الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد خيضر – بسكرة –

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير

قسـم العلـوم التجـارية

دروس و أعمـال موجهــة

مـقيـــاس رياضيـات

لطلبة السنة الأولى

السداسي الثاني

من إعداد الأستاذة :

د. سلطـان لويـزة

السنة الجامعية : 2020-2021

الفهـــــرس

الفصـــــل الأول: بـــــنية الفضــــــــــاء الشعــــاعي

تذكيــــــــر :

تـــــعريف:

لتكن E مجموعة غير خالية،

نسمي $(*)$ عملية داخلية على E (أو قانون تركيب داخلي) كل تطبيق $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ نحو E .

يعبر على أن تركيب كل عنصرين من المجموعة E هو عنصر وحيد من E.

أي : $x * y \in E$ $\forall (x,y) \in E :$

مثـــــال :

$(+)$ عملية داخيلة في $\mathbb{N}$.

$(-)$ ليست عملية داخلية في $\mathbb{N}$.

الاتحاد و التقاطع عمليات داخلية في $P(\mathrm{E})$.

$P(\mathrm{E})$ مجموعة أجزاء E

تـــــعريف:

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ $+$.

نقول إن $(\mathrm{E},+)$ زمـــرة إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

1. العملية $(+)$ تجميعية $\forall x,y,z \in E : \ x+(y+z) = (x+y)+z$
2. يوجد في E عنصر حيادي يرمز له بـ $(0_{\mathrm{E}}$ أو $0)$ بحيث :

$$\forall x \in E : x + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} + x = x$$

3. كل عنصر $x \in E$ يقبل نظيرا y بالنسبة لـ $+$ بحيث :

$\forall x \in E, \exists y \in E : \ x + y = y + x = 0_{\mathrm{E}}$ أين 0_{E} هو العنصر حيادي للعملية $+$.

ملاحظـــة :

1. إذا كانت العملية $+$ تبديلية أي $\forall x, y \in E \ : \ x+y = y+x$
فإننا نقول $(E,+)$ إنها زمرة تبديلية .
2. العنصر الحيادي إذا وجد فهو وحيد وهو نظير نفسه.

أمثلـــــة :

- $(\mathbb{N}, -)$ ليست زمرة لان (-) ليست عملية داخلية.
- $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة لأنه مثلا 1 ليس نظيرا في $\mathbb{N}$.
- كل من $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديلية.

تـــــعـــريــف:

لتكن E مجموعة حيث $E \neq \emptyset$،

نسمي عملية خارجية على Eبتمثيل في $\mathbb{R}$ كل تطبيق من $\mathbb{R} \times E$ نحو E .

بـــــنية الفضاء الشعـــاعي

تـــــعريف :

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ $+$ وبعملية خارجية بتمثيل في $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ(E , + , .) فضاء شعاعي (ف ش) على $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ــ ف ، ش) اذا تحقق مايلي :

1. (E , +) زمرة تبديلية .
2. العملية . تحقق الخواص التالية :

- $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E: \alpha . (\beta . x) = (\alpha\beta). x$
- $\forall x \in \mathrm{E}: \quad 1 . x = x$
- $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E: \ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$

جمع الأعداد الحقيقية توزيعي بالنسبة لـ ·

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall(x, y) \in E^2: \lambda\cdot(x+y) = (\lambda\cdot x) + (\lambda\cdot y)$

جمع عناصر من E توزيعي بالنسبة لـ ·

ملاحظـــة:

- عناصر E تسمى أشعة و عناصر $\mathbb{R}$ سلميات .

- العنصر الحيادي O_{E} يسمى الشعاع المعدوم.
- كل ف ش يشمل على الأقل الشعاع المعدوم و منه من غير الممكن أن يكون خالي.

قضيـــة:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E:$$

$$\lambda \cdot x = O_{\mathrm{E}} \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}} \vee x = O_{\mathrm{E}}$$

$$(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$$

ملاحظـــة:

$$\lambda \cdot O_{\mathrm{E}} = O_{\mathrm{E}}$$

$$0_{\mathbb{R}} \cdot \chi = O_{\mathrm{E}}$$

مثـــال:

لنتحقق ان $\mathbb{R}^n$ هو $\mathbb{R}$ – ف ش. من اجل العمليات $(+)$ و $(.)$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots \lambda \cdot x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

من الواضح إن:

1. $+$ عملية داخلية على $\mathbb{R}^n$ ، تجميعية و تبديلية .
   $O_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ هو العنصر الحيادي بالنسبة لـ $+$.

اذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فان $x' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ هو نظير χ ويرمز له بـ $-x$

من جهة اخرى :

2. $(\cdot)$ هي عملية خارجية تحقق :

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x \text{و} \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$$

سوف نتعامل كثيرا مع المجموعات التالية :

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الثنائيات(x, y)بحيث$x, y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3$ هي مجموعة الثلاثيات(x, y, z) بحيث $x, y, z \in \mathbb{R}$

الفضـــاء الشعـــاعي الجـــزئي (ف ش ج):

تـــــعريف:

E : ف ش

نقول أن F ف ش ج من E إذا تحقق:

1. $\emptyset \neq F \subset E$ أي الشرطين $\left.\begin{matrix} F \subset E \\ F \neq \emptyset \end{matrix}\right\}$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall X, Y \in F: (\alpha X + \beta Y) \in F$

ملاحـــظات:

1. F ف ش ج لـ E اذن : $O_E \in F$
   بما F غير خالي إذن يوجد $x \in F$ ومنه $O_{\mathbb{R}} \cdot x \in F$ اي $O_E \in F$.
2. عمليا لإثبات إن F غير خالي نتحقق من إن $0_E \in F$

مثـــال:

- المجموعة الجزئية F من $\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ : $F = \{(x, y, 1): x, y \in \mathbb{R}\}$
  ليست ف ش ج لان: $O_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin F$

مثـــال:

لنثبت أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$

1. من تعريف المجموعة W نلاحظ ان $W \subset \mathbb{R}^3$ و $0 \in \mathbb{R}$, $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$) العنصر الحيادي لـ ف ش$\mathbb{R}^3$) يعني أن $0_{\mathbb{R}^3} \in W$ و منه $W \neq \emptyset$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in W: (\alpha X + \beta Y) \in W\ ???$
   لدينا $X \in W \Rightarrow X = (x, y, 0)\ , x, y \in \mathbb{R}$

$$Y \in W \Rightarrow Y = (x', y', 0)\ , x', y' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(\alpha X + \beta Y) &= \alpha(x, y, 0) + \beta(x', y', 0) \\ &= (\alpha x, \alpha y, 0) + (\beta x', \beta y', 0) \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', 0)\end{aligned}$$

إذن : $(\alpha X + \beta Y) \in W$

من 1 و 2 نستنتج أن W ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

ملاحظـــات:

1. تقاطع ف ش ج من E هو ف ش ج . (الاتحاد ليس صحيحا في الحالة العامة)
2. اذا كان F ف ش ج من E و G ف ش ج من F فان G ف ش ج من E .
3. لإثبات ان جزء F من ف ش E هو ف ش ج .

نستخدم :

- التحقق أولا ان F غير خالي $(F \neq \emptyset)$ ونبين الاستقرار بالنسبة للعملية الداخلية و الخارجية.
- إثبات ان F هو تقاطع ل ف ش ج من E .
- إثبات ان F هو فشج من E المولد بأشعة من E .
- إثبات ان F هو نواة أو صورة تطبيق خطي.

1.التركيبـــات الخطيـــة للأشـــعة :

مزج لـ p شعاع :

تـــــعريف :

ليكن $P(U_1, U_2, \dots, U_p)$ شعاع من E، نسمي الشعاع X تركيب خطي للأشعة $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ اذا وجدت السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ من $\mathbb{R}$ بحيث :

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k U_k$$

مثـــال:

في $\mathbb{R}^2$ الشعاع $\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$ هو تركيب خطي لشعاعين $\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

لدينا : $\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

فضاء شعاعي جزئي مولد بـ p شعاع :

تـــــعريف :

ليكن $p \in \mathbb{N}^*$ و $P(U_1, U_2, \dots, U_p)$ شعاع من E ، ولنرمز بـ F للمجموعة الجزئية من E

المكونة من كل التركيبات الخطية للأشعة $(U_1, U_2, \dots, U_p)$:

$$F = \{\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

المجموعة F هي ف ش ج من E، يسمى ف ش ج المولد بـ: $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ و يرمز بـ:

$$F = \mathbf{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_P) = \langle U_1, U_2, \dots, U_p \rangle$$

$$F = \mathbf{Vect}(\mathrm{U_1}, \mathrm{U_2}, \dots, \mathrm{U_P}) = \{\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p \mathrm{U_p}, \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

مثـــــال:

ليكن

$$N = \{(, y, z): 2x + y - z = 0\}$$

لنبين ان N ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

لدينا

$$N = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$$
$$= \left\{ x\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

نلاحظ أن N هو مجموعة كل التركيات الخطية للأشعة $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

و منه N ف ش ج مولد بالأشعة $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ و نكتب $N = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} و \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

إذن $N = \left\{ \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \ ; \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ فهو ف ش ج من $\mathbb{R}^2$

2.الأســـــس و الأبعـــاد:

الجملـــــة المـــولدة:

تعــــــريف:

ليكن $P(\mathrm{U_1}, U_2, \dots, U_p)$ شعاع من ف ش جE ،

نسمي $(\mathrm{U_1}, U_2, \dots, U_p)$ جملة مولدة لـE اذا وفقط اذا كان E مولد بـ $(\mathrm{U_1}, U_2, \dots, U_p)$

$$\mathrm{E} = \mathbf{Vect}(\mathrm{U_1}, U_2, \dots, U_p)$$

أي: $\forall V \in E; \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P \in \mathbb{R}: \ V = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p \mathrm{U_p}$

مثـــــال :

نلاحظ انه من اجل كل شعاع $\binom{x}{y}$ من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$\binom{x}{y} = \binom{x+0}{y+0} = \binom{x}{0} + \binom{0}{y} = x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}$$

إذن كل شعاع من $\mathbb{R}^2$ يكتبكتركيبخطي لـ $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ ومنه

الجملة $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ هي جملة مولدة لـ $\mathbb{R}^2$ ونكتب $\mathbb{R}^2 = \left\langle\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\rangle$

بعـــد فضـــاء شعـــاعي :

نقول عن فضاء شعاعي E انه ذو بعد منته اذا وجدت جملة مولدة لـ E منتهية (تشمل عدد منته من العناصر).

مثـــال :

$E = \mathbb{R}^2$ هو ف ش ج منته البعد لان :

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\rangle$$

الاستقـــلال و الإرتـــــاط الخطـــي:

تـعــــريف:

E هو $\mathbb{R}$-ف .ش

جملة الأشعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من E مستقلة خطيا اذا كان :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

ملاحـــظة:

الجملة التي ليست مستقلة خطيا هي مرتبطة خطيا

أمـثـــلة :

1. الشعاعين $e_2(0,1)$ و$e_1(1,0)$ مستقلان خطيا لان:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \implies \alpha = \beta = 0$$

$$\boldsymbol{\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = \beta = 0$$

ومنه الشعاعين مستقلة خطيا .

2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \ \in \mathbb{R}, U, V \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0)$

$$\alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ -3\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\alpha_2 \\ -9\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 - 9\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: $0 = 0$ إذن الشعاعين U, V مرتبطين خطيا لأحظ أن

$$\{U, V\} = \{(2,-3),(6,-9)\}$$
$$= \{(2,-3), 3(2,-3)\}$$
$$= \{U, 3U\}$$

$V = 3U$ أيأن الشعاع V كتب كمزج خطي من الشعاع U

خـــــــواص :

1. كل مجموعة جزئية تحوي جملة مولدة لـ E هي أيضا جملة مولدة.
2. كل مجموعة جزئية من جملة مستقلة هي جملة مستقلة.
3. كل مجموعة تشمل شعاع معدوم هي مرتبطة.
4. كل جملة تشمل شعاع وحيد غير معدوم هي مستقلة خطيا.

الأســــــاس:

نقول عن جملة أشعة B غير خالية من E أنها أساس لـ E اذا وفقط اذا كانت B مستقلة ومولدة.

(B اساس لـE) إذا وفقط $\begin{cases} \text{B مستقلة خطيا} \\ \\ \text{B مولدة} \end{cases}$

ملاحظـــة:

كل فضاء شعاعي يملك اســـاس.

قضيــــة :

1. كل أساس أخر لـ E يشمل بالضبط n عنصر ونقول ان بعد E هو n ونرمز له بك $dimE = n$

ولدينا: $dim(\{0\}) = 0$

2. كل جملة مستقلة تشمل على الأكثر n عنصر.
3. كل جملة مولدة تشمل على الأقل n عنصر.
4. اذا كان $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ اساس لـ E فان كل شعاع من E يكتب وبطريقة وحيدة كتركيب خطي لـ e_1، $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ السلميات λ_i تسمى بمركبات x بالنسبة للأساس B .

نظرية1 :

اذا كان E ف ش ج ذو بعد منته ،

فان كل جملة مكونة من n شعاع تكون اساس اذا كانت مستقلة أو مولدة .

