

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : statistique

Par

Ben Hamza Oulaia

Titre :

## Application des Copules dans la Modélisation de la Dépendance en Finance et Assurance

Membres du Comité d'Examen :

|                          |      |              |
|--------------------------|------|--------------|
| Dr. Abdelli Jihane       | UMKB | Encadreur    |
| Dr. Zouaoui Nour Elhouda | UMKB | Président    |
| Dr. Dhiabi Samra         | UMKB | Examinatrice |

**Soutenu Publiquement le 02/06/2025**

## Dédicace

*À celui qui m'a appris la lettre unique.*

À celui qui a planté dans mon cœur l'amour de la connaissance et m'a donné à  
boire à la source de la compassion.

À ceux qui ont travaillé dur, veillé tard et fait des sacrifices, à mes chers parents :

Mon père Abdelhamid et ma mère Dalila.

À ceux qui m'ont soutenu à toutes les étapes de la vie :

Mes frères : Mohammed Bachir et Abderaouffe

Mes sœurs : Assia, Wafa, Ritedje et Marya.

À ceux qui n'ont jamais hésité à m'en courager et à toujours être à mes côtés, à  
mon cousin : Abdelbaki.

À mes amis qui ont partagé avec moi le chemin de la connaissance et de la  
fatigue : Widad, Samah, Nedjwa, Amira, Amel, Assma et Bariza.

## REMERCIEMENTS

*Avant tout, je rends grâce à Dieu, source de toute connaissance et de toute réussite.*

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire, Dr **Abdelli Jihane**, pour son encadrement précieux, sa disponibilité constante et ses conseils avisés qui ont grandement contribué à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements les plus sincères vont également aux Dr. **Djebrane Yahia** et Dr. **Benatia Fateh**, pour leur soutien, leurs encouragements et leurs remarques pertinentes qui m'ont guidé tout au long de ce parcours.

Je n'oublie pas de remercier l'ensembles du corps enseignant de "**Département de Mathématiques**" pour la qualité de leur enseignement et leur accompagnement tout au long des mes années d'études.

Enfin, j'adresse ma reconnaissance la plus chaleureuse à ma famille et à mes proches pour leur soutien moral et leur confiance indéfectible, sans lesquels cette aventure n'aurait pas été possible

# Table des matières

|                                                 |            |
|-------------------------------------------------|------------|
| <b>Remerciements</b>                            | <b>ii</b>  |
| <b>Table des matières</b>                       | <b>iii</b> |
| <b>Table des figures</b>                        | <b>v</b>   |
| <b>Liste des tables</b>                         | <b>vi</b>  |
| <b>Introduction</b>                             | <b>1</b>   |
| <b>1 Théorie des copules</b>                    | <b>3</b>   |
| 1.1 Copules bivariées . . . . .                 | 3          |
| 1.2 Théoreme de Sklar . . . . .                 | 5          |
| 1.3 Propriétés d'une copule . . . . .           | 8          |
| 1.3.1 Propriétés Fondamentales . . . . .        | 8          |
| 1.3.2 Propriétés analytiques . . . . .          | 9          |
| 1.4 Densité d'une Copule . . . . .              | 10         |
| 1.4.1 Relation avec la densité jointe . . . . . | 11         |
| 1.5 Famille de copules . . . . .                | 12         |
| 1.5.1 Copule Elliptique . . . . .               | 12         |

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.2 Copule Archimédiennes . . . . .                        | 14        |
| 1.5.3 Copules des valeurs extrêmes bivariées (VEB) . . . . . | 16        |
| <b>2 Estimation et ajustement des copules</b>                | <b>18</b> |
| 2.1 Méthodes d'estimation des copules . . . . .              | 18        |
| 2.1.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) . . . . .     | 18        |
| 2.1.2 Méthode des Moments . . . . .                          | 26        |
| 2.2 Critères d'ajustement et sélection de copule . . . . .   | 30        |
| 2.2.1 Goodness-of-fit (GoF) . . . . .                        | 30        |
| 2.2.2 Critères de sélection . . . . .                        | 32        |
| 2.2.3 Validation Graphique des Copules . . . . .             | 33        |
| <b>3 Application des copules en finance et assurance</b>     | <b>35</b> |
| 3.1 Application . . . . .                                    | 35        |
| <b>Conclusion</b>                                            | <b>39</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                         | <b>39</b> |
| <b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>                  | <b>42</b> |

