



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Transfert de chaleur 1

Cours et Exercices Corrigés

3^{ème} Année Licence Energétique

Présenté par : Dr.BOULTIF Nora

Année 2024/2025

Table des matières

Avant-propos	1
Chapitre 1 : introduction des transferts de chaleur et position vis-à-vis de la thermodynamique	
1.1. Introduction	3
1.2. Rappels de la thermodynamique	4
1.2.1. Champ de Température	4
1.2.2. La chaleur	5
1.2.3. Premier principe de la thermodynamique	6
1.2.4. Second principe de la thermodynamique	6
1.3. Les différents modes de transfert de chaleur	7
1.3.1. Conduction	7
1.3.2. Convection	7
1.3.3. Rayonnement	8
Chapitre 2 : Lois de base des transferts de chaleur	
2.1. Introduction	9
2.2. Conduction (loi de Fourier 1822)	9
2.2.1. Loi de Fourier	9
2.2.2. Conductivité thermique	11
2.3. Convection (Loi de Newton 1701)	13
2.4. Rayonnement (Loi de Stefan 1879-Boltzmann 1884)	13
Exercices résolus	15
Chapitre 3 : Transfert de chaleur par conduction	
3.1. Équation d'énergie (équation générale de la conduction)	18
3.1.1. Équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes	18
3.1.2. Formes de l'équation de la chaleur	21
3.2. Équation de la chaleur en coordonnées cylindriques	22
3.3. Équation de la chaleur en coordonnées sphériques	22
3.4. Conditions aux limites spatio-temporelles	23
3.4.1. Condition initiale	23
3.4.2. Conditions aux limites	23

3.5. Conduction sans source de chaleur interne en régime permanent à une dimension	26
3.5.1. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cartésiennes	26
3.5.2. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cylindrique	28
3.5.3. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées sphériques	30
3.6. Conduction avec source de chaleur interne en régime permanent à une dimension (conduction vive)	32
3.6.1. Mur simple avec conditions de Dirichlet sur les deux faces (températures imposées aux surfaces)	33
3.6.2. Cylindre creux avec conditions de Dirichlet	34
3.6.3. Sphère creuse avec conditions de Dirichlet	36
Exercices résolus "équation de la chaleur"	38
3.7. Résistance thermique –Analogie électrique	45
3.7.1. Résistances thermiques	45
3.7.2. Analogie électrique	46
3.7.3. Conduction thermique en régime permanent à travers les surfaces multi couches	46
Exercices résolus "résistances thermiques"	51
3.8. Les ailettes	57
3.8.1. Différentes formes d'ailettes utilisées dans la pratique	57
3.8.2. Développement de l'équation générale unidimensionnelle	58
3.8.3. Ailette infiniment longue de section constante	61
3.8.4. Ailette avec Température imposée	62
3.8.5. Ailette infiniment mince (à extrémité adiabatique)	65
3.8.6. Ailette avec perte de la chaleur par convection à l'extrémité	67
3.8.7. Performances des ailettes	71
Exercices résolus " ailettes"	72
Chapitre 4 : Transfert de chaleur par convection	
4.1 Mécanismes des transferts de chaleur par convection	76
4.2. Types de configurations	77
4.3. Régimes d'écoulements	78
4.4. L'expression du flux	79

4.5. Détermination du coefficient de transfert de chaleur convectif h	79
4.5.1. Analyse dimensionnelle	80
4.5.2. Convection forcée	81
4.5.3. La convection libre (naturelle)	83
4.6. Nombres adimensionnels	86
4.7. Corrélations utilisées pour déterminer le nombre adimensionnel Nusselt	87
4.7.1. Convection forcée	87
4.7.2. Convection libre	88
4.8. La méthodologie de résolution d'un problème de convection	89
Exercices résolus "Convection thermique"	90
Bibliographie	95

Avant propos

Le transfert de chaleur, un pilier de la science et de l'ingénierie, constitue une compétence fondamentale pour tous les étudiants en sciences. Sa compréhension approfondie est essentielle pour analyser, concevoir et optimiser une large gamme de dispositifs, systèmes et machines. Des moteurs à combustion aux turbines, en passant par les échangeurs thermiques, les centrales électriques, les systèmes de réfrigération et même le corps humain. Les principes du transfert de chaleur constituent le fondement de l'innovation scientifique et technologique dans une variété de champs.

Ce document pédagogique intitulé "transfert de chaleur1 cours et exercices" est le fruit de neuf ans d'enseignement de cette matière. Il constitue un précieux outil d'apprentissage pour les étudiants de troisième année licence LMD "Mécanique énergétique". Il s'inscrit parfaitement dans le cadre du programme officiel défini par le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique.

Ce cours peut constituer également une référence précieuse pour les étudiants des formations suivantes :

- 3ème année de Licence en Mécanique (Construction)
- Master (Énergétique et Énergies Renouvelables).
- Ingénieurs en Mécanique
- Génie des procédés
- Physique énergétique

Il servira d'outil indispensable aux étudiants souhaitant approfondir leurs connaissances, il leur permettra de consolider leurs bases en transfert thermique.

Objectifs du cours

- Apprécier les pouvoirs conducteurs de la chaleur des matériaux usuels
- Déterminer les taux de transfert thermique par conduction en régime stationnaire pour des géométries usuelles.
- Appliquer les concepts de conduction thermique aux ailettes rectangulaires.
- Comprendre les mécanismes de transfert thermique entre un fluide et une paroi solide.

Contenu du cours

Cet ouvrage propose une approche pédagogique complète alliant cours et travaux dirigés afin d'approfondir les connaissances acquises.

La partie cours est structurée en quatre chapitres, entièrement conformes au programme officiel émis par le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique.

- Le premier chapitre expose le lien entre le transfert de chaleur et la thermodynamique ainsi que les concepts fondamentaux des transferts thermiques.
- Le deuxième chapitre consiste à une introduction aux trois mécanismes de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement tout en abordant la notion de conductivité thermique.
- Le troisième chapitre se concentre sur la conduction de chaleur unidimensionnelle en régime permanent (sans et avec) source interne pour les différentes géométries (plane, cylindrique et sphérique), en introduisant l'analogie électrique et en présentant les méthodes de calcul des ailettes.
- Le dernier chapitre se concentre sur la convection thermique, Il introduit la méthode d'analyse dimensionnelle pour le calcul du coefficient de transfert de chaleur par convection. Il présente ensuite des corrélations empiriques pour l'évaluation de ce coefficient dans les cas de convection libre et forcée, en tenant compte de différentes configurations géométriques et des écoulements laminaires et turbulents.

Pour favoriser une meilleure assimilation des concepts, chaque chapitre est complété par des exercices corrigés. Ces exercices, développés à partir de travaux dirigés réalisés au cours des années précédentes, permettent aux étudiants de mettre en pratique les concepts théoriques étudiés et d'affiner leurs compétences en résolution de problèmes.

***Chapitre 1 : Introduction des transferts
de chaleur et position vis-à-vis de la
thermodynamique***

1.1. Introduction

La thermodynamique représente une partie importante de la physique technique qui étudie les lois de la production de la chaleur ayant à la base d'autres formes d'énergie, sa transformation, sa propagation et son utilisation pratique.

La thermodynamique classique permet l'évaluation de la quantité de la chaleur échangée pendant un processus subi par un système passant d'un état d'équilibre vers un autre état d'équilibre. Elle ne donne pas d'une manière explicite des informations sur le mode par lequel est effectué le transfert.

L'étude des phénomènes thermiques qui accompagnent la propagation de la chaleur et le calcul des valeurs du flux thermique représente l'objectif fondamental du **transfert thermique (ou transfert de chaleur) ou thermocinétique**.

Cette partie importante de la physique traite aussi la description des mécanismes des modes de la propagation de la chaleur conduisant à des relations établies soit théoriquement, soit par voie expérimentale entre le flux thermique transféré et les paramètres caractéristiques du système (propriétés physiques, géométriques et les conditions thermiques de son milieu environnant).

Les transferts thermiques sont couramment utilisés dans les systèmes d'ingénierie et d'autres aspects de la vie, et il n'est pas nécessaire d'aller très loin pour voir certaines applications du transfert de chaleur. En fait, on n'a même pas besoin de bouger. Le corps humain rejette constamment de la chaleur vers son environnement, et le confort humain est étroitement lié au taux de ce rejet de chaleur. Nous essayons de contrôler ce taux de transfert de chaleur en ajustant nos vêtements aux conditions environnementales.

De nombreux appareils ménagers ordinaires sont conçus, en tout ou en partie, en utilisant les principes du transfert de chaleur. Parmi les exemples, citons la cuisinière électrique ou à gaz, le système de chauffage et de climatisation, le réfrigérateur et le congélateur, le chauffe-eau, le fer à repasser, et même l'ordinateur, la télévision et le lecteur DVD. Bien entendu, les maisons à haute efficacité énergétique sont conçues sur la base de la minimisation des pertes de chaleur en hiver et des gains de chaleur en été. Le transfert de chaleur joue un rôle majeur dans la conception de nombreux autres appareils, tels que les radiateurs de voiture, les collecteurs solaires, divers composants des centrales électriques et même les navettes spatiales. L'épaisseur d'isolation optimale dans les murs et les toits des maisons, sur les tuyaux d'eau chaude ou de vapeur, ou sur les chauffe-eau est également

déterminée sur la base d'une analyse du transfert de chaleur en tenant compte des aspects économiques.

On a montré auparavant les éléments qui font la différence entre la thermodynamique et le transfert de chaleur, il faut encore noter que l'étude de ce dernier s'appuie sur des concepts et des principes thermodynamiques tel que : l'énergie, la chaleur et la différence de température.

1.2.Rappels de la thermodynamique

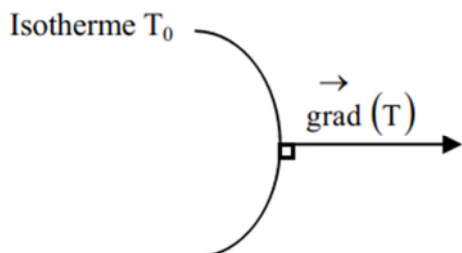
1.2.1. Champ de Température : Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x,y,z,t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
 - Évolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire (transitoire).
- **Unités de température :** l'unité de température est le degré Kelvin [K], le degré Celsius [°C] ou encore le degré Fahrenheit [°F].

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$$

$$T(^{\circ}F) = (T(^{\circ}C) \times 1.8) + 32$$

➤ **Gradient de température :** Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de la température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température.



$$\overline{grad(T)} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

\vec{n} : Vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale

1.2.2. La chaleur

La chaleur est définie comme la forme d'énergie qui peut être transmise d'un milieu à un autre grâce à une différence de température. La chaleur ne peut donc être transmise s'il n'existe pas de gradient de température.

La chaleur est un phénomène de frontière, c'est-à-dire que cette énergie devient de la chaleur seulement au moment où elle traverse la frontière qui la sépare du milieu extérieur. Exemple l'énergie interne de la pomme de terre sortant du four est plus élevée que celle de l'air dans la cuisine (sa température étant plus élevée, ses molécules vibrent d'avantage), une fois transmise à l'air ambiant, la chaleur s'ajoute à l'énergie interne du milieu ambiant (milieu extérieur).

➤ **Évolution adiabatique** (du grec *adiabatos*, qui signifie « ne passe pas »)

C'est une évolution au cours de laquelle il n'y a aucune transmission de chaleur, une évolution adiabatique se manifeste dans les systèmes dont les frontières sont parfaitement isolées, dans les systèmes où la chaleur transmise à travers les frontières est négligeable vis-à-vis d'autres formes d'énergie ou dans les systèmes qui se trouvent à la même température que le milieu extérieur.

➤ **Évolution isotherme** (ou processus isotherme)

C'est une transformation qui a lieu à température constante ($T = \text{cte}$). Il ne faut toutefois pas confondre évolution adiabatique et évolution isotherme. Dans une évolution adiabatique, même si la chaleur ne traverse pas les frontières du système, le travail le peut, et la température du système peut changer.

➤ **Unités de la chaleur** : Les unités de la chaleur sont, bien entendu, les unités d'énergie (les joules ou les calories). On notera la chaleur transmise d'un état 1 à un état 2 à l'aide du symbole Q_{12} ou, parfois, simplement Q .

$$1 \text{ calorie} = 4.182 \text{ J}$$

La chaleur transmise par unité de masse est notée q

$$q = \frac{Q}{m} \quad [\text{kJ/kg}] \quad (1.2)$$

Le taux de transmission de chaleur (la chaleur transmise par unité de temps) est la puissance thermique, et on utilise le symbole Φ son unité est des watts ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$) ou des kilowatts ($1 \text{ kW} = 1 \text{ kJ/s}$).

$$\dot{Q} = \Phi = \frac{Q}{t} \quad [W=J/s] \quad (1.3)$$

1.2.3. Premier principe de la thermodynamique

La première loi de la thermodynamique est la loi de la conservation de l'énergie. Selon cette loi, au cours d'une évolution, l'énergie ne peut être ni produite ni détruite. Elle peut toutefois être convertie d'une forme à une autre. Par exemple, un rocher se détachant d'une falaise verra son énergie potentielle gravitationnelle E_p convertie en énergie cinétique E_c pendant la chute. Cependant, l'énergie totale, soit la somme des énergies potentielle et cinétique, demeurera inchangée (constante).

Lorsqu'un système subit une série de transformations qui le ramènent à un état d'équilibre final [2] identique à l'état initial [1] et au cours desquelles il n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur on peut écrire la relation suivante :

$$[W + Q]_i = cste \quad (1.4)$$

Constante = ΔU énergie interne pour un système fermé

Pour un système ouvert :

$$[W + Q]_i = (\Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c) \quad (1.5)$$

Avec :

W : Travail échangé entre le système et le milieu extérieur

Q : Chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur

ΔH : Variation d'enthalpie

ΔE_p : Variation d'énergie potentielle

ΔE_c : Variation d'énergie cinétique

1.2.4. Second principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique admet que la chaleur (énergie thermique) ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid, c'est-à-dire d'un corps à température donnée vers un autre à température plus basse. C'est le cas, par exemple, d'un café chaud qui,

inéluclablement, se refroidit. La chaleur est transmise du café à haute température vers le milieu environnant à basse température.

Deux corps ayant la même température sont dits en " **équilibre thermique**".

1.3. Les différents modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence de différence de température. La littérature traitant du transfert de chaleur reconnaît essentiellement trois modes de transmission de chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

1.3.1. Conduction

La conduction thermique est le mode de transfert de chaleur provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu ou entre deux milieux en contact sans déplacement appréciable de matière.

Ce transfert d'énergie thermique, qui ne nécessite pas de mouvement macroscopique de la matière, est créé par:

- l'agitation moléculaire (dans les gaz et les liquides)
- Les vibrations des réseaux cristallins (dans les solides non-conducteurs)
- Le déplacement d'électrons libres (dans les métaux conducteurs)

Des exemples typiques pour la conduction sont : le transfert de chaleur par les murs des bâtiments, les parois des conduites des différents agents chauds ou froids....etc.

1.3.2. Convection

Le phénomène de convection se réfère au transfert de chaleur qui a lieu dans les fluides (liquides et gaz) en mouvement.

La convection est le processus de transfert thermique déterminé par le mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes, ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides, qui changent de l'énergie (chaleur) et de la quantité de mouvement (impulse) entre elles.

La convection peut apparaître entre des couches des fluides ayant des températures différentes ou entre un courant de fluide en écoulement au long d'une surface solide ayant une température différente de celle du fluide.

Compte tenu des forces qui produisent le mouvement du fluide on distingue :

- **Convection naturelle (libre) :** Dans cette dernière le mouvement du fluide est dû simplement aux différences de densité résultant des gradients de températures.
- **Convection forcée :** Le mouvement du fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur ...etc.) qui lui imprime une vitesse de déplacement assez importantes.

1.3.3. Rayonnement

Le phénomène de rayonnement thermique constitue une forme particulière de transfert thermique dans laquelle le porteur d'énergie n'est plus représenté par des particules de substance, mais par ondes électromagnétiques.

Le mécanisme de rayonnement est créé par l'émission et l'absorption des ondes électromagnétiques porteuses d'énergie rayonnante et la transformation de celle-ci en chaleur.

Le rayonnement thermique n'exigeant pas un support matériel, il peut se produire même dans le vide, son effet étant plus marquant à des températures élevées.

Les exemples typiques pour le rayonnement sont : le rayonnement solaire, la préparation de la nourriture en micro-onde...etc.

Remarque

La plupart des phénomènes étudiés font apparaître l'intervention des trois modes de transmission de la chaleur en même temps.

Le transfert de chaleur se réalise le plus souvent par une combinaison de plusieurs modes.

À titre d'exemple, le dispositif chauffage central, combine la convection (forcée) pour chauffer le fluide dans la chaudière, la conduction pour chauffer les parois du radiateur et la convection (libre) pour chauffer l'air autour du radiateur et également par rayonnement (infrarouge) émis par les parois du radiateur vers les solides à proximité ayant des températures plus basses.

***Chapitre 2 : Lois de base des transferts
de chaleur***

2.1. Introduction

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température. Il est régi par une combinaison de lois physiques, Pour chaque mode de transfert thermique, il existe une loi qui donne l'expression du flux de chaleur, voir figure 2.1.

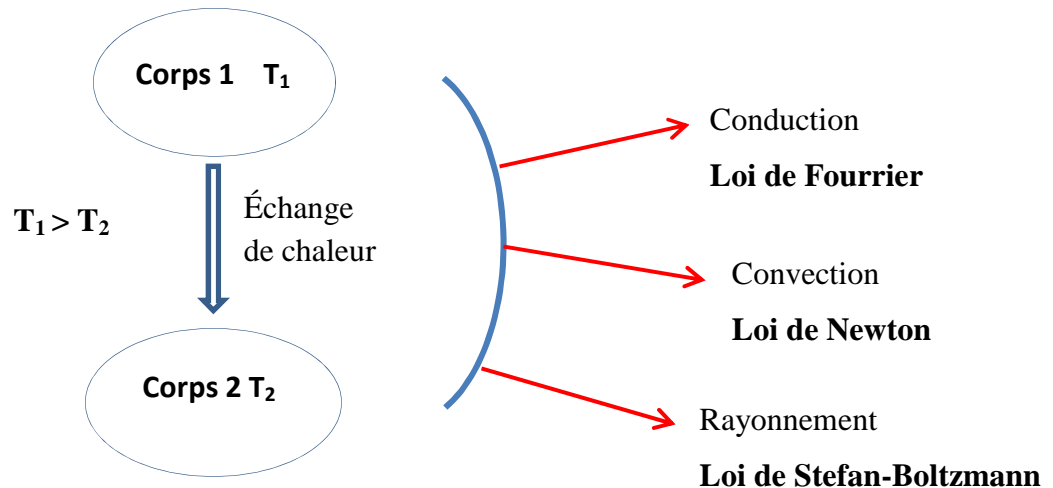


Figure 2.1. Les trois modes de transfert de chaleur

2.2. Conduction (loi de Fourier 1822)

2.2.1. Loi de Fourier

Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que :

- L'énergie est conservée (1^{er} principe)
- La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid (2^{ème} principe).



Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768–1830)

Considérons une plaque plane (D), de surface (S) et d'épaisseur (e) voir Figure (2.2).

Soit Q, la quantité de chaleur échangée à travers la plaque pendant le temps t.

Il est vérifié expérimentalement que :

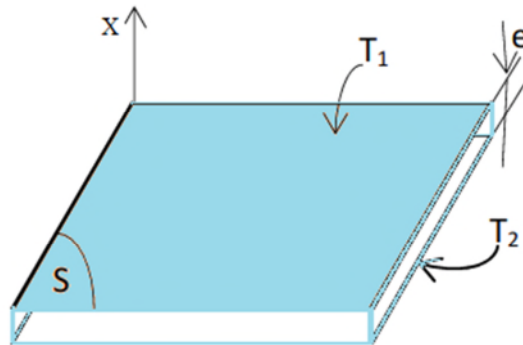


Figure 2.2. conduction thermique à travers une plaque

$$\frac{Q}{t} = \Phi = \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) \quad (2.1)$$

Avec :

Φ : la quantité de chaleur transférée à travers (D) [W].