نظرية 2 : (بعد فضاء شعاعي جزئي)

ليكن E ف ش ج ذو بعد منته و F ف ش ج لـ E

إذن : F ذو بعد منته و $\dim F \leq \dim E$

رتبة جمـــلة أشعة :

ليكن $S = \{U_1, \dots, U_p\}$ جملة من p شعاع من ف ش ج E

نسمي رتبة S بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ S

$$rang(S) = dimVect(S)$$

خصـــائص :

1. $\mathbf{rg}\,(\mathbf{S}) \leq \mathbf{p}$
2. $(\mathbf{rg}\,(\mathbf{S}) = \mathbf{p}) \Leftrightarrow$ (S خطيا مستقلة)
3. رتبة هو العدد الأكبر من الأشعة المستقلة خطيا التي يمكن استخراجها من S
4. اذا كان E ذو بعد منته n فان : $rg(S) \leq n$
5. اذا كان E ذو بعد منته n فان : $(rg(S) = n) \Leftrightarrow$ (S جملة مولدة)

مثـــــال :

الأشعة $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ مستقلة خطيا لان :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \gamma = \beta = 0$$

التبرير:

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=0\\\beta=0\\-\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0$$

و منه الأشعة مستقلة خطيا إذن$rg\,(U_1\,,\ U_2\,,U_3)=3$

الجمــــع المباشــــر لفضـــاءات شعاعيـــه جزئيـــة :

تعـــــريف:

ليكن E هو $\mathbb{R}-$ ف .ش و E_2,E_1 ف ش ج من E نسمي مجموع E_2,E_1 الفضاء الشعاعي F من E المعرف كمايلي :

$$F=\{x_1+x_2;x_1\in E_1,x_2\in E_2\}$$

و يرمز له بـ: $F=E_1+E_2$

و لدينا : $\dim(E_1+E_2)=dimE_1+dimE_2-\dim(E_1\cap E_2)$

الجمــــع المباشــــر لفضائييـــن ش ج

تعريـــــف:

ليكن E هو $\mathbb{R}$- ف.ش و E_2,E_1 ف ش ج من E .

نقول إن مجموع E_2,E_1 مباشر اذا كان $E_1\cap E_2=\{O_E\}$ ويرمز له بـ$E_1\oplus E_2$

قضيــــــة :

من اجل E هو $\mathbb{R}-$ ف .ش و E_2, E_1 ف ش ج من E. B_2, B_1 اسس E_2, E_1 على الترتيب،

القضايا التالية متكافئة:

1. المجموع $E_2 + E_1$ مباشر
2. اذا كان $x_1 \in E_1$ و $x_2 \in E_2$ بحيث $x_1 + x_2 = 0$ فان $x_1 = x_2 = 0$.
3. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ و B_2 $B,\cup$ اساس ل $E_2 + E_1$.
4. $\dim(E_1 + E_2) = dimE_1 + dimE_2$

الفضـــاءالشعـــــاعي الجـــزئي الإضـــافي

تعـــــــريف:

نقول عن فضئين شعاعين جزئيين E_2, E_1 من ف ش ج E إضافيان في E اذا كان

$$E = E_1 \oplus E_2$$

أي:

$$\begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{O_E\} \end{cases}$$

ومنه فان :

$$\dim E = dimE_1 + dimE_2$$

سلسلـــــــة 1

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

رياضيات 2 — **السلسلة رقم 01**

التمرين 01: إلى أي فضاء شعاعي $\mathbb{R}^n$ تنتمي هذه العناصر :
أ) $(3,-2,8)$ ب) $(3,6+2i)$ ج) $(-2,0)$ د) $(-1,2,5,6)$.

التمرين 02: 1) أوجد x و y إذا: $(x,3)=(2,x+y)$ ، $(x+2,y-z,x+z)=(y,-x,y+1)$.
2) أوجد x و y إذا كان $v=(x+y,x-3)$ شعاع الصفري (المعدوم).

التمرين 03: أحسب ما يلي:

أ) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ أ) $5\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، ب) $-2\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

أ) $(3,-5,6,8)-(4,1,-7,9)$، ب) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

التمرين 04: لتكن $u=(2,-7,1), v=(-3,0,4), w=(0,5,-8)$ أوجد :
أ) $3u-4v$, ب) $2u+3v-5w$.

التمرين 05: 1) أكتب $w=(1,9)$ كمزج خطي من الشعاعين $u=(1,2)$ و $v=(3,-1)$.
2) أكتب $v=(2,-3,4)$ كمزج خطي من الأشعة $u_1=(1,1,1), u_2=(1,1,0), u_3=(1,0,0)$.

التمرين 06: 1) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,0);\ x,y\in\mathbb{R}\}$.
2) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$.
3) بين أن W ليست فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x\geq 0\}$.
4) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^2$ حيث $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2x=y\}$.
5) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^4$ حيث $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+3t=0,\ y=z\}$.

التمرين 07: 1) حدد ما إذا كان الشعاعين u, v, w مستقلين خطيا أم لا حيث:
أ) $u=(3,4), v=(1,-3)$, ب) $u=(2,-3), v=(6,-9)$, ج) $u=(2,-1,1), v=(1,2,3), w=(1,1,1)$

التمرين 08: أي من المجموعات التالية تكون أساس إلى $\mathbb{R}^3$:
1) $E=\{(-1,2,0), (0,1,0), (1,2,2)\}$.
2) $F=\{(1,2,0), (0,5,7), (-1,1,3)\}$.
3) $G=\{(-1,1,4), (0,2,0), (1,1,1),(0,2,5)\}$.
4) $H=\{(0,5,7), (-1,2,-3), (-2,9,1)\}$.

التمرين 09: بين أن الأشعة الأربعة التالية تشكل أساس ل $\mathbb{R}^4$: $(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)$.

التمرين 10: جد أساس إلى كل من الفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$.
1) $M=\{(x,y,z) : x+y=0\}$.
2) $N=\{(x,y,z) : 2x+y-z=0\}$.
3) $V=\{(x,y,z) : x=0,\ y-2z=0\}$.
4) $w=\{(x,y,z) : x=y-3z\}$.

التمرين 11: جد احداثيات كل من الأشعة التالية في $\mathbb{R}^2$ و ذلك بالنسبة للأساس $B=\{e_1=(2,-1),\ e_2=(3,0)\}$.
$A=(2,-1), B=(0,0), C=(0,1), D=(a,b)$.

التمرين 1:

تحديد العناصر لاي فضاء شعاعي تنتمي

- الشعاع $(3,-2,8)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$
- الشعاع $(3,6+2i)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^2$
- الشعاع $(-2,0)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$
- الشعاع $(-1,2,5,6)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$

التمرين 2:

1- إيجاد x و y إذا كان $(x,3) = (2, \mathrm{x}+\mathrm{y})$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

2- إيجاد x و y إذا كان $(x+2, y-z, x+z) = (\mathrm{y}, -\mathrm{x}, \mathrm{y}+1)$

$$\begin{cases} x + 2 = y \dots\dots.(1) \\ y - z = -x \dots\dots(2) \\ x + z = y + 1 \dots(3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

نعوض كل من x و z في المعادلة (3) نجد: $y = 5/2$ و منه تكون $x = 1/2$ و $z = 3$

3- إيجاد x و y إذا كان $\mathbf{v} = (\mathrm{x}+\mathrm{y}, \mathrm{x}-3)$ شعاع الصفري

$$(0,0) = (\mathrm{x}+\mathrm{y}, \mathrm{x}-3)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

التمرين 3:

حساب ما يلي:

-1 $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+(-3) \\ -4+(-1) \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\binom{-2}{4} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ لا يمكن الجمع لأنهما ليس من نفس النوع.

-2 $5\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 5 \\ 3\times 5 \\ 4\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ ، $-2\binom{7}{-5} = \binom{-2\times 7}{-2\times(-5)} = \binom{-14}{10}$

-3 $\binom{6}{-3} - \binom{2}{-5} = \binom{4}{2}$ ، $(3,-5,6,8) - (4,1,-7,9) = (-1,-6,13,-1)$

التمرين 4:

إيجاد كل من $3u-4v$ ، $2u+3v-5w$

$$3u-4v=3(2,-7,1)-4(-3,0,4)$$
$$=(6,-21,3)-(-12,0,1)$$
$$=(6+12,-21-0,3-16)$$
$$=(18,-21,-13)$$

$$2u+3v-5w=2(2,-7,1)+3(-3,0,4)-5(0,5,-8)$$
$$=(4,-14,2)+(-9,0,12)-(0,25,-40)$$
$$=(4-9+0,-14+0-25,2+12-40)$$
$$=-5,-39,54$$

التمرين 5:

1. كتابة $w=(1,9)$ كمج خطي من الشعاعين $u=(1,2)$ و $v=(3,-1)$

$$w=\alpha u+\beta v \Longrightarrow (1,9)=\alpha(1,2)+\beta(3,-1)$$
$$\Longrightarrow (1,9)=(\alpha,2\alpha)+(3\beta,-\beta)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta=1\\ 2\alpha-\beta=9\end{cases}$$

بالجمع و التعويض نجد : $\alpha=4$ و $\beta=-1$

إذن $w=4u-v$:

2. كتابة $v=(2,-3,4)$ كمزج خطي من الأشعة، $u_1=(1,1,1)$، $u_2=(1,1,0)$
$u_3=(1,0,0)$

$$v=\alpha u_1+\beta u_2$$
$$(2,-3,4)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,10)+\gamma(1,0,0)$$
$$\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \beta\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\ \ldots(1)\\ \alpha+\beta=-3\ \ldots\ldots(2)\\ 4=\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

من المعادلة رقم (3) نجد: $\alpha=4$. نعوض بقيمتها في المعادلة (2) نجد: $\beta=-7$

بتعويض قيمتي α,β في المعادلة (1) نجد: $\gamma=5$

إذن $v=4u_1-7u_{.}+5u_3$

التمرين 6:

1. إثبات أن W ف ش ج من في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$

1. من تعريف المجموعة W نلاحظ ان $W\subset\mathbb{R}^3$ و

$0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3;\ 0+0+0=0$ (العنصر الحيادي لـ ف ش$\mathbb{R}^3$) يعني أن $0_{\mathbb{R}^3}\in W$ و منه $W\neq\emptyset$

2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in W:(\alpha X+\beta Y)\in W\ ???$

لدينا $X\in W\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y+z=0$

$$Y\in W\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3;\ \ x'+y'+z'=0$$

$$\begin{aligned}(\alpha X+\beta Y)&=\alpha(x,y,z)\ +\beta(x',y',z')\\&=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\ +(\beta x',\beta y',\beta z')\\&=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')\end{aligned}$$

لكي يكون $(\alpha X+)\in W$ يكفي أن يكون :

$$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')=0\ ??$$

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')&=\alpha x+\beta x'+\ \alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z'\\&=\ \alpha x+\alpha y+\alpha z+\beta x'\ +\ +\beta y'\ +\ +\beta z'\\&=\alpha(x+y+z)+\beta(x'+y'+z')\\&=\alpha.0+\beta.0\\&=0\end{aligned}$$

إذن : $(\alpha X+\beta Y)\in W$

من 1 و 2 نستنتج أن W ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

التمرين 7:

تحديد إذ ما كانت الأشعة مستقلة خطيا أم لا

نقول ان شعاعان مستقلان خطيا إذاا:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha U_1+\beta U_2=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\ \Rightarrow\alpha=\beta=0$$

1. $\forall\alpha_1,\alpha_2\ \in\mathbb{R},U,V\in\mathbb{R}^2:\alpha_1U+\alpha_2V=(0,0)$

$$\alpha_1U+\alpha_2V=(0,0)\Rightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3\alpha_1\\4\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\-3\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\alpha_1+\alpha_2=0\\4\alpha_2-3\alpha_2=0\end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: $\alpha_1=\alpha_2=0$ إذن الشعاعين U,V مستقلين خطيا

2. $\forall\alpha_1,\alpha_2\ \in\mathbb{R},U,V\in\mathbb{R}^2:\alpha_1U+\alpha_2V=(0,0)$

$$\alpha_1U+\alpha_2V=(0,0)\Rightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ -3\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\alpha_2 \\ -9\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 - 9\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: $0 = 0$ إذن الشعاعين U, V مرتبطين خطيا لأحظ أن

$$\{U, V\} = \{(2, -3), (6, -9)\}$$
$$= \{(2, -3), 3(2, -3)\}$$
$$= \{U, 3U\}$$

أي أن الشعاع V كتب كمزج خطي من الشعاع U ، $V = 3U$

3. بين إن الشعاعين $\{\binom{1}{1}, \binom{2}{2}\}$ ليست مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^2$.

ليكن α, β, γ من IR بحيث: $\alpha\binom{1}{1} + \beta\binom{2}{2} = O_{IR^2}$

لدينا: $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2\beta$

إذن ليست بالضرورة $\alpha = \beta = 0$. "للجملة حل لا نهائي من الحلول ومنه الاشعة مرتبطة خطيا.