# Table des figures

|     |                                                                                                       |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Densité $c_\rho$ de trois copules Gaussiennes selon $\rho$ .( <i>Indépendance</i> $\rho =$            |    |
|     | $0$ , <i>Dép moyenne</i> $\rho = 0.5$ , <i>Dép Forte</i> $\rho = 0.9$ ). . . . .                      | 13 |
| 1.2 | Densité $c_{\rho,\nu}$ de trois copules de Student Selon $\rho$ avec $\nu = 5$ .( <i>Indépendance</i> |    |
|     | $\rho = 0$ , <i>Dép moyenne</i> $\rho = 0.5$ , <i>Dép Forte</i> $\rho = 0.9$ ). . . . .               | 14 |
| 1.3 | Densité $c_\theta(u, v)$ de trois copules Archimédiennes de paramètres $\theta$ .                     |    |
|     | ( <i>Copule de Clayton</i> , <i>Copule de Gumbel</i> , <i>Copule de Frank</i> ). . . . .              | 16 |
| 2.1 | Graphiques des générateurs d'Archimède répertoriés dans le tableau (2.1)                              | 26 |
| 3.1 | Nuages de points de 500 pseudo-observations tirées des rendements de                                  |    |
|     | quatre indices boursiers Européens . . . . .                                                          | 36 |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                  |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Copule des valeurs extrême les plus utilisées                                    | 17 |
| 2.1 | Famille d'Archimède avec générateur un paramètre couramment uti-                 |    |
|     | lisés et transformées inverses de Laplace-Stieltejes                             | 26 |
| 3.1 | Estimations de la matrice tau de Kendall à partir des rendements de              |    |
|     | quatre indices boursiers Européens.                                              | 36 |
| 3.2 | Valeur p du test bootstrap d'adéquation des copules de Gumbel, Clay-             |    |
|     | ton, gaussienne et t de dimension 2, avec 'method' = "Sn", 'estim.method'="itau" | 38 |
| 3.3 | Pramètre ajusté de la copula t correspondant au tau de Kendall avec              |    |
|     | v=1                                                                              | 38 |
| 3.4 | Mesure de risque du CCTE pour t=0.9 avec une copule t                            | 38 |

# Introduction

**L**a gestion des risques en finance et en assurance repose sur l'étude des relations entre différentes variables. Les méthodes classiques, qui utilisent la corrélation linéaire, ne suffisent pas toujours à bien représenter ces relations, surtout en période de crise où les événements extrêmes deviennent plus importants.

Les copules, introduites par Sklar (1959), permettent de modéliser la structure de dépendance indépendamment des distributions marginales. Elles offrent ainsi une approche flexible et robuste pour analyser les interactions entre actifs financiers, modéliser la coccurrence des sinistres en assurance et améliorer les mesures de gestion des risques.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres afin d'expliquer progressivement l'application des copules en finance et en assurance.

Le premier chapitre est consacré aux bases théoriques des copules. Nous commencerons par définir ce qu'est une copule, puis nous présenterons ses principales propriétés ainsi que les différentes familles existantes. Cela permettra de mieux comprendre comment ces fonctions sont utilisées pour modéliser la dépendance entre plusieurs variables.

Le deuxième chapitre abordera les méthodes permettant d'estimer et d'ajuster les copules aux données issues du domaine financier et assurantiel. Nous verrons comment

choisir une copule adaptée à un jeu de données, quelles techniques sont employées pour estimer ses paramètres, et comment évaluer la qualité de l'ajustement.

Enfin, dans ce troisième chapitre est consacré à une application des copules dans le domaine financier. Nous aborderons dans un premier temps les notions élémentaires concernant les risques financiers et leurs mesures unidimensionnelles. Des exemples concrets de calcul de ces mesures seront développés, en référence aux modèles probabilistes les plus utilisés en pratique.

# Chapitre 1

## Théorie des copules

La théorie des copules est un cadre mathématique permettant de modéliser la dépendance entre des variables aléatoires, indépendamment de leurs distributions marginales. Introduite par Sklar en 1959, elle repose sur la décomposition d'une distribution jointe en ses marges et une fonction de copule décrivant leur liaison. Ce chapitre explore les fondements théoriques des copules, leurs propriétés et leurs familles.

### 1.1 Copules bivariées

Les copules bivariées permettent de modéliser la dépendance entre deux variables aléatoires (va.) en séparant leur structure de dépendance de leurs distributions marginales.