λ : le facteur de proportionnalité appelé conductivité thermique qui est une caractéristique du matériau. [Wm⁻¹K⁻¹]

S : Surface d'échange [m²]

T₁ : La température de la face1 [K ou °C]

T₂ : La température de la face2 [K ou °C]

Pour un élément infinitésimal dS, la relation (2.1) s'écrit :

$$d\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est attribuée au mathématicien Français Jean Baptiste Fourier qui en 1822 énonça sa loi qui peut se traduire comme suit : « en tout point d'un milieu isotrope , la densité du flux thermique est proportionnelle à la conductivité thermique λ du milieu et au gradient de température. Ceci nous conduit à la forme vectorielle de la loi de Fourier qui exprime la densité de flux thermique comme la quantité de chaleur transmise par unité de surface soit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{gradT} \quad (2.3)$$

N.B : Par convention $\vec{\varphi}$ est comptée positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur c'est-à-dire les températures décroissantes. \overrightarrow{gradT} est un vecteur porté par le même axe mais de sens contraire à $\vec{\varphi}$, d'où le signe négatif (-) de la loi de Fourier.

Où $\frac{\partial T}{\partial n}$ est le gradient de Température dans la direction normale à la surface.

2.2.2. Conductivité thermique

Le comportement des corps face à la propagation de la chaleur par conduction est caractérisé par la conductivité thermique λ . Elle représente une grandeur thermo-physique importante caractéristique pour chaque substance, qui joue un rôle extrêmement important pour le transfert thermique conductif. Cette grandeur dépend d'une multitude de facteurs parmi lesquels on cite : La nature des matériaux, la température, la pression, l'humidité ...etc
Compte tenu de la loi de Fourier, on peut définir la conductivité thermique par la relation qui permet de saisir sa signification physique.

$$\lambda = \frac{|\vec{\varphi}|}{gradT} \quad (2.4)$$

Elle représente donc du point de vue numérique l'énergie thermique transférée par unité de surface, dans une unité de temps sous un gradient de température unitaire.

la conductivité thermique de divers matériaux est en général déterminée par voie expérimentale.

La plupart des méthodes de mesure sont basées sur la mesure du flux surfacique et du gradient de température qui permet, grâce à la relation 2.4 de calculer la valeur de λ .

Tableau 2.1. Conductivité thermique de quelques solides à T=20°C

Matériaux	λ [W/m K]
Argent	418
Cuivre	389
Aluminium	200

Acier (0.1C)	46
Acier inox	16
Béton	0.92
Granit	2.5
Verre	1.2
Bois	0.23
Polystyrène	0.025
Amiante	0.16
Laine de verre	0.04

Tableau 2.2. Conductivité thermique de quelques liquides à T=20°C

Liquides	λ [W/m K]
Eau	0.58
Huiles-pétrole	0.14
Benzène	0.18

Tableau 2.3. Conductivité thermique de quelques gaz à T=20°C

Gaz	λ [W/m K]
Air	0.025
Azote	0.022
Vapeur d'eau	0.016

Les gaz sont de très mauvais conducteurs de chaleur, ce qui explique leur rôle dans la conductivité apparente des isolants.

La conductivité thermique des mélanges gazeux obéit à des lois complexes, en toute première approximation, on peut utiliser la formule :

$$\frac{1}{\lambda} = \sum \frac{x_i}{\lambda_i} \quad (2.5)$$

Où :

x_i : La proportion en volume du constituant i

λ_i : La conductivité thermique du constituant i dans le mélange.

2.3. Convection (Loi de Newton 1701)

Le transfert de chaleur par convection se produit entre une surface solide et un fluide. Il est important d'étudier la couche limite entre les deux. La couche limite est une zone qui sépare le solide de température T_p du fluide de température T_∞ loin de la paroi solide. Cette couche de transition dans laquelle la température change de T_p à T_∞ ou l'inverse est appelée couche limite thermique.

Le calcul du flux transféré par convection dépend de la nature du fluide, du type d'écoulement (turbulent ou laminaire), de la géométrie du solide et des températures. Newton a modélisé le flux total par convection par une loi linéaire empirique, valable quelque soit le type de convection, d'écoulement et de géométrie.



Sir Isaac Newton (1642–1727)

$$\Phi = h \cdot S \cdot (T_p - T_\infty) \quad (2.6)$$

Avec :

T_p : la température de la surface d'échange (température de paroi) [K, °C]

T_∞ : la température du fluide (loin de la surface d'échange) [K, °C]

S : la surface d'échange [m^2]

h : le coefficient de convection [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]

Remarque : Le coefficient de transfert de chaleur par convection h n'est pas une propriété du fluide. C'est un paramètre déterminé expérimentalement dont la valeur dépend de toutes les variables influençant la convection, telles que la géométrie de la surface, la nature du mouvement du fluide, les propriétés du fluide et la vitesse du fluide (voir chapitre 4)

2.4. Rayonnement (Loi de Stefan 1879- Boltzmann 1884)

La radiation thermique est un phénomène qui se produit lorsque les atomes et les molécules d'un corps émettent des photons. Ces photons sont des particules de lumière qui transportent



de l'énergie. La radiation thermique est un phénomène volumétrique, mais elle est généralement considérée comme un phénomène de surface pour les solides opaques, car la radiation émise par les régions Intérieures de ces solides est généralement absorbée avant d'atteindre la surface.

Le taux de radiation maximal émis par une surface est donné par la loi de **Stefan-Boltzmann**. Cette loi a été découverte expérimentalement par Joseph Stefan en 1879 à partir de données expérimentales de John Tyndall. Les fondations théoriques ont été posées dans le cadre de la thermodynamique par un étudiant en doctorat de Stefan, Ludwig Boltzmann en 1884.

$$\Phi = \sigma ST^4 \quad (2.7)$$

Où :

σ : La constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,670 \times 10^{-8}$ [W/m² K⁴]

La surface idéalisée qui émet de la radiation à ce taux maximal est appelée corps noir, et la radiation émise par un corps noir est appelée radiation de corps noir (Fig. 1-38). La radiation émise par toutes les surfaces réelles est inférieure à la radiation émise par un corps noir à la même température, et est exprimée comme suit:

$$\Phi = \varepsilon \sigma ST^4 \quad (2.8)$$

Avec

ε : émissivité thermique [-]

Cette propriété sans unité, dont la valeur est comprise entre 0 et 1, mesure la façon dont une surface se rapproche d'un corps noir, pour lequel $\varepsilon = 1$.

Contrairement aux autres mécanismes de propagation de la chaleur qui ne peuvent s'effectuer que dans un milieu matériel, le rayonnement s'effectue avec un maximum d'efficacité dans le vide.

Exercices résolus "flux- densité de flux –gradient de température"

Exercice N°1

Une paroi d'une surface de 5m^2 a une température de 700°C d'un côté et de 20°C de l'autre.

Calculer la conductivité et l'épaisseur de la paroi.

Pour le choix d'un matériau qui garantisse une densité de flux de chaleur de $300\text{KW}/\text{m}^2$.

L'épaisseur max possible est de 50cm , ($\lambda=\text{cst}$).

Solution

- Calcul de la conductivité de la plaque

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{e}(T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{e} = \frac{\varphi}{(T_1 - T_2)} = \frac{300 \cdot 10^3}{700 - 20} = 441.17 \text{ [W/m}^2\text{K]}$$

Pour une épaisseur maximale égale à $50 \cdot 10^{-2}\text{m}$ la conductivité thermique $\lambda_{\text{max}} = e_{\text{max}} \cdot 441.17$

$$\lambda_{\text{max}} = 50 \cdot 10^{-2} \cdot 441.17 = 220 \text{ [W/m K]}$$

On cherche donc un matériau ayant une conductivité thermique $\lambda \leq 220 \text{ [W/m K]}$

Calcul de l'épaisseur de la paroi pour différentes conductivités $< 220 \text{ [W/m K]}$

$$\text{Acier doux } (\lambda_{350^\circ\text{C}}) = 33 \text{ [W/m K]} \quad e = \frac{\lambda}{441.17} = \frac{33}{441.17} = 7.5 \text{ cm}$$

$$\text{Acier inox } (\lambda_{350^\circ\text{C}}) = 20 \text{ [W/m K]} \quad e = \frac{\lambda}{441.17} = \frac{20}{441.17} = 4.5 \text{ cm}$$

$$\text{Magnésie } (\lambda_{350^\circ\text{C}}) = 3 \text{ [W/m K]} \quad e = \frac{\lambda}{441.17} = \frac{3}{441.17} = 0.68 \text{ cm}$$

Exercice N°2

La densité de flux thermique à travers un mur plan d'épaisseur 50mm et de $70\text{w}/\text{m}^2$.

Calculez la différence de température aux surfaces du mur et les valeurs numériques du gradient de température dans celui-ci si ce mur est en : Laiton ($\lambda=100\text{w}/\text{mK}$), Granit ($\lambda=2.5\text{w}/\text{mK}$) et Bois ($\lambda=0.23\text{w}/\text{mK}$). Interpréter les résultats.

Solution

Calcul de la différence de température et le gradient de température

- Mur en laiton

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda}{e} \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\varphi \cdot e}{\lambda} = \frac{70 \times 0.05}{100} = 0.035 \text{ [K]}$$

$$|\text{grad}T| = \left| \frac{\Delta T}{\Delta x} \right| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{0.035}{0.05} = 0.7 \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$$

- Mur en granit

$$\Delta T = \frac{\varphi \cdot e}{\lambda} = \frac{70 \times 0.05}{2.5} = 1.4 \text{ [K]}$$

$$|\text{grad}T| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{1.4}{0.05} = 28 \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$$

- Mur en bois

$$\Delta T = \frac{\varphi \cdot e}{\lambda} = \frac{70 \times 0.05}{0.23} = 15.2 \text{ [K]}$$

$$|\text{grad}T| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{15.2}{0.05} = 304 \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$$

Interprétation des résultats

Le bois montre une bonne aptitude pour l'isolation suivi par le granit et enfin le laiton. Ce dernier ne fait descendre la température que de 0.7K par mètre de matériau comparé aux (granit 28K et le bois 304K).

Exercice N°3

Le mur d'un bâtiment est fait de brique ayant une épaisseur $e = 38 \text{ cm}$ et la conductivité thermique $\lambda = 0.78 \text{ w/mK}$.

Les températures sur les faces limitatrices du mur sont égales à 18°C et -15°C respectivement

Déterminer :

1. Le flux surfacique qui travers le mur
2. Le flux pour un mur de 3 m de hauteur et de 3.5 de longueur

Solution

- Le flux surfacique (densité de flux)

$$\varphi = -\frac{\lambda}{e} \Delta T = -\frac{0.78}{38.10^{-2}} (-15 - 18) = 67.73 \text{ [W / m}^2 \text{]}$$

- Le flux de chaleur

$$\Phi = -\frac{\lambda}{e} S \Delta T = \varphi \times S = 67.73 \times (3 \times 3.5) = 711.165 \text{ [W]}$$

Exercice N°4

On demande la détermination de la quantité de charbon qu'on doit brûler pour couvrir les pertes de chaleur journalière d'un four ayant un mur avec une surface $S=20 \text{ m}^2$, une épaisseur $e=200\text{mm}$ et une conductivité $\lambda=0.5\text{w/mK}$.

La température de la surface intérieure du mur est de 600°C et celle de la surface extérieure est de 40°C . On connaît aussi le pouvoir calorifique inférieur du charbon $H_i=18800\text{Kj/Kg}$ et le rendement du four $\eta=0.7$.

Solution

Calcul des pertes de chaleur journalière

- Le flux thermique

$$\Phi = -\frac{\lambda}{e} S \Delta T = -\frac{0.5}{200.10^{-3}} 20(40 - 600) = 28000 \text{ [W]}$$

- La chaleur perdue pendant un jour (24 h)

$$Q = \Phi \times t = 28000 \times 24 \times 3600 = 24192 \times 10^5 \text{ [J]}$$

- La quantité de charbon nécessaire

$$Q = \eta \times H_i \cdot m = 24192 \times 10^5 \text{ [J]}$$

$$m = \frac{Q}{\eta \times H_i} = \frac{24192 \times 10^5}{0.7 \times 18800 \times 10^3} = 183.8 \text{ [kg]}$$

Chapitre 3 : Conduction

3.1. Équation d'énergie (équation générale de la conduction)

3.1.1. Équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes

dans un système de coordonnées cartésiennes (o,x,y,z), l'équation de la conduction de la chaleur ou simplement l'équation de la chaleur peut être développée en considérant un volume de contrôle et en effectuant le bilan thermique relatif à ce volume pendant le temps dt.

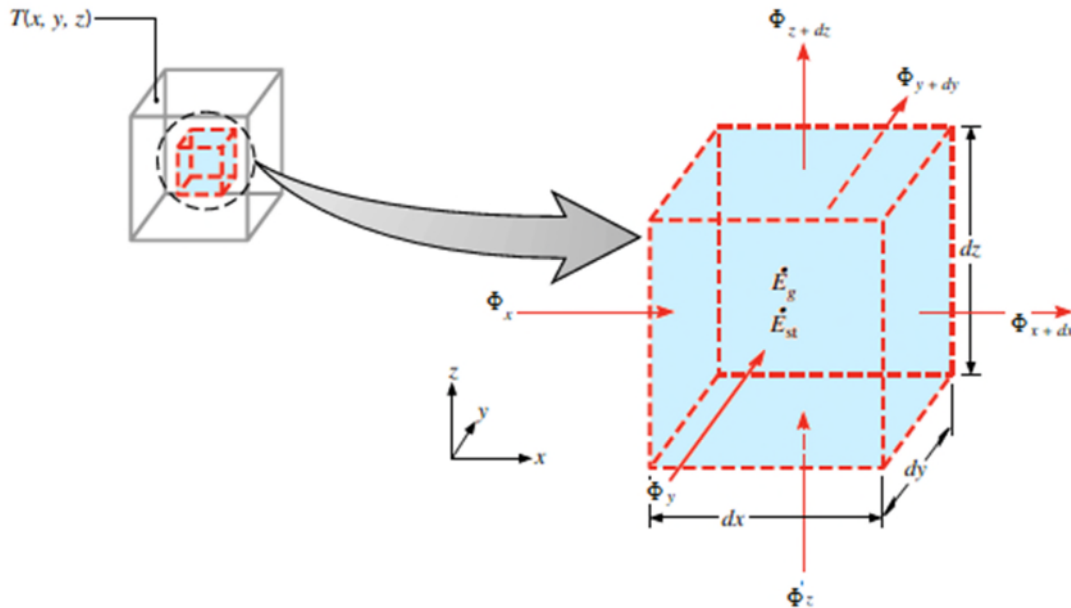


Figure 3.1. Conduction de chaleur tridimensionnelle à travers un élément de volume rectangulaire.

Le bilan énergétique est :

[énergie entrante] - [énergie sortante] + [quantité d'énergie générée par une source interne]
= [accroissement ou diminution de l'énergie dans le temps].

$$\dot{E}_e - E_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{St} \quad (3.1)$$

Suivant l'axe x :

$$\dot{E}_e = d\Phi_x = -\lambda \frac{dT}{dx} (dydz) \quad (3.2)$$

$$\dot{E}_s = d\Phi_{x+dx} = d\Phi_x + \frac{\partial(d\Phi_x)}{\partial x}(dx) \quad (3.3)$$

$$d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) \right](dx) \quad (3.4)$$

$$d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \frac{\partial T}{\partial x}(dx) \right](dydz) \quad (3.5)$$

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \frac{\partial}{\partial x} \left[+\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) \right](dx) \quad (3.6)$$

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = +\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(dxdydz) \quad (3.7)$$

Ou bien

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right](dxdydz) \quad (3.8)$$

En approximant les différentes quantités de chaleur mises en jeu relativement aux parois perpendiculaires aux axes y et z ; et en développant les équations de la même manière que pour la direction x on aura :

$$d\Phi_y - d\Phi_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right](dxdydz) \quad (3.9)$$

$$d\Phi_z - d\Phi_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right](dxdydz) \quad (3.10)$$

Le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume V est :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right] (dxdydz) \quad (3.11)$$

- L'énergie engendrée par l'élément de volume dV à l'intérieur est :

$$\dot{E}_g = \dot{q} dxdydz \quad (3.12)$$

\dot{q} : puissance volumique [W/m^3]

- L'énergie stockée à l'intérieur de dV dans le temps dt est :

$$\dot{E}_{st} = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (3.13)$$

Le bilan énergétique final donne :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right] (dxdydz) + \dot{q} dxdydz = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (3.14)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right] + \dot{q} = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.15)$$

Qui est l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes pour un milieu hétérogène anisotrope

- Pour un corps isotrope et homogène, l'équation précédente devient :

$$\frac{\lambda}{\rho Cp} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho Cp} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.16)$$

On pose

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad \text{coefficient de diffusivité thermique}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.17)$$

Ou bien

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (3.18)$$

3.1.2. Formes de l'équation de la chaleur

On peut déduire aisément les cas particuliers suivants que l'on rencontre très fréquemment :

- Milieu avec sources internes en régime permanent : Équation de Poisson

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \quad (3.19)$$

- Milieu sans sources internes, en régime permanent : Equation de Laplace

$$\Delta T = 0 \quad (3.20)$$

- Milieu sans sources internes en régime variable : Equation de Fourier

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.21)$$

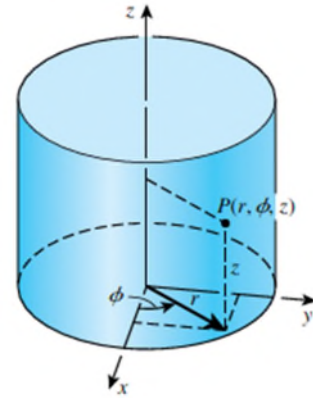
- À une seule dimension sans source interne en régime permanent.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (3.22)$$

3.2. Équation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Sachant que :

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{cases}$$

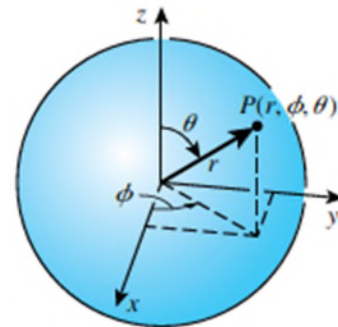


En remplaçant x, y et z dans (3.17) l'équation de conduction en coordonnées cylindriques s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.23)$$

3.3. Équation de la chaleur en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$



En remplaçant x, y et z dans (3.17) l'équation de conduction en coordonnées sphériques prend la forme suivante :

$$\lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.24)$$

3.4. Conditions aux limites spatio-temporelles

L'équation générale de la chaleur traduit par une relation entre les variables x,y,z,t et la température T , le mécanisme du phénomène conductif, en tout point de coordonnées x,y,z et tout temps.

Cette équation aux dérivées partielles, linéaire du deuxième ordre admet en principe une infinité de solution.

Cette équation n'a de sens physique que pour des conditions définies appliquées à un domaine d'espace-temps également défini (ces conditions sont les conditions initiale et aux limites).

3.4.1. Condition initiale

La distribution des températures à l'intérieur du solide et sur sa surface est supposée connue à l'instant

$$t=0 \quad T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (3.25)$$

3.4.2. Conditions aux limites

➤ **Condition du premier type (condition de Dirichlet) :**

La température à la frontière est imposée, ce type de conditions facilite beaucoup les calculs. Par exemple, pour le transfert de chaleur unidimensionnel à travers une paroi plane d'épaisseur L , les conditions aux limites de température spécifiées peuvent s'exprimer comme il est montré sur la figure (3.2).

$$T(0, t) = T_1 \quad (3.26)$$

$$T(L, t) = T_2 \quad (3.27)$$

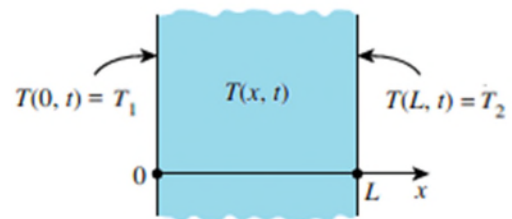


Figure 3.2. Conditions aux limites du 1^{er} type

➤ **Conditions du deuxième type (condition de Neumann)**

qui spécifient la connaissance du flux surfacique dans chaque point de la surface du corps étudié et a chaque instant voir figure (3.3).

$$\varphi = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_M = f(M, t) \quad (3.28)$$

Dans le cas le plus simple du régime stationnaire

$$\varphi = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_M = cste \quad (3.29)$$

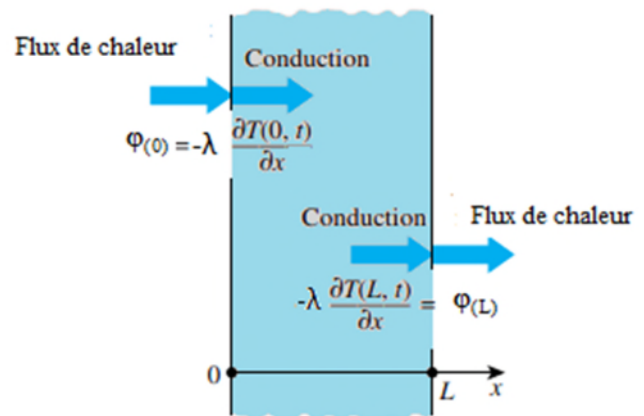


Figure 3.3. Conditions aux limites du 2^{ème} type

Cas particulier : Surface adiabatique (isolation thermique parfaite)

En pratique, certaines surfaces sont souvent isolées pour minimiser les pertes ou les gains de chaleur. L'isolation réduit le transfert de chaleur, mais ne l'élimine pas complètement, sauf si son épaisseur est infinie. Cependant, dans la plupart des cas, le transfert de chaleur à travers une surface bien isolée est négligeable. Par conséquent, une surface bien isolée peut être modélisée comme une surface avec un flux de chaleur nul comme il est montré sur la Figure (3.4).

$$\left. \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \right| = 0 \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} \right| = 0 \quad (3.30)$$

En régime permanent

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.31)$$

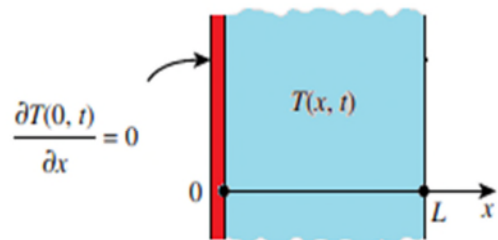


Figure 3.4. Surface isolée

➤ **Condition du troisième type (condition de Fourier) :**

La densité du flux traversant la surface frontière est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu environnant généralement fluide voir figure (3.5).