التمرين9:

أثبات أن الأشعة تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^4$

لدينا $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 + \lambda U_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 + \lambda U_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots 1 \\ \gamma + \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots 2 \\ \beta + \gamma + \lambda = 0 \dots\dots\dots 3 \\ \alpha + \beta + \gamma + \lambda = 0 \dots\dots 4 \end{cases}$$

بحل الجملة نجد: $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$ إذن الأشعة مستقلة خطيا

بالتالي نستنتج أن $dim(\mathbb{R}^4) = 4$

من جهة أخرى لدينا$Card(A) = 4$

إذن $Card(A) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$

إذن الأشعة تشكل أساس لـــ $\mathbb{R}^4$.

التمرين 10:

إيجاد أساس للفضاء الجزئي M من $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x,y): x + y = 0\}$$

$$= \left\{(x,y): x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

نلاحظ أن M هو كل التركيبات الخطية للأشعة $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و منه M ف ش ج مولد بالشعاعين $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و نكتب $M=\langle\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}\rangle$

الشعاعان $(0,1)$ و$(1,0)$ مستقلان خطيا لان:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \implies \alpha = \beta = 0$$

التبرير:

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)$$

$$\implies \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0\end{cases} \implies \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعان$(1,0),(0,1)$يشكلان أساس لـ $\mathbb{R}^3$

التمرين 11:

إيجاد إحداثيات الاشعة في $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس الجديد $B = \{e_1 = (2,-1), e_2 = (3,0)\}$

1. لدينا الشعاع A إحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(2,-1)$، و لتكن α_1,α_2 إحداثياته في الاساس B أي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0,0)$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases}2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \implies \alpha_2 = 0\\ -\alpha_1 = -1 \implies \alpha_1 = 1\end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع Aبالنسبة للأساس B هي $A = (1,0)$

2. لدينا الشعاع Bإحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(0,0)$، و لتكن α_1,α_2 إحداثياته في الاساس B أي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = B = (0,0)$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 0 \ \ \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع Bبالنسة للأساس B هي $B = (0,0)$

3. **لدينا الشعاع C إحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(0,1)$، و لتكن α_1, α_2 إحداثياته في الاساس B أي :**

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = C = (0,1)$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 2/3 \\ -\alpha_1 = 1 \ \Rightarrow \alpha_1 = -1 \end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع Cبالنسة للأساس B هي $C = (-1, 2/3)$

الفصـــــل الثـــاني: التطبيقـــات الخطيـــة

1. تعريف التطبيق الخطي

تعـــــريف

ليكن E و F فضائيين شعاعين على $\mathbb{R}$، نقول ان التطبيق f معرف من E نحو F خطي اذا تحقق ما يلي :

1. $\forall(x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{R} \text{ x } \mathrm{E}, f(\lambda,x) = \lambda.f(x)$

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من E نحو F بـ: $\mathcal{L}(E,f)$

مثـــــال: ليكن :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

لنثبت أن f تطبيق خطي

$$\forall U = (x,y), V = (x',y') \in \mathbb{R}^2, f(U+V) = f(U) + f(V)$$

$$\begin{aligned} f(U+V) &= f[(x,y) + (x',y')] \\ &= f(x+x', y+y') \\ &= (x+x'+y+y', x+x'-y-y', x+x'+y+y') \\ &= (x+y+x'+y', x-y+x'-y', x+y+x'+y') \\ &= (x+y, x-y, x+y) + (x'+y, x'-y', x'+y') \\ &= f(U) + (V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda U) &= f[\lambda(x,y)] \\ &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x+y, x-y, x+y) \\ &= \lambda f(U) \end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطـــي

ملاحظـــــة:

اذا كان $f \in \mathcal{L}(E,F)$ إذن $f(O_E) = O_F$

مثـــــال : ليكن :

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+1,y)$$

لدينا : $f((0,0)) = (1,0) \neq (0,0)$

إذن f ليس تطبيقا خطيا .

ملاحظـــــة:

ليكن : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و$n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall(x_1,x_2,\dots\dots\dots,x_n) \in E^n$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

يمكن أن نستخدم التعريف التالي لنثبت بأن f تطبيق خطي

تعـــــريـف:

ليكن $f \in \mathcal{L}\,(E,F)$ ، نقول عن f انه تطبيق خطي اذا تحقق مايلي :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall(x,y) \in \mathrm{E}^2 : f\ (\alpha x + \beta y) = \alpha\ .\ f\ (x) + \beta f(y)$$

مثـــــال:

$$f:\quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

لنثبت أن f تطبيق خطي

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall U = (x,y), V = (x',y') \in \mathbb{R}^2, f(\alpha U + \beta V) = \alpha f(U) + \beta f(V)$$

$$f(\alpha U + \beta V) = f[\alpha(x,y) + \beta(x',y')]$$

$$= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y')$$

$$= (\alpha x + \alpha y + \beta x' + \beta y', \alpha x - \alpha y + \beta x' - \beta y', \alpha x + \alpha y + \beta x' + \beta y')$$

$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha y) + (\beta x' + \beta y, \beta x' - \beta y', \beta x' + \beta y')$$

$$= \alpha(x+y, x-y, x+y) + \beta(x'+y, x'-y', x'+y')$$

$$= \alpha f(U) + \beta f(V)$$

2. صـــورة ونـــواة تطبيـــق خطـــي

صورة التطبيق الخطي ـالتطبيـــق الخطـــي الغامر:

تذكيـــــــر:

نقول عن f تطبيق معرف من E نحو F انه غامر اذا تحقق ما يلي :

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall y \in F : \exists\, x \in E : \ y = f(x)$$

تعـــــريف:

ليكن $f \in \mathcal{L}\,(,F)$, تعرف صورة f ويرمز لها بالرمز $Im(f)$ مجموعة صور كل الأشعة x في E.

$$Im(f) = \{f(x), x \in E\}$$

$$= \{\forall y \in F, \exists x \in E : y = f\,(x)\}$$

ملاحظـــــة :

اذا كان $f \in \mathcal{L}\,(E,F)$ اذن $Im(f)$ هي عبارة عن ف ش ج من f

ملاحظـــــة :

ليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$, نقول ان f غامر اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$dim(Im(f)) = dim(F)$$

مـثـــــال :

لدينا f تطيق خطي

$$f : \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

تعييـــــن صورة f أي تعييـــن Imf

$$Imf = \{V \in F \,;\, \exists U \in E : \ V = \ f(U)\}$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x', y', z') = f(x,y)\}$$

$$= \left\{ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} \right\}$$

$$=\left\{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{2}:\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y'}\\ \boldsymbol{z'}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \longleftarrow \boxed{\text{الشعاعان يولدان } \boldsymbol{Imf}}$$

ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين $\boldsymbol{U_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $U_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha\boldsymbol{U_1}+\beta U_2=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\overset{???}{\Rightarrow}\alpha=\beta=0$$

$$\alpha\boldsymbol{U_1}+\beta U_2=(0,0,0)\Longrightarrow\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\ \ldots..1\\ \alpha-\beta=0\ \ldots..2\\ \alpha+\beta=0\ \ldots..3\end{cases}\Longrightarrow\alpha=\beta=0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ $\boldsymbol{Imf}$

الجملة **$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساس لــ $\boldsymbol{Imf}$**

إذن يمكن أن نستنتج أن: $\boldsymbol{dim(Imf)=2}$.

$\boldsymbol{f}$ ليس غامر لان : $\boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^3)=\boldsymbol{3}\neq\boldsymbol{dim(Imf)}=\boldsymbol{2}$

نــواة تطبيــق خطــي- التطبيــق الخطــي المتبــاين:

تذكيـــــر:

ليكن $\boldsymbol{f}$ تطبيقا معرفا من E نحو F ، نقول ان $\boldsymbol{f}$ متباين اذا تحقق مايلي :

$$\text{متباين}\ \Leftrightarrow [\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{E}^2:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\Longrightarrow\boldsymbol{f(x)}\neq\boldsymbol{f(y)}]$$

أو

$$\text{متباين}\ \Leftrightarrow [\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{E}^2:\boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{f(y)}\Longrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}]$$

تعـــريف:

ليكن $\boldsymbol{f}$ تطبيقا خطيا معرفا من E نحو F نعرف نواة $\boldsymbol{f}$ ، ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{ker(f)}$ ،

مجموعة العناصر من E التي صورها معدومة اي :

$$\boldsymbol{ker(f)}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E},\boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{O_F}\}$$

ملاحظـــة :

اذا كان $\boldsymbol{f}$ تطبيقا خطيا معرفا من E نحو F إذن $\boldsymbol{ker(f)}$ هي عبارة عن ف ش ج من E

ملاحظـــــــة:

نقول عن f تطبيق خطي معرف من E نحو F ، انه متباين اذا وفقط كان :

$$\ker(f) = \{O_E\}$$

مثـــــال :

لدينا f تطبيق خطي

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

هل f تطبيق خطيق خطي متباين ؟

تعـــين نواة f أي تعيـــن $kerf$

$$kerf = \{U \in E: \; f(U) = 0_F\}$$
$$= \{ \; (x,y) \in \mathbb{R}^2: \; f(x,y) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x+z \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \ldots\ldots\ldots.1 \\ x-y=0 \ldots\ldots\ldots.2 \\ x+y=0 \ldots\ldots\ldots.3 \end{cases} \Rightarrow \quad x=y=0$$

إذن

$$kerf = \{(0,0)\}$$

يمكن أن نستنتج أن $dim(kerf) = 1$:

بما ان $kerf = \{(0,0)\}$ إذن f متباين.

3. تركيـــب تطبيقيـــن خطييـــن :

تذكيـــــر:

ليكن E , F و G فضاءات شعاعيه بحيث $g\,(F, G)$ و $f \in \mathcal{L}\,(E, F)$

التطبيق gof معرف كما يلي :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\hookrightarrow gof \hookleftarrow$$

$$gof: E \to G$$

$$x \mapsto (gof)(x) = g[f(x)]$$

قضيـــة :

ليكن g و f تطبيقين معرفين كما يلي $f: E \to f$ و $g: F \to G$

إذن gof هو عبارة عن تطبيق خطي معرف Eمن نحو G

البـرهـان :

$$\forall (x, y) \in E^2:$$

$$fog(x + y) = g[f(x + y)] = g[f(x) + f(y)]$$

$$= g[f(x)] + g[f(y)]$$

$$= (gof)(x) + (gof)(y)$$

لأن g و f خطيين

$$\forall (h, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{E}$$

$$(gof)(\lambda x) = g[f(\lambda x)] = g[\lambda f(x)]$$

$$= \lambda g[f(x)] = \lambda (g\ o\ f)(x)$$

لأن g و fخطيين ، إذن $g\ o\ f$ تطبيق خطي

تماثل الفضاءات الشعاعية

تعـــريـف:

- **نقول عن التطبيق f المعرف من E نحو F أنه تقابل اذا و فقط اذا كان f غامر و متباين**
- **التطبيق الخطي التقابلي f المعرف من E نحو F هو عبارة عن ايزومورفيزم**

مـــلاحظة :

هذا التعريف يأخذ الصيغة الرياضية التالية :

تقول عن تطبيق f معرف من E نحو F انه تقابلي اذا و فقط اذاتحقق مايلي :

$$\forall\ y \in F, \exists\ x\ ! \in E\ ;\ y = f\ (x)$$

وجود x وحيد مرتبط بكون f غامر ، و الوحدانية من كون f متباين

مـــــثال :

التطبيق الخطي f المعرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ بـ : $f(x,y) = (y,x)$

هو عبارة عن تماثل في $\mathbb{R}^2$

تـعــريـف:

نقول عن الفضاءات الشعاعية E و F ايزومورفيزم اذا وجد تطبيق f تماثل معرف من E نحو F

حــالة الفضـــاءات الشعـــاعية المنتهيـــة البعـــد

في هذه الحالة تغيير E هو عبارة عن فضاء شعاعي منتهي البعد

صـــورة الأســـاس وفـــق تطبيـــق خطـــي

لنفرض أن E فضاء شعاعي منتهي البعد و $E \neq \{0\}$ ، نقول أن E يملك أساس .لتكن إذا

$(e_1, \dots\dots e_n)$ أساس لـ E

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall x \in E, \exists\,!\ (x_1, \dots\dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x = x_1 e_1 + x_2\, e_2 + \cdots x_n e_n$$

إذن بخطية التطبيق نجد أن :

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

نستنتج أن f مولدة بالاشعة $\{f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n)\}$

قضيـــــة :

ليكن f تطبيق معرف من E نحو f لدينا :

1. f تطبيق متباين اذا و فقط اذا كان صورة جملة مولدة مستقلة من E هي عبارة عن جملة مستقلة في F.

2. f تطبيق غامر اذا و فقط اذا كان صورة جملة مولدة مستقلة من E هي عبارة عن جملة مولدة في F.

3. f تطبيق تقابلي اذا و فقط اذا كان صورة اساس من E هي أساس في F.