**Définition 1.1.1 (Fonction de répartition)** *Soit  $X$  une va. à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . La fonction de répartition de  $X$  notée  $F$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

**Définition 1.1.2 (Fonction de répartition jointe)** *Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléa-*

toire à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ . La loi jointe du copule  $(X, Y)$  notée  $H(x, y)$  :

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y). \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.3** On appelle copule bivariable, toute fonction  $C$  définie de  $\mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$  avec  $\mathbb{I} = [0, 1]$ , qui possède les propriétés suivant :

1.  $\forall u \in [0, 1], C(u, 0) = C(0, u) = 0.$
2.  $\forall u, v \in [0, 1], C(u, 1) = u, \text{ et } C(1, v) = v.$
3.  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$  si  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  alors

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

**Exemple 1.1.1** La fonction  $M(u, v) = \min(u, v), \forall u, v \in [0, 1]$  définit une copule ;

1.  $\forall u \in [0, 1],$

$$C(u, 0) = C(0, u) = \min(u, 0) = 0.$$

2.  $\forall u, v \in [0, 1],$

$$C(u, 1) = \min(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = \min(1, v) = v.$$

3.  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1] :$

– Si  $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 :$

$$\begin{aligned} & \min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) \\ &= u_2 - u_2 - u_1 + u_1 = 0. \end{aligned}$$

– Si  $v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2$  :

$$\begin{aligned} & \min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_1) + \min(u_1, v_1) \\ &= v_2 - v_1 - v_2 + v_1 = 0. \end{aligned}$$

– Si  $u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2$  :

$$\begin{aligned} & \min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_1) + \min(u_1, v_1) \\ &= u_2 - v_1 - u_1 + u_1 \\ &= u_2 - v_1 \geq 0. \end{aligned}$$

*Par conséquent  $M$  est une copule.*

De la même façon, on peut montrer que les fonctions :  $\forall u, v \in [0, 1]$ ,  $W(u, v) = \max(u, v)$ , et  $\Pi(u, v) = uv$ , définissent aussi des copules.

## 1.2 Théoreme de Sklar

Ce théorème est essentiel dans la théorie des copules. C'est Sklar qui a formulé cela en 1959, où il expose la relation déterminée par la copule  $C$ , dérivée de la distribution jointe  $H$ , cette relation lie les fonction de distribution marginales univariées  $F$  et  $G$  à la distribution bivariée globale  $H$ .

**Théorème 1.2.1 (Sklar, 1959)** *Soit  $H$  une fonction de répartition jointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  avec fonctions de répartition marginales  $F_X$  et  $F_Y$ . Alors, il existe une copule  $C$  telle que :*

$$H(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Si  $F_X$  et  $F_Y$  sont continues, alors la copule  $C$  est unique. Dans le cas général,  $C$  est déterminée de manière unique sur l'image de  $F_X \times F_Y$ .

**Preuve. Existence :** Soit  $U = F_X(X)$  et  $V = F_Y(Y)$ . Par construction,  $U$  et  $V$  suivent une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On définit la fonction de copule  $C$  comme :

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v). \quad (1.3)$$

Par transformation inverse, on retrouve  $H(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ .

**Unicité :** Si  $F_X$  et  $F_Y$  sont continues, leurs fonctions quantiles existent, ce qui garantit l'unicité de  $C$ . Si elles ne sont pas continues,  $C$  peut être non unique sur certains points. ■

**Définition 1.2.1** Soit  $F$  une fonction de répartition univarié. Le quantile de  $F$  (l'inverse généralisé) est une fonction, notée  $F^{-1}$  de domaine de définition  $\mathbf{I}$ , telle que

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

A l'aide de la définition (1.2.1), nous pouvons montrer la théorème (1.2.1).

**Preuve.**

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(F_X^{-1}(U_1) \leq x, F_Y^{-1}(U_2) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_X(x), U_2 \leq F_Y(y)) \\ &= C(F_X(x), F_Y(y)). \end{aligned}$$

A partir de théorème de Sklar on peut extraire une définition de copules dépende de notion de variable aléatoire comme suit, soient  $F_X, F_Y$  les fonctions de répartition marginales de deux va.  $X$  et  $Y$  respectivement. ■

**Définition 1.2.2** Une copule  $C$  bivariable définie sur  $\mathbb{I}^2$  est une fonction de répartition jointe et dont les marginales  $F_X$  et  $F_Y$  sont uniformes sur  $\mathbb{I}$ .

