(y*z) &= x*(2y+z)\\ &= 2x+2y+z\end{aligned}$$

نجد $x*(y*z) \neq (x*y)*z$ و منه نستنتج أن القانون $*$ غير تجميعي في $\mathbb{R}$.

- ليكن x و y من $\mathbb{R}$

لدينا $x * y = 2x + y$ و من جهة أخرى $y * x = 2y + x$

نجد $x * y \neq y * x$ و منه العملية $*$ ليست تبديلية في $\mathbb{R}$.

- ليكن x و e من $\mathbb{R}$ بحيث $e * x = x$

أي : $e * x = 2e + x = x$ و منه $2e = 0$ و منه $e = 0$

نحسب من الجهة الأخرى

- ليكن x و e من $\mathbb{R}$ بحيث $x * e = x$

$$x * e = 2x + e = x$$

و منه $e = x - 2x$ و منه $e = -x$ إذن القانون الداخلي $*$ لا يقبل عنصرا حياديا.

مادام $*$ لا يقبل عنصرا حياديا فإننا لا نستطيع المرور إلى العنصر النظير.

2.1.6.الزمرة

تعريف 1: لتكن G مجموعة مزودة بالعملية الداخلية $*$ فان الثنائية $(G,*)$ تسمى زمرة إذا تحقق:

1) العملية $*$ تجميعية على G.
2) العملية $*$ تقبل عنصر حيادي في G.
3) من أجل العملية $*$ فان كل عنصر $a \in G$ يقبل عنصر نظير $\acute{a} \in G$.

تعريف 2: تسمى الزمرة $(G,*)$ زمرة تبديلية أو آبلية اذا كانت عمليتها الداخلية تبديلية.

مثال:

1) $(\mathbb{Z}, +)$ هي زمرة تبديلية.
2) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ هي زمرة تبديلية.

ملاحظة: العنصر الحيادي للزمرة $(G,*)$ هو وحيد.

نظرية 2: ليكن c, b, a ثلاث عناصر كيفية من الزمرة $(G,*)$.

1) إذا كان $a * b = a * c$ اذن $b = c$
2) إذا كان $b * a = c * a$ اذن $b = c$

نظرية 3: إذا كان a عنصر من الزمرة $(G,*)$ فانه يوجد عنصر وحيد $\acute{a} \in G$ بحيث: $a * \acute{a} = \acute{a} * a = e$ معناه نظير عنصر هو وحيد.

3.1.6. الزمرة الجزئية

تعريف 1: لتكن $(G,*)$ زمرة و $\mathcal{H}$ مجموعة جزئية من G أي $(\mathcal{H} \subset G)$ نقول ان $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من G إذا تحقق:

1) $\mathcal{H} \neq \emptyset$
2) $\forall x, y \in \mathcal{H}; x * y \in \mathcal{H}$
3) $\forall x \in \mathcal{H}, \exists \acute{x} \in \mathcal{H};\ x * \acute{x} = \acute{x} * x = e$

مثال: لتكن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة و لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة العناصر الزوجية من $\mathbb{Z}$ إذن $\mathcal{H}$ هي زمرة زوجية من $\mathbb{Z}$.

1) $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية ل: $(\mathbb{R}, +)$.
2) $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة جزئية ل: $(\mathbb{C}, \times)$.

4.1.6. الحلقة

تعريف 1: لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ فان $(A, *, \Delta)$ تسمى حلقة اذا تحقق:

1) $(A, *)$ زمرة تبديلية.
2) العملية Δ تجميعية.
3) العملية Δ توزيعية بالنسبة ل: $*$ يعني :

$$\forall a, b, c \in A; \quad \begin{array}{c} a\Delta(b * c) = (a\Delta b) * (a\Delta c) \\ \text{و} \\ (a * b)\Delta c = (a\Delta c) * (b\Delta c) \end{array}$$

ملاحظة: اذا كانت العملية Δ تبديلية في A ان الحلقة $(A, *, \Delta)$ حلقة تبديلية و إذا كان لها عنصر حيادي e_Δ نقول حلقة واحدية.

مثال: كل من : $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times)$ و $(\mathbb{C}, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدية.