البرهـــان :

لنبرهن أن : f غامر اذا و فقط اذا كانت صورة جملة حرة فيE هي عن جملة حرة في f

- لنفرض أن غامر

لتكن : $\{e_1, \dots, e_p\}$ جملة حرة في Eإذن$(p \leq n)$

لنبرهن أن : $\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$ جملة حرة في F

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p) = 0$$

لدينا :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p \in \ker(f)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0}$$

أذن : $\mathbf{ker}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{0}\}$

لأن : $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}\}$ جملة حرة في E

إذن نقول أن : $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \dots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_p})\}$ حرة في F

- **لنفرض أن صورة جملة حرة في E هي جملة حرة في F**

لنفرض $\boldsymbol{x} \in \mathbf{ker}(\boldsymbol{f})$ و نبرهن أن $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

لتكن $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ أساس لـ E إذن يوجد $(\boldsymbol{x_1}, \dots \boldsymbol{x_n}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{x}}$

بحيث $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1 e_n} + \cdots + \boldsymbol{x_n x_n}$

$$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = 0$$

بما أن : $\{e_1, \ldots, e_n\}$أساس لـ : Eإذن$\{f(e_1), \ldots ;, f(e_n)\}$جملة حرة في F

وبالتالي تستنتج ان $x_1 = x_2 = x_n = 0$ إذن $x = 0$ ومنه $\ker(f) = \{0\}$ و

بالتالي f

متباين بنفس الطريقة يتم البرهان على النقطة (2) و (3) في القضية .

ملاحـــــظة:

لنفرض أن F فضاء شعاعي ذو بعد منتهي،

اذا كان $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و متباين اذن $\dim E \leq \dim F$

إذا كان $f \in \mathcal{L}(E,F)$ وغامر اذن: $\dim E \geq \dim F$

ملاحـــــظة:

لنفرض أن F ف ش ذو بعد منتهي وكان E و F ايزومورف اذن F هو عبارة عن ف ش منتهي البعد ولدينا : $dimE = dimF$

رتبـــة تطبيـــق خطـــي :

تذكيــــر:

إذا كان تطبيق f تطبيق خطي معرف من نحو F و$Im\,(f)$ هي عبارة عن ف ش ج.
من F مولدة بصورة اساس من E ، نلاحظ ان $Im\,(f)$ تملك جملة مولدة منتهية اذن هي عبارة عن فضاء.شعاعي منتهي البعد.

تعــــريـف:

ليكن تطبيق معرف من نحو ، تعرف رتبة التطبيق f ونرمز لها بالرمز $rang\,(f)$

هي بعد الفضاء $Im\,(f)$ أي $rang(f) = dimIm(f)$

ملاحـــــظة: (تمييز التطبيقات الخطية المتباينة و الغامرة)

ليكن F و E فضائين شعاعين منتهي البعد ، لنغرض ان $(dimE = n)$ و $(dimF = p)$

وليكن f تطبيق متبايت معرف من E نحو F لدينا :

1) f متباين $\Leftrightarrow rang(f) = n$

2) f غامر $\Leftrightarrow rang(f) = p$

نظريـــة البعـــد :

نظريـــة

ليكن : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ اين E فضاء ذو بعد منتهي ، يساوي $0 < n$ لدينا إذن :

$$dimE = \dim(\ker(f) + \dim(Im(f))$$

مثـــال :

ليكن $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (2x + y, x - y, x2y)$$

نلاحـــظ أن :

$$\forall(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = y = 0$$

إذن :

$$\ker(f) = \{0\mathbb{R}^2\}$$

و منه

$$\dim \ker(f) = 0$$

و بالتالي :

$$rang(f) = \dim Im(f) = 2$$

حالة التطبيقات الخطية بين فضاءات إشعاعية بنفس البعد :

ليكن : $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}\,(E, F)}$ **، نفرض أن** $\boldsymbol{dimE = dimF}$

لدينا التكافؤات المنطقية التالية :

f غامر $\Leftrightarrow$ f متباين $\Leftrightarrow$ f تقابلي

سلسلـــــــة 2

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

رياضيات 2 — <u>السلسلة رقم 02</u>

<u>التمرين 01:</u> هل التطبيقات التالية خطية أم لا ؟

1) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=(x,y,0)$

2) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+1,y+2)$

3) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+y,x)$

4) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z)=2x-3y+4z$

5) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y)=(x+1,2y,x+y)$

6) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(2x-y,x)$

<u>التمرين 02:</u> 1) بين أن يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ يحقق $f(1,2)=(2,3)$ و $f(0,1)=(1,4)$

2) أوجد صيغة f أي أوجد $f(x,y)$ ثم أوجد $f(5,6)$ و $f^{-1}(-2,7)$

<u>التمرين 03:</u> لنفترض أن $F:V \longrightarrow U$ و $G:U \longrightarrow W$ تطبيقان خطيان, بين أن تطبيق التركيب $G\circ F:V \longrightarrow W$ تطبيق خطي.

<u>التمرين 04:</u> ليكن $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة $f(x,y,s,t)=(x-y+s+t,x+2s-t,x+y+3s-3t)$ أوجد قاعدة الصورة $\mathrm{Im}f$ وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة $\ker f$ و كذلك بعدها.

<u>التمرين 05:</u> ليكن $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة $f(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$ أوجد قاعدة الصورة $\mathrm{Im}f$ وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة $\ker f$ و كذلك بعدها.

<u>التمرين 06:</u> أوجد تطبيقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تكون صورته مولدة بواسطة $(2,0,-1,-3)$ و$(1,2,0,-4)$

<u>لتمرين 07:</u> أوجد تطبيقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تكون الأشعة $(2,0,1)$ و$(1,-1,0)$ أساس لنواته .

<u>التمرين 08:</u> ليكن التطبيقات الخطية التالية : $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرفة بواسطة : $f(x,y,z)=(2x,y+z)$, $g(x,y,z)=(x-z,y)$, $h(x,y)=(y,x)$.

1) أوجد $(f+g)(v)$ و $(3f)(v)$ حيث $v=(2,3,4)$.

2) أوجد $(2f-5g)(w)$ حيث $w=(5,1,3)$.

<u>التمرين 09:</u> ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف كما يلي :

$f(x,y,z)=(x+z,x-y,z+y,x+y+2z)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

<u>التمرين 10:</u> ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي : $f(x,y)=(x+y,x-y,x+y)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

<u>التمرين 11:</u> ليكن $B=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ و ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بواسطة :

$f(e_1)=-2e_1+2e_3,\ f(e_2)=3e_2,\ f(e_3)=-4e_1+4e_3$

1) عين أساس للنواة f, هل f متباين؟ هل يمكن أن يكون f غامر ؟ لماذا؟

2) عين أساس للصورة f, ما هي رتبة f ؟

التمرين 2:

1- اثبـــــــات أنه يوجـــد تطـــبيق خطـــي وحــــيد $\mathbb{R}^2 \rightarrow f: \mathbb{R}^2$ يحقق:
$f(0,1) = (1,4)$ و$f(1,2) = (2,3)$

قـــــاعدة: *إذا كان $f: E \rightarrow F$ و B هو أساس لـ E*
و صورة الأساس B بواسطة f هو الأساس B' و B' هو أساس لـ F
فإن : يوجد تطبيق خطي وحيد حيث: $f: E \rightarrow F$.

لدينا $E = \mathbb{R}^2$ و $F = \mathbb{R}^2$

و $B = \{(0,1),(1,2)\}$ و$B' = \{(1,4),(2,3)\}$

- الشعاعان $(0,1)$ و$(1,2)$ مستقلان خطيا لان:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \implies \alpha = \beta = 0$

التبرير:

$$\alpha(0,1) + \beta(1,2) = (0,0)$$

$$\implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0$$

و $card(B) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$:عدد الأشعة المستقلةخطيا

إذن الشعاعان$(0,1),(1,2)$يشكلان أساس لـــ $E = \mathbb{R}^2$ **(فضاء الإنطلاق).**

- الشعاعان $(2,3)$ و$(1,4)$ مستقلان خطيا لان:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \implies \alpha = \beta = 0$

التبرير:

$$\alpha(1,4) + \beta(2,3) = (0,0)$$

$$\implies \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0$$

و من جهة أخرى $card(B') = dim(\mathbb{R}^2) = 2$:عدد الأشعة المستقلةخطيا

إذن الشعاعان $(1,4),(2,3)$يشكلان أساس لـــ $F = \mathbb{R}^2$ **(فضاء الوصول).**

و بالتالي B' أساس لـ F. و منه حسب القاعدة السابقة يوجد تطبيق خطي وحيد f.

2- إيـــــجاد صيغـــة fأي إيـــجاد $f(x,y)$:

بما ان f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ فهو يكتب من الشكل:

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \quad \alpha' x + \beta' y)$$

يتم البحث عن $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$:

$$f(1,2) = (\alpha + 2\beta, \quad \alpha' + 2\beta') = (2,3)$$
$$f(0,1) = (\beta, \quad \beta') = (1,4)$$

و منه

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \alpha' + 2\beta' = 3 \ldots\ldots . 2 \\ \beta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . 3 \\ \beta' = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha' = -5 \\ \beta = 1 \\ \beta' = 4 \end{cases}$$

إذن

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (y, -5x + 4y)$$

-3 حـــــساب $f(5,6)$ ، $f^{-1}(2,7)$

$$f(5,6) = (6, -5 \times 5 + 4 \times 6)$$

$$f(5,6) = (6, -1)$$

حســـاب $f^{-1}(-2,7)$ يعني إيـــجاد (x,y) التي تحقق $f(x,y) = (-2,7)$

$$f(x,y) = (-2,7) \Longrightarrow (y, -5x + 4y) = (-2,7)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -5x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

إذن $f^{-1}(-2,7) = (-3,-2)$:

التمرين 5:

لدينا
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = (x + 2y - z, \quad y + z, x + y - 2z)$$

قاعدة:

ليكن $F \to f: E$ تطبيق خطي

نواة f

- $kerf = \{U \in E: \ f(U) = 0_F\}$,
- $Imf = \{V \in F; \ \exists U \in E: \ V = f(U)\}$

صورة f

-1 إيـــجاد قاعدة (أساس) صورة f أي إيـــجاد $\mathrm{Im}f$

$$Imf = \{V \in F \,; \ \exists U \in E : \ V = f(U)\}$$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x',y',z') = f(x,y,z)\}$$

$$= \{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\}$$

$$= \{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') = (\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z},\ \ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z})\}$$

$$= \left\{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

الأشعة تولد $\boldsymbol{Imf}$

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}: \alpha\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \dots\dots 1 \\ \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots\dots 2 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \dots\dots 3 \end{cases}$$

من المعادلة 2 نجد $\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\gamma}$ نعوض قيمة $\boldsymbol{\beta}$ في المعتدلتين نجد:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma = 0 \\ \alpha - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

الأشعة مرتبطة خطيا إذن نأخذ شعاعين و ندرس الاستقلال الخطي لهما، مثلا نأخذ

$$\alpha\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \dots\dots 1 \\ 0 + \beta = 0 \dots\dots 2 \\ \alpha + \beta = 0 \dots\dots 3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ $\boldsymbol{Imf}$ *الجملة* $\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\right\}$ و منه الجملة تشكل أساس لــ $\boldsymbol{Imf}$

- إذن يمكن أن نستنتج أن $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf}) = \boldsymbol{2}$.

2- إيـــــجاد أساس (قاعدة) النواة $kerf$

$$kerf=\{U\in E:\ f(U)=0_F\}$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \begin{pmatrix}x+2y-z\\ y+z\\ x+y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\ldots 1\\ y+z=0\ldots\ldots\ldots.2\\ x+y-2z=0..3\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}y=-z\\ x=3z\end{matrix}$$

إذن

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /x=3z,y=-z\Rightarrow(x,y,z)=(3z,-z,z)$$

و منه

$$kerf=\{z(3,-1,1);z\in\mathbb{R}\}$$

أي

$$kerf=\{(3,-1,1)\}$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة (الجملة$\langle(3,-1,1)\rangle$تولد$kerf$)

إذن الجملة تشكل أساس لـــ $kerf$

- يمكن أن نستنتج أن $dim(kerf)=1$
- لتحقق من العمل لدينا قاعدة: $dim(E)=dim(kerf)+dim(Imf)$

إذن $dim(\mathbb{R}^3)=dim(kerf)+dim(Imf)$

$$3=1+2$$

<u>التمرين 8 :</u>

- إيـــــجاد $(f+g)(V)$ ، $(3f)(V)$ و $(2f-5g)(V)$

لدينا:

$$f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=(2x,y+z)$$

و

$$g:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\to g(x,y,z)=(x-z,y)$$

- $(f+g)(V)=f(V)+g(V),$ V=(2,3,4)

$=f(2,3,4)+g(2,3,4)$

$$=(2\times2,3+4)+(2-4,3)$$
$$=(4,7)+(-2,3)$$
$$=(4-2,7+3)$$
$$=(2,11)$$

- $(3f)(V) = 3 \times f(2,3,4) = 3(2 \times 2, 3+4) = 3(4,7) = (12,21)$

- $(2f-5g)(V) = 2f(W) - 5g(W),$ W=(5,1,3)

$$= 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)$$
$$= 2(2 \times 5, 1+3) - 5(5-3, 1)$$
$$= 2(10,4) - 5(2,1)$$
$$= (20,8) - (10,5)$$
$$= (20-10, 8-5)$$
$$= (10,3)$$

التمرين 9:

لدينا:

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^4$$
$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = (x+z, x-y, z+y, x+y+2z)$$

1- تعـــين نواة f أي تعيــن $kerf$

$$kerf = \{U \in E: \ f(U) = 0_F\}$$
$$= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \ f(x,y,z) = (0,0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x+z \\ x-y \\ z+y \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ x-y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ y+z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ x+y+2z=0 \ldots\ldots 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

إذن

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=-z, y=-z \Rightarrow (-z,-z,z) = z(-1,-1,1)$$

و منه $kerf = \{z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}\}$

$$kerf = \{(-1,-1,1)\}$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة لـ $kerf$ (الجملة $\langle(-1,-1,1)\rangle$ تولد $kerf$).