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1 (T_{\infty 1} - T(0,t)) \quad (3.32)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2 (T(L,t) - T_{\infty 2}) \quad (3.33)$$

(h_1, h_2) : Constantes positives appelées coefficients d'échanges convectifs

$T_{\infty 1}, T_{\infty 2}$: Températures des fluides loin des parois

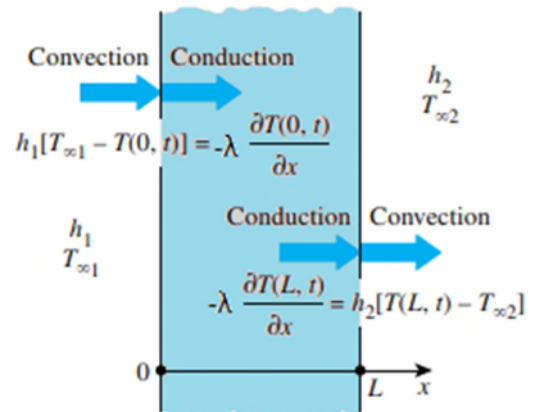


Figure 3.5. Conditions du 3^{ème} type (convection)

D'autres lois d'échanges : par exemple présence du transfert de chaleur par rayonnement voir figure (3.6).

$$\varepsilon_1 \sigma [T_{milieu1}^4 - T(0,t)^4] = -\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \quad (3.34)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \varepsilon_2 \sigma [T(L,t)^4 - T_{milieu2}^4] \quad (3.35)$$

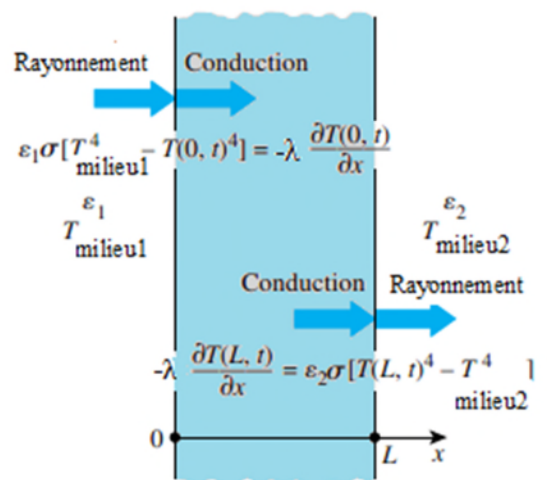


Figure 3.6. Conditions du 3^{ème} type (rayonnement)

➤ **Transfert à l'interface de deux solides différents (quatrième type) $\lambda_A \neq \lambda_B$**

Lorsque deux solides de conductivités respectives λ_A et λ_B possèdent une frontière commune S. La courbe représentant la distribution des températures subit une réfraction au passage de l'interface. Comme le montre la figure (3.7).

Dans ce cas, la liaison thermique à l'interface s'exprime :

- Par l'égalité des densités de flux thermiques de part et d'autre de l'interface

$$-\lambda_A \overrightarrow{\text{grad}T_A} = -\lambda_B \overrightarrow{\text{grad}T_B} \text{ sur S}$$

- Une seconde condition est donnée dans le cas parfait par l'égalité des températures des deux corps à l'interface

$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t) \quad (3.36)$$

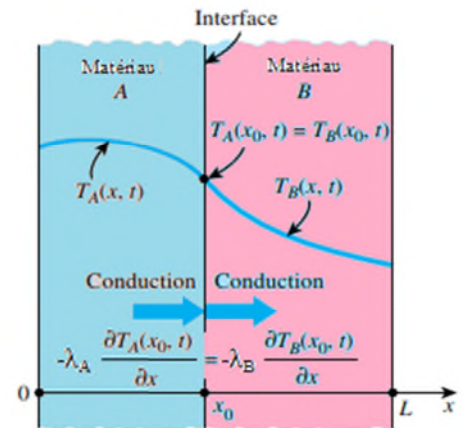


Figure 3.7. Conditions aux limites à l'interface

En réalité, en régime permanent, tout se passe comme s'il y'a une résistance de contact introduisant une brusque discontinuité de température sur une très faible distance au passage à l'interface. $\Delta T = R\Phi$

R : résistance thermique de contact.

3.5. Conduction sans source de chaleur interne en régime permanent à une dimension.

3.5.1. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cartésiennes

➤ **Mur simple avec conditions de Dirichlet sur les deux faces**

On appelle un " mur simple" un milieu conducteur homogène limité par deux plans //, chacun des deux étant à une température, la même pour l'ensemble du plan.

La plupart des problèmes de chauffage des bâtiments peuvent se réduire à l'étude du mur plan.

Considérons un mur homogène de conductivité thermique $\lambda = \text{cste}$, d'aire S, d'épaisseur L, traversé par un flux Φ causé par la différence de températures $T_1 > T_2$ des deux faces aux abscisses respectives x_1 et x_2

Le système fondamental donnant la température s'écrit :

L'équation de la chaleur à 1D en régime stationnaire et sans source interne s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.37)$$

$$\lambda = cste \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (3.38)$$

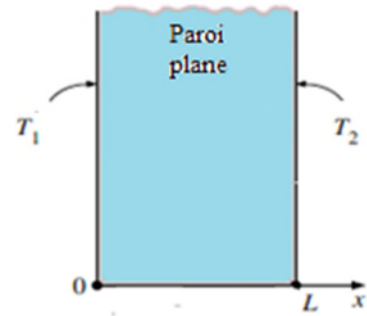


Figure 3.8. Mur plan

$$\begin{cases} \text{à } x=0 & T = T_1 \\ \text{à } x=L & T = T_2 \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = cste = A \Rightarrow T(x) = Ax + B \quad (3.40)$$

La solution $T(x) = A(x) + B$ fait intervenir deux constantes qui sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \text{et} \quad B = T_1 \quad (3.41)$$

D'où :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (3.42)$$

Le flux de chaleur est constant en régime permanent et la loi élémentaire de Fourier permet d'exprimer

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \text{mais} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (3.43)$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (3.44)$$

3.5.2. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cylindrique

➤ Cylindre creux avec conditions de Dirichlet

On considère un tube creux de longueur L et d'épaisseur δ , la surface interne est maintenue à une température T_1 et la surface externe du tube étant elle est maintenue à la température T_2 , tout le long de tube $T_1 > T_2$, R_1 et R_2 sont les rayons interne et externe respectivement.

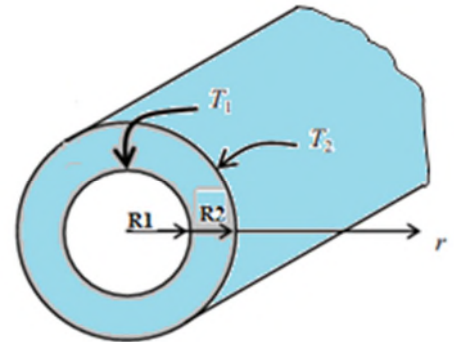


Figure 3.9. Cylindre creux

L'équation de la conduction en coordonnées cylindriques (r, θ, z) (3.23) :

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.45)$$

Pour le cas unidimensionnel sans source interne en régime permanent l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} \text{Pour } r = R_1 & T(R_1) = T_1 \\ \text{Pour } r = R_2 & T(R_2) = T_2 \end{cases} \quad (3.47)$$

Multipliant l'équation différentielle précédente par r

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.48)$$

On remarque que le premier membre de l'équation est la dérivée de $r \frac{dT}{dr}$ donc l'intégration première de l'équation de la chaleur nous donne :

$$r \frac{dT}{dr} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{A} = \frac{dr}{r} \quad (3.49)$$

En intégrant cette équation on trouve :

$$T = A \ln r + B \quad (3.50)$$

Les deux constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites.

$$\begin{cases} \text{à } r = R_1 & \Rightarrow T_1 = A \ln R_1 + B \\ \text{à } r = R_2 & \Rightarrow T_2 = A \ln R_2 + B \end{cases} \quad (3.51)$$

La résolution du système des deux équations nous donne :

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad \text{et} \quad B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \times \ln R_1 \quad (3.52)$$

La température sera décrite par l'expression :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln(r) + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \times \ln R_1 \quad (3.53)$$

Qui peut s'écrire :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} \quad (3.54)$$

On peut déduire l'expression de la densité de flux thermique

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} \quad (3.55)$$

Ainsi que celle du flux thermique

$$\Phi = \varphi S = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} 2\pi r l = 2\lambda\pi l \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.56)$$

3.5.3. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , l'équation générale de la conduction (3.24) :

$$\lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.57)$$

Dans le cas stationnaire $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$, unidimensionnel $(\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0)$ et sans source interne

$(\dot{q} = 0)$ l'équation se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = 0 \quad (3.58)$$

Qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (rT) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[T + r \frac{dT}{dr} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2 T}{dr^2} \right] = \frac{1}{r} \left[2 \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2 T}{dr^2} \right] = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.59)$$

➤ Sphère creuse avec conditions de Dirichlet

Pour une sphère creuse de rayon interne r_1 et externe r_2 , les parois de la sphère sont maintenues aux températures T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ le système d'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \text{à } r = r_1 & T(r_1) = T_1 \\ \text{à } r = r_2 & T(r_2) = T_2 \end{cases} \quad (3.61)$$

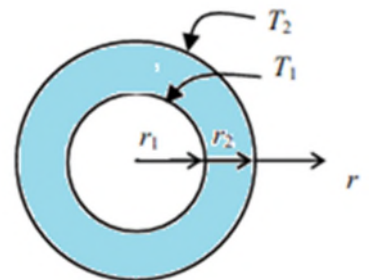


Figure 3.10. Sphère creuse

En multipliant l'équation différentielle par r^2

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + 2r \frac{dT}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{dT}{dr} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2} \quad (3.62)$$

L'intégration de la dernière équation donne :

$$T(r) = \frac{-A}{r} + B \quad (3.63)$$

Où A et B sont des constantes d'intégration elles sont déterminées à partir des conditions aux limites.

On a

$$\begin{cases} \text{à } r = r_1 & T(r_1) = T_1 = \frac{-A}{r_1} + B \\ \text{à } r = r_2 & T(r_2) = T_2 = \frac{-A}{r_2} + B \end{cases} \quad (3.64)$$

Des deux équations précédentes on détermine les deux constantes A et B :

$$A = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \text{et} \quad B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)r_1} \quad (3.65)$$

L'équation de la variation de température prend la forme suivante :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r} + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)r_1} \quad (3.66)$$

Ou bien :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3.67)$$

La densité de flux :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{A}{r^2} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r^2} \quad (3.68)$$

Le flux :

$$\Phi = \varphi S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r^2} 4\pi r^2 = 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (3.69)$$

3.6. Conduction avec source de chaleur interne en régime permanent à une dimension (conduction vive)

On appelle conduction vive la conduction avec source interne de chaleur. Ces sources peuvent être soit uniformément réparties soit concentrées en des points précis.

On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable et on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur (3.18) établie précédemment.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

En régime permanent (stationnaire) avec source interne l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\Delta T = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (3.70)$$

3.6.1. Mur simple avec conditions de Dirichlet sur les deux faces (températures imposées aux surfaces)

L'équation à résoudre dans ce cas est :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \quad (3.71)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \text{à } x=0 & T = T_1 \\ \text{à } x=L & T = T_2 \end{cases} \quad (3.72)$$

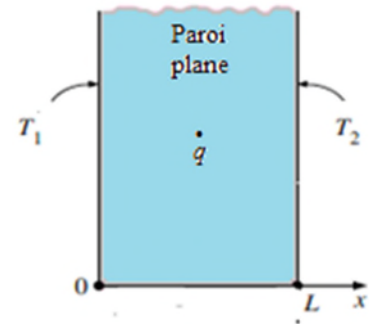


Figure 3.11. Mur plan avec source interne

En intégrant l'équation différentielle on trouve :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}x + A \Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + Ax + B \quad (3.73)$$

Où A et B sont des constantes d'intégrations à déterminer :

$$\text{à } x=0 \quad T(0) = T_1 \Rightarrow B = T_1 \quad (3.74)$$

$$\text{à } x=L \quad T(L) = T_2 = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2 + AL + T_1 \quad (3.75)$$

$$A = \frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda}L \quad \text{et} \quad B = T_1 \quad (3.76)$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda}L \right)x + T_1 \quad \text{Profil parabolique} \quad (3.77)$$

- Densité de flux

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx} = \dot{q}x - \lambda \left(\frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda} L \right) \quad (3.78)$$

Si :

$$T_1 = T_2 \text{ et } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \text{plan adiabatique}$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \text{Test maximal.}$$

3.6.2. Cylindre creux avec conditions de Dirichlet

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \quad (3.79)$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \text{Pour } r = R_1 & T(R_1) = T_1 \\ \text{Pour } r = R_2 & T(R_2) = T_2 \end{cases} \quad (3.80)$$

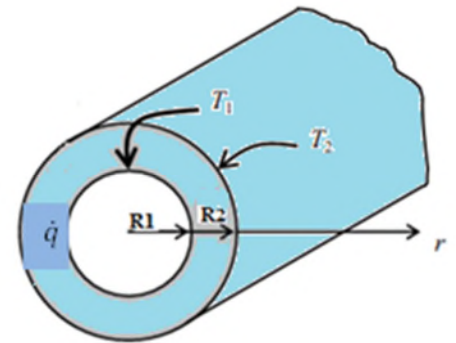


Figure 3.12. Cylindre creux avec source interne

En multipliant l'équation différentielle précédente (3.79) par r

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} r$$

En intégrant cette équation on trouve :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2\lambda} r^2 + A \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2\lambda} r + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda} r^2 + A \ln r + B \quad (3.81)$$

Déterminations des constantes A et B

Pour $r = R_1$

$$T(R_1) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda} R_1^2 + A \ln R_1 + B = T_1 \quad (a)$$

Pour $r = R_2$

$$T(R_2) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda} R_2^2 + A \ln R_2 + B = T_2 \quad (b)$$

$$(a) - (b) \Rightarrow A = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (3.82)$$

Pour déterminer B on remplace A dans (a) :

$$B = T_1 + \frac{\dot{q}}{4\lambda} R_1^2 - \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1 \quad (3.83)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda} r^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln r + T_1 + \frac{\dot{q}}{4\lambda} R_1^2 - \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1 \quad (3.84)$$

Après arrangement :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda} (r^2 - R_1^2) + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} + T_1 \quad (3.85)$$

La densité de flux

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = \lambda \left(\frac{\dot{q}}{2\lambda} r + \frac{A}{r} \right) = \lambda \left(\frac{\dot{q}}{2\lambda} r + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{r \ln \frac{R_1}{R_2}} \right) \quad (3.86)$$

3.6.3. Sphère creuse avec conditions de Dirichlet

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \quad (3.87)$$

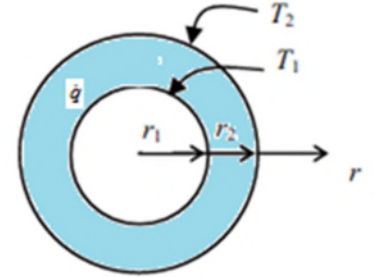


Figure 3.13. Sphère creuse avec source interne

Avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \text{à } r = r_1 & T(r_1) = T_1 \\ \text{à } r = r_2 & T(r_2) = T_2 \end{cases} \quad (3.88)$$

En multipliant l'équation différentielle (3.87) par r^2

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + 2r \frac{dT}{dr} = -r^2 \frac{\dot{q}}{\lambda} &\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -r^2 \frac{\dot{q}}{\lambda} \Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -r^3 \frac{\dot{q}}{3\lambda} + A \\ \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -r \frac{\dot{q}}{3\lambda} + \frac{A}{r^2} \end{aligned}$$

L'intégration de la dernière équation donne :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda} r^2 - \frac{A}{r} + B \quad (3.89)$$

A et B constantes d'intégration qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites

Pour $r = r_1$

$$T(r_1) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda} r_1^2 - \frac{A}{r_1} + B = T_1 \quad (a)$$

Pour $r = r_2$

$$T(r_2) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda} r_2^2 - \frac{A}{r_2} + B = T_2 \quad (b)$$

(a) - (b) donne

$$A = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

En remplaçant A dans l'équation (a)

$$B = T_1 + \frac{\dot{q}}{6\lambda} r_1^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1}$$

L'équation de variation de température prend la forme suivante :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda} r^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r} + \frac{\dot{q}}{6\lambda} r_1^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1} + T_1$$

Après réarrangement la forme finale de l'équation de la chaleur dans ce cas est la suivante

$$T(r) = T_1 + \frac{\dot{q}}{6\lambda} (r_1^2 - r^2) + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) (r - r_1)} \quad (3.90)$$

La densité de flux

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \left(-r \frac{\dot{q}}{3\lambda} + \frac{A}{r^2} \right) = \lambda \left(r \frac{\dot{q}}{3\lambda} - \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{r^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \right) \quad (3.91)$$

Exercices résolus "équation de la chaleur"

Exercice N°1

Considérons une plaque de base d'un fer à repasser de 1200W d'épaisseur 0.5cm et une surface de 300cm² la conductivité thermique $\lambda = 15\text{W/m}^\circ\text{C}$.

La surface interne de la plaque de base est soumise à un flux thermique uniforme généré par une résistance interne. La surface externe perd de la chaleur à l'environnement à $T = 20^\circ\text{C}$ par convection comme il est indiqué sur la figure.

Le coefficient de transfert de chaleur par convection $h = 80\text{W/m}^2\text{C}$, on négligeant les pertes de chaleur par rayonnement.

- Ecrire l'expression de la variation de température dans la plaque de base du fer à repasser ?
- Evaluer les températures aux surfaces interne et externe.

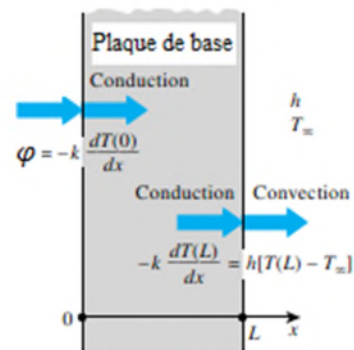
Solution

- L'expression de la variation de température dans la plaque de base du fer à repasser :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } x=0 \quad -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_0 \quad (2) \\ \text{à } x=L \quad -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L) - T_\infty) \quad (3) \end{array} \right.$$



La solution générale de l'équation (1)

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = cste = A \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

Avec A et B des constante d'intégration à déterminer

De la condition à la limite (2)

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_0 \Rightarrow -\lambda A = \varphi_0 \Rightarrow A = \frac{-\varphi_0}{\lambda}$$

De la condition à la limite (3)

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_{(L)} - T_{\infty}) \Rightarrow -\lambda A = h((AL + B) - T_{\infty}) \Rightarrow B = T_{\infty} + \frac{\varphi_0}{h} + \frac{\varphi_0}{\lambda} L$$

$$T(x) = Ax + B = T_{\infty} + \varphi_0 \left(\frac{L-x}{\lambda} + \frac{1}{h} \right)$$

- La température aux points 0 et L

$$T(0) = T_{\infty} + \varphi_0 \left(\frac{L-0}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) = 20 + 40000 \left(\frac{0.005}{15} + \frac{1}{80} \right) = 533^{\circ}\text{C}$$

$$T(L) = T_{\infty} + \varphi_0 \left(\frac{L-L}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) = 20 + \frac{40000}{80} = 520^{\circ}\text{C}$$

Exercice N°2

Considérons une conduite de vapeur de longueur $L=20\text{m}$, de rayon intérieur $r_1=6\text{cm}$, de rayon extérieur $r_2=8\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda=20\text{W/m}^{\circ}\text{C}$.