5.1.6. الحقل

تعريف 1: نسمي المجموعة K المزودة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ حقلا إذا تحقق:

1) $(K, *, \Delta)$ حلقة.
2) المجموعة $K - \{e\}$ (حيث e هو العنصر الحيادي بالنسبة ل: $*$) زمرة بالنسبة للعملية Δ.

ملاحظة: نسمي $(K, *, \Delta)$ حقلا تبديليا إذا كانت العملية الخارجية Δ تبديلية.

مثال: كل من : $(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times)$ و $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل تبادلي.

2.6.الفضاءات الشعاعية

تعريف 1: ليكن $(K,*,\odot)$ حقل تبديلي. E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$ و العملية الخارجية $\odot$ مع K. تسمى $(E,*,\odot)$ فضاء شعاعي على K إذا تحقق:

1) $(E,*)$ زمرة تبديلية
2) العملية الخارجية تحقق:

$$\forall x,y\in E; \forall\lambda\in K:\ \lambda\odot(x*y)=(\lambda\odot x)*(\lambda\odot y)$$

$$\forall x\in E; \forall\lambda,\mu\in K:\ (\lambda*\mu)\odot x=(\lambda\odot x)*(\mu\odot x)$$

$$\forall x\in E; \forall\lambda,\mu\in K:\ \lambda\odot(\mu\odot x)=(\lambda\odot\mu)\odot x$$

$$1_K\odot x=x,\qquad \forall x\in E$$

عناصر E تسمى الأشعة و0_E يسمى الشعاع المعدوم و هو العنصر الحيادي بالنسبة للقانون$*$. عناصر K تسمى السلميات و 0_K يسمى الصفر.

أمثلة :

1) $(\Im(\mathbb{R}\to\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و تسمى فضاء شعاعي حقيقي.
2) نضع $K=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^2$ و ليكن $u=(x,y)$

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$$

حيث $\mathbb{R}^2$ مزودة بالعملية الداخلية $+$ و العملية الخارجية $\cdot$

$$+:\quad \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \big((x;y),(\grave{x};\grave{y})\big) & \to & (x;y)+(\grave{x};\grave{y})=(x+\grave{x};y+\grave{y})\end{array}$$

$$\cdot:\quad \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \big(\lambda,(x;y)\big) & \to & \lambda\cdot(x;y)=(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y)\end{array}$$

العنصر الحيادي بالنسبة للقانون الداخلي $+$ هو الشعاع المعدوم $(0;0)$

العنصر النظير بالنسبة للقانون الداخلي $+$ للعنصر $(x;y)$ هو $-(x;y)=(-x;-y)$

1.2.6.قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

مبرهنة: ليكن $(K,*,\odot)$ حقل تبديلي. ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على K وليكن $(x,y)\in E^2,(\lambda,\mu)\in K^2$. عندئذ الخواص التالية محققة:

1) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$ و $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$
2) $0_E\cdot x=0_E$ و $\lambda\cdot 0_E=0_E$
3) $(-\lambda)\cdot x=-(\lambda\cdot x)=\lambda(-x)$
4) $\lambda\cdot x=0_E\Leftrightarrow(\lambda=0_E)$ أو $(x=0_E)$

2.2.6.الفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف 1: F مجموعة جزئية غير خالية من فضاء شعاعي E على K. نسمي F فضاءا شعاعيا جزئيا من E إذا كان $(F,*,\odot)$ فضاء شعاعي.

من خلال هذا التعريف فان $(F,*,\odot)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $(E,*,\odot)$ اذا تحقق:

1) $\forall x,y \in F:\ x*y \in F$

2) $\forall x,y,z \in F:\ (x*y)*z = x*(y*z)$

3) $\forall x,y \in F:\ x*y = y*x$

4) $\forall x \in F:\ x*e_* = x$ حيث e_* هو العنصر الحيادي للعملية $*$ و $e \in F \subset E$

5) $\forall x \in F, \forall \grave{x} \in F:\ x*\grave{x} = e$

6) $\forall x \in F, \forall \lambda \in K:\ \lambda \odot x \in F$

7) $\forall x,y \in F; \forall \lambda \in K:\ \lambda \odot (x*y) = (\lambda \odot x)*(\lambda \odot y)$

8) $\forall x \in F; \forall \lambda,\mu \in K:\ (\lambda*\mu)\odot x = (\lambda \odot x)*(\mu \odot x)$

9) $\forall x \in F; \forall \lambda,\mu \in K:\ \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \odot \mu)\odot x$

10) $\forall x \in F:\ x \odot e_\odot = x$ حيث $e_\odot$ هو العنصر الحيادي للعملية $\odot$

نظرية1: ليكن F جزء غير خال من الفضاء الشعاعي $(E,*,\odot)$ على الحقل K.