إذن الجملة تشكل أساس لـــ $kerf$

- يمكن أن نستنتج أن: $dim(kerf) = 1$

قاعدة:

إذا كان $f: E \rightarrow F$ و $kerf = 0_E$ فإن f متبـــــاين

بما ان $kerf \neq \{(0,0,0)\}$ فإن f ليس متباين.

-2 إيـــجاد قاعدة (أساس) صورة f أي إيـــجاد $\mathrm{Im}f$

$$Imf = \{V \in F\,;\ \exists U \in E : V = f(U)\}$$

$$= \{(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z',t') = f(x,y,z)\}$$

$$= \left\{ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x-y \\ z+y \\ x+y+2z \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

الأشعة تولد Imf

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = (0,0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \alpha - \beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \ldots\ldots 4 \end{cases}$$

من المعادلة 2 نجد $\alpha = -\gamma$ و من المعادلة 2 نجد $\alpha = \beta$ نعوض القيمتين في المعادلة 3

نجد: $-\gamma + \gamma = 0$ الأشعة مرتبطة خطيا إذن ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين، مثلا نأخذ

$$\alpha \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = (0,0,0,0) \Longrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ $\boldsymbol{Imf}$ الجملة

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ تشكل أساس لــ $\boldsymbol{Imf}$

إذن يمكن أن نستنتج أن: $\boldsymbol{dim(Imf) = 2}$.

قاعدة:

إذ كان $F \rightarrow f: E$ و $\boldsymbol{dim(F) = dim(Imf)}$ فإن $\boldsymbol{f}$ غــــــامر

$\boldsymbol{f}$ *ليس غامر لان :* $\boldsymbol{dim(\mathbb{R}^4) = 4 \neq dim(Imf) = 2}$

التمرين 10:

لدينا:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\boldsymbol{(x,y) \rightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)}$$

3- تعــــين نواة $\boldsymbol{f}$ أي تعيــين $\boldsymbol{kerf}$

$$\boldsymbol{kerf = \{U \in E: \ f(U) = 0_F\}}$$

$$\boldsymbol{= \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2: \ f(x,y) = (0,0,0)\}}$$

$$\boldsymbol{= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2: \ \begin{pmatrix} x+z \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \dots\dots\dots\dots 1 \\ x-y = 0 \dots\dots\dots\dots 2 \\ x+y = 0 \dots\dots\dots\dots 3 \end{cases} \Longrightarrow \ x = y = 0}$$

إذن

$$\boldsymbol{kerf = \{(0,0)\}}$$

- يمكن أن نستنتج أن $dim(kerf) = 1$:

بما ان $kerf = \{(0,0)\}$ فإن f متباين.

4- تعيين صورة f أي تعيين $\mathrm{Im}f$

$$Imf = \{V \in F\,;\, \exists U \in E : V = f(U)\}$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x', y', z') = f(x, y)\}$$

$$= \left\{\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longleftarrow \boxed{\text{الشعاعان يولدان } Imf}$$

ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$$

$$\alpha U_1 + \beta U_2 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ \ldots..1 \\ \alpha - \beta = 0 \ \ldots..2 \\ \alpha + \beta = 0 \ \ldots..3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ Imf الجملة $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساس لــ Imf

- إذن يمكن أن نستنتج أن: $dim(Imf) = 2$.

f ليس غامر لان: $dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq dim(Imf) = 2$

التمرين 11:

لدينا f تطبيــق خطــي معرف من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$

لدينا $E = \mathbb{R}^3$ و $F = \mathbb{R}^3$

$B=\{e_1=(1,0,0), e_2=\ (0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$

و $f(e_1)=-2e_1+2e_3,\quad f(e_2)=\ 3e_2,\quad f(e_3)=-4e_1+4e_3$

-1 تعيــين $f(x,y,z)$

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$$
$$\Rightarrow\ f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$$
$$=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$$
$$=x(-2e_1+2e_3)+y(\ 3e_2)+zf(-4e_1+4e_3)$$
$$=x(-2(1,0,0)+2(0,0,1))+y\big(\ 3(0,1,0)\big)+z(-4(1,0,0)+4(0,0,1))$$
$$=x\big((-2,0,0)+(0,0,2)\big)+y\big((0,3,0)\big)+z\big((-4,0,0)+(0,0,4)\big)$$
$$=x\big((-2,0,2)\big)+y\big((0,3,0)\big)+z\big((-4,0,4)\big)$$
$$=\big((-2x,0,2x)\big)+\big((0,3y,0)\big)+\big((-4z,0,4z)\big)$$
$$=(-2x-4z,\qquad 3y,\qquad 2x+4z)$$

إذن:
$$f:\quad \mathbb{R}^3\ \rightarrow\ \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\rightarrow f(x,y,z)=(-2x-4z,\ 3y\ ,\ 2x+4z)$$

-1 تعــــين أساس نواة f

- $kerf=\{U\in E:\ \ f(U)=0_F\}$

$$=\{\ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}-2x-4z\\3y\\2x+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-2x-4z=0\ \ldots\ldots..1\\ 3y=0\ \ldots..\ldots\ldots..2\\ 2x+4z=0\ \ldots..3\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}y=0\\x=-2z\end{matrix}$$

إذن

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=-2z,y=0\Rightarrow(x,y,z)=(-2z,0,z)$$
$$\Rightarrow(x,y,z)=z(-2,0,1),\qquad z\in\mathbb{R}^3$$

و منه $kerf=\{z(-2,0,1),z\in\mathbb{R}\}$

$$kerf=\{(-2,0,1)\}$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة لـ $kerf$ (الجملة $\langle(-2,0,1)\rangle$ تولد $kerf$)

إذن الجملة تشكل أساس لــ$kerf$. $kerf \neq (0,0,0)$ و منه f ليس متبــاين

- يمكن أن نستنتج أن: $dim(kerf) = 1$.

قاعدة:

$$dim(E) = dim(kerf) + dim(Imf)$$

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3, \quad dim(kerf) = 1 \Longrightarrow dim(Imf) = 2$$

و لكي يكون f غـــامر يجب ان يكون

$$dim(F) = dim(Imf)$$

لدينا

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq dim(Imf) = 2$$

إذن f ليس غـــامر

5- تعييـــــنأساس لصـــورة f

$$Imf = \{V \in F\,;\, \exists U \in E : V = f(U)\}$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = f(x, y, z)\}$$

$$= \left\{\exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4z \\ 3y \\ 2x + 4z \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

إذن $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, و $U_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ تولد Imf

و بما أن $dim(Imf) = 2$ إذن الأشعة U_1، U_2 و U_3 مرتبطة خطيا

أي عدد الأشعة المشكلة للأساس هي 2.

نلاحظ أن : $U_3 = 2U_1$ أي U_1 و U_3 مرتبطة خطيا و بالتالي نأخذ U_1 و U_2 كأساس لـ Imf

و منه أساس Imf هو $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

رتبة f = $rang(f)$

$rang(f)$: هو عدد أشعة أساس Imf

إذن: $rang(f) = dim(Imf) = 2$

الفصـــــل الثالــث: مفــاهيم عامـــة حـــول المصـــــفوفات

تعـــاريف

ليكن الحقل $\mathbb{R}$ ، m، n عددان طبيعيان.

لنأخذ سلميات (الأعداد الحقيقية) a_{ij} من الحقل $\mathbb{R}$ حيث $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$.
، مصفوفة هي جدول من عناصر $\mathbb{R}$ موزعة في أسطر و في أعمدة كالتالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

الدليل الأول i يمثل السطر رقم i و الدليل الثاني j يمثل العمود رقم j. نقول عندئذ أن المصفوفة ذات m سطرا و n عمودا أنها من الدرجة $m \times n$، العنصر a_{ij} يقع في السطر i و العمود j.

يرمز لمصفوفة بأحد الحروف الكبيرة أما عناصرها بأحد الحروف الصغيرة. يمكن أن نرمز للمصفوفة السابقة بالرمز التالي $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

يرمز لمجموعة المصفوفات ذات m سطرا و n عموادا بالرمز $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

A و B مصفوفتين حيث: $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$.

- نقول ان المصفوفتين A و B متساويتين إذا كان A و B من نفس النوع أي (لهما نفس عدد الأسطر و نفس عدد الأعمدة) و كانت عناصرهما المتناظرة متساوية أي.

$\Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B} a_{ij} = b_{ij},\ \ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

- المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون عدد أسطرها مساوي لعدد أعمدتها أي $m = n$ هنا نقول أنها من الدرجة n و تسمى العناصر a_{ii} أي a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{mn} بالقطر الرئيسي للمصفوفة .
- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أي $\forall i, j;\ a_{ij} = 0$

المصفوفة المربعة تكون:

- مثلية علوية: إذا كانت جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة ، $\forall i > j\ ;\ a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- مثلية سفلية إذا كانت جميع العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة ، $\forall i < j\ ;\ a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0_{n1} & \dots & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- قطرية إذا كانت جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي ليست كلها معدومة ،

$$\forall i \neq j\ ; a_{ij} = 0\ , \exists i\ ; a_{ij} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- إذا كان $a_{11} = a_{22} \cdots = a_{nn} = 1$ في المصفوفة القطرية فإنها تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ، I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ، \dots\dots\dots$$

- المصفوفة المتناظرة أو التناظرية هي المصفوفة المربعة التي تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية $\forall i, j\ ; a_{ij} = a_{ij}$ مثلا :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- بالإضافة إلى مصفوفة عمود هي مصفوفة من النوع $M_{m,1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- و مصفوفة سطـر هي مصفوفة من النوع $M_{1,n}(\mathbb{R})$

$$A = (a_{11} \quad \dots \quad a_{1n})$$

العمليـــــات الأساسية على المصفـــوفات

مجمــــوع (أو طـرح) مصفوفتيـــن

لتكن المصفوفتان A، B من نفس الدرجة حيث عناصر Aهي α_{ij} وعناصر B هي b_{ij}. فإن مصفوفة المجموع $A+B$ مكونة من العناصر c_{ij} حيث :

$$c_{ij}=\alpha_{ij}+b_{ij}$$

و إذا كانت المصفوفتان ليستا من نفس النوع فإن المجموع غير معرف.

مثـــــــال :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & -2+0 & 3+2\\ 4-7 & 5+1 & -6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0 & 6\\ -21 & 3 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-9 & -4-0 & 6-6\\ 8-(-21) & 10-3 & -12-24\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}$$

ضرب مصفـــوفة في سلمـــي:

لتكن A مصفوفة و λعدد حقيقي . لحساب الجداء λAنضرب العدد λ في جميع عناصر المصفوفة .

أمثـــــلة :

$$\lambda\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y\\ \lambda z & \lambda w\end{pmatrix}$$

$$-5\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -15\\ -20 & -25 & 30\end{pmatrix}$$

جـــــداء المصفـــــوفات :

لتكن المصفوفتان $A=(a_{ij})$، $B=(b_{ij})$

يكون الجداء AB معرفا إذا كان عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B . فإذا كانت A من الدرجة mXn و B من الدرجة nXr وبفرض $C=AB$ حيث $C=(c_{ij})$ فإن

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad , \quad (i=1,\ldots\ldots,m\,;j=1,\ldots,n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

يعني أن:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots + a_{2n}b_{n1}$$

$$c_{m2} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} = a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + a_{m3}b_{32} + \cdots + a_{mn}b_{n2}$$

لاحظ أن: عناصر السطر A تضرب في عناصر العمود B ثم تجمع

يعني أنللحصول على العنصر c_{11} نضرب عناصر السطر الأول للمصفوفة A في عناصر العمود الأول للمصفوفة B ثم نجمع و هكذا

مثـــــــــال:

لنحسب الجداء التالي:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times2} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

عدد أسطرالمصفوفة B يساوي = عدد أعمدة المصفوفةA

$$= \begin{pmatrix} 2\times1+(-1)\times3 & 2\times(-2)+(-1)\times4 & 2\times(-5)+(-1)\times0 \\ 1\times1+0\times3 & 1\times(-2)+0\times4 & 1\times(-5)+0\times0 \\ -3\times1+4\times3 & -3\times(-2)+4\times4 & -3\times(-5)+0\times4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

مثـــال:

ليـكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

AB مصفوقة من النوع (1.1)

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 66 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الجداء هو مصفوفة من النوع (3.3)

لاحظ أن $AB \neq BA$

ملاحـــظــة:

جـــداء مصفـــوفتين ليس بالضـــرورة تبـــديلي.