**Corollaire 1.2.1 (Inverse de théorème de Sklar)** Soit  $H$  une fonction de répartition 2-dimensionnelle de fonction de répartition marginales  $F_X$  et  $F_Y$ , alors la copule  $C$  associée à  $H$  est donnée par :

$$C(u, v) = H(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.$$

**Exemple 1.2.1** Soit  $(X, Y)$  un couple de va. dont la fonction jointe  $H$  est définie pour  $(x, y) \in [0, \infty[ \times [0, \infty[$ , et  $\theta > 0$

$$H(x, y) = \exp\left\{-\left[(x + y) - (x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}\right]\right\},$$

et admet pour marginales

$$F_X(x) = \exp(-x), \text{ et } F_Y(y) = \exp(-y),$$

nous avons

$$F_X^{-1}(u) = -\ln u, \text{ et } F_Y^{-1}(v) = -\ln v, \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$$

d'après le Corollary (1.2.1) la copule associée est exprimée comme suite :  $\forall \theta \geq 1$

$$C(u, v) = uv \exp\left\{-\left[(-\ln u^{-\theta}) + (-\ln v^{-\theta})\right]^{-\frac{1}{\theta}}\right\}.$$

C'est la copule de Glambos.

## 1.3 Propriétés d'une copule

On considère  $X$  et  $Y$  comme deux va. continues ayant une fonction de répartition conjointe  $F$  et des fonctions marginales  $F_X$  et  $F_Y$ , avec  $C$  étant la copule associée. Dans ce qui suit, nous allons exposer quelques caractéristiques relatives aux copules. Alors La **copule**  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  satisfait les propriétés suivantes.

### 1.3.1 Propriétés Fondamentales

1. **Bornes de Fréchet-Hoeffding** : Pour toute copule  $C$ , on a :

$$W(u, v) = \max(0, u + v - 1) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v). \quad (1.4)$$

- La borne supérieure  $M = C^+(u, v) = \min(u, v)$  correspond à la dépendance parfaite.
- La borne inférieure  $W = C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$  correspond à l'indépendance maximale

2. **Marginales** : Pour tout  $u, v \in [0, 1]$  :

$$C(u, 1) = u \quad \text{et} \quad C(1, v) = v. \quad (1.5)$$

3. **Monotonie** :  $C$  est une fonction croissante, c'est-à-dire que pour tout  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$  :

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.6)$$

4. **Invariance par transformation croissante** : Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires et  $h_1, h_2$  sont des fonctions croissantes, alors la copule de  $(h_1(X), h_2(Y))$  est la même que celle de  $(X, Y)$ .

5. **Copule indépendante** : Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors leur copule est donnée par :

$$C(u, v) = uv. \quad (1.7)$$

Les bornes de Fréchet-Hoeffding sont utilisées pour caractériser les limites extrêmes de la dépendance entre variables aléatoires dans la théorie des copules. Elles permettent d'évaluer si une copule donnée respecte les contraintes fondamentales de cohérence et d'identifier les cas de dépendance parfaite ou d'indépendance.

### 1.3.2 Propriétés analytiques

1. **Continuité** : Soit  $C$  une copule,  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$  avec  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ , on a

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

2. **Ordre** : Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux copules. On dit que  $C_1 \preceq C_2$  si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v).$$

3. **Symétrie** : Une copule  $C$  est dit symétrique si

$$C(u, v) = C(v, u).$$

4. **Convexité et concavité** : On dit que  $C$  est conexe pour tout  $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{I}$

$$C(\alpha a + (1 - \alpha)c, \alpha b + (1 - \alpha)d) \leq \alpha C(a, b) + (1 - \alpha)C(c, d).$$

et on dit que  $C$  est concava pour tout  $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{I}$

$$C(\alpha a + (1 - \alpha)c, \alpha b + (1 - \alpha)d) \geq \alpha C(a, b) + (1 - \alpha)C(c, d).$$

5. **Harmonique** :  $C$  est harmonique dans  $\mathbf{I}^2$  si :

$$\nabla^2 C(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial v^2} = 0.$$

6. **Homogénéité** :  $C$  est homogène de degré  $k$  si pour tout  $u, v \in \mathbb{I}$ ,  $\exists k \in \mathbb{R}$  :

$$C(\lambda u, \lambda v) = \lambda^k C(u, v).$$

7. **Différentiabilité** : Les dérivées partielles  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  et  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  existent et sont croissantes sur  $\mathbb{I}$ .

8. **Théorème d'invariance** : On dit que la copule  $C_{X,Y}$  est invariante par transformations strictement croissantes de deux va.'s continues  $X$  et  $Y$  de marginales  $F_X$  et  $F_Y$  si

$$C_{\alpha(X), \beta(Y)} = C_{X,Y},$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions strictement croissantes.