(F فضاء شعاعي جزئي من E $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in F \Rightarrow x*y \in F$ و $\forall\lambda \in K, \forall x \in F \Rightarrow \lambda \odot x \in F$)

مثال 1: لتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$

1) $0_{\mathbb{R}^2} \in F$؟

$(0,0) \in F$ لان $0+0=0$

2) $u+v \in F,\ \forall u,v \in F$

إذا كان $u=(x_1,y_1)$ و $v=(x_2,y_2)$ شعاعين من F و منه $x_1+y_1=0$ و $x_2+y_2=0$

إذن $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0$ أي $u+v=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ ينتمي إلى F

$\lambda u \in F,\ \forall \lambda \in K, \forall u \in F$

إذا كان $u=(x,y)$ شعاع من F و λ من $\mathbb{R}$ فان $x+y=0$ و منه $\lambda x+\lambda y=0$ أي $\lambda u = \lambda(x,y)$ ينتمي إلى F.

مثال 2: بعض المجموعات التي لا تمثل فضاء شعاعي جزئي

ليست فضاء شعاعي جزئي على $\mathbb{R}^2$ لأن الشعاع المعدوم $(0,0) \notin F_1$

$$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ أو } y = 0\}$$

ليست فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ لأنه إذا كان $v = (0.1)$ و $u = (1,0)$ فان $u + v = (1,1) \notin \mathrm{F}_2$

نظرية 2: كل تقاطع للفضاءات الشعاعية الجزئية من فضاء شعاعي E هو فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال:

$$\mathbf{E_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{E_2} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$$

$$(x, y, z) \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \Rightarrow \begin{matrix}(x, y, z) \in \mathrm{E}_1 \\ (x, y, z) \in \mathrm{E}_2\end{matrix}$$

و منه $\begin{cases} x + y + z = 0 \dots \dots \dots (1) \\ x - y - z = 0 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$ و منه بجمع (1) و (2) نجد $x = 0$

بالتعويض في (1) نجد $0 + y + z = 0$ و منه $y = -z$ اذن $\mathbf{E_1} \cap \mathbf{E_2} = \{(\mathbf{0}, -\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3\}$ و منه $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

تعريف 2: لتكن A جزء غير خال من الفضاء الشعاعي E.

تقاطع كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من E التي تحوي A تسمى فضاء شعاعي مولد ل A و نرمز له ب: $[\mathrm{A}] = \cap_{\mathrm{F} \in \mathfrak{J}} \mathrm{F}$ حيث $\mathfrak{J}$ هي مجموعة كل الفضاءات الشعاعية الجزئية التي تحوي A .

تعريف 3: لتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ مجموعة من p عنصر للفضاء الشعاعي E على K. العنصر x من E يسمى تركيب خطي أو مزج خطي من $x_1, x_2, \dots, x_p$ اذا وجد $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathrm{K}$ حيث:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$$

ملاحظة: مجموعة كل التراتيب الخطية من $\left(x_1, x_2, \dots, x_p \text{ من } \mathrm{E}\right)$ هي فضاء شعاعي جزئي من E

نظرية 3: لتكن $\mathrm{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ مجموعة من p عنصر من فضاء شعاعي E على K.