تعـــــريف:

لتكن المصفوفتان $A = (a_{ij})$، $B = (b_{ij})$

نقول أن B هي مصفوفة عكسية يمنى لـــ A إذا كان $AB = I_n$ و إذا كان $BA = I_n$ في هذه الحالة A مصفوفة عكسية يسرى لـB .

تعريـــــف:

مصفوفة A من $M_n(\mathbb{R})$نقول أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B من $M_n(\mathbb{R})$حيث:

$$AB = BA = I_n$$

و نرمز للمقلوب بـــ A^{-1}

منقـــــول مصفـــوفة

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. فإن منقول المصفوفة A هي المصفوفة A^T حيث

$$A^T = (c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \text{و} \quad c_{ij} = \alpha_{ij}$$

فللحصول على منقول المصفوفة نجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا.

ينتج من هذا التعريف أن $(A^T)^T = A$

ملاحـــظة:

- إذا كان $(A^T) = A$ فإن A تسمى مصفوفة متناظرة .
- A مصفوفة ضد تناظرية إذا كان$A = -A^T$
- $(A + B)^T = (A)^T + (B)^T \forall A, \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,

- $(AB)^T = (B)^T(A)^T \forall A, \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\forall B, \in M_{n,r}(\mathbb{R})$,

مثـــــــال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

أثـــــر مصفـــوفة مربعـــة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$، أثر المصفوفة هو مجموع عناصر القطر الرئيسي و يرمز له بالرمز $Tr(A)$ ، أي أن

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

مثـــــــال:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(A) = 4 + 2 + (-1) = 5$$

المصفـــوفة المرافقـــة لتطبيـــق خطـــي

يكن E_1، E_2 فضائيين شعاعين على الحقل $\mathbb{R}$ ببعدين منتهيين n، m على التوالي ، وليكن :

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا في E_1 ، $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا في E_2

وليكن f تطبيقا خطيا من E_1 نحو E_2، صور أشعة أساس E_1: $f(u_1)$،$f(u_2)$، ... ،$f(u_n)$ هي أشعة من E_2 فهي تكتب على شكل تركيب خطي لأشعة أساس E_2 على النحو التالي :

$$f(\mathrm{u_1}) = \mathrm{a_{11}v_2} + \mathrm{a_{21}v_2} + \cdots + \mathrm{a_{m1}v_m}$$

$$f(\mathrm{u_2}) = \mathrm{a_{12}v_1} + \mathrm{a_{22}v_2} + \cdots + \mathrm{a_{m2}v_m}$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad + \quad \vdots$$

$$f(\mathrm{u_n}) = \mathrm{a_{1n}v_1} + \mathrm{a_{2n}v_2} + \cdots + \mathrm{a_{mn}v_m}$$

حيث a_{ij} هي عناصر من الحقل $\mathbb{R}$.

نسمي المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ بالمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f

بالنسبة لأساس $\{u_1 , u_2 , \dots , u_n\}$ في E_1 و الأساس $\{v_1, v_2, \dots , v_n\}$ في E_2، و نقول أيضا أن f هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

لاحظ أن العمود الأول للمصفوفة مكون من المقادير السليمة للمرج الخطي في المعادلة الأولى، و العمود الثاني من المعادلة الثانية و هكذا إلى آخر العمود.

ملاحظـــــة:

عدد الأعمدة = عدد أشعة أساس فضاء المنطق $\dim(E_1) = E_1$

عدد الأسطر = عدد أشعة أساس فضاء الوصول (المستقر) $\dim(E_2) = E_2$

فمثلا إذا كان التطبيق الخطي معرفا من $\mathbb{R}^4$ نحو $\mathbb{R}^2$ فإن المصفوفة المرافقة له تكون ذات أربعة أعمدة وسطران.

وإذا كانت المصفوفة ذات ثلاثة أسطر و خمسة أعمدة فإن أعمدة التطبيق الخطي المرافق لها يكون معرفا من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^5$

ملاحظـــــة :

إذا غيرنا الأساس فإن عناصر المصفوفة أيضا تتغير.

رتبـــة المصفـــوفات

تعـــــريف:

رتبة المصفوفة $(rang)M$ هي رتبة التطبيق الخطي المرافق لها و هي أيضا أكبر أشعة أعمدة تكون مستقلة خطيا .

ونقصد بأشعة أعمدة الأشعة المكونة من عناصر الأعمدة فكل عمود يعطينا مركبات شعاع

مثـــــال :

ماهي رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ؟

أشعة الأعمدة هي $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإذا كانت هذه الأشعة مستقلة خطيا فالمصفوفة رتبتها 3 و إذا لم تكن كذلك نبحث هل يوجد شعاعان مستقلان خطيا و في هذه الحالة رتبتها 2 و إذا كانت كل الأشعة مرتبطة خطيا مثنى فالرتبة 1 .

يمكننا البحث عن التطبيق الخطي المرافق لها ثم تعين الرتبة .

مثـــــال :

لدينا

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (2x-5y, 3x+y)$$

و$B = \{u_1 = (2,\ 1),\ u_2 = (3,\ 2)\}$ أساس في $\mathbb{R}^2$

1- حســـــاب $f(u_2), f(u_1)$

$$f(u_1) = f(2,1) = (2\times 2 - 5\times 1, \quad 3\times 2+1) = (-1, \quad 7)$$

$$f(u_2) = f(3,2) = (6-10, \quad 9+2) = (-4, \quad 11)$$

2- كتابة كل من $f(u_1)$ و$f(u_2)$ في الأساس B

لدينا

$$f(u_1) = (-1, \quad 7)$$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (-1, \quad 7) \Rightarrow \alpha(2, \quad 1) + \beta(3, \quad 2) = (-1, \quad 7)$$

$$\Rightarrow (2\alpha + 3\beta, \quad \alpha + 2\beta) = (-1, \quad 7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -1 \ldots\ldots 1 \\ \alpha + 2\beta = 7 \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

بضرب المعادلة 2 في (-2) ثم جمعها مع المعادلة1 نجد: $\beta = 15$

بتعويض قيمة β في المعادلة 2 نجد: $\alpha = -23$

و منه $f(u_1) = -23u_1 + 15u_2$

لدينا

$$f(u_2) = (-4, \ 11) = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$(-4, \quad 11) = \alpha(2, \quad 1) + \beta(3, \quad 2) \Rightarrow (-4, \quad 11) = (2\alpha + 3\beta, \quad \alpha + 2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -4 \ldots\ldots 1 \\ \alpha + 2\beta = 11 \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

بضرب المعادلة 2 في (-2) ثم جمعها مع المعادلة1 نجد: $\beta = 26$

بتعويض قيمة β في المعادلة 2 نجد: $\alpha = -41$

و منه $f(u_2) = -41u_1 + 26u_2$

3- المصفــــوفة المرفقـــــة لـــ f في الأســـــاس B

- عدد الأعمدة = $dim(E)$ (بعد فضاء الانطلاق)
- عدد الأسطر= $dim(F)$ (بعد فضاء الوصول)

$$f(u_1) \quad f(u_2)$$

$$M_f(B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

4- حـساب صورة الشعاع $v = (3,4)$ بواسطة f في الأساس B و باستخدام المصفوفة المرفقة لـ f
لدينا:

$$f(x,y) = M_f(B) \times (\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$$\Longrightarrow f(3,4) = \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(3,4) = \begin{pmatrix} -233 \\ 144 \end{pmatrix}$$

مثـــــال:

لدينا: $f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بالمصفوفة التالية:

$$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

من الواضح من خلال المصفوفة A أن:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\to f(x,y) \end{aligned}$$

لان عدد أعمدة المصفوفة يساوي بعد فضاء البدء، عدد أسطر المصفوفة يساوي بعد فضاء الوصول.

1. حســـــاب صورة $v = (2,3,1)$ بواسطة f

بما الشعاع $v = (2,3,1) \notin \mathbb{R}^2$ *إذن لا يمكن حساب صورته*

2. ايـــــــــجاد عبـــــارة $f(x,y)$

نلاحظ ان المصفوفة ذات عمودين و ثلاثة اسطر اذن التطبيق الخطي المرافق لها معرف من R^2 نحو R^3 .

اذن فالبحث عن $f(x,y) = (?\,,?\,,?)$
سوف نستخدم الأسس القانونية للفضائيين

- $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ أساس قانوني للفضاء R^2.
- $\{e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)\}$ أساس قانوني للفضاء R^3

و بالتالي

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + a_{31}e'_3 \\ f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + a_{32}e'_3 \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e'_1 + 2e'_2 + 5e'_3 \\ f(e_2) = -e'_1 + 4e'_2 - 6e'_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3,2,5) \\ f(e_2) = (-1,4,-6) \end{cases}$$

لدينا(x, y) شعاع من R^2 *فهو يكتب على الشكل*

$$(x, y) = xe_1 + ye_2$$

اذن

$$f(x, y) = f(xe_1 + ye_2)$$

بما ان f تطبيق خطي اذن:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x(3,2,5) + y(-1,4,-6) \\ &= (3x, 2x, 5x) + (-y, 4y, -6y) \\ &= (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y) \end{aligned}$$

اذن:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to f(x, y) &= (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y) \end{aligned}$$

بطريقة أبسط: لإيجاد عبارة f

$$f(x, y) = M_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + 4y \\ 5x - 6y \end{pmatrix}$$

$$= (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$$

اذن:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to f(x, y) &= (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y) \end{aligned}$$

3. حـــــساب صـــــورة الشعاع $V = (2,3)$

طريقة1:

$$f(2,3) = (3 \times 2 - 3, \quad 2 \times 2 + 4 \times 3, \quad 5 \times 2 - 6 \times 3)$$
$$f(x, y) = (3, \quad 16, \quad -8\ )$$

طريقة2

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = M_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

المحــــددات

طريقة النشر (La règle de développement)

لتكن $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة حيث $1 \leq i,j \leq n$.

محدد المصفوفة A هو العدد الحقيقي $det(A)$ أو $|A|$ الذي يحسب العلاقة التالية :

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

بالنسبة للأولى تعطي نشر لـ $|A|$ بالنسبة لعناصر السطر i من A، أما الثانية تعطي نشر لـ $|A|$ بالنسبة لعناصر العمود j من A.

حيث $|A_{ij}|$ هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i و العمود j من المصفوفة A .

ملاحــــظة:

يعطي محدد المصفوفة ذات العنصر الوحيد (سطر وعمود واحد) كما يلي :

$$det(a_{11}) = a_{11}$$

أمثلـــــــة :

- إذا كانت المصفوفة من الدرجة الثانية فإن محددها يحسب كما يلي : (لنختار $i = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det(A_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}\, det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\, det(A_{12})$$

$$= (-1)^{2} a_{11} a_{22} + (-1)^{3} a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (-2)(1) = 2$$

- **أما محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة فيحسب كما يلي : (باختيار $i = 1$)**

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det(A_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}\, det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\, det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13}\, det(A_{13})$$

$$= a_{11}\, det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\, det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\, det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

نطبـــق محــــدد مصفـــوفة من الدرجـــة الثانيـــة لكل من المحددات الثلاثة فيكون

$$= a_{11} a_{11} a_{22} - a_{11} a_{12} a_{21} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22}$$

مثـــــــال:

لنحسب محدد المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(0)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 12$$

ملاحـــظة:

لتسهيــل عمليـــة الحســـاب نختـــار السطـــر أو العمـــود الذي يحتـــوي على أكبـــر عدد من الأصـــفار

طريقـــــة ساروس *(La règle de Sarrus)*

تطبق هذه الطريقة لحساب محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة

نقوم بإعادة كتابة العمودين الأول و الثاني أمام المصفوفة A ثم نستعمل أسهم قطرية مع إشارات موجبة وسالبة هكذا :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad + & \quad + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}a_{23}\,a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{22}}$$

لنطبق هذه الطريقة على المثال السابق

$$|\mathbf{A}| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right.$$

$$= (24 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 24$$

ملاحظــــــات:

1) **محدد المصفوفة القطرية أو المثلثية أو السفلية يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .**
2) **إذا كان صفين من مصفوفة متساويين إذن محددها معدوم.**
3) **إذا غير صفين من مصفوفة إذن محددها يغير إشارته.**
4) **إذا كان أحد صفوف مصفوفة مضروب بسلمي α فإن محددها يكون مضروب بـ α.**
5) **إذا كان أحد صفوف المصفوفة معدوم إذن محددها معدوم.**

نظــــــرية :

محدد مصفوفة مربعة يساوي محدد منقول هذه المصفوفة أي :

$$\boldsymbol{det(B) = det(B^T)}$$

حســــــاب المقلـــــوب

لتكن المصفـــــوفة $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$

- A قـــابلة للقلـــب ⇔ التطبيـــق الخطـــي المـــرافق لهـــا تقـــابلي.
- A قـــابلة للقلـــب ⇔ أشـــعة أعمـدة المصفـــوفة A مستقـــلة خطيـــا.
- A قـــابلة للقلـــب⇔$\det(A)=|A|\neq 0$

نرمـــز لمقـــلوب A بـــ A^{-1} و يحســـب بالعلاقـــة التـــالية:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times(adj(A))^t,\qquad |A|\neq 0$$

حيث $adj(A)=(a'_{ij})$ هي مصفـــوفة ناتجـــةمن المصفـوفة A بالعلاقـــة التالية:

$$a'_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

أي

$$adj(A)=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}\end{pmatrix}$$

تسمى $(adj(A))^t$ بالمصفـــوفة المرافقـــة لـــ A

مثـــــال:

أحسب مقلـــوب المصفـــوفة التـــالية

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A|=24\neq 0$$

إذن A قابلة للتقلب

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times(adj(A))^t$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

إذن

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -16 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

و منه المصفوفة المرفقة $\left(adj(A)\right)^t$ للمصفوفة A هي

$$\left(adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

و التالي

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

سلســــــلة 3

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

الرياضيات 2 — **السلسلة رقم 03**

التمرين 1:01) أوجد نوع المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&5&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4&1\\0&5&0\\2&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}12&4\\4&1\\1&1\end{pmatrix}$$

3) من المصفوفات السابقة أوجد العناصر: $a_{22}, a_{31}, b_{12}, b_{22}, b_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{23}$.