Les surfaces intérieure et extérieure de cette conduite sont maintenues à des températures moyennes de $T_1=150^{\circ}\text{C}$ et $T_2=60^{\circ}\text{C}$ respectivement.

Déterminer :

- La relation générale pour la répartition de la température dans le matériau pour une conduction de chaleur unidimensionnelle stationnaire à travers la conduite.
- Le taux de perte de chaleur de la vapeur à travers la paroi de la conduite.

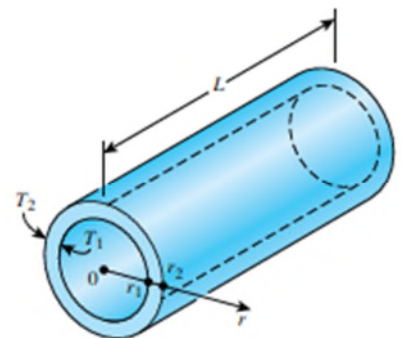
Solution

- La relation générale pour la répartition de la température dans matériau

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1)$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} \text{Pour } r = r_1 & T(r_1) = 150^{\circ}\text{C} & (2) \\ \text{Pour } r = r_2 & T(r_2) = 60^{\circ}\text{C} & (3) \end{cases}$$



En intégrant l'équation (1) deux fois :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = A \quad \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \quad \Rightarrow \int \frac{dT}{dr} = \int \frac{A}{r} \quad \Rightarrow T(r) = A \ln r + B$$

$$T(r_1) = A \ln(r_1) + B = 150^\circ\text{C} \quad (2)'$$

$$T(r_2) = A \ln(r_2) + B = 60^\circ\text{C} \quad (3)'$$

$$(2)' - (3)' = T(r_1) - T(r_2) = A \ln(r_1) - A \ln(r_2) = (150 - 60)^\circ\text{C}$$

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} = \frac{(150 - 60)}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$B = T_1 - \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \ln(r_1)$$

$$T(r) = A \ln r + B = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \ln(r) + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \ln(r_1)$$

$$T(r) = \frac{\ln \left(\frac{r}{r_1} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} (T_1 - T_2) + T_1$$

Le taux de perte de chaleur de la vapeur à travers la paroi de la conduite

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r L \frac{A}{r} = -\lambda 2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = \lambda 2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

AN :

$$\Phi = 2\pi \times 20 \times 20 \times \frac{150 - 60}{\ln \left(\frac{0.08}{0.06} \right)} = 786.75 \text{ kW}$$

Exercice N°3

La répartition de T° pour le cas d'une sphère creuse de rayons R_1 ($\hat{a}T_1$) et R_2 ($\hat{a}T_2$) s'écrit :

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B \quad \text{Où } r \text{ est la direction du flux thermique, } A \text{ et } B \text{ des constantes à déterminer.}$$

Le matériau composant ce corps a pour conductivité thermique λ_1 .

- Trouver la répartition de température lorsqu'il y a échange par convection (intérieur T_{ch} , extérieur T_{fr}).
- Déterminer l'expression générale du flux thermique correspondant.
- On isole ce corps avec un matériau de conductivité λ_2 , le rayon de cette enveloppe vaut R_3 .
 - a. Ecrire la nouvelle expression du flux thermique.
 - b. Application numérique : $R_1=0.095\text{m}$; $R_2=0.1\text{m}$; $R_3=0.15\text{m}$; $T_{ch}=200^\circ\text{C}$; $T_{fr}=15^\circ\text{C}$; $\lambda_1= 60 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$; $h_{ch}=10^4 \text{ kcal/h.m}^2^\circ\text{C}$; $h_{fr}= 10 \text{ kcal/h.m}^2^\circ\text{C}$.

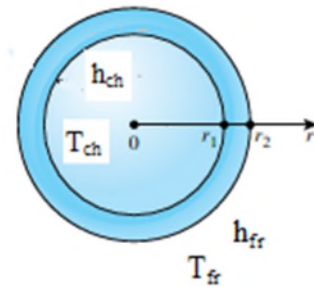
Solution

- L'équation de La répartition de température (détermination de A et B)

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (1)$$

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = h_{ch} (T_{ch} - T_1) \quad (2)$$

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = h_{fr} (T_2 - T_{fr}) \quad (3)$$



$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = \frac{A}{r_1^2} \quad \text{On remplace dans l'équation (2)}$$

$$-\lambda \frac{A}{r_1^2} = h_{ch} \left(T_{ch} + \frac{A}{r_1} - B \right) \Rightarrow A \left[-\frac{1}{r_1} - \frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} \right] + B = T_{ch} \quad (2)''$$

De mrme pour r_2

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = \frac{A}{r_2^2} \quad \text{On remplace dans l'équation (2)}$$

$$-\lambda \frac{A}{r_2^2} = h_{fr} \left(-\frac{A}{r_2} + B - T_{fr} \right) \Rightarrow A \left[-\frac{\lambda}{h_{fr} r_2^2} + \frac{1}{r_2} \right] - B = -T_{fr} \quad (3)''$$

(2)'' + (3)'' Donne :

$$A \left[-\frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} - \frac{1}{r_1} - \frac{\lambda}{h_{fr} r_2^2} + \frac{1}{r_2} \right] = T_{ch} - T_{fr}$$

$$\Rightarrow A = \frac{T_{ch} - T_{fr}}{\left[-\frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} - \frac{1}{r_1} - \frac{\lambda}{h_{fr} r_2^2} + \frac{1}{r_2} \right]} = \frac{T_{ch} - T_{fr}}{\left[-\lambda \left(\frac{1}{h_{ch} r_1^2} + \frac{1}{h_{fr} r_2^2} \right) + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]}$$

De (2)'' $B = T_{ch} + A \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} \right]$

L'équation de variation de température

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B = -\frac{A}{r} + A \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} \right] + T_{ch} = A \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} - \frac{1}{r} \right] + T_{ch}$$

$$T(r) = \frac{T_{ch} - T_{fr}}{\left[-\lambda \left(\frac{1}{h_{ch} r_1^2} + \frac{1}{h_{fr} r_2^2} \right) + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]} \left[-\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{h_{ch} r_1^2} + \frac{1}{r_1} \right] + T_{ch}$$

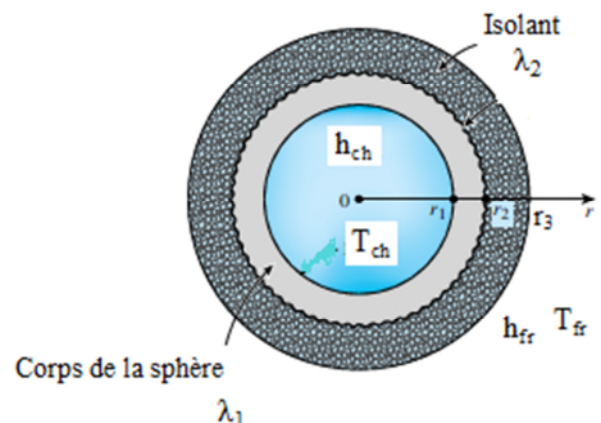
L'expression générale du flux thermique

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2 \frac{A}{r^2} = -\lambda 4\pi A$$

$$\Phi = \frac{4\pi (T_{ch} - T_{fr})}{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{h_{ch} r_1^2} + \frac{1}{h_{fr} r_2^2} \right)}$$

La nouvelle expression du flux

$$\Phi' = \frac{4\pi (T_{ch} - T_{fr})}{\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \left(\frac{1}{h_{ch} r_1^2} + \frac{1}{h_{fr} r_3^2} \right)}$$



AN :

$$\Phi' = \frac{4\pi(200-15)}{\frac{1}{60}\left(\frac{1}{0.095} - \frac{1}{0.01}\right) + \frac{1}{0.08}\left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.15}\right)\left(\frac{1}{10^4 \times (0.095)^2} + \frac{1}{10 \times (0.15)^2}\right)} = 50.37 \text{ Kcal / h}$$

Exercice N°4

Un mur de 90 mm d'épaisseur ($\lambda = 0,18 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) est isolé d'un côté tandis que l'autre côté est exposé à l'environnement à 80°C . Le taux de génération de chaleur à l'intérieur du mur est de $1,3 \cdot 10^4 \text{ W/m}^3$.

Si le coefficient de transfert thermique convectif entre le mur et l'environnement $h=520 \text{ W/m}^2$ $^\circ\text{C}$.

Déterminer :

- Équation différentielle et les conditions aux limites pour une conduction thermique unidimensionnelle à travers la paroi.
- la relation de la variation de température dans le mur.
- la température maximale à laquelle le mur sera soumis.

Solution

Équation différentielle et les conditions aux limites

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \quad (1)$$

Avec les conditions aux limites

$$\text{Pour } x=0 \quad -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{paroi isolée}). \quad (2)$$

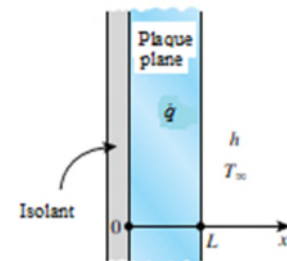
$$\text{Pour } x=L \quad -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = hS(T_L - T_\infty) \quad (3)$$

la relation de la variation de température dans le mur

L'intégration de l'équation (1) donne :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}x + A \Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + Ax + B$$

Avec A et B des constantes d'intégration à déterminer en utilisant les conditions aux limites.



$$\text{à } x=0 \quad -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -\frac{\dot{q}}{\lambda} 0 + A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{à } x=L \quad -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = hS(T_L - T_\infty) \Rightarrow -\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \frac{h}{\lambda} \left[\left(-\frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2 + B \right) - T_\infty \right] = \frac{\dot{q}}{\lambda} L$$

$$\frac{\dot{q}L}{h} = -\frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2 + B - T_\infty \Rightarrow B = \frac{\dot{q}}{h} L + \frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2 + T_\infty$$

L'équation T(x) s'écrit :

$$T(x) = \frac{\dot{q}}{\lambda} \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{q}L}{h} + \frac{\dot{q}}{\lambda} \frac{L^2}{2} + T_\infty \qquad T(x) = \frac{\dot{q}}{2\lambda} (L^2 - x^2) + \frac{\dot{q}L}{h} + T_\infty$$

La température maximale

T(x) est maximale pour x=0

$$T(0) = \frac{\dot{q}}{\lambda} \frac{L^2}{2} + \frac{\dot{q}L}{h} + T_\infty$$

$$\text{A N: } T(0) = \frac{1.310^4}{2 \times 0.18} (0.09)^2 + \frac{1.310^4 \times 0.09}{520} + 80$$

$$T_{\max} = T(0) = 374.75^\circ\text{C}$$

3.7. Résistance thermique –Analogie électrique

3.7.1. Résistances thermiques

D'après les résultats établis aux paragraphes précédents, on remarque que les expressions des flux de chaleur échangé par conduction ou par convection peuvent s'écrire sous la forme :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{thermique}} \quad (3.92)$$

Pour une surface plane

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} \Rightarrow R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S} \quad (3.93)$$

Pour un cylindre creux

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda L}} \Rightarrow R_{thermique} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda L} \quad (3.94)$$

Pour une sphère creuse

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda}} \Rightarrow R_{thermique} = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda} \quad (3.95)$$

Pour le flux convectif

$$\Phi = hS(T_p - T_\infty) \Rightarrow R_{thermique} = \frac{1}{hS} \quad (3.96)$$

3.7.2. Analogie électrique

L'expression du flux $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}$ présente une certaine analogie avec la loi d'Ohm en

électricité $I = \frac{\Delta U}{R}$



Nous constatons une certaine analogie entre les différentes grandeurs

Conduction électrique	Conduction thermique
Différence de potentiel ΔU	Différence de température ΔT
Courant électrique I	Flux de chaleur Φ
Résistance électrique R	Résistance thermique $R_{thermique}$

3.7.3. Conduction thermique en régime permanent à travers les surfaces multi couches

- Mur multi couches

Pour un mur composé de plusieurs couches de matériaux différents, C'est le cas des murs réels où on ne connaît que les températures $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ des fluides en contact avec les deux faces du mur.

On suppose qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie dans ce mur. En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur

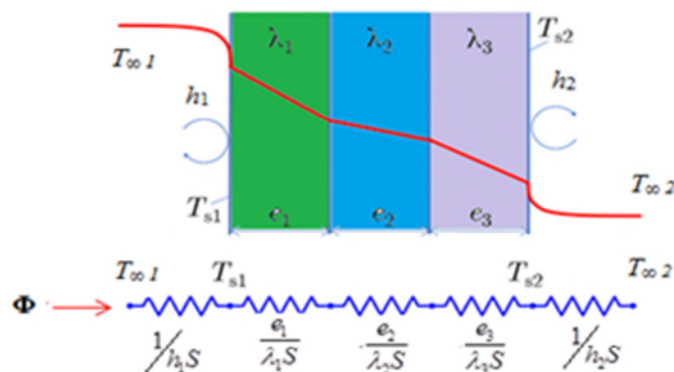


Figure 3.14. Résistance thermique d'un mur multi couches

$$\Phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}} = \frac{(T_4 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 S}}$$

$$= \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (3.97)$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (3.98)$$

$$R_{eq} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{h_2 S} \quad (3.99)$$

➤ Le coefficient d'échange de chaleur global

Le flux de chaleur peut s'écrire

$$\Phi = US\Delta T = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{SR_{eq}} \quad (3.100)$$

U : coefficient de transfert de chaleur global [W/m²K]

- Cylindre multi couches

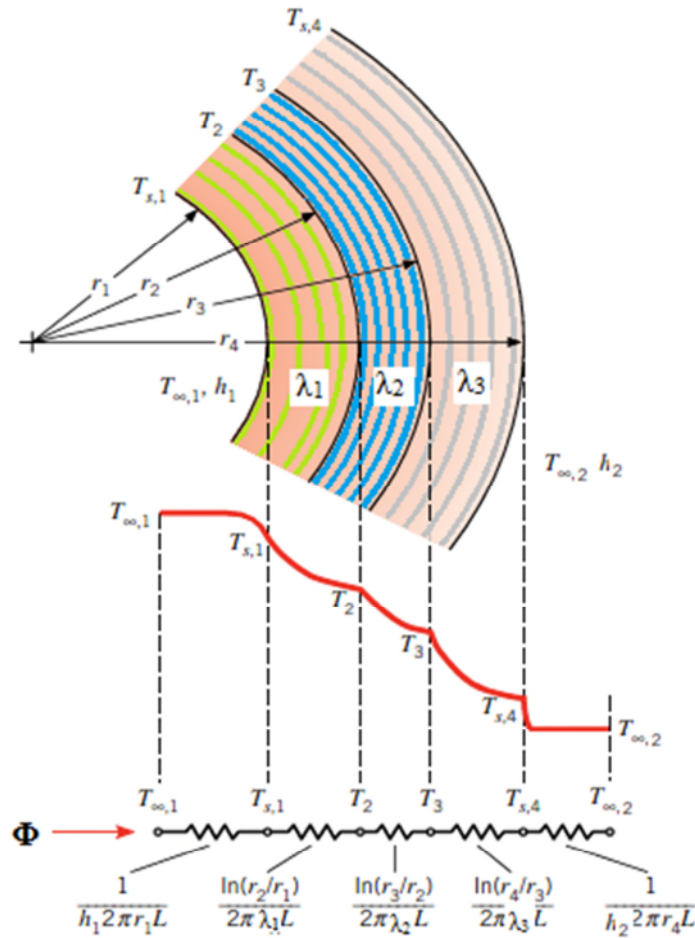


Figure 3.15. Résistance thermique d'un cylindre multi couches

Considérons maintenant le cas d'un cylindre creux de longueur L recouvert de plusieurs couches de matériaux différents. A l'intérieur et à l'extérieur du tube règne un transfert de chaleur par convection.

En régime permanent, le flux de chaleur est conservé lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\Phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1(2\pi r_1 L)}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1 2\pi L}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2 2\pi L}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_3 2\pi L}} = \frac{(T_4 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2(2\pi r_4 L)}} \quad (3.101)$$

En utilisant la propriété mathématique $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

$$\Phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1 2\pi L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2 2\pi L} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_3 2\pi L} + \frac{1}{h_2(2\pi r_4 L)}} \quad (3.102)$$

$$R_{eq} = \frac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1 2\pi L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2 2\pi L} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_3 2\pi L} + \frac{1}{h_2(2\pi r_4 L)} \quad (3.103)$$

- **Sphère multi couches**

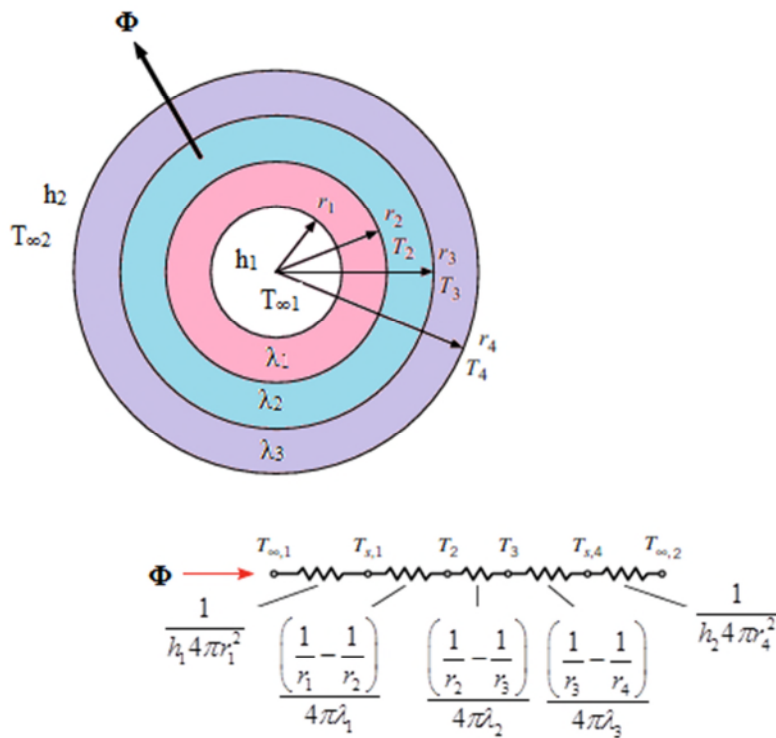


Figure 3.16. Résistance thermique d'une sphère multi couches

En régime permanent, le flux de chaleur est conservé lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\Phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 4\pi r_1^2}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\frac{r_1}{4\pi\lambda_1} - \frac{1}{r_2}}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{1}{\frac{r_2}{4\pi\lambda_2} - \frac{1}{r_3}}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{1}{\frac{r_3}{4\pi\lambda_3} - \frac{1}{r_4}}} = \frac{(T_4 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 4\pi r_4^2}} \quad (3.104)$$

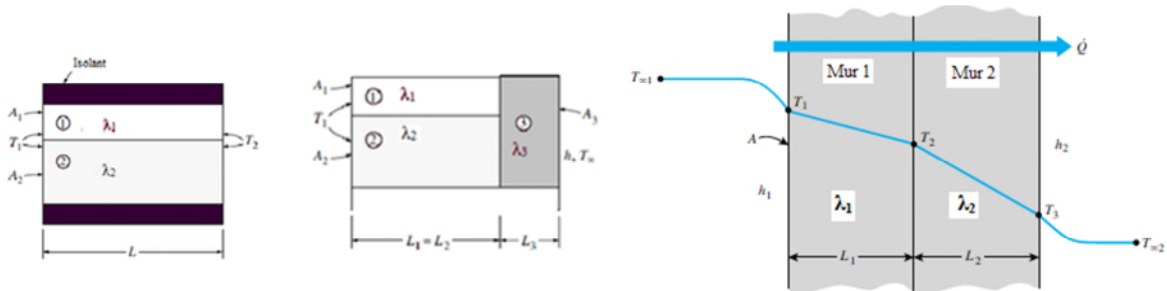
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty})}{\frac{1}{h_1 4\pi r_1^2} + \frac{r_1 - r_2}{4\pi\lambda_1 r_1 r_2} + \frac{r_2 - r_3}{4\pi\lambda_2 r_2 r_3} + \frac{r_3 - r_4}{4\pi\lambda_3 r_3 r_4} + \frac{1}{h_2 4\pi r_4^2}} \\ &= \frac{4\pi(T_{\infty 1} - T_{\infty})}{\frac{1}{h_1 r_1^2} + \frac{r_1 - r_2}{\lambda_1 r_1 r_2} + \frac{r_2 - r_3}{\lambda_2 r_2 r_3} + \frac{r_3 - r_4}{\lambda_3 r_3 r_4} + \frac{1}{h_2 r_4^2}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$R_{eq} = \frac{1}{h_1 4\pi r_1^2} + \frac{r_1 - r_2}{4\pi\lambda_1 r_1 r_2} + \frac{r_2 - r_3}{4\pi\lambda_2 r_2 r_3} + \frac{r_3 - r_4}{4\pi\lambda_3 r_3 r_4} + \frac{1}{h_2 4\pi r_4^2} \quad (3.106)$$

Exercices résolus "résistances thermiques"

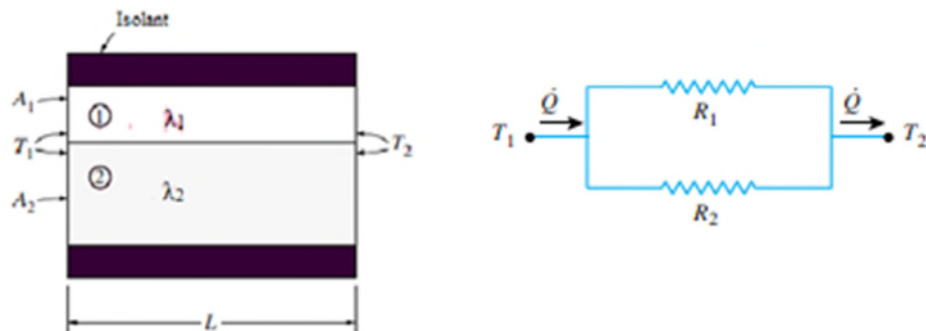
Exercice N°1

- Établir un schéma électrique correspondant en précisant littéralement la résistance thermique équivalente pour les trois cas.