## 1.4 Densité d'une Copule

La densité de copule est un outil clé en statistique et en finance pour modéliser les dépendances entre variables aléatoires. Son utilisation permet de construire des modèles flexibles tout en gardant les distributions marginales indépendantes du choix de la copule.

Soit  $C(u, v)$  une copule définissant la fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires  $(X, Y)$ . Si  $C$  est suffisamment régulière (c'est-à-dire absolument continue), alors elle admet une densité, appelée **densité de copule**, définie comme suit :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}, \quad \text{pour } (u, v) \in (0, 1)^2. \quad (1.8)$$

### 1.4.1 Relation avec la densité jointe

Si  $X$  et  $Y$  possèdent des densités marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ , alors la densité jointe  $f_{X,Y}(x, y)$  s'exprime en fonction de la densité de copule comme :

$$f_{X,Y}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y). \quad (1.9)$$

Cette relation est fondamentale en modélisation statistique, car elle permet de séparer la structure de dépendance (décrite par  $c(u, v)$ ) des distributions marginales.

**Exemple 1.4.1** *On a la copule produit :*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \Pi(u, v) = uv \\ \implies c(u, v) &= \frac{\partial^2 \Pi(u, v)}{\partial u \partial v} = 1. \end{aligned}$$

*Cette copule caractérise l'indépendance entre va. car la densité de copule dans ce cas s'écrit par :*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

**Exemple 1.4.2 (Copule Gaussienne)** *La copule gaussienne est définie à partir d'une fonction de répartition jointe normale avec une matrice de corrélation  $R$ . Sa densité est donnée par :*

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left( \frac{2\rho\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v) - (\Phi^{-1}(u))^2 - (\Phi^{-1}(v))^2}{2(1 - \rho^2)} \right), \quad (1.10)$$

où  $\Phi^{-1}$  désigne la fonction quantile de la loi normale standard et  $\rho$  est le coefficient de corrélation.

## 1.5 Famille de copules

### 1.5.1 Copule Elliptique

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques. On a deux classes qui sont les plus utilisées dans la famille des copules elliptiques ; la copule Gaussienne et la copule de Student .

**Définition 1.5.1** *On appelle copule elliptique tout copule de la forme suivant :*

$$C_{\varrho}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,2}^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 - 2\varrho xy + y^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right) dx dy = H_{\varrho}(\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)),$$

- $\varrho$  : coefficient de corrélation qui appartient à l'intervalle  $[-1,1]$ .
- $\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)$  : fct quantiles des va  $X$  et  $Y$  respectivement
- $H_{\varrho}$  : distribution jointe des va  $X$  et  $Y$ .

#### Copule Gaussienne (Normale)

La copule Gaussienne est définie par la forme suivant :

$$\begin{aligned} C_{\varrho}(u, v) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(\frac{x^2 - 2\varrho xy + y^2}{2\sqrt{1-\varrho^2}}\right) dx dy \\ &= \Phi_{\varrho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \end{aligned}$$

où  $\Phi_{\varrho}$  est la fd jointe de la loi normale et  $\Phi^{-1}$  la fonction quantile de la loi normale standar  $N(0, 1)$ .

On retrouve les cas particuliers suivant comme cas limites :

$$C_{-1} = W, C_0 = \Pi, C_1 = M.$$

La figure (1.1) montre le graphique de la densité de trois copules Gaussienne qui

différent selon la valeur du  $\rho$ .