التمرين 2: 1) أوجد x,y,z,w إذا كان : $\begin{pmatrix}x+y&2z+w\\x-y&z-w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}$

3) أوجد x,y,z,t حتى يكون : $\begin{pmatrix}x+y&z+3\\y-4&z+w\end{pmatrix}=0_2$

التمرين 3: ليكن المصفوفات التالية :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&0&2\\-7&1&8\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&5\\1&-2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&7\\2&-3\\0&-1\end{pmatrix}$$

1) أحسب المجاميع التالية إن أمكن: A+B, C+D .

2) أحسب مايلي : 3D, -5A, 2A-3B .

3) أوجد x,y,z,w حيث :

$$3\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&6\\-1&2w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&x+y\\z+w&3\end{pmatrix}$$

التمرين 4: أوجد الجداء AB في الحالات التالية :

$$1)A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix},2)A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&-4\\3&-2&6\end{pmatrix}$$

التمرين 5: أوجد منقول المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&5\\2&0&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\\0&5\end{pmatrix}$$

التمرين 6: ليكن f تطبيق خطي معرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ كم يلي $f(x,y)=(2x-5y,3x+y)$ نسبة إلى الأساس $B=\{u_1=(2,1),u_2=(3,2)\}$ في $\mathbb{R}^2$.

1. أحسب $f(u_1)$ ثم أكتب النتيجة في الأساس B .
2. أحسب $f(u_2)$ ثم أكتب النتيجة في الأساس B .
3. أوجد المصفوفة المرفقة ل f في الأساس B.
4. أحسب صورة الشعاع $v=(3,4)$ بواسطة f في الأساس B باستعمال المصفوفة المرفقة ل f.

التمرين 7: ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\\5&-6\end{pmatrix}$$

1) أحسب صورة الشعاع $v=(2,3,1)$ بواسطة f.

2) أوجد عبارة f(x,y,z).

التمرين 8: أحسب المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&6&1\\3&2&4\\4&1&0\end{vmatrix}.$$

التمرين 9: أحسب مقلوب المصفوفات التالية :

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&6&1\\3&2&4\\4&1&0\end{pmatrix}$$

لتمرين1:

إيـــجاد نـــوع المصفوفاتمع تحديد العناصر $a_{22}, a_{13} b_{12}, b_{22}, b_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{32}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة A من الدرجة 2×3. $a_{22} = 5,\ \ a_{13} = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة B من الدرجة 3×3. $b_{12} = 4\ ,\ \ b_{22} = 5,\ \ b_{31} = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة C من الدرجة 2×3. $c_{12} = 4\ ,\ \ c_{22} = 1,\ \ c_{32} = 1$

التمرين 2:

-1 ايـــجاد x, y, z, w

لدينا $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix}$

إذن
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2z + w = 5 \ldots\ldots\ldots 2 \\ x - y = 1 \ldots\ldots\ldots..3 \\ z - w = 4 \ldots\ldots\ldots..4 \end{cases}$$

بجمع المعادلة 1 مع 3 نجد $x = 2$: نعوض قيمة x في المعادلة 1 نجد $y = 1$:
بجمع المعادلة 2 مع 4 نجد $z = 3$: نعوض قيمة z في المعادلة 4 نجد $w = -1$:
و منه $(x, y, z, w) = (2, 1, 3, -1)$.

-2 إيـــجادx, y, z, w

$$\begin{pmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{pmatrix} = 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ z + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots..3 \\ z + w = 0 \ldots\ldots\ldots..4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \\ z = -3 \\ w = 3 \end{cases}$$

التمرين 3:

1. حـــساب المجامـــيع:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$C + D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ لا يمكن الجمع:

لانCو D ليس من نفس الدرجة.

2. حســـاب ما يلي:

$$3D = 3\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 7 \\ 3\times 2 & 3\times(-3) \\ 3\times 0 & 3\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-5A = -5\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-9 & -4-0 & 6-6 \\ 8-(-21) & 10-3 & -12-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$$

3. أيـــجاد x, y, z, w

لدينا: $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

أذن:

$$\begin{cases} 3x = x + 4 \dots\dots\dots 1 \\ 3y = x + y + 6 \dots\dots 2 \\ 3z = z + w - 1 \dots\dots 3 \\ 3w = 2w + 3 \dots\dots\dots 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ w = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

التمرين4:

حســـاب الجـــــــداء في كل حالة

$$1.\ \ A\times B=\begin{pmatrix}\boxed{2 & -1}\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}_{3\times2}\times\begin{pmatrix}1 & -2 & -5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}_{2\times3}$$

عدد أعمدة المصفوفةA = عدد أسطرالمصفوفة B يساوي

$$=\begin{pmatrix}2\times1+(-1)\times3 & 2\times(-2)+(-1)\times4 & 2\times(-5)+(-1)\times0\\ 1\times1+0\times3 & 1\times(-2)+0\times4 & 1\times(-5)+0\times0\\ -3\times1+4\times3 & -3\times(-2)+4\times4 & -3\times(-5)+0\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & -2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{pmatrix}_{3\times3}$$

لاحظ أن: *عناصر السطر تضرب في عناصر العمود*

$$2.\ \ A\times B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times2}\times\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{pmatrix}11 & -6 & 14\\ 1 & 2 & -14\end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$(2\quad 4\quad -1)\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}=((2\,X\,3+(\,4\,X\,5\,)+\,(-1)\,X\,1)=(6+20-1)=(25)$$

$$\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}(2\quad 4\ -1)=\begin{pmatrix}3\,X\,2 & 3\,X\,4 & 3\,X\,(-1)\\ 5\,X\,2 & 5\,X\,4 & 5\,X\,(-1)\\ 1\,X\,2 & 1\,X\,4 & 1\,X\,(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 12 & -3\\ 10 & 20 & -5\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

من خلال الجداءين الأخيرين تستنتج أن **ضرب المصفوفات ليس تبديليا**.

التمرين 5:

إيـــــجاد منقول المصفـــــوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\rightarrow A^t=(1\quad 2\quad 3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

التمرين 8:

- حســـــــــاب المحددات

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 0) = 6 - 0 = 6$$

1- طريقة النشر (*La règle de développement*)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = +2 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (2 \times 0 - 1 \times 4) - 6(3 \times 0 - 4 \times 4) + 3(3 \times 1 - 4 \times 2)$$

$$= 83$$

2- او طريقة سايري (*La règle de Saurrs*)

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 8 & 0 & \\ \left|\begin{matrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} & & & \\ & 0 & 96 & 3 & \end{array} = (0 + 96 + 3) - (8 + 8 + 0) = 83$$

التمرين 9:

- حســـــــــاب مقلـــــــوب (او معكوس) مصفوفة

1. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (adj(A))^t, \qquad |A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 83 \neq 0$$

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| \text{ و } adj(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&4\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&4\\4&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}6&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1\\4&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&6\\4&1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}6&1\\2&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&6\\3&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&16&-5\\1&-4&22\\22&-5&-14\end{pmatrix}$$

$$\left(adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix}-4&1&22\\16&-4&-5\\-5&22&-14\end{pmatrix}$$

و منه

$$A^{-1}=\frac{1}{83}\begin{pmatrix}-4&1&22\\16&-4&-5\\-5&22&-14\end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adj(A))^t$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3&-3&0&0\\6&3&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&1/3&-2/3\\0&0&-2/3&1/3\end{pmatrix}$$

الفصـــــل الرابع: حــل جملـــة معــــادلات خطيـــة

درسنا في الفصل السابق المصفوفات و المحددات وأنواعها المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية . ندرس في هذا الفصل حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل وطريقة غوص

1. جملة m معادلة خطية بـ n مجهول:

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

- تسمى العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال للجملة.
- وتسمى العناصر b_i المقادير الحرة أو الثابتة.
- العناصر x_iالمجاهل.
- تسمى المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ مصفوفة المعاملات

فإذا رمزنا $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ و بالإستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1)بالشكل المختصر:

$$\mathbf{AX = B} \ldots\ldots \quad (2)$$

ملاحظـــة:

إذا كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة و إذا كان أحدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

أن حل جملة المعادلات الخطية(1)يعني إيجاد الشعاع X الذي يحقق(1)وهنا نطرح ثلاثة أسئلة:

1. هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل.
2. إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حال لها ؟
3. كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

2. حل جملة n معادلة و n مجهول:

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

1.2. طريقـــة مقـلـوب المصفــوفة:

من العلاقة(2) $AX = B$ …… حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب أي $|A| \neq 0$ فانه يوجد لـ Aمعكوس A^{-1}. لذلك بضرب طرفي العلاقة (2) من اليسار بـ A^{-1} نجد:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أي ,

$$X = A^{-1}B$$

ويكون الحل وحيدا. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو الشعاع معدوم. تدعى هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية لحل جملة المعادلات الخطية

مثـــال: حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_n = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_n = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_n = 3 \end{cases}$$

أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على شكل كتابة مصفوفيه أي:

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

يمكن ايجاد أن $|A| \neq 0$ و أن: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي فإن:

$$X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.2. طريقـــة كـــرامر :

إن صعوبة الطريقة السابقة كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفةA.

نعرف الأن المحدد التالي Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من محدد المصفوفة A بعمود المقادير الحرة أوالثابتة

- إذا كان $|A| \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$
- أما إذا كان $|A| = 0$نميز حالتين:

<u>الحالة الأولى:</u>$\Delta_i \neq 0, \ \ i = 1, \dots, n$: عندئذ جملة المعادلات لخطية (1) ستحيلة الحل

<u>الحالة الثانية:</u>$\Delta_i = 0, \ \ i = 1, \dots, n$: عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1)عدد غير منته من الحلول.

مثـــــال: استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

بما أن $|A| \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, $i = 1, 2, 3$

أي أن

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} \quad , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|}$$

و منه

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13 \ , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12 \ ,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 4$$

2.3. حل جملة معادلات خطية بطريقة غوص (Gauss) :

نكتب الجملة الخطية على الشكل المصفوفي $AX = B$

نضع المصفوفة A على اليسار و المصفوفة B على اليمين

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & : b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & : b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & : b_n \end{pmatrix}$$

تعتمد طريقة غوص على إجراء تحويلات للمصفوفة A حتى تتحصل على مصفوفة مثلثيه علوية أو مثلثيه سفلية، من ثم نحل الجملة الجديدة مباشرة.

مثـــــال : لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \ \ldots\ldots (1) \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \ \ldots\ldots (2) \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \ \ldots\ldots (3) \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \ \ldots (4) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 4 & -3 & -1 & \vdots & 3 \\ 2 & 4 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & -5 & \vdots & -5 \\ 0 & -11 & -5 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -11 & -5 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & : & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & : & 0\end{pmatrix}$$

و منه حل الجملة السابقة مكافئ لحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x_1 = 1\\ 2x_2 = 0\\ x_3 = 1\end{cases}$$

أي أن الحل هو : $X = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. حل جمـــلة المعـــادلات الخطيـــة المتجانســـة

في هذه الحالة تكون أعمدة المقادير الحرة أو الثابتة يساوي الصفر وتصبح الجملة بالشكل

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\ \quad\quad .\\ \quad\quad .\\ \quad\quad .\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

أو بالشكل المختصر

$$AX = 0$$

وكما وجدنا سابقا أنه من الواضح أن x_i أيا كان $i = 1, 2, \ldots, n$ حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة.

ونعلم أيضا أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حلولا غير الحل الصفري هو أن يكون محدد الجملة مساويا للصفر.

مثـــــال:

ناقش حلول الجملة الخطية المتجانسة التالية بحسب قيم k:

$$\begin{cases} 3x_1 + kx_2 - x_n = 0\\ 2x_1 + x_2 + x_n = 0\\ x_1 + kx_2 - x_n = 0\end{cases}$$

نحسب محدد الجملة

$$\begin{vmatrix}3 & k & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & k & -1\end{vmatrix} = 2k - 8$$

نلاحظ أن $\Delta \neq 0$ عندما $k \neq 4$ وعندها يكون للجملة الحل الصفري وحيد.