Solution

- Schéma électrique



La résistance thermique équivalente

$$R_1 = \frac{L}{\lambda_1 A_1} \quad R_2 = \frac{L}{\lambda_2 A_2}$$

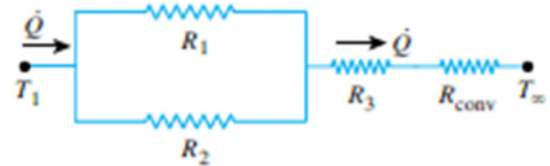
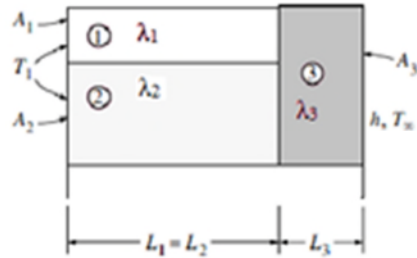
$R_{eq} = ?$

Résistance en parallèle

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{\frac{L}{\lambda_1 A_1} \times \frac{L}{\lambda_2 A_2}}{\frac{L}{\lambda_1 A_1} + \frac{L}{\lambda_2 A_2}}$$

- Schéma électrique



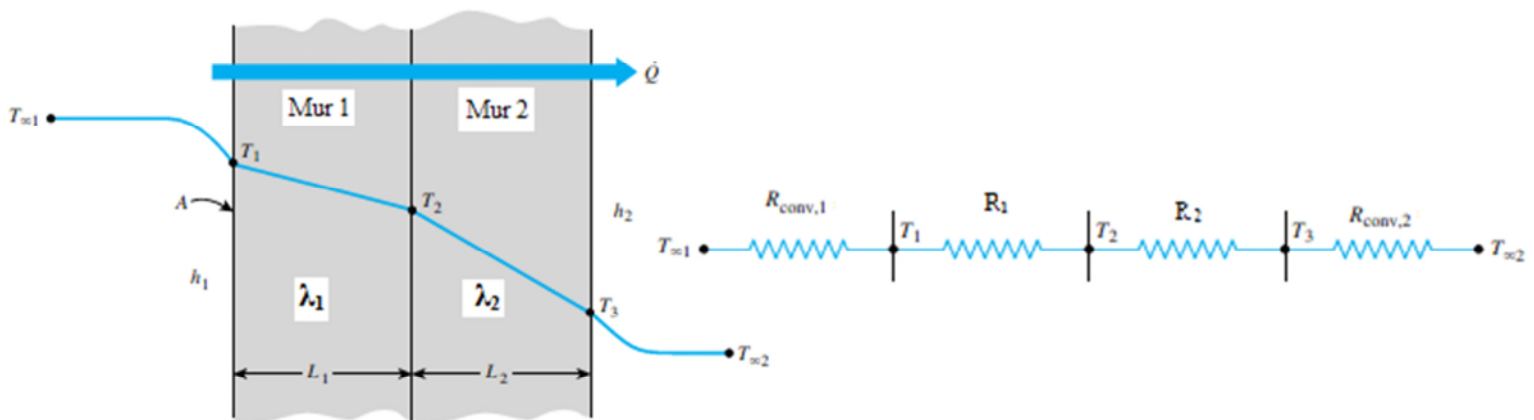
La résistance thermique équivalente

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 A_1} \quad R_2 = \frac{L_2}{\lambda_2 A_2} \quad R_3 = \frac{L_3}{\lambda_3 A_3} \quad R_{conv} = \frac{1}{h A_3}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_{conv}$$

$$R_{eq} = \frac{\frac{L_1}{\lambda_1 A_1} \times \frac{L_2}{\lambda_2 A_2}}{\frac{L_1}{\lambda_1 A_1} + \frac{L_2}{\lambda_2 A_2}} + \frac{L_3}{\lambda_3 A_3} + \frac{1}{h A_3}$$

- Schéma électrique



Résistance équivalente

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_{conv1} + R_{conv2} \quad (\text{résistances en série})$$

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 A} \quad R_2 = \frac{L_2}{\lambda_2 A} \quad R_{conv1} = \frac{1}{h_1 A} \quad R_{conv2} = \frac{1}{h_2 A}$$

$$R_{eq} = \frac{L_1}{\lambda_1 A} + \frac{L_2}{\lambda_2 A} + \frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{h_2 A} = \frac{1}{A} \left[\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right]$$

Exercice N°2

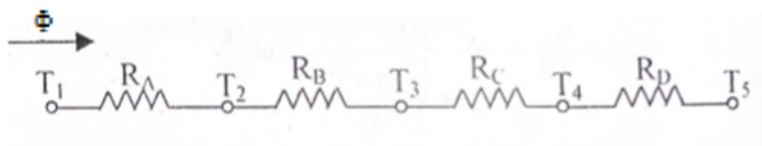
Soit une section d'une conduite cylindrique multicouche de conductivités thermiques $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ et de longueur L .

Ces différentes couches de rayons r_1, r_2, r_3, r_4 et r_5 sont soumises aux températures T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 .

- Établir un schéma électrique correspondant en précisant littéralement les résistances thermiques
- Déterminer le flux de chaleur à travers cette conduite.

Solution

Le schéma électrique :

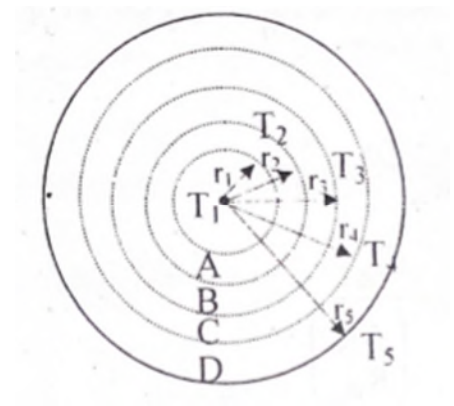


$$R_A = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_A L}$$

$$R_B = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_B L}$$

$$R_C = \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{2\pi\lambda_C L}$$

$$R_D = \frac{\ln \frac{r_5}{r_4}}{2\pi\lambda_D L}$$



Le flux de chaleur à travers la conduite :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{\Delta T}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_B L} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{2\pi\lambda_C L} + \frac{\ln \frac{r_5}{r_4}}{2\pi\lambda_D L}} = \frac{2\pi L \Delta T}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_A} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_B} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_C} + \frac{\ln \frac{r_5}{r_4}}{\lambda_D}}$$

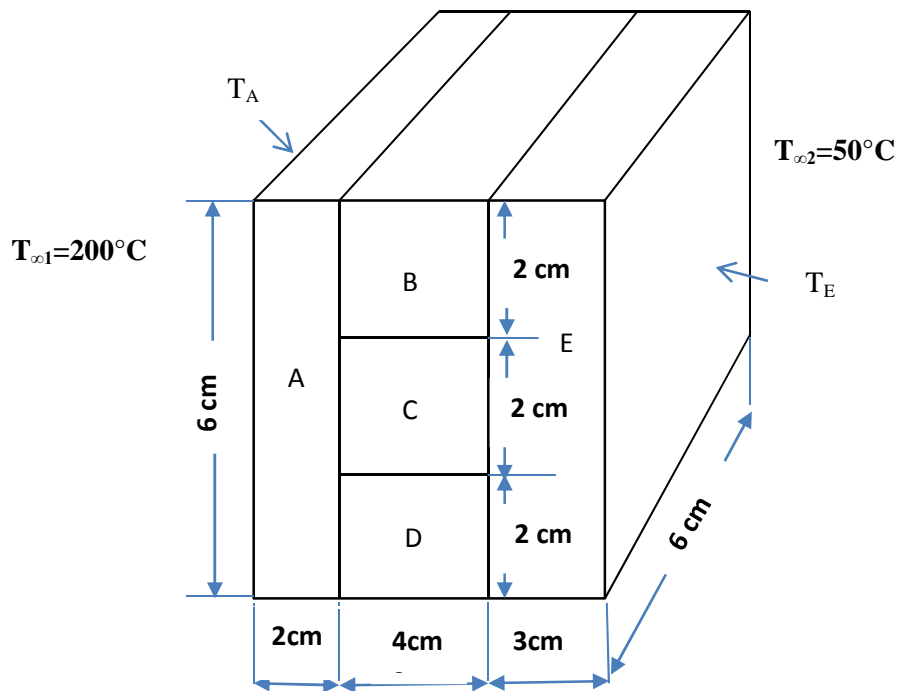
Exercice N°3

Soit une section d'un mur composite avec les dimensions indiquées sur la figure ci-dessous.

Les conductivités thermiques des matériaux des murs sont : $\lambda_A = 70 \text{ W / m K}$, $\lambda_B = 60 \text{ W / m K}$, $\lambda_C = 40 \text{ W / m K}$, $\lambda_D = 20 \text{ W / m K}$ et $\lambda_E = 70 \text{ W/mK}$. Les coefficients de transfert de chaleur par convection sur les surfaces gauche et droite sont de 6 et $10 \text{ W / m}^2 \text{ K}$, respectivement.

Déterminer :

1. le taux de transfert de chaleur à travers cette section du mur
2. Les températures T_A et T_E



Solution

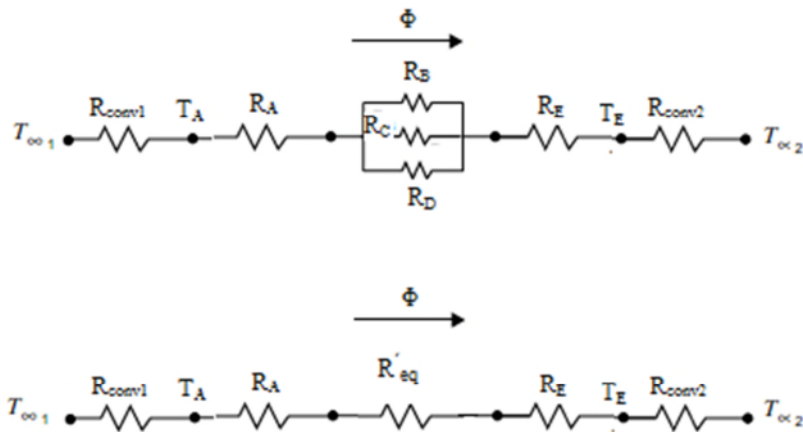
Le taux de transfert de chaleur à travers ce mur

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$$

Détermination de la résistance équivalente

$$R_{eq} = ?$$

Le schéma électrique



Détermination de la résistance équivalente

$$R_{eq} = ?$$

$$R_{eq} = R_{conv1} + R_A + R'_{eq} + R_E + R_{conv2}$$

$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D}$$

Calcul des résistances

$$R_{conv1} = \frac{1}{h_{conv1}S} = \frac{1}{6 \times (0.06 \times 0.06)} = 46.296 K / W$$

$$R_A = \frac{L_A}{\lambda_A S_A} = \frac{0.02}{70 \times (0.06 \times 0.06)} = 0.0793 K / W$$

$$R_B = \frac{L_B}{\lambda_B S_B} = \frac{0.04}{60 \times (0.02 \times 0.06)} = 0.555 K / W$$

$$R_C = \frac{L_C}{\lambda_C S_C} = \frac{0.04}{40 \times (0.02 \times 0.06)} = 0.833 K / W$$

$$R_D = \frac{L_D}{\lambda_D S_D} = \frac{1}{20 \times (0.02 \times 0.06)} = 1.666 K / W$$

$$R_E = \frac{L_E}{\lambda_E S_E} = \frac{0.03}{70 \times (0.06 \times 0.06)} = 0.119 K / W$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{h_{conv2}S} = \frac{1}{10 \times (0.06 \times 0.06)} = 27.77 \text{ K/W}$$

$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{0.555} + \frac{1}{0.833} + \frac{1}{1.666} = 3.601 \text{ W/K} \quad \Rightarrow R'_{eq} = 0.277 \text{ K/W}$$

$$R_{eq} = 46.296 + 0.0793 + 0.277 + 0.119 + 27.77 = 74.748 \text{ K/W}$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{eq}} = \frac{200 - 50}{74.748} = 2 \text{ W}$$

Calcul des températures T_A et T_E

Par conservation du flux :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{eq}} = \frac{T_{\infty 1} - T_A}{R_{conv1}} = \frac{T_E - T_{\infty 2}}{R_{conv2}}$$

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_A}{R_{conv1}} \quad \Rightarrow \quad T_A = T_{\infty 1} - \Phi R_{conv1} = 200 - 2 \times 46.296 = 107.4^\circ \text{C}$$

$$\Phi = \frac{T_E - T_{\infty 2}}{R_{conv2}} \quad \Rightarrow \quad T_E = T_{\infty 2} + \Phi R_{conv2} = 50 + 2 \times 27.777 = 105.55^\circ \text{C}$$

3.8. Les ailettes

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres.

Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit (exemples : refroidissement des composants électriques, refroidissement d'un moteur par air, évaporateur d'un climatiseur...). Quand la section de l'ailette est constante, on l'appelle barre.

3.8.1. Différentes formes d'ailettes utilisées dans la pratique

Les ailettes peuvent avoir de multiples formes et géométries selon les applications désirées, elles peuvent être liées à la surface mère de différentes façons.

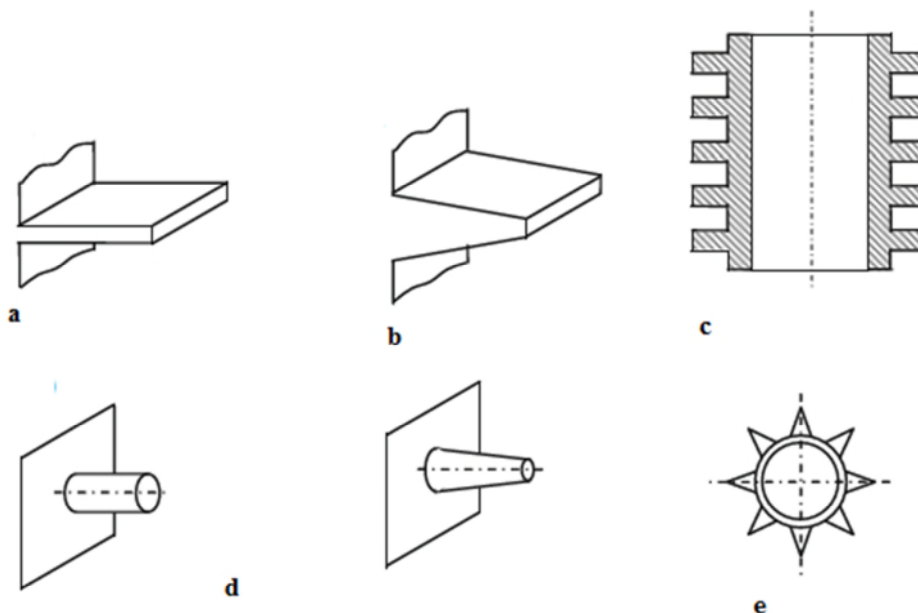


Figure 3.17. Différentes formes d'ailettes a : ailette rectangulaire, b : ailette trapézoïdale, c : tube à ailettes, d : ailette à épine ou à clous, e : ailette en étoile.

3.8.2. Développement de l'équation générale unidimensionnelle

Soit l'ailette rectangulaire de longueur L dont la section droite a une aire S et un périmètre P nous admettons que la température du pied d'ailette est T_p ($x=0$).

T_p : la température de la paroi extérieure du mur. L'ailette est plongée dans l'air à température T_{air} (T_∞). La transmission de la chaleur se fait le long de l'ailette et se dissipe par convection dans le milieu ambiant.

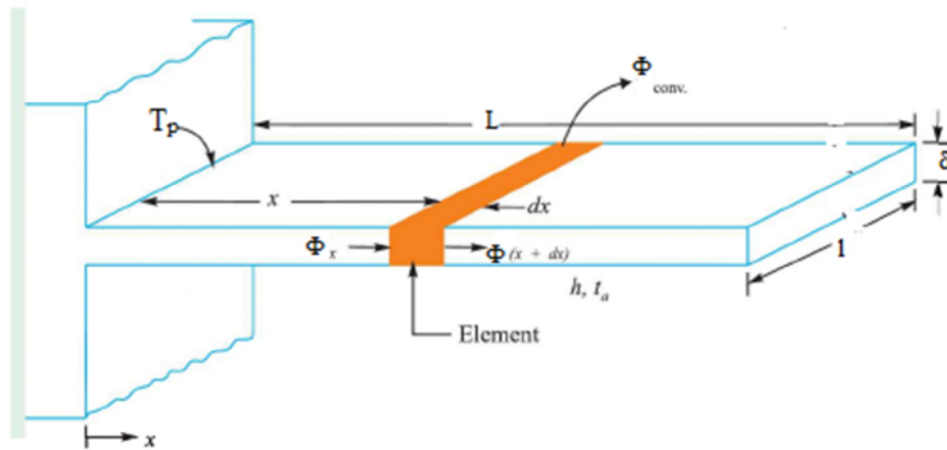


Figure 3.18. Volume élémentaire d'une ailette rectangulaire de longueur dx de section S et de périmètre P .

Soit un élément de l'ailette compris entre les sections x et $x+dx$

Le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme suit :

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_{conv} \quad (3.107)$$

Φ_x Le flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse (x),

$$\Phi_x = \left(-\lambda \frac{dT}{dx} S \right)_x \quad (3.108)$$

$\Phi_{x+\Delta x}$ Le flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse $(x+dx)$

$$\Phi_{x+dx} = \left(-\lambda \frac{dT}{dx} S \right)_{x+dx} \quad (3.109)$$

Φ_{con} Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre x et $x+dx$.

$$\Phi_{conv} = h P dx (T(x) - T_{\infty}) \quad (3.110)$$

Admettons les paramètres ci-dessous relatifs au problème considéré :

P : Le périmètre de la section droite de l'ailette $P=2(\delta+1)$ [m]

λ : La conductivité thermique [W/m.K].

h : Le coefficient d'échange convectif [W/m².k]

T_{∞} : La température ambiante [°C]

S : La surface de la section droite de la tige $S= (l \times \delta)$ [m²]

L'équation (3.107) devient :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx} S \right)_{x+dx} - \left(\lambda \frac{dT}{dx} S \right)_x = h P dx (T(x) - T_{\infty}) \quad (3.111)$$

Si λ et S sont indépendantes de l'abscisse x , nous obtenons :

$$\frac{\lambda S \left(\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x \right)}{dx} = h P (T(x) - T_{\infty}) \quad (3.112)$$

$$\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} = h P (T(x) - T_{\infty}) \quad (3.113)$$

$$\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} - h P (T(x) - T_{\infty}) = 0 \quad (3.114)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h P}{\lambda S} (T(x) - T_{\infty}) = 0 \quad (3.115)$$

Effectuant un changement de variable on posant :

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(T - T_\infty)}{dx} = \frac{dT}{dx} \quad (3.116)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(T - T_\infty)}{dx} = \frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S} \theta = 0 \quad (3.117)$$

On pose :

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} \Rightarrow m^2 = \frac{hP}{\lambda S} \quad (3.118)$$

L'équation (3.115) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (3.119)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire, du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx} \quad (3.120)$$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites à $x=0$ et $x=L$

- **Conditions aux limites**

La condition correspond à l'abscisse $x=0$ est :

$$\theta(x=0) = A+B \quad (3.121) \qquad \theta_p = T_p - T_\infty \quad (3.122)$$

Par contre quatre conditions aux limites peuvent être envisagées à $x=L$.