اذن فضاء شعاعي المولد ب: A هو نفسه فضاء شعاعي جزئي لكن المزوج الخطية من $x_1, x_2, \dots, x_p$

نظرية 4: لتكن $\mathrm{A} = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ إذن فضاء شعاعي جزئي المولد ب: A هو:

$$[\mathrm{A}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x, y) = x(1,0) + y(0,1); x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

3.2.6.مجموع فضاءين شعاعين جزئين و الفضاء الشعاعي الجزئي المكمل

نظرية 1: ليكن E_2 و E_1 فضاءين جزئيين من E. المجموعة $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \{x_1 + x_2 / x_1 \in \mathrm{E}_1 \text{ و } x_2 \in \mathrm{E}_2\}$

هو فضاء شعاعي جزئي من E و يسمى مجموع الفضاءان الشعاعان E_1 و E_2.

ملاحظة: بصفة عامة $E_1 \cup E_2$ ليس فضاء شعاعي جزئي من E.

تعريف 1: E_1 و E_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من E نسمي فضاءات شعاعية جزئية مكملة من E إذا استطعنا كتابة كل عنصر x من E بصفة وحيدة كما يلي: $x = x_1 + x_2$ حيث: $x_1 \in E_1$ و $x_2 \in E_2$

في هذه الحالة نكتب $E = E_1 \oplus E_2$ و نقول أن E هو المجموع المباشر ل: E_1 و E_2

نظرية 2: ليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعين جزئين من E حيث: $E = E_1 \oplus E_2$

1) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
2) $E_1 + E_2 = E$

ونقول أن E_1 و E_2 فضاءات شعاعية جزئية مكملة في E.

مثال:

$E_1 = \{(x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ و $E_2 = \{(0,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$ يشكلان فضاءين شعاعين جزئين مكملين من $\mathbb{R}^2$. لأن $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$ و $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ نكتب $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$

4.2.6. أساس فضاء شعاعي

تعريف 1: ليكن G جزء من فضاء شعاعي E على الحقل K يسمى G مولد ل: E إذا كان الفضاء الشعاعي الجزئي المولد ب: G يساوي E يعني:

$G \neq \emptyset$ جزء مولد ل: E $\Leftrightarrow$ كل عنصر x من E يكتب: $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$ حيث :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K \quad \text{و} \quad x_1, x_2, \ldots, x_p \in G$$

تعريف 2: مجموعة الأشعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ من الفضاء الشعاعي E تكون مرتبطة خطيا إذا وجد سلميات ليست بالضرورة كلها معدومة حيث: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \in E$

تعريف 3: مجموعة منتهية من الأشعة تكون مستقلة خطيا إذا لم تكن مرتبطة خطيا يعني :

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ خطيا مستقلة $\Leftrightarrow$ $\{\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \quad / \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0\}$

أمثلة:

1) $\{(1,0,3); (0,1,2); (2,-3,0)\}$ مرتبطة خطيا لأنه يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ كلها ليست معدومة حيث:

$$\lambda_1(1,0,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(2,-3,0) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3, \quad \lambda_2 - 3 + \lambda_3, \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_2 - 3 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

الجملة تقبل مالا نهاية من الحلول بأخذ $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ مثلا نجد $\lambda_1 = \frac{-2}{3}$ و $\lambda_2 = 1$

2) $\{(2,1,1);(0,3,1);(-2,1,3)\}$ مستقلة خطيا لأن:

$$(2\lambda_1 - 2\lambda_3, \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -4\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

نظرية 1: مجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مرتبطة إذا و فقط إذا وجد شعاع x_i من هذه المجموعة حيث:

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n$$

مثال: $\{(1,0,3);(0,1,2);(2,-3,0)\}$ مرتبطة خطيا لأن:

$$(0,1,2) = \frac{-1}{3}(2,-3,0) + \frac{2}{3}(1,0,3)$$

$$(0,1,2) = \lambda_1(2,-3,0) + \lambda_2(1,0,3)$$

$$(0,1,2) = (2\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1, 3\lambda_2)$$

و منه $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ و $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$

تعريف 4: E فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد منتهٍ إذا كان يقبل عدد منته من الأشعة المولدة و إذا كان عدد الأشعة المولدة غير منته نقول أن الفضاء الشعاعي ذو بعد غير منته.

تعريف 5: المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من الفضاء الشعاعي E على الحقل K تسمى أساس ل: E إذا تحقق:

1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ أشعة مولدة ل: E

2) $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقلة خطيا.