أما من أجل $k = 4$ يكون $\Delta = 0$ و للجملة عدد غير منته من الحلول وتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_n = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_n = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_n = 0 \end{cases}$$

نجري تحويلات أولية على مصفوفة ألجملة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

وتؤول الجملة إلى المعادلتين:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي عدد المجاهيل يزيد بمقدار واحد على عدد المعادلات وبالتالي نفرض متحول حر وليكن x_3 من المعادلة 2 نجد$x_2 = x_3$: نعوض في المعادلة الأولى نجد $x_1 = -x_3$و منه الحلول هي

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سلســـــــلة 4

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك **السنة الأولى**

الرياضيات 2 **السلسلة رقم 04**

التمرين 01: باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة حل الجمل التالية:

$$1)\begin{cases} 2x+6y+z=3 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 4x+y=1 \end{cases}, \quad 2)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 5x+4y+z=-1 \\ 2x+7y+2z=2 \end{cases}$$

التمرين 02: باستعمال طريقة كرامر حل الجمل التالية:

$$1)\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ x-y+3z=8 \\ x+y+z=6 \end{cases}, \quad 2)\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ x+3z=7 \\ x-y+5z=10 \end{cases}$$

التمرين 03: حل الجمل المتجانسة التالية:

$$1)\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ 2\ \ x+y+z=0 \\ x+4y-3z=0 \end{cases}, \quad 2)\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$

التمرين1:

حل الجملة الخطية باستعمال مقلوب المصفوفة:

تـــكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم

$$\begin{cases} 2x + 6y + z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

1. **أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على شكل كتابة مصفوفيه أي:**

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حيث :

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{مصفوفة المعاملات}}, \underbrace{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{العناصر } x, y, z \text{ تسمى المجاهيل}}, \quad \underbrace{B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{العناصر 1، 2، 3 تسمى المقادير الحرة او الثابتة}}$$

2. **حساب المحدد**

طريقة سايري *(La règle de Saurrs)*

8 8 0

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} = (0 + 96 + 3) - (8 + 8 + 0) = 83 \neq 0$$

0 96 3

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد.

3. **نستعمل طريقة المقلوب لإيجاد الشعاع X الذي يحقق (1)، وهي معطاة بالعلاقة التالية:**

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

A^{-1}:(مقلوب A، يوجد لـ A معكوس إذا كان $|A| \neq 0$).

و منه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. **و عليه المطلوب هنا إيجاد A^{-1} بحيث أن :** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$

إذن

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\left(adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

و منه

$$A^{-1} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

و بالتالي

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذن

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4\times 3 + 1\times 2 + 22\times 1 \\ 16\times 3 - 4\times 2 - 5\times 1 \\ -5\times 3 + 22\times 2 - 14\times 1 \end{pmatrix}$$

و منه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/83 \\ 35/83 \\ 15/83 \end{pmatrix}$$

حلول الجملة هي: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{12}{83}, \frac{35}{83}, \frac{15}{83}\right)\right\}$. بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.

نتبع نفس الخطوات لحل الجملة الثانية

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + z = -1 \\ 2x + 7y + 2z = 1 \end{cases}$$

1. الكتابة المصفوفية للجملة

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. حساب المحدد $|A| = 66 \neq 0$

3. المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد.نستعمل طريقة المقلوب لإيجاد الشعاع X الذي يحقق (1)، و هي معطاة بالعلاقة التالية:

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. نحسب A^{-1} بالعلاقة المعطاة: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 27 \\ 17 & -4 & -3 \\ -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$A^{-1} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

و منه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 \times 0 + 17 \times (-1) + (-10) \times 2 \\ -8 \times 0 + (-4) \times (-1) + 14 \times 2 \\ 27 \times 0 + +(-3) \times (-1) + (-6) \times 2 \end{pmatrix}$$

بعد الحساب نجد: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} -37 \\ 32 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/66 \\ 32/66 \\ -9/66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/66 \\ 16/33 \\ -3/22 \end{pmatrix}$

حلول الجملة هي: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{-37}{66}, \frac{16}{33}, \frac{-3}{22}\right)\right\}$.بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.

التمرين 2:

حل الجملة الخطية باستعمال كرامر

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

1. الكتابة المصفوفية للجملة

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. حساب المحدد

بطريقة سايري *(La règle de Saurrs)*

-2 6 -1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (-2 - 3 + 2) - (-2 + 6 - 1) = -6 \neq 0$$

2

-2 -3

3. المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد.حلول الجملة بطريقة كرامر هي:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|}, \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|}, \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|}.$$

حيث:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

و منه

$$x = \frac{-6}{-6} = 1, \quad y = \frac{-12}{-6} = 2, \quad z = \frac{-18}{-6} = 3.$$

حلول الجملة هي: $(x,y,z)=\{(1,2,3)\}$.بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.

التمرين 3:

حل الجمل المتجانسة

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$

1. الكتابة المصفوفية للجملة

$$AX=B \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. حساب المحدد $|A|=61\neq 0$
3. بما ان $|A|\neq 0$ فإن الجملة لديها حل وحيد و هو الحل الصفري أي مجموعة حلول الجملة هي $(x,y,z)=\{(0,0,0)\}$

حل الجمل المتجانسة

$$\begin{cases} 3x+4y-z=0 \ldots\ldots.L_1 \\ 2x+y+z=0 \ \ldots\ldots L_2 \\ x+4y-3z=0 \ldots L_3 \end{cases}$$

1. الكتابة المصفوفية للجملة

$$AX=B \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. حساب المحدد $|A|=0$
3. بما ان $|A|=0$ فإن الجملة لديها عدد غير منته من الحلول، نجري تحويلات أولية علىالجملة

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \quad \ldots\ldots.L_2 \\ 5x+5y=0 \ \ldots\ldots L_1+L_2 \\ 2x+2z=0 \ldots \ \ L_1-L_3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \ldots\ldots.(1) \\ x=-y \\ x=-z \end{cases}$$

بتعويض قيمة x في المعادلة و منه (1) نجد $z=y$ إذن

$$(x,y,z)=(-y,y,y)=y(-1,1,1)$$

و بالتالي من أجل كل قيمة لـــ yنحصل على حل جديد للجملة.

الفصـــــل الخامس: القيــــــم الـذاتيـــــة و الأشعــة الذاتيـــــــة

تعريــــف:

A مصفوفة من $M_n(K)$, نقول عن λ من K أنها قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة Aالمعرف على الفضاء الشعاعي V إذا وجد شعاع $X \neq 0$ من V بحيث : $f(X) = \lambda X$،

يسمى X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية λ .

تعريــــف:

$A = (\alpha_{ij})$ من $M_n(K)$ نقول عن الشعاع X من $\mathbb{R}^n$ أنه شعاع ذاتي للمصفوفة A إذا وجدت سليمة λ بحيث يكون $AX = \lambda X$، في هذه الحالة تسمى λ قيمة ذاتية ملحقة بالشعاع X.

كثيــــر الحــــدود المميـــــز لمصفـــوفة:

نسمي$|A - \lambda I_n|$حيث $A \in M_n(K)$ بكثير الحدود المميز للتطبيق الخطي f المرافق لـ A .

جذور المعادلة $|A - \lambda I_n| = 0$ تمثل القيم الذاتية للمصفوفة A، حيث أن I : مصفوفة الوحدة من المرتبة n.

مثــــال: لتكن المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. كثير الحدود المميز للمصفوفة :

$$|A - \lambda I_2| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 2$$

القيم الذاتية هي $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$

أي أن $\lambda_2 = -1$ و$\lambda_1 = 4$.

2. الأشعة الذاتية:

- من أجل $\lambda_1 = 2$ لدينا $(A - \lambda I_1)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

إذن الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ هو $X_1 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، الفضاء الشعاعي

الجزئي الذاتي المشارك لهذه القيمة هو : $E_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

- من أجل $\lambda_2 = 1$ لدينا $(A - \lambda I_2)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

إذن الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ هو $X_2 = x_2\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$، والفضاء الشعاعي

الجزئي الذاتي المشارك لهذه القيمة هو : $E_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}\right]$.

نظـريات

1. إن قيمة محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي أن : $|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$
2. إذا كانت المصفوفة A مصفوفة صفرية فإن جميع قيمها الذاتية تكون أصفارا أي أن:

$$A_n = 0_n \Rightarrow \lambda_k = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

3. إذا كان المصفوفة A هي مصفوفة الوحدة I فإن جميع قيمها الذاتية تكون متساوية وتساوي الواحد الصحيح أي أن :

$$A_n = I_n \Rightarrow \lambda_k = 1, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

4. إذا كانت المصفوفة A مصفوفة قطرية D فإن قيمها الذاتية تساوي عناصرها القطرية. أي أن:

$$A = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{kk} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_k = a_{kk}, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

ويستفاد من هذه النظرية في إيجاد القيم الذاتيةλ_kلأي مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

5. الأشعة الذاتية $X_1, X_2 \dots, X_k$ المقابلة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k$ على الترتيب مستقلة خطيا.

6. يمكن أن يكون لمصفوفتين مختلفتين A , B و لهما نفس المرتبة n × n نفس القيم الذاتية: وعندها تكو ن A, B متشابهتان. (يستفاد منها في التعرف على المصفوفات.)

7. إن للمصفوفة A و لمنقولها A^t نفس القيم الذاتية وذلك لأن لهما نفس كثير الحدود بالنسبة لـ λ.

8. إذا شكلنا من أعمدة الأشعة الذاتية لمصفوفة A بحسب ترتيبيا مصفوفة T فإننا سنحصل على مصفوفة مربعة من مرتبة A و تسمى المصفوفة T بالمصفوفة الظاهرية لـ A و إذا كانت المصفوفة T نظامية $(|T| \neq 0)$ فإن المصفوفة D المعرفة بالعلاقة $D = T^{-1} \times A \times T$ تكون مصفوفة قطرية وان عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية لـ D و تساوي القيم الذاتية لــ A حسب الترتيب السابق أي أن:

$$D = T^{-1} \times A \times T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفتينA, Dتكونان متشابهتين وتسمى المصفوفة $D = T^{-1} \times A \times T$ بتحويلة الاستقطار و التشابه ويستفاد من هذه النظرية في عملية تحويل المصفوفات إلى مصفوفات قطرية، وفي عمليات التحقق من صحة الأشعة الذاتية.

تمـــــرين 1:

1. حل الجملة التالية بطريقة غوص

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

2. عين كثير الحدود المميز للمصفوفة A.
3. أوجد القيم الذاتية، الأشعة الذاتية و الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية المرافقة لـلقيم الذاتية.

تمـــــرين 2:لنأخذ المصفوفة المتناظرة التالية:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. أوجد القيم والأشعة الذاتية لـ A.
2. عين المصفوفة T ثم أحسب الجداء $T^{-1} \times A \times T$.

حـــل التمرين 1:

1. حل الجملة التالية بطريقة غوص

لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

الكتابة المصفوفية للجملة هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1: & 3 \\ 0 & 1 & 1: & -1 \\ 0 & 1 & 2: & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1: & 3 \\ 0 & 1 & 1: & -1 \\ 0 & 0 & 1: & 5 \end{pmatrix}$$

أي أن حلـــول الجملة تكتب من الشكل

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

2. تعين كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

$$|A-\lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&-1\\0&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3+4\lambda^2-4\lambda+1=0$$

3. تعـــين القيم الذاتية، الأشعة الذاتية و الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية المرافقة لـلقيم الذاتية

تعـــين القيم الذاتية

$$\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda+1=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)=0$$

أي أن القيم الذاتية هي $\lambda_3=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ ، $\lambda_2=\frac{-\sqrt{5}+3}{2}$، $\lambda_1=1$.

تعـــين الأشعة الذاتية

- من أجل $\lambda_1=1$ لدينا $(A-\lambda_1 I_1)X=0$:

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

إذن الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$ هو $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

و الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المشارك لهذه القيمة هو : $E_{\lambda_1}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$

- من أجل $\lambda_2=\frac{-\sqrt{5}+3}{2}$ لدينا $(A-\lambda_2 I_3)\,X=0$:

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&1&-1\\0&\frac{\sqrt{5}-1}{2}&1\\0&1&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

إذن الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ هو $X_2 = x_3\begin{pmatrix} \sqrt{5}+2 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ،

والفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المشارك لهده القيمة هو : $E_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} \sqrt{5}+2 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

- من أجل $\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ لدينا $(A - \lambda_3 I_3)\, X = 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

إذن الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ هو $X_3 = x_3\begin{pmatrix} -\sqrt{5}+2 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ، والفضاء

الشعاع الجزئي الذاتي المشارك لهده القيمة هو : $E_{\lambda_3} = \left[\begin{pmatrix} -\sqrt{5}+2 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

المــــراجع

حسن رجب محمد، أساسيات الرياضيات الجبر و الهندسة التحليلية و الإحصاء، دار الفجر للنشر و التوزيع.مصر

مجدي الطويل، المصفوفت (النظرية و التطبيق)، جامعة القاهرة، 1996

شيراز الطالباني و نازدار اسماعيل، محاضرات في الجبر الخطي،ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر، 1989

فرانك أيرز. ملخصات شوم، نظريات و مسائل في المصفوفات .دار ماكجروهيل للنشر. الدار الدولية للنشر و التوزيع.