- **Conditions de Dirichlet (barre infiniment longue)**

T_L température imposé au point L : physiquement c'est le cas d'une barre infiniment longue dont la température à l'extrémité est supposé égale à T_∞ (température du fluide).

Dans ce cas :

$$\text{à } x=0 \quad T = T_p \quad \theta = \theta_0 = T_p - T_\infty \quad (3.123)$$

$$\text{à } x=L \quad T = T_L = T_\infty \quad \theta = 0 = T_\infty - T_\infty \quad (3.124)$$

- **Conditions de Dirichlet (température imposée T_L)**

$$\text{à } x=0 \quad T=T_p \quad \theta=\theta_0=T_p-T_\infty \quad (3.125)$$

$$\text{à } x=L \quad T=T_L \quad \theta=\theta_L=T_L-T_\infty \quad (3.126)$$

- **Condition de Newman $\left(\frac{dT}{dx}\right)_L$ est imposée**

Physiquement, c'est le cas d'une barre infiniment mince et qui n'échange aucune quantité de chaleur par son extrémité (c'est à dire adiabatique)

$$\text{à } x=0 \quad T=T_p \quad \theta=\theta_0=T_p-T_\infty \quad (3.127)$$

$$\text{à } x=L \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_L = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = 0 \quad (3.128)$$

- **Condition de Fourier**

$$\text{à } x=0 \quad T=T_p \quad \theta=\theta_0=T_p-T_\infty \quad (3.129)$$

$$\text{à } x=L \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_L = f(T)_L \quad (3.130)$$

3.8.3. Ailette infiniment longue de section constante

Dans ce cas, l'ailette est considérée comme très longue, c'est-à-dire que $L \rightarrow \infty$ avec une température à l'extrémité libre égale à $T(x=L) = T_\infty$ où L est la longueur de l'ailette.

Les conditions aux limites

$$\text{Pour } x=0 \quad \theta(0) = T_p - T_\infty \quad (3.131)$$

$$\text{Pour } x=L \quad L \rightarrow \infty \quad \theta(L) = 0 \Rightarrow 0 = Ae^{mL} + Be^{-mL} \quad (3.132)$$

Cette condition est vraie pour $A=0$

La substitution de A par 0 dans l'équation (3.120) prend la forme suivante :

$$\theta(x) = Be^{-mx} \quad (3.133)$$

Détermination de B .

$$\text{Pour } x=0 \quad \theta(0) = Be^{-m \cdot 0} = B = T_p - T_\infty \quad (3.134)$$

L'expression $\theta(x)$ devient :

$$\theta(x) = (T_p - T_\infty) e^{-mx} = \theta(0) e^{-mx} \quad (3.135)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = e^{-mx} \quad \text{Ou bien} \quad \frac{(T_x - T_\infty)}{T_p - T_\infty} = e^{-mx} \quad (3.136)$$

$$T(x) = T_\infty + (T_p - T_\infty) e^{-mx} \quad (3.137)$$

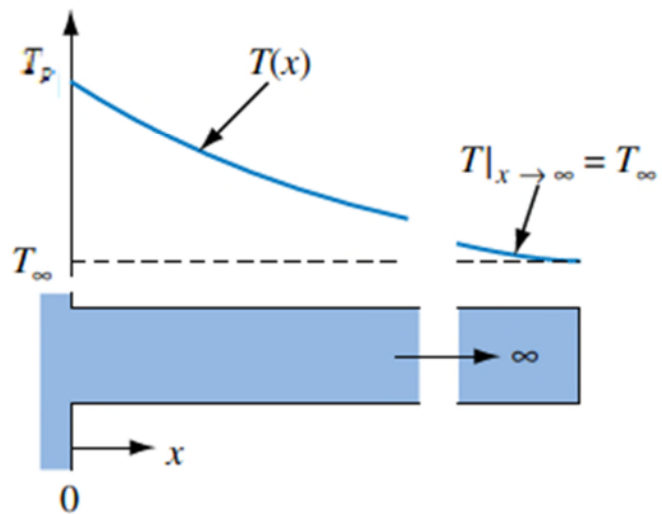


Figure 3.19. Variation de température dans une ailette infiniment

➤ Le flux de chaleur

Le flux qui traverse une section à l'abscisse x est donnée par :

$$\Phi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \lambda m S (T_p - T_\infty) e^{-mx} \quad (3.138)$$

Le flux total échangé par l'ailette est le flux traversant la section située à $x=0$

$$\Phi_{ailette} = \Phi(0) = \lambda m S (T_p - T_\infty) e^{-m \cdot 0} = \sqrt{hP\lambda S} (T_p - T_\infty) \quad (3.139)$$

Ce flux de chaleur est le flux transmis par l'ailette à l'extérieur.

3.8.4. Ailette avec Température imposée

Dans ce cas, la température à l'extrémité de l'ailette est fixée à une température spécifiée T_L . Ce cas peut être considéré comme une généralisation du cas de l'ailette infiniment longue où la température au bout de l'ailette était fixée à T_∞ .

Conditions aux limites dans ce cas :

$$x = 0 \quad T = T_p \quad \theta = \theta_0 = T_p - T_\infty \quad (3.140)$$

$$x = L \quad T = T_L \quad \theta_L = T_L - T_\infty \quad (3.141)$$

On remplace dans l'équation (3.120) $\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx}$

$$x = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 = Ae^0 + Be^0 = A + B \quad (3.142)$$

$$x = L \quad \theta(L) = \theta_L = Ae^{mL} + Be^{-mL} \quad (3.143)$$

Détermination des constantes A et B :

$$\theta(0) = \theta_0 = Ae^0 + Be^0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = \theta_0 - A \quad (3.144)$$

Remplaçant B dans l'équation (3.143)

$$\theta_L = Ae^{mL} + (\theta_0 - A)e^{-mL} = A(e^{mL} - e^{-mL}) + \theta_0 e^{-mL} \quad (3.145)$$

$$A = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.146)$$

$$B = \theta_0 - A = \theta_0 - \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.147)$$

Remplaçant A et B dans l'expression de température :

$$\theta(x) = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx} - \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{-mx} \quad (3.148)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} + \theta_0 e^{-mx} - \frac{\theta_L e^{-mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.149)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_L e^{-mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx} + \theta_0 e^{-mL} e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.150)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx} (e^{mL} - e^{-mL}) - \theta_L e^{-mx} + \theta_0 e^{-mL} e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.151)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L(e^{mx} - e^{-mx}) + \theta_0(e^{-mx}e^{mL} - e^{-mL}e^{mx})}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

$$= \frac{\theta_L(e^{mx} - e^{-mx}) + \theta_0(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad (3.152)$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L \left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right) + \theta_0 \left(\frac{e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}}{2} \right)}{\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}} \quad (3.153)$$

Utilisant la relation

$$\sinh(mL) = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}, \text{ l'équation précédente s'écrit comme suit :}$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L \sinh(mx) + \theta_0 \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \quad (3.154)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_0} \right) \sinh(mx) + \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \quad (3.155)$$

$$T(x) = T_\infty + (T_p - T_\infty) \left(\frac{(T_L - T_\infty) \sinh(mx) + (T_p - T_\infty) \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \right) \quad (3.156)$$

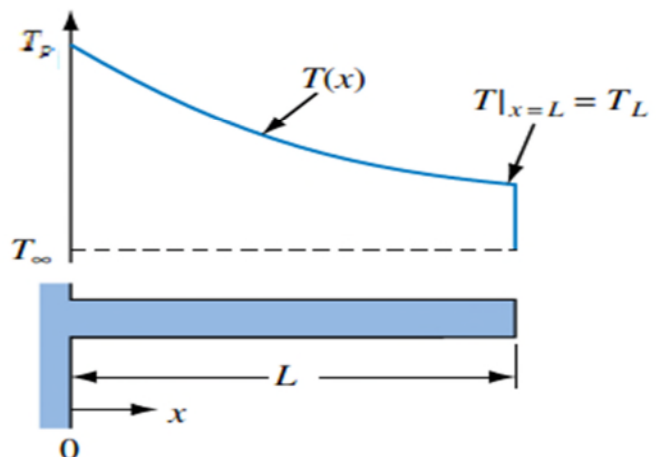


Figure 3.20. Variation de température dans une ailette avec une température imposée

➤ **Le flux de chaleur dégagé par l'ailette**

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{ailette}} = \Phi(0) &= -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \\
\Phi_{\text{ailette}} &= -\lambda S \left. \frac{\theta_L m \cosh(mx) - \theta_0 m \cosh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \right|_{x=0} = -\lambda S \frac{\theta_L m - \theta_0 m \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \\
\Phi_{\text{ailette}} &= \lambda S m \theta_0 \frac{\cosh(mL) - \left(\frac{\theta_L}{\theta_0}\right)}{\sinh(mL)} = \sqrt{hP\lambda S} \theta_0 \frac{\cosh(mL) - \left(\frac{\theta_L}{\theta_0}\right)}{\sinh(mL)} \quad (3.157)
\end{aligned}$$

3.8.5. Ailette infiniment mince (à extrémité adiabatique)

L'hypothèse d'ailette à extrémité adiabatique signifie que la chaleur ne peut pas être transférée de l'extrémité de l'ailette vers l'environnement. Cette hypothèse est plus réaliste que l'hypothèse d'ailette à température ambiante, car la surface de l'extrémité de l'ailette est généralement une fraction négligeable de la surface totale de l'ailette.

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

Partant de l'équation générale

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty = Ae^{mx} + Be^{-mx} \quad (3.158)$$

Les conditions aux limites pour ce cas :

$$x=0 \quad (T_p - T_\infty) = 0 = \theta(0) = A + B \quad (3.159)$$

$$x=L \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow mAe^{mL} - mBe^{-mL} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.160)$$

$$Ae^{mL} - Be^{-mL} = 0 \quad (3.161)$$

De l'équation (3.159)

$$A = (T_p - T_\infty) - B \quad (3.162)$$

Donc :

$$A = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{2mL}} \quad (3.163)$$

$$B = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} \quad (3.164)$$

$$\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx} = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} e^{-mx} \quad (3.165)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_P - T_\infty} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} = \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (3.166)$$

Utilisant la relation

$$\cosh(mL) = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}, \text{ l'équation précédente s'écrit comme suit :}$$

$$\frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_P - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (3.167)$$

$$T_{(x)} = (T_P - T_\infty) \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} + T_\infty \quad (3.168)$$

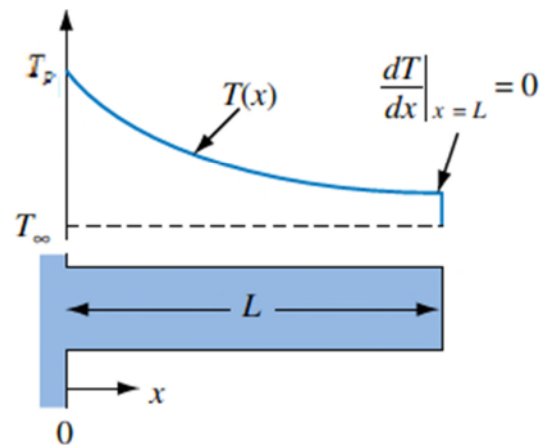


Figure 3.21. Variation de température dans une ailette infiniment mince

► Le flux de chaleur

Le taux de transfert de chaleur de l'ailette est donné par :

$$\Phi_{ailette} = \Phi(0) = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.169)$$

$$T_{(x)} = T_P - T_\infty \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} + T_\infty \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= -m(T_p - T_\infty) \frac{\sinh m(L-x)}{\cosh mL} \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -m(T_p - T_\infty) \frac{\sinh mL}{\cosh mL} \\ &= -m(T_p - T_\infty) \tanh(mL) \end{aligned} \quad (3.171)$$

$$\Phi_{ailette} = \lambda S m (T_p - T_\infty) \tanh(mL) = \sqrt{Ph\lambda S} (T_p - T_\infty) \tanh(mL) \quad (3.172)$$

3.8.6. Ailette avec perte de la chaleur par convection à l'extrémité

Les conditions aux limites

$$x=0 \quad (T_p - T_\infty) = 0 = \theta(0) = \theta_0 = A + B \quad (3.173)$$

$$x=L \quad -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = hS(T - T_\infty) \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{h\theta}{\lambda} \quad (3.174)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = m A e^{mx} - m B e^{-mx} \Big|_{x=L} = -\frac{h\theta}{\lambda} \quad (3.175)$$

$$A e^{mL} - B e^{-mL} = -\frac{h\theta}{\lambda m} = -\frac{h}{\lambda m} [A e^{mL} + B e^{-mL}] \quad (3.176)$$

Détermination des constantes A et B

De l'équation (3.173) on a :

$$B = \theta_0 - A \quad (3.177)$$

On remplace B dans l'équation (3.176)

$$A e^{mL} - (\theta_0 - A) e^{-mL} = -\frac{h}{\lambda m} [A e^{mL} + (\theta_0 - A) e^{-mL}] \quad (3.178)$$

$$A e^{mL} - \theta_0 e^{-mL} + A e^{-mL} = -\frac{h}{\lambda m} [A e^{mL} + \theta_0 e^{-mL} - A e^{-mL}] \quad (3.179)$$

$$A(e^{mL} + e^{-mL}) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL}) = \theta_0 e^{-mL} + \frac{h}{\lambda m}\theta_0 e^{-mL} \quad (3.180)$$

$$A = \frac{\theta_0 e^{-mL} \left(1 - \frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \quad (3.181)$$

$$B = \theta_0 - A \Rightarrow B = \theta_0 - \frac{\theta_0 e^{-mL} \left(1 - \frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \quad (3.182)$$

$$B = \theta_0 \left[1 - \frac{e^{-mL} \left(1 - \frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \right] \quad (3.183)$$

$$B = \theta_0 \left[\frac{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL}) - e^{-mL} + \frac{h}{\lambda m}e^{-mL}}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \right] \quad (3.184)$$

$$B = \frac{\theta_0 \left(1 + \frac{h}{\lambda m}\right) e^{mL}}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \quad (3.185)$$

Substituant les valeurs de A et B dans l'équation générale : $\theta(x) = T(x) - T_\infty = Ae^{mx} + Be^{-mx}$

$$\theta(x) = \frac{\theta_0 e^{-mL} \left(1 - \frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} e^{mx} + \frac{\theta_0 \left(1 + \frac{h}{\lambda m}\right) e^{mL}}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} e^{-mx} \quad (3.186)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\left(e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \frac{h}{\lambda m}(e^{mL} - e^{-mL})} \quad (3.187)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_P - T_\infty} = \frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \quad (3.188)$$

$$T_{(x)} = T_\infty + (T_P - T_\infty) \left[\frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.189)$$

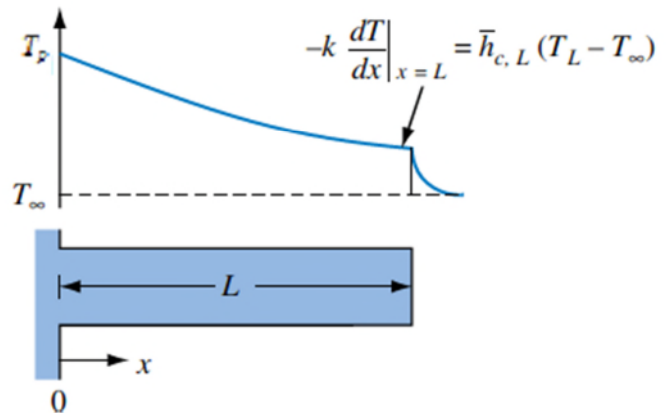


Figure 3.22. Variation de température dans une ailette avec perte de chaleur avec convection

➤ Le flux de chaleur

Le taux de transfert de chaleur de l'ailette est donné par :

$$\Phi(0) = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \quad (3.190)$$

On a :

$$T_{(x)} = T_\infty + (T_P - T_\infty) \left[\frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.191)$$

En différenciant l'expression ci-dessus par rapport à x, nous obtenons

$$\frac{dT}{dx} = (T_P - T_\infty) \left[\frac{-m \sinh(m(L-x)) - m \frac{h}{\lambda m} \cosh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.192)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -m(T_P - T_\infty) \left[\frac{\sinh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \cosh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.193)$$

$$\Phi_{\text{ailette}} = \lambda S m (T_P - T_\infty) \left[\frac{\sinh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \cosh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.194)$$

L'expression finale du flux est :

$$\Phi_{\text{ailette}} = \sqrt{ph\lambda S} (T_P - T_\infty) \left[\frac{\sinh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \cosh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right] \quad (3.195)$$

Tableau 3. Equations de variation de température et de la perte de chaleur des ailettes de section transversale uniforme pour les différentes conditions aux limites.

Ca s	Type de condition à la limite (x=L)	Distribution de température $\theta(x)/\theta_0$	Taux de transfert de chaleur Φ
1	Infiniment longue (L→∞) θ(L)=0	e^{-mx}	M
2	Température imposé θ(L)=θ _L	$\frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_0}\right) \sinh(mx) + \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)}$	$M \frac{\cosh(mL) - \left(\frac{\theta_L}{\theta_0}\right)}{\sinh(mL)}$
3	Adiabatique $\left. \frac{d\theta}{dx} \right _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M \tanh(mL)$
4	Transfert convectif $-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right _{x=L} = h\theta(L)$	$\frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$	$M \left[\frac{\sinh(m(L-x)) + \frac{h}{\lambda m} \cosh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)} \right]$
Avec	$M = \sqrt{ph\lambda S} \theta_0$	$\theta_0 = (T_P - T_\infty)$	$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$

3.8.7. Performances des ailettes

Les ailettes sont utilisées pour augmenter le flux de chaleur transféré du solide vers l'environnement. Cependant, elles ont également une résistance thermique, qui peut limiter leur efficacité. Si l'ailette n'est pas correctement dimensionnée, sa présence peut même réduire le flux de chaleur.

Pour évaluer les performances des ailettes, deux notions totalement différentes introduites :
L'efficacité et le rendement.

- L'efficacité de l'ailette

On définit l'efficacité d'une ailette comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par l'ailette et le flux de chaleur qui serait évacué sans ailette :

$$\varepsilon = \frac{\Phi_{ailette}}{\Phi_{sans\ ailette}} > 1 \quad (3.196)$$

- Le rendement de l'ailette η

Le rendement de l'ailette est défini comme étant le rapport entre le taux de transfert de chaleur réel de l'ailette et le taux de transfert thermique maximal de l'ailette, qui existerait si elle était toute à la température de la base.

$$\eta = \frac{\Phi_{réel}}{\Phi_{max}} < 1 \quad (3.197)$$

Exercices résolus " ailettes "

Exercice N°1

La chaleur produite par friction dans un palier élève la température à l'extrémité de la tige de 60 °C au-dessus de la température ambiante.

Comment la température évolue-t-elle le long de la tige en s'éloignant du palier ?

Calculez la quantité de chaleur transférée à travers la tige si le coefficient de transfert de chaleur par convection à sa surface est de 7 W/m²K et la conductivité thermique du matériau de la tige est de 60 W/mK. Le diamètre de la tige est de 60 mm et on peut la considérer comme une tige de longueur infinie.