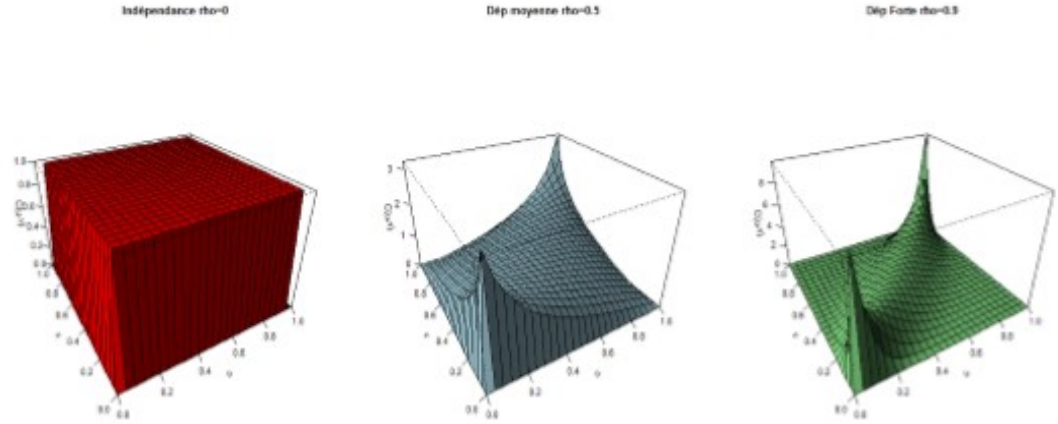


FIG. 1.1 – Densité  $c_\rho$  de trois copules Gaussiennes selon  $\rho$ . (Indépendance  $\rho = 0$ , Dép moyenne  $\rho = 0.5$ , Dép Forte  $\rho = 0.9$ ).

### Copule de Student

La copule Student est définie par la forme suivant :

$$\begin{aligned} C_{\rho,v}(u,v) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} 1 + \left( \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)} \right)^{-\left(\frac{v}{2}+1\right)} dx dy \\ &= T_{\rho,v}(T_v^{-1}(u), T_v^{-1}(v)), \end{aligned}$$

où

- $T_{\rho,v}$  : la fonction de distribution jointe de la loi Student à  $v$  degrés de liberté.
- $T_v^{-1}$  : la fonction inverse de la loi Studet standar.

La figure (1.2) montre le graphique de la densité de trois copules de Student de de-  
grés de liberté  $v = 5$  qui differt par leur valeur de  $\rho$ .

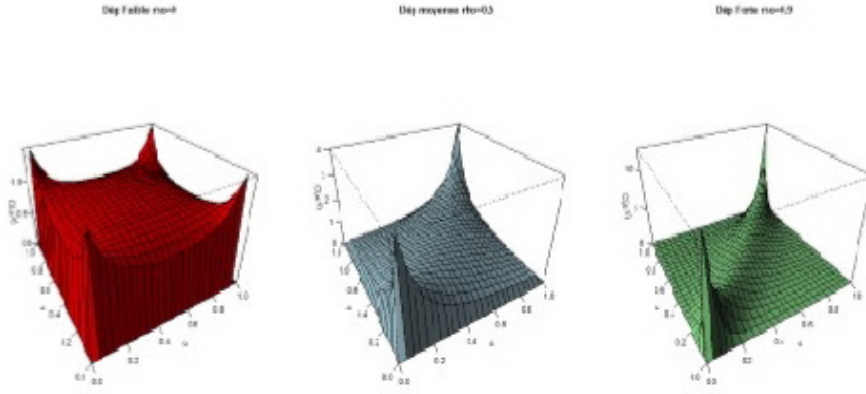


FIG. 1.2 – Densité  $c_{\varrho, \nu}$  de trois copules de Student Selon  $\varrho$  avec  $\nu = 5$ . (Indépendance  $\rho = 0$ , Dép moyenne  $\rho = 0.5$ , Dép Forte  $\rho = 0.9$ ).

### 1.5.2 Copule Archimédiennes

**Définition 1.5.2** On appelle copule Archimédiennes toute copule de la forme

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

où  $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue strictement décroissante telle que  $\varphi(1) = 0$ . La fonction  $\varphi$  est appelée générateur son inverse généralisée noté  $\varphi^{[-1]}$  est

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases},$$

si  $\varphi(0) = \infty$ , alors  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

La copule de Gumbel est définie comme suit :

$$\forall \theta \geq 0 : C_{\theta}(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^{\theta} + (\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}.$$

Son générateur est  $\varphi_{\theta}(t) = (-\ln t)^{\theta}$ .

### Copule de Clayton

La copule de Clayton est définie comme suit :  $\forall \theta \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

de générateur est

$$\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1).$$

### Copule de Frank

La copule de Frank est définie comme suit :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Son générateur est

$$\varphi_\theta(t) = -\ln \left( \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Le copule Joe est définie comme suit :  $\forall \theta \geq 1$

$$C_\theta(u, v) = 1 - \left[ (1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta (1-v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Son générateur est  $\varphi_\theta(t) = -\ln \left( 1 - (1-t)^\theta \right).$

**Remarque 1.5.1** Une autre caractérisation des copules Archimédiennes peut se faire à l'aide de la fonction de Kendall,

$$t \in \mathbf{I}; K(t) = \mathbb{P}(C(U, V) \leq t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}.$$

La figure 1.3 représente les densités de trois copules Archimédiennes de paramètres  $\theta$ .