مثال:

1) $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ أساس ل: $\mathbb{R}^2$ و يسمى أساس قانوني ل: $\mathbb{R}^2$

2) $\mathcal{B} = \{(2,1,1),(0,3,1),(-2,1,3)\}$ أساس ل: $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}$ مجموعة مستقلة خطيا.

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ فان x يكتب:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$= a_1(2,1,1) + a_2(0,3,1) + a_3(-2,1,3)$$

حيث a_1, a_2, a_3 تحقق المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 2a_1 - 2a_3 = x_1 \dots (1) \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = x_2 \dots (2) \\ a_1 + a_2 + 3a_3 = x_3 \dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $a_1 = \frac{x_1+2a_3}{2} = \frac{x_1}{2} + a_3$ بالتعويض في (2) و(3) نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + 2a_3}{2} + 3a_2 + a_3 = x_2 \\ \dfrac{x_1 + 2a_3}{2} + a_2 + 3a_3 = x_3 \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} + 3a_2 + 2a_3 = x_2 \dots (4) \\ \frac{x_1}{2} + a_2 + 4a_3 = x_3 \dots (5) \end{cases}$$

بالجمع

$$\begin{cases} -x_1 - 6a_2 - 4a_3 = -2x_2 \\ \frac{x_1}{2} + a_2 + 4a_3 = x_3 \end{cases}$$

نجد

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{2} - 5a_2 &= 2x_2 + x_3 \\ -5a_2 &= \frac{x_1}{2} - 2x_2 + x_3 \\ &= \frac{x_1 - 4x_2 + 2x_3}{2} \end{aligned}$$

بالتعويض في (5) نجد:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} + a_2 + 4a_3 &= x_3 \\ 4a_3 &= x_3 - \frac{x_1}{2} - a_2 \\ 4a_3 &= \frac{-4x_1 - 4x_2 + 12x_3}{10} \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{-x_1 - x_2 + 3x_3}{10}$$

$$a_1 = \frac{x_1}{2} + a_3 = \frac{4x_1 - x_2 + 3x_3}{10}$$

مثلا لحساب إحداثيات $x = (0,3,1)$ في الأساس الجديد نعوض x_1, x_2, x_3 ب: $0, 3, 1$ على الترتيب فنجد: $x_{\text{جديد}} = (0,1,0)$

ملاحظة: نلاحظ أن إحداثيات x في الأساس القانوني تختلف عن إحداثياته في هذا الأساس الجديد و يعني إحداثيات شعاع تتعلق بالأساس.

نظرية 2: كل فضاء شعاعي E ذو بعد منته يختلف عن $\{0\}$ يقبل أساس.

نظرية 3: ليكن $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E على الحقل K إذن كل أساس آخر $\acute{\mathcal{B}}$ ل: E له نفس عدد أشعة الأساس $\mathcal{B}$.

تعريف 6: عدد عناصر أساس فضاء شعاعي E على الحقل K يسمى بعد الفضاء الشعاعي و نرمز له ب: $\dim_K E$

مثال: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ و $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

نظرية 4: لتكن $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ جزء من الأشعة مستقلة من فضاء شعاعي E على الحقل K ذو بعد منته n إذن:

1) $p = n \Leftarrow$ L أساس ل: E

2) $p < n \Leftarrow$ يوجد جزء $H = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ من E حيث $L \cup H$ يكون أساس ل: E

خـــواص :

1) كل مجموعة جزئية تحوي جملة مولدة ل : E هي جملة مولدة.

2) كل مجموعة جزئية من جملة مستقلة هي جملة مستقلة

3) كل مجموعة تشمل شعاع معدوم هي مرتبطة.

4) كل جملة تشمل شعاع وحيد غير معدوم هي مستقلة خطًا.

نظرية 5: ليكن E_1 , E_2 فضاءين شعاعيين جزئيان من فضاء شعاعي جزئي E على الحقل K حيث بعد كل منهما منته.

$$\dim_K(E_1 \oplus E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2$$

$$\dim_K(E_1 + E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2 - \dim_K(E_1 \cap E_2)$$

3.6. التطبيقات الخطية

1.3.6. تعاريف

تعريف: ليكن E و $\acute{E}$ فضاءين شعاعين على نفس الحقل K و $\mathcal{M}: E \to E'$ تطبيق. إذن $\mathcal{M}$ يسمى تطبيق خطي إذا تحقق:

1) $\forall x, y \in \mathrm{E}, \mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}(x) + \mathcal{M}(y)$

2) $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathrm{K}, \ \mathcal{M}(\lambda x) = \lambda \mathcal{M}(x)$

ونقول أن $\mathcal{M}$ تماثل من E نحو $\grave{E}$.