Solution

La distribution de température dans ce cas est de la forme suivante :

$$\frac{\theta_{(x)}}{\theta_{(0)}} = \frac{T_{(x)} - T_{\infty}}{T_p - T_{\infty}} = e^{-mx} \quad \Rightarrow \quad T_{(x)} = (T_p - T_{\infty})e^{-mx} + T_{\infty}$$

Avec :

$$\frac{\theta_{(x)}}{\theta_{(0)}} = \frac{T_{(x)} - T_{\infty}}{T_p - T_{\infty}} = e^{-mx} \quad \Rightarrow \quad T_{(x)} = (T_p - T_{\infty})e^{-mx} + T_{\infty}$$

Avec :

$$m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{h \times \pi d}{\lambda \times \frac{\pi d^2}{4}}} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{4h}{\lambda d}} = \sqrt{\frac{4 \times 7}{60 \times 0.06}} = 2.79$$

Calcul de la quantité de chaleur transférée à travers la tige :

$$\Phi = \sqrt{hP\lambda S} (T_p - T_{\infty}) \quad (T_p - T_{\infty}) = 60^{\circ}\text{C}$$

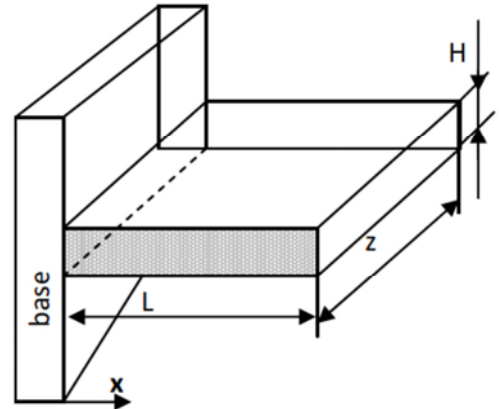
$$\Phi = \sqrt{7 \times \pi \times 0.06 \times 60 \times \frac{\pi}{4} (0.06)^2} \times 60 = 28.37\text{W}$$

Exercice N°2

Une ailette en aluminium $\lambda_{Al}=200\text{W/m} \text{ }^\circ\text{C}$ avec 4mm d'épaisseur ,8cm de longueur et une largeur de 1m voir figure, sa base est maintenue à 250°C et la température ambiante est 45°C et $h=10\text{W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Déterminer :

- l'équation de la variation de température dans l'ailette cas de $Z \gg H$.
- le flux échangé entre l'ailette et le milieu environnant.



Solution

H : l'épaisseur de l'ailette, Z : largeur de l'ailette

$Z \gg H$ le cas d'une ailette infiniment mince.

Partant de l'équation générale :

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty = Ae^{mx} + Be^{-mx} \quad (1)$$

A et B des constantes à déterminer en utilisant les conditions aux limites.

Les conditions aux limites :

$$x=0 \quad (T_p - T_\infty) = 0 = \theta(0) = A + B \quad (2)$$

$$x=L \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3) \quad \text{adiabatique}$$

$$\Rightarrow m Ae^{mx} - m Be^{-mx} \Big|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow Ae^{mL} - Be^{-mL} = 0 \quad (3)'$$

$$\text{De (2)} \quad A = (T_p - T_\infty) - B$$

Remplaçant A dans (3)'

$$\text{Donc : } ((T_p - T_\infty) - B)e^{mL} - Be^{-mL} = 0$$

$$A = \frac{T_p - T_\infty}{1 + e^{2mL}} \qquad B = \frac{T_p - T_\infty}{1 + e^{-2mL}}$$

$$\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx} = \frac{T_p - T_\infty}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{T_p - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} e^{-mx}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = \frac{T_{(x)} - T_\infty}{(T_p - T_\infty)} = \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right) = \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Utilisant la relation

$$\cosh(mL) = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}, \text{ l'équation précédente s'écrit comme suit :}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = \frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

Le flux de chaleur échangé entre l'ailette et le milieu extérieur

$$\Phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda S (mAe^{mL} - mBe^{-mL}) \Big|_{x=0}$$

$$\Phi = -\lambda Sm(A - B) = -\lambda Sm \left[\frac{(T_p - T_\infty)e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} - \frac{(T_p - T_\infty)e^{+mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right]$$

$$\Phi = \lambda Sm(T_p - T_\infty) \left(\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right)$$

Utilisant les relations

$$\cosh(mL) = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}, \quad \sinh(mL) = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}, \quad \text{l'équation précédente s'écrit}$$

comme suit :

$$\Phi = \lambda Sm(T_p - T_\infty) \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} = \lambda Sm(T_p - T_\infty) \text{Tgh}(mL)$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{h \times 2(Z + H)}{\lambda \times Z \times H}} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{10 \times 2}{200 \times 1 \times 4.10^{-3}}} = 5$$

$$\Phi = \lambda S \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} (T_p - T_\infty) Tgh(mL) = \sqrt{hp\lambda S} (T_p - T_\infty) Tgh(mL)$$

$$\Phi = \sqrt{10 \times 2(1 + 4.10^{-3}) \times 200} (250 - 45) Tgh(5 \times 8.10^{-2}) = 311.56W$$

Exercice N°3

Pour déterminer la conductivité thermique d'une ailette infiniment longue de 25 mm de diamètre, on introduit une moitié de cette ailette dans un four, l'autre moitié reste exposée à l'air à 27 °C.

Lorsque le régime permanent est établi, les températures des deux points distants de 75 mm sont respectivement égales à 125 °C et 91 °C.

Quelle est la conductivité thermique de l'ailette en unité (SI) sachant que le coefficient d'échange de chaleur de la surface de l'ailette exposée à l'air est égale à $h=17.3\text{kcal/hm}^2\text{°C}$.

Solution

La barre est infiniment longue

A et B deux point de mesure on a :

$$\frac{T_A - T_\infty}{T_p - T_\infty} = e^{-mx_A} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{T_B - T_\infty}{T_p - T_\infty} = e^{-mx_B} \quad (2) \quad (1) - (2) = \frac{T_A - T_B}{T_p - T_\infty} = \exp(-m(x_A - x_B))$$

$$m = \frac{1}{x_A - x_B} \ln \frac{T_A - T_a}{T_B - T_a} = \frac{1}{75.10^{-3}} \ln \frac{125 - 27}{91 - 27} = 5.68$$

$$m = \sqrt{\frac{ph}{\lambda S}} = \frac{1}{75.10^{-3}} \ln \frac{125 - 27}{91 - 27} = 5.68 \Rightarrow \lambda = \frac{2h}{m^2 r} = \frac{2 \times 17.3 \times 1.16}{12.5.10^{-3} \times (5.68)^2} = 99.5W / m^\circ C$$

Chapitre 4 : Transfert de chaleur par convection

4.1 Mécanismes des transferts de chaleur par convection

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides (liquides ou gaz) en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement.

On peut distinguer trois types de convection en fonction des causes qui produisent le mouvement du fluide : convection naturelle, convection forcée et convection mixte.

➤ **Convection naturelle** : Le mouvement du fluide est causé par les effets de flottabilité due à la variation de la densité de fluide (qui nécessite une différence de température).

Exemples : air d'une pièce chauffée par un radiateur, courants océanique ou atmosphérique...

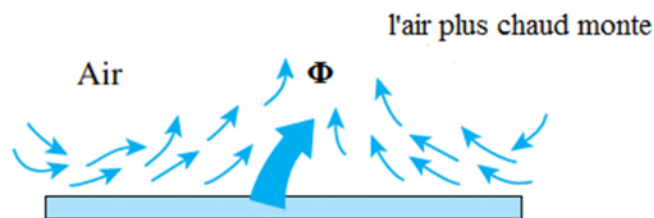


Figure 4.1. Convection naturelle

➤ **Convection forcée** : elle se manifeste lorsque le mouvement du fluide est une conséquence des actions extérieures imposées. Exemples (pompe, ventilateur...).

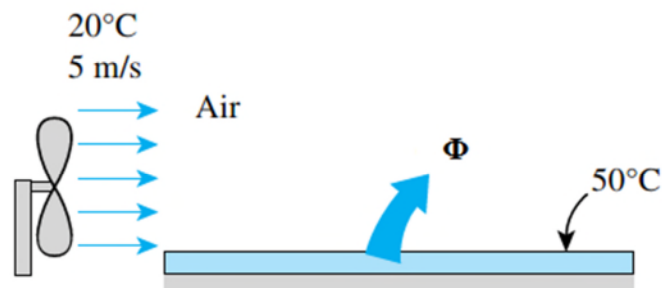


Figure 4.2. Convection forcée

➤ **Convection mixte** : Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une ne soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite la convection mixte

4.2. Types de configurations

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré les échanges par convection seulement comme une condition aux limites pour traiter des problèmes de conduction dans les solides (le système étudié était le solide qui échangeait de la chaleur par convection à sa frontière avec le milieu extérieur). Dans ce chapitre, le système étudié sera le fluide en mouvement, l'état thermique du solide étant alors pris comme condition aux limites.

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre une paroi et le fluide en écoulement.

On distingue alors classiquement deux grands types de configurations caractérisant la géométrie du système :

➤ **Écoulements externes** : Typiquement les écoulements autour d'obstacles (aéronautique, échangeurs...).

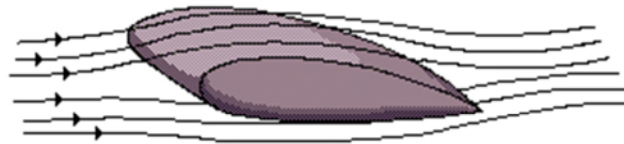


Figure 4.3. Ecoulement externe

➤ **Écoulements internes** : concernent les écoulements dans les tuyaux (échangeurs) ou dans les locaux (thermique du bâtiment).



Figure 4.4. Ecoulement interne

4.3. Régimes d'écoulements

L'importance du flux de chaleur échangé par convection va dépendre du régime d'écoulement sous lequel se produisent les échanges.

Trois régimes d'écoulement ont été définis par Reynolds (1883).

- **Régime laminaire** : L'écoulement laminaire est un écoulement caractérisé par des lignes de courant bien identifiables parallèles aux parois sans mélange.



Figure 4.5. Régime laminaire

- **Régime transitoire** : C'est un écoulement intermédiaire il est plus ou moins rectiligne, avec un peu de mélange (petits tourbillons).

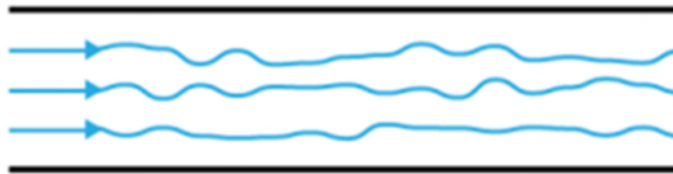


Figure 4.6. Régime transitoire

- **Régime turbulent** : Un écoulement turbulent est caractérisé par des structures tourbillonnaires qui favorisent le brassage du fluide et donc les échanges de chaleur.



Figure 4.7. Régime turbulent

Exemple dans le cas d'un écoulement dans une conduite

$Re < 2000$, l'écoulement est laminaire

$2000 < Re < 10000$, l'écoulement est transitoire

$Re > 10000$, l'écoulement est turbulent

NB : Les valeurs limites du nombre de Reynolds de 2000 et 3000 définissant les différents régimes d'écoulement sont celles que l'on adopte généralement, mais ces valeurs ne sont pas strictes. On peut trouver dans la littérature des valeurs différentes suivant les sources et auteurs.

4.4. L'expression du flux

L'expression du flux quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) le flux de chaleur Φ est donné par la relation de Newton :

$$\Phi = h.S.\Delta T$$

h : Coefficient de transfert de chaleur convectif [W/m^2K].

S : Surface d'échange [m^2].

ΔT : Écart de température entre fluide et paroi [$^{\circ}C$, K].

4.5. Détermination du coefficient de transfert de chaleur convectif h

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection h qui dépend d'un nombre important de paramètres :

- Caractéristiques du fluide (λ , C_p , ρ , μ).
- Caractéristique de l'écoulement (V).
- La géométrie de la surface d'échange (D , L).

Il existe plusieurs méthodes pour la détermination du coefficient de transfert de chaleur convectif h tel-que :

- Méthode de l'analyse dimensionnelle
- méthode de la couche limite (CL)...etc.)
- Méthodes intégrales par l'analyse des équations de la couche limites.

Dans se cours on s'intéresse à la méthode d'analyse dimensionnelle.

Tableau 5.1. Ordre de grandeur du coefficient d'échange convectif

Fluide	h Convection naturelle [W.m ⁻² .K ⁻¹]	h Convection forcée [W.m ⁻² .K ⁻¹]
Gaz	5-30	30-500
Eau	30-300	300-2 × 10 ⁴
Huile	5-100	30-3 × 10 ³
Métal liquide	50-500	500-2 × 10 ⁴
Eau bouillante	2 × 10 ³ -2 × 10 ⁴	3 × 10 ³ -10 ⁵
Condensation de vapeur d'eau	3 × 10 ³ -3 × 10 ⁴	3 × 10 ³ -2 × × 10 ⁵

4.5.1. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est différente des autres méthodes par le fait qu'elle n'introduit pas des équations mathématiques à résoudre.

Elle permet la combinaison d'un certain nombre de variables(ou groupes adimensionnels) qui débouchera sur les relations empiriques décrivent les résultats expérimentaux d'une manière acceptable et largement utilisable.

Le théorème de Vashy-Buckingham où théorème des groupements π , soit l'équation physique

$$F(G_1, G_2, \dots, G_{N-K}) = 0 \quad (4.1)$$

Cette fonction peut s'écrire :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-K}) = 0 \quad (4.2)$$

Avec :

- $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-K})$ désigne des nombres sans dimensions est indépendant.
- Le nombre de π (nombre adimensionnel) égal $N - K$.

- N nombre des grandeurs physiques.
- K nombre des unités fondamentales intervenant dans l'étude du problème.

4.5.2. Convection forcée

Application de l'analyse dimensionnelle pour déterminer le coefficient convectif h :

$$\text{Le coefficient } h \text{ dépend de 6 paramètres } h = f(\lambda, Cp, \rho, V, \mu, L^*) \quad (4.3)$$

Avec

λ : Conductivité thermique [W/mK].

ρ : Masse volumique [kg/m³].

Cp : Capacité thermique massique [J/kgK].

μ : Viscosité dynamique [kg/ms].

V : vitesse [m/s].

L^* : La longueur caractéristique [m]

Tableau4.2. Grandeurs physiques leurs (symboles, unités et dimensions)

Grandeurs	Symboles	Unités S.I	Dimensions
Longueur caractéristique L : pour une plaque D : pour (cylindre et sphère)	L^*	M	L
Température	T	°C ou K	T
Vitesse	V	m/s	Lt ⁻¹
Accélération de la pesanteur	G	m/s ²	Lt ⁻²
Masse volumique	P	kg/m ³	ML ⁻³
Viscosité dynamique	M	Kg/ms	ML ⁻¹ t ⁻¹
Capacité calorifique	Cp	J/kgK	L ² T ⁻¹ t ⁻²
Conductivité thermique du fluide	λ	W/mK	MLT ⁻¹ t ⁻³
Coefficient convectif	h	W/m ² K	MT ⁻¹ t ⁻³

Le théorème de Vashy-Buckingham :

$$h = f(\lambda, Cp, \rho, V, \mu, L^*) \Rightarrow f = (\lambda, Cp, \rho, V, \mu, L^*, h) \quad (4.4)$$

La relation (4.4) sera réduite à une relation entre (N-K) = (7- 4)=3 nombres adimensionnels

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (4.5)$$

Chaque nombre adimensionnel à la forme suivante :

$$\pi = \lambda^a Cp^b \rho^c V^d \mu^e L^{*f} h^g \quad (4.6)$$

$$\pi = \left[\frac{ML}{t^3 T} \right]^a \left[\frac{L^2}{t^2 T} \right]^b \left[\frac{M}{L^3} \right]^c \left[\frac{L}{t} \right]^d \left[\frac{M}{Lt} \right]^e [L]^f \left[\frac{M}{t^3 T} \right]^g$$

π : est un nombre adimensionnel et a, b, c..., g sont des inconnues.

Pour que le produit π soit sans dimension, il est nécessaire que la somme des exposants des différentes dimensions soit nulle.

$$L : a + 2b - 3c + d - e + f = 0$$

$$M : a + c + e + g = 0$$

$$t : -3a - 2b - d - e - 3g = 0$$

$$T : -a - b - g = 0$$

Pour déterminer π_1, π_2, π_3 on prend μ, ρ, λ et L^* comme variables répétées, cherchons π_1 :

Le coefficient h : $g = 1, b = 0, d = 0$

$$\pi_1 = \lambda^a Cp^0 \rho^c V^0 \mu^e L^{*f} h^1$$

Remplaçant les exposants g, b et d par leurs valeurs dans les équations précédentes on trouve :

$$a - 3c - e + f = 0$$

$$a + c + e + 1 = 0$$

$$-3a - e - 3 = 0$$

$$-a - 1 = 0$$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$a = -1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 1, g = 1$$

$$\text{D'où } \pi_1 = hL^* \lambda^{-1} \quad \pi_1 = \frac{hL^*}{\lambda} \quad \text{Le nombre de Nusselt (Nu)} \quad (4.7)$$

La chaleur spécifique Cp : $b = 1, d = 0, g = 0$

$$\pi_2 = \lambda^a Cp^1 \rho^c V^0 \mu^e L^{*f} h^0$$

$$a + 2 - 3c - e + f = 0$$

$$a + c + e = 0$$

$$-3a - 2 - e = 0$$

$$-a - 1 = 0$$

La résolution du système d'équations donne :

$$a = -1, b = 1, c = 0, d = 0, e = 1, f = 0, g = 0$$

$$\pi_2 = \lambda^{-1} Cp \mu \qquad \pi_2 = \frac{\mu Cp}{\lambda} \quad \text{Le nombre de Prandtl (Pr)} \qquad (4.8)$$

La vitesse V $\Rightarrow d = 1, b = 0, g = 0$

$$\pi_3 = \lambda^a Cp^0 \rho^c V^1 \mu^e L^{*f} h^0$$

$$a - 3c + 1 - e + f = 0$$

$$a + c + e = 0$$

$$-3a - 1 - e = 0$$

$$-a = 0$$

La solution finale est :

$$a = 0, b = 0, c = 1, d = 1, e = -1, f = 1, g = 0$$

$$\pi_3 = \rho VL^* \mu^{-1} \qquad \pi_3 = \frac{\rho VL^*}{\mu} \quad \text{Le nombre de Reynolds (Re)} \qquad (4.9)$$

4.5.3. La convection libre (naturelle)

Application de l'analyse dimensionnelle dans le cas de la convection libre. Le coefficient d'échange de chaleur convectif dépend de 6 paramètres :

$$h = f(L^*, \lambda, \rho, \mu, Cp, (g\beta\Delta T)) \qquad (4.10)$$

g : Accélération de la pesanteur [m/s²]

β : Coefficient de la délimitation (pour un fluide parfait $\beta = \frac{1}{T}$)

ΔT : Écart de température (fluide-paroi) [°C ou K]

$(g\beta\Delta T)$ [m/s²]

$f = (L^*, \lambda, \rho, \mu, Cp, (g\beta\Delta T), h)$

La relation sera réduite à une relation entre (N-K) = (7-4)=3 nombres adimensionnels

$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

Avec

$$\pi = L^{*a} \lambda^b \rho^c \mu^d Cp^e (g\beta\Delta T)^f h^g \quad (4.11)$$

$$\pi = [L]^a \left[\frac{ML}{t^3T} \right]^b \left[\frac{M}{L^3} \right]^c \left[\frac{M}{Lt} \right]^d \left[\frac{L^2}{t^2T} \right]^e \left[\frac{L}{t^2} \right]^f \left[\frac{M}{t^3T} \right]^g \quad (4.12)$$

Il faut que la somme des exposants des différentes dimensions soit nulle pour que le produit π soit sans dimensions

$$L : a + b - 3c - d + 2e + f = 0$$

$$M : b + c + d + g = 0$$

$$t : -3b - d - 2e - 2f - 3g = 0$$

$$T : -b - e - g = 0$$

Pour déterminer π_1, π_2, π_3 on prend μ, ρ, λ et L^* comme variables répétées, cherchons π_1 :

Le coefficient h : $g=1, e=0, f=0$

$$\pi_1 = L^{*a} \lambda^b \rho^c \mu^d Cp^0 (g\beta\Delta T)^0 h^1$$

$$a + b - 3c - d = 0$$

$$b + c + d + 1 = 0$$

$$-3b - d - 3g = 0$$

$$-b - 1 = 0$$

La solution de ce système d'équations est :

$$a = 1, b = -1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0, g = 1$$

$$\pi_1 = hL^* \lambda^{-1} \quad \pi_1 = \frac{hL^*}{\lambda} \quad \text{Le nombre de Nusselt (Nu)} \quad (4.13)$$