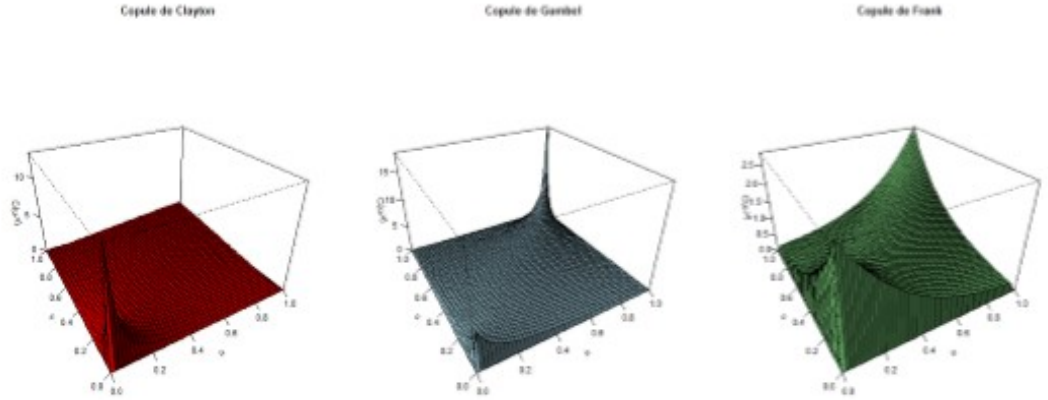


FIG. 1.3 – Densité  $c_\theta(u, v)$  de trois copules Archimédiennes de paramètres  $\theta$ . (*Copule de Clayton, Copule de Gumbel, Copule de Frank*).

### 1.5.3 Copules des valeurs extrêmes bivariées (VEB)

**Définition 1.5.3** On appelle *Copules des valeurs extrêmes bivariées (VEB)* tout copule de la forme suivant :

$$\forall n > 0 : C(u^n, v^n) = C^n(u, v)$$

**Exemple 1.5.1** La copule de Gumbel est une copule des VEB car

$$\begin{aligned} C(u^n, v^n) &= \exp \left\{ -[(-\ln u^n)^\theta + (-\ln v^n)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -[n^\theta ((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -n[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \left( \exp \left\{ [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \right)^n \\ &= C^n(u, v). \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous présente quelques familles des copules des valeurs extrême :

|                   |                  |                                                                                                                                              |
|-------------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| copule            | $\theta$         | $C(u, v).$                                                                                                                                   |
| $\Pi$             | /                | $uv.$                                                                                                                                        |
| Gumbel A          | $[1, +\infty[$   | $\exp \left\{ - \left( \tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$                                             |
| Gumbel B          | <b>I</b>         | $uv \exp \left\{ \theta \left( \frac{uv}{\tilde{u} + \tilde{v}} \right) \right\}.$                                                           |
| Galambos          | $[0, +\infty[$   | $uv \exp \left\{ \left( \tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right\}.$                                     |
| Logistique de Joe | $[0, +\infty[^2$ | $\exp \left\{ - \left( \tilde{u}^{\theta_1} + \tilde{v}^{\theta_1} - V(\tilde{u}, \tilde{v}; \theta) \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \right\}.$ |
| Marshall-Olkin    | <b>I</b>         | $u^{1-\theta_1} v^{1-\theta_2} \min \left( u^{\theta_1}, v^{\theta_2} \right).$                                                              |

TAB. 1.1 – Copule des valeurs extrême les plus utilisées

où

- $\tilde{u} = -\ln u$ .et  $\tilde{v} = -\ln v$ .
- $\theta = (\theta_1, \theta_2).$
- $V(\tilde{u}, \tilde{v}; \theta) = \left( \tilde{u}^{\theta_1 \theta_2} + \tilde{v}^{-\theta_1 \theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}}.$

# Chapitre 2

## Estimation et ajustement des copules

La modélisation de la dépendance entre variables nécessite une estimation précise des copules. Cette section présente les principales méthodes d'estimation et les critères d'ajustement permettant de choisir le modèle le plus adapté aux données financières et assurantielles.

### 2.1 Méthodes d'estimation des copules

#### 2.1.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance (MV)

L'estimation du maximum de vraisemblance est une technique directe d'optimisation visant à déterminer conjointement les paramètres marginaux et de copule. Cette approche de maximisation directe est souvent utilisée pour déterminer l'estimateur de copule. L'estimateur du maximum de vraisemblance est aussi le plus efficace pour le paramètre de dépendance de la copule.