$\mathcal{M}$ تطبيق خطي $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \mathcal{M}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 \mathcal{M}(x) + \lambda_2 \mathcal{M}(y)$

مجموعة كل التطبيقات الخطية من E نحو $\grave{E}$ نرمز لها ب $\mathcal{L}(E, \grave{E})$.

مثال1: ليكن $E = \left\{ f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R} / \ \ f \text{ مستمرة على } [a,b] \right\}$

التطبيق $\mathcal{M}: E \Rightarrow \mathbb{R}$ المعرف ب: $\mathcal{M}(f) = \int_b^a f(x)\,dx$ هو تطبيق خطي لأن:

$$\mathcal{M}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \int_b^a (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)dx = \lambda_1 \int_b^a f(x)\,dx + \lambda_2 \int_b^a g(x)\,dx \ = \lambda_1 \mathcal{M}(f) + \lambda_2 \mathcal{M}(g)$$

مثال 2: لتكن:

لدينا $f(1) = 1$ و $2f(1) = 2$ و $f(2 \times 1) = f(2) = 4$ و منه $2(1) \neq f(2 \times 1)$ و منه f ليس تطبيق خطي.

ملاحظة:

1) التطبيق المعدوم $0_{\mathcal{L}(E,\mathrm{F})}$

$$f : E \to \mathrm{F}, \qquad f(u) = 0_{\mathrm{F}}, \qquad \forall u \in \mathrm{E}$$

2) التطبيق المطابق id_E

$$f : E \to \mathrm{F}, \qquad f(u) = u, \qquad \forall u \in \mathrm{E}$$

2.3.6.نواة و صورة تطبيق خطي

تعريف 1 : ليكن $\mathcal{M}: E \Rightarrow \grave{E}$ تطبيق خطي إذن : مجموعة العناصر x حيث $\mathcal{M}(x) = 0$ تسمى نواة التطبيق $\mathcal{M}$ ونرمز لها بـ:

$$Ker\ \mathcal{M} = \{x \in E \ / \ T(x) = 0\}$$

$\mathcal{M}(E) = \{\mathrm{y} \in \grave{E} / \mathcal{M}(x) = \mathrm{y}, \mathrm{x} \in E\}$ تسمى صورة التطبيق الخطي $\mathcal{M}$ و نرمز لها ب: $Im\ \mathcal{M}$

مثال1: ليكن $\mathcal{M}: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بـ: $\mathcal{M}(e_2) = e_1 - e_2 \quad ; \mathcal{M}(e_1) = 2e_1 + e_2$

حيث: $e_1 = (1,0)\ ;\ e_2 = (0,1)$

ليكن $x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$ اذن :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(x_1 e_1 + x_2 e_2) &= x_1 \mathcal{M}(e_1) + x_2 \mathcal{M}(e_2)\\ &= x_1(2e_1 + e_2) + x_2(e_1 - e_2)\\ &= (2x_1 + x_2)e_1 + (x_1 - x_2)e_2\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}Ker\ \mathcal{M} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \mathcal{M}(x) = (0,0)\}\\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \quad 2x_1 + x_2 = 0 \ \text{و} \ x_1 - x_2 = 0\}\\ Ker\ \mathcal{M} &= \{(0,0)\}\end{aligned}$$

$$Im\ \mathcal{M} = \{\mathcal{M}(x) = 2x_1 + x_2, x_1 - x_2 / \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

نظرية 1: ليكن T تطبيق خطي من E نحو $\grave{E}$ اذن :

1) $\mathcal{M}$ متباين $\Leftrightarrow Ker\ \mathcal{M} = \{0_E\}$

2) $\mathcal{M}$ غامر $\Leftrightarrow Im\ \mathcal{M} = E$

نظرية 2: ليكن $\mathcal{M}$ تطبيق خطي من E نحو $\grave{E}$.