La chaleur spécifique Cp : e=1, f=0, g=0

$$\pi_2 = L^* a \lambda^b \rho^c \mu^d Cp^1 (g\beta\Delta T)^0 h^0$$

$$a + b - 3c - d + 2e = 0$$

$$b + c + d = 0$$

$$-3b - d - 2 = 0$$

$$-b - 1 = 0$$

La solution est :

$$a = 0, b = -1, c = 0, d = 1, e = 1, f = 0, g = 0$$

$$\pi_2 = \lambda^{-1} Cp \mu \quad \pi_2 = \frac{\mu Cp}{\lambda} \quad \text{Le nombre de Prandtl (Pr)} \quad (4.14)$$

(gβΔT) : f=1, e=0, g=0

$$\pi_3 = L^* a \lambda^b \rho^c \mu^d Cp^0 (g\beta\Delta T)^1 h^0$$

$$a + b - 3c - d + 1 = 0$$

$$b + c + d = 0$$

$$-3b - d - 2 = 0$$

$$-b = 0$$

La solution est :

$$a = 3, b = 0, c = 2, d = -2, e = 0, f = 1, g = 0$$

$$\pi_3 = \rho^2 (g\beta\Delta T) L^{*3} \mu^{-2} \quad \pi_3 = \frac{\rho^2 (g\beta\Delta T) L^{*3}}{\mu^2} \quad \text{Le nombre de Grashof (Gr)} \quad (4.15)$$

Dans la convection naturelle $F(\text{Nu}, \text{Pr}, \text{Gr}) = 0 \Rightarrow \text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr})$

4.6. Nombres adimensionnels

Tableau 4.3. Les nombres adimensionnels souvent utilisées en présence de la convection thermique qu'elle soit libre ou forcée sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Nom	Symbole	Expression	Signification
Reynolds	Re	$Re = \frac{\rho v L^*}{\mu}$ $Re = \frac{\text{Forces d'énergie}}{\text{Forces de viscosité}}$	Il caractérise la nature de l'écoulement laminaire ou turbulent en convection forcée
Nusselt	Nu	$Nu = \frac{h S \Delta T}{\lambda \frac{S}{L^*} \Delta T} = \frac{h L^*}{\lambda}$ $Nu = \frac{\text{flux échangé par convection}}{\text{flux échangé par conduction}}$	Il caractérise le type de transfert thermique entre un fluide et une paroi.
Prandtl	Pr	$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$ $Pr = \frac{\text{viscosité cinématique}}{\text{diffusivité thermique}}$	Le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et celle de la chaleur
Grashoff	Gr	$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^{*3}}{\mu^2} = \frac{g \beta \Delta T L^{*3}}{\nu^2}$	Il Compare la force ascensionnelle et la force visqueuse
Rayleigh	Ra	$Ra = \frac{C_p \rho^2 g \beta \Delta T L^{*3}}{\mu \lambda} = Gr \cdot Pr$	Il remplace le Reynolds dans la convection libre (il caractérise la convection naturelle)
Peclet	Pe	$Pe = \frac{C_p \rho v L^*}{\lambda} = \frac{C_p \rho v L^* \Delta T}{\lambda \Delta T}$	Compare la capacité calorifique du fluide à la conductivité axiale.

4.7. Corrélations utilisées pour déterminer le nombre adimensionnel Nusselt

Un grand nombre de formules empiriques est disponible pour déterminer le coefficient de transmission de chaleur par convection à travers l'expression du nombre de Nusselt.

Dans le tableau suivant quelques corrélations du nombre de Nusselt sont présentées avec leurs domaines d'applications et pour les deux types de convection (forcée et libre).

4.7.1. Convection forcée

Tableau 4.4. Corrélations donnant le nombre de Nu pour différentes configurations et en convection forcée

Géométrie, régime d'écoulement	Corrélations	Observations
Plaque plane, laminaire Plaque plane, Turbulent	$Nu_L = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$ $Nu_L = 0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3}$	$Re < 5 \cdot 10^5, Pr > 0.6$ $5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 10^7$ $0.6 \leq Pr \leq 60$
Écoulement à l'intérieur des tubes circulaire lisses, Laminaire	$Nu_D = 3.66 + \frac{0.0668 Re_D Pr (D/L)}{1 + 0.04 [Re_D Pr (D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$ $Nu_D = 1.86 (Re_D Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$ $Nu_D = 3.66 + \frac{0.104 Re_D Pr (D/L)}{1 + 0.016 [Re_D Pr (D/L)]^{0.8}}$	$Re_D Pr (D/L) > 10$ $(Re_D Pr (D/L) < 100)$
Écoulement à l'intérieur des tubes circulaire lisses, Turbulent	$Nu_D = 0.023 (Re_D)^{0.8} (Pr)^{1/3}$ $Nu_D = 0.023 (Re_D)^{0.8} (Pr)^n$	Colburn $L/D > 60$ $0.7 \leq Pr \leq 100$ $10^4 \leq Re_D \leq 1.210^5$ Dittus-Boelter $n=0.4$ chauffage

	$Nu_D = 0.023(Re_D)^{0.8} (Pr)^{1/2} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$ $Nu_D = 0.023(Re_D)^{1/5} (Pr)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \left[1 + \left(\frac{D}{L} \right)^{0.7} \right]$	n=0.3 refroidissement Seider et Tate McAdams Pour le régime d'entrée dans les tubes
Écoulement autour d'un cylindre	$Nu_D = 0.3 + \frac{0.62Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{1 + 0.016 \left[1 + (0.4/Pr)^{2/3} \right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282.10} \right)^{1/4} \right]$ Re Pr > 0.2	Churchill – Bernstein
Écoulement autour d'une sphère	$Nu_D = 2 + \left[0.4(Re_D)^{1/2} + 0.06(Re)^{2/3} \right] (Pr)^{0.4} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{1/4}$	Whitaker $3.5 \leq Re \leq 80.10^3$ $0.7 \leq Pr \leq 380$

4.7.2. Convection libre

Tableau 4.6. Corrélations donnant le nombre de Nu pour différentes configurations et en convection forcée

Géométrie	Corrélations	Commentaires
Plaque verticale	$Nu_L = \left[0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{1 + \left[0.492/Pr \right]^{9/16}} \right]^{8/27}$	Pour toute la plage de Rayleigh Longueur caractéristique L
Plaque horizontale	$Nu_L = 0.59Ra_L^{1/4}$ Ra : 10^4 - 10^7 $Nu_L = 0.1Ra_L^{1/3}$ Ra : 10^7 - 10^{11} $Nu_L = 0.59Ra_L^{1/4}$ Ra : 10^5 - 10^{11}	La longueur caractéristique L=A/P A : surface de la plaque P : périmètre de la plaque
Cylindre vertical	$Nu_L = \left[0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{1 + \left[0.492/Pr \right]^{9/16}} \right]^{8/27}$	$D \geq \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}$ L : Longueur du cylindre

Cylindre horizontal	$Nu_D = \left[0.6 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{1 + \left[0.559 / Pr \right]^{8/27}} \right]^2$	D : diamètre du cylindre $Ra_D \leq 10^{12}$
Sphère	$Nu_D = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}}$	D : diamètre de la sphère $Ra_D \leq 10^{11}$ $Pr \geq 0.7$

4.8. La méthodologie de résolution d'un problème de convection

Les étapes à suivre lorsqu'on veut déterminer le flux de chaleur échangé entre un fluide et une paroi solide sont :

1. Définir correctement le type de convection forcée ou libre (naturelle)
2. Spécifier les conditions géométriques du problème à résoudre (plaque plane, cylindre, sphère)
3. Spécifier une température de référence et déterminer les propriétés thermo-physiques du fluide à cette température (calculer le nombre de Prandtl).
4. Déterminer le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) à partir du nombre de Reynolds (convection forcée), nombre de Rayleigh (convection libre).
5. Calculer le nombre de Grashof pour la convection libre
6. Choisir une corrélation correspondante à la configuration étudiée pour déterminer Nusselt.
7. Calculer le coefficient de transfert de chaleur convectif h
8. Calcul du flux thermique en utilisant la formule de Newton $\Phi = hS\Delta T$

Exercices résolus "Convection thermique"

Exercice N°1

Calculer le coefficient de transmission de chaleur par convection ainsi que le flux dégagé lors de l'écoulement forcé d'une huile à la vitesse de 0.5m/s dans un tube de 10mm de diamètre et de 1m de longueur si les températures moyennes de l'huile et de la paroi sont respectivement égale à 80°C et 20°C.

Les caractéristiques de l'huile utilisée à la température à laquelle il s'écoule c'est-à-dire 80°C sont : $\rho=844\text{kg/m}^3$ $\mu= 30.8 \cdot 10^{-4}\text{kg/ms}$ $C_p= 1846 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ $\lambda= 0.108\text{W/m}^\circ\text{C}$. a la température de la paroi c'est-à-dire 20°C, la viscosité de l'huile est $\mu_p=198.2 \cdot 10^{-4}\text{kg/ms}$.

Les corrélations (régime laminaire)

$$Nu_D = 3.66 + \frac{0.0668 Re_D Pr (D/L)}{1 + 0.04 [Re_D Pr (D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \quad (1)$$

$$Nu_D = 1.86 (Re_D Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \quad (2)$$

$$Re_D Pr (D/L) > 10$$

$$Nu_D = 3.66 + \frac{0.104 Re_D Pr (D/L)}{1 + 0.016 [Re_D Pr (D/L)]^{0.8}} \quad (3)$$

$$(Re_D Pr (D/L) < 100)$$

Solution

- -Le type de convection: forcée
- La géométrie cylindrique (tube D)
- Le régime d'écoulement ?

Calcul de Re

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{844 \times 0.5 \times 0.01}{30.8 \times 10^{-4}} = 1370 < 2300 : \text{L'écoulement est laminaire}$$

- Calcul du coefficient de convection h

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{Nu \lambda}{D}$$

Détermination de h en utilisant la première corrélation

$$h = \frac{Nu\lambda}{D} = \frac{\lambda}{D} \left(3.66 + \frac{0.0668 Re_D Pr(D/L)}{1 + 0.04 [Re_D Pr(D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \right)$$

Calcul de $Re_D Pr(D/L)$

$$Re_D Pr \frac{D}{L} = Re_D \frac{\mu C_p D}{\lambda L} = 1370 \times \frac{30.8 \times 10^{-4} \times 1846 \times 0.01}{0.108 \times 1} = 721$$

$$h = \frac{Nu\lambda}{D} = \frac{0.108}{0.01} \left(3.66 + \frac{0.0668 \times 721}{1 + 0.04 [721]^{2/3}} \left(\frac{30.8}{198.2} \right)^{0.14} \right) = 134.6 \text{ W / m}^2 \text{ K}$$

$$\Phi = hS\Delta T = h \times \pi \times D \times L \times (T_f - T_p) = 134.6 \times 3.14 \times 0.01 \times 1 \times (80 - 20) = 253.7 \text{ W}$$

Détermination de h en utilisant la deuxième corrélation

Le produit $Re_D Pr(D/L) > 10$ la deuxième équation de Nu peut être appliquée

$$h = \frac{Nu\lambda}{D} = \frac{\lambda}{D} \left(Nu_D = 1.86 (Re_D Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \right) = \frac{0.108}{0.01} \left(1.86 \times 721^{1/3} \times \left(\frac{30.8}{198.2} \right)^{0.14} \right) = 138.8 \text{ W}$$

$$\Phi = hS\Delta T = h \times \pi \times D \times L \times (T_f - T_p) = 138.8 \times 3.14 \times 0.01 \times 1 \times (80 - 20) = 261.5 \text{ W}$$

Pour la troisième relation on ne peut pas l'utiliser parce que la condition n'est pas vérifiée

$$Re_D Pr(D/L) = 712 > 100 > 100$$

Calcul de l'erreur entre les résultats des deux relations (1 et 2).

$$err = \frac{138.8 - 134.6}{138.8} = 0.03 = 3\%$$

Exercice N°2

Un camion de réfrigération roule à une vitesse 128.75 km/h sur une autoroute du désert où la température de l'air est 50 ° C. Le corps du camion peut être idéalisé comme une boîte de 3 m de large, 2,1 m de hauteur et 6 m de longueur, à une température de surface de 10 ° C. Supposons que le transfert de chaleur de l'avant et l'arrière du camion peut être négligé, que le flux ne pas séparer de la surface :

Calculer :

Le taux de transfert de chaleur

La masse transportée par ce camion Si, une tonne du produit transporté nécessite 3600 W de puissance de réfrigération.

On donne pour l'air :

	0°C	10°C	30°C	50°C	70°C
$\rho_{\text{air}} \text{ (kg/m}^3\text{)}$	1.293	1.247	1.164	1.092	1.028
$\mu_{\text{air}} \text{ (kg/ms)}$	17.17×10^{-6}	17.62×10^{-6}	18.61×10^{-6}	19.57×10^{-6}	20.51×10^{-6}
$C_{p\text{air}} \text{ (J/kgK)}$	1005.374	1005.23	1005.50	1006.35	1007.542
$\lambda_{\text{air}} \text{ (W/mK)}$	0.02415	0.02495	0.02651	0.02805	0.02956

Convection forcée :

$$Nu = 0.036 Re^{0.8} Pr^{1/3} \quad Re > 5 \cdot 10^5$$

$$Nu = 0.64 Re^{0.5} Pr^{1/3} \quad Re \leq 5 \cdot 10^5$$

Convection libre :

$$Nu = \left[0.6 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2$$

Les propriétés du fluide sont prises à la température moyenne.

Solution

- Le type de convection: forcée
- La géométrie plaque plane L
- Le régime d'écoulement ?

Calcul de Re

$$V = \frac{128.75 \times 1000}{3600} = 35.76 \text{ m/s}$$

$$T_m = \frac{T_p + T_f}{2} = \frac{10 + 50}{2} = 30^\circ\text{C}$$

Les propriétés thermo-physiques à $T_m=30^\circ\text{C}$

$$\rho = 1.164 \text{ Kg/m}^3 \quad \lambda = 0.02651 \text{ W/mK} \quad \mu = 18.61 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/ms} \quad C_p = 1005.90 \text{ J/KgK}$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{1.164 \times 35.76 \times 6}{18.61 \cdot 10^{-6}} = 13.42 \cdot 10^6 > 5 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{Régime turbulent}$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{18.61 \cdot 10^{-6} \times 1005.50}{0.02651} = 0.705$$

Pour le régime turbulent $Nu = 0.036 Re^{0.8} Pr^{1/3}$

$$Nu = 0.036 Re^{0.8} Pr^{1/3} = 0.036 (13.42 \cdot 10^6)^{0.8} \times (0.705)^{1/3} = 16139.66$$

Calcul de h

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{Nu\lambda}{L} = \frac{16139.66 \times 0.02651}{6} = 71.39 \text{ W / m}^2\text{K}$$

$$\Phi = hS\Delta T = 71.39 \times (2 \times (6 \times 3) + 2 \times (6 \times 2.1)) \times (50 - 10) = 174.76 \text{ KW}$$

- La masse transportée par ce camion

$$\begin{array}{l} 3600\text{W} \rightarrow 1 \text{ tonne} \\ 174.76\text{KW} \rightarrow x \end{array} \left| \Rightarrow x = \frac{174.76 \cdot 10^3}{3600} = 48.55 \text{ tonne} \right.$$

Exercice N°3

Une plaque verticale de hauteur 200mm et de largeur 600mm dissipe de la chaleur par convection naturelle à partir d'une de ses faces dont la température moyenne est de 90 °C. L'air ambiant est à 30 °C. Déterminer la quantité de chaleur évacuée par la plaque.

On donne la corrélation de Nusselt local :

$$Nu_x = 0.52 \left(\frac{Pr}{0.95 + Pr} \right)^{0.25} (GrPr)^{1/4}$$

Solution

- Le type de convection: forcée
- La géométrie plaque plane L

Pour calculer les nombre (Pr et Gr) il faut déterminer les propriétés thermo-physiques du fluide à la température moyenne.

$$\bullet \quad T_m = \frac{T_p + T_f}{2} = \frac{90 + 30}{2} = 60^\circ\text{C}$$

Du tableau de l'exercice N°2 on peut déterminer propriétés thermo-physiques par interpolation :

$$\rho = 1.06 \text{ Kg / m}^3 \quad \lambda = 0.0288 \text{ W / mK} \quad \mu = 2.10^{-5} \text{ Kg/ms} \quad Cp = 1006.95 \text{ J / KgK}$$

- Calcul de Pr et Gr

$$Pr = \frac{\mu Cp}{\lambda} = \frac{2.10^{-5} \times 1006.95}{0.0288} \approx 0.7$$

$$Gr = \frac{\rho^2 (g \beta \Delta T) L^3}{\mu^2}$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{333} = 3.10^{-3} \text{ 1/K} \quad (T \text{ en K})$$

$$Gr_x = \frac{(1.06)^2 \times 9.81 \times 3.10^{-3} \times (90 - 30) \times (x)^3}{(2.10^{-5})^2}$$

Détermination de h_x

$$Nu_x = 0.52 \left(\frac{Pr}{0.95 + Pr} \right)^{0.25} (GrPr)^{1/4} = \frac{h_x x}{\lambda} \Rightarrow h_x = \frac{\lambda}{x} \left(0.52 \left(\frac{Pr}{0.95 + Pr} \right)^{0.25} (Gr_x Pr)^{1/4} \right) =$$

$$h_x = \frac{0.288}{x} \left(0.52 \left(\frac{0.7}{0.95 + 0.7} \right)^{0.25} \left(\frac{(1.06)^2 \times 9.81 \times 3.10^{-3} \times (90 - 30) \times (x)^3}{(2.10^{-5})^2} \times 0.7 \right)^{1/4} \right) = 2.93x^{-0.25}$$

Calcul de h moyen

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{1}{0.2} \int_0^{0.2} 2.93x^{-0.25} dx = \frac{1}{0.2} \left(2.93 \times \frac{x^{0.75}}{0.75} \right)_0^{0.2} = 5.84W / m^2 K$$

Calcul du flux dissipé :

$$\Phi = hS\Delta T = 5.84 \times (0.2 \times 0.6)(90 - 30) = 42.05W$$

Bibliographie

- [1] J. F. Sacadura. Initiation aux transferts thermiques. Technique et documentation, Lavoisier 1993.
- [2] J. L. Battaglia, A. Kuzik et J. R. Puiggali, Introduction aux transferts thermiques, Dunod 2010.
- [3] Yves JANNOT et Christian Moyne, Cours Transferts thermiques - 2 ème année Ecole des Mines Nancy. Edilivre, 2012
- [4] Y. A. Cengel and A.J. Ghajar, Heat and Mass Transfer- Fundamentals & Applications. Fifth edition, Mc Graw Hill, 2015.
- [5] M. N Özisik. Heat conduction. Second edition. John Wiley & Sons, 1993. [6] J. Krabol, Transfert de chaleur, Masson, 1990.
- [7] F. Kreith, Raj M. Manglik and M. S. Bohn. Principles of Heat Transfer. Seventh edition. Cengage Learning, 2011.
- [8] Rojer Itterbeek. Cours transferts thermiques. Disponible sur le lien : <https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-transferts-thermiques>, 2020.
- [9] C.P. Cothandaraman. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Revised third edition. New Age International (P) Ltd., Publishers, 2006
- [10] Theodore I. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. Dewitt. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Seventh edition. New York : John Wiley & Sons, 2011.
- [11] N. V. Suryanaraya. Engineering Heat Transfer. St. Paul, Minn.: West, 1995.
- [12] M. F. Modest. Radiative Heat Transfer. Third edition, New York: McGraw-Hill, 2013.
- [13] C. Balaji, Essentials of Radiation Heat Transfer. Ane Books Pvt. Ltd-Wiley, 2014
- [14] J. R. Howell, M. P. Mengüç and R. Siegel. Thermal Radiation Heat Transfer. Sixth edition. CRC Press Taylor & Francis Group, 2016.
- [15] Rajendra Karwa. Heat and mass transfer. Springer, 2007.
- [16] Mahesh M. Rathore. Engineering heat and mass transfer. Laxmi Publications (P) Ltd. Third edition, 2015.
- [17] R.K. Rajput .Heat and Mass Transfer. S Chand & Company Ltd, revised edition, 2011.
- [18] Jean Taine, Franck Enguehard et Estelle lacona. Transferts thermiques : introduction aux transferts d'énergie-Cours et exercices d'application. 5 eme édition. Dunod, 2014.
- [19] Je-Chin Han. Analytical heat transfer. CRC Press Taylor & Francis Group, 2012.