1) إذا كانت A مجموعة مرتبطة خطيا في E إذن $\mathcal{M}(A)$ مجموعة مرتبطة من $\grave{E}$

2) إذا كانت B مجموعة من E و $\mathcal{M}(B)$ من $\grave{E}$ مستقلة خطيا إذن B مجموعة مستقلة خطيا من E والعكس صحيح .

ملاحظة : $f: E \Rightarrow \grave{E}$ خطية فان:

$$\dim(Ker\, f) + \dim(Im\, f) = \dim E$$

$$\dim(Ker\, f) + \text{Rang}(f) = \dim E$$

مثال2:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x;y) & \rightarrow & f(x;y) = (2x+y, x-y) \end{array}$$

1) **نواة f**

$$(x;y) \in Ker\, f \Leftrightarrow f(x;y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+y, x-y) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x;y) = (0,0)$$

$Ker\, f = \{(0,0)\} \Leftrightarrow$ f متباين

2) **صورة f**

$$(X;Y) \in Im\, f \Leftrightarrow (X;Y) = f(x;y) = (2x+y, x-y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2x+y \\ Y = x-y \end{cases} \underset{\text{بالجمع}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases}$$

و منه: $\left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)$ سابقة ل: (X; Y) و منه $Im\, f = \mathbb{R}^2$ إذن f غامر و منه تقابلي.

نظرية 3 : ليكن E و $\acute{E}$ فضاءين شعاعين على نفس الحقل K ذو بعدين منتهيين و $\mathcal{M}: E \Rightarrow \grave{E}$ تطبيق خطي إذن الخاصيتين متكافئتين:

1) $\mathcal{M}$ تشاكل (تماثل، تقابلي)

2) $Ker\, \mathcal{M} = \{0_E\}$ و $\dim E = \dim \acute{E}$

3.3.6.عمليات على التطبيقات الخطية

1) ليكن E و $\acute{E}$ فضاءين شعاعين على K و $a \in K$

وليكن $f: E \Rightarrow \grave{E}$ و $g: E \Rightarrow \grave{E}$ تطبيقين خطين اذن af و $f+g$ تطبيقين خطين معرفين ب:

$$(af)(x) = af(x)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) ليكن E , F و G ثلاث فضاءات شعاعية على الحقل K

وليكن $f: E \Rightarrow F$ و $g: F \Rightarrow G$ تطبيقين خطين إذن $g \circ f$ تطبيق خطي من E نحو G

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

3) إذا كان f تشاكل من E نحو F فإن f^{-1} تشاكل من F نحو E

4.3.6.نظرية التمييز

ليكن f تطبيق خطي من E و F و أساس لـ : B

1) f متباين إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ مستقلة
2) f غامر إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ مولدة F
3) f تشاكل إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ أساس ل: F

Références : المراجع:

1) A. Bodin et al. Cours de mathématique Première année. Université de Lille.
2) A. Hitta. Cours Algebre et Analyse. Universite 8 Mai 1945 – Guelma. 2008-2009
3) B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boshet, Exercices d'algèbre, 1ere cycle scientifique préparation aux grandes écoles 2eme année, Armand Colin – Collection U.
4) J. Quinet. Cours élémentaire de mathématiques supérieures. Tome1-Algèbre, Dunod. 1972.
5) J. Quinet. Cours élémentaire de mathématiques supérieures. Tome 2-Fonctions usuelles. 1976.
6) K. Allab, Eléments d'analyse, Fonction d'une variable réelle, 1ere & 2eme années d'université, Office des Publications universitaires.
7) O. Kouba. Algebra linear, volume 2, Higher Institute for Applied Science and Technology (HIAST). Syrian Arab Republic, 2017
8) S. Djebbar. Cours Maths 1 Et Exercices Avec Solutions, Institut des Sciences et Technologies, C.U Relizane . Ahmed Zabana, 2017-2018.
9) ركاب صورية, بوشقوف مسعودة وعرعار نورية. دروس رياضيات 1. جامعة الاخوة منتوري قسنطينة. 2017-2016