**Définition 2.1.1** *Soit deux vecteurs de variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Les fonctions*

de distribution marginales sont  $F_X(x; \alpha_1)$  et  $G_Y(y; \alpha_2)$  respectivement avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est un vecteur de paramètres. Nous supposons que les fonctions de densité marginales existent et seront notées  $f_X(x; \alpha_1)$  et  $g_Y(y; \alpha_2)$ . Nous supposons aussi que la fonction de copule  $C$  appartient une famille paramétrique, et sera notée  $C(., ., \beta)$  où  $\beta$  est un vecteur de paramètre. Le vecteur de paramètre à estimer est  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ . La distribution conjointe peut être écrite comme suit :

$$C(u, v; \theta) = C_\theta [F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta] = H(x, y; \theta).$$

La fonction de densité conjointe est :

$$\begin{aligned} h(x, y; \theta) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x, y; \theta) \\ &= \frac{\partial^2 C(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta)}{\partial F_X(x; \alpha_1) \partial G_Y(y; \alpha_2)} \frac{\partial F_X(x; \alpha_1)}{\partial x} \frac{\partial G_Y(y; \alpha_2)}{\partial y}, \end{aligned}$$

alors

$$h(x, y; \theta) = c(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta) f_X(x; \alpha_1) g_Y(y; \alpha_2), \quad (2.1)$$

où

$$c(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta) = c(u, v; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \theta).$$

Avec  $c$  est la densité associée à  $C$ .

Les étapes impliquées dans l'estimation de MV sont décrites comme suit :

**Étape 1 :** Trouvez la fonction de vraisemblances de l'équation 2.1 avec les variable aléatoires  $\{(x_i)\}_{i=1}^n$  et  $\{(y_i)\}_{i=1}^n$  s'écrivent comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n c[F_X(x_i, \alpha_1), G_Y(y_i, \alpha_2); \beta] f_X(x_i, \alpha_1) g_Y(y_i, \alpha_2). \quad (2.2)$$

**Étape 2 :** Trouvez la fonction log-vraisemblance de l'équation 2.2. La forme log-vraisemblance est :

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c[F_X(x_i; \alpha_1), G_Y(y_i; \alpha_2); \beta] + \left[ \sum_{i=1}^n \log f_X(x_i; \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \log g_Y(y_i; \alpha_2) \right]. \quad (2.3)$$

**Étape 3 :** Maximiser la fonction de log-vraisemblance de la copule complète( Eq 2.3) avec une expression comme ci-dessous :

$$\hat{\theta}^{MV} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta),$$

où  $\Theta$  est l'espace des paramètres.  $\hat{\theta}^{MV}$  est l'estimateur du maximum vraisemblance si :

$$l(\hat{\theta}^{MV}) \geq l(\theta), \forall \theta \in \Theta.$$

On peut montrer que  $\hat{\theta}^{MV}$  a la propriété de normalité asymptotique et on a :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^{MV} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta_0))$$

avec  $I(\theta_0)$  la matrice d'information de Fisher.

### Maximum de vraisemblance pour les copules Archimédiennes

**Définition 2.1.2** Une copule Archimédiennes  $C$  admet une densité  $c$  si et seulement si  $\psi^{(d-1)}$  existe et est absolument continue sur  $(0, \infty)$ . Dans ce cas,  $C$  est donné par

$$C(u) = \psi^{(d)}(t(u)) \prod_{j=1}^d -(\psi^{-1})'(u_j), \quad (2.4)$$

où

$$t(u) = \sum_{j=1}^d \psi^{-1}(u_j),$$

Notons que pour calculer la log-densité, il est pratique d'écrire  $c$  comme

$$c(u) = (-1)^{\psi^{(d)}(t(u))} \prod_{j=1}^d -(\psi^{-1})'(u_j).$$

L'expression de la vraisemblance pour la copule Archimédienne de générateur  $\psi$  est donnée par :

$$L(\theta, u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^d c_{\theta}(u_i) \text{ et } l(\theta, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n l(\theta; u_i),$$

où

$$l(\theta; u_i) = \log c_{\theta}(u_i) = \log((-1)^{d\psi_{\theta}^{(d)}(t_{\theta}(u))}) + \sum_{j=1}^d \log(-(\psi^{-1})'(u_j)).$$

Ici l'indice  $\theta$  de  $t(u)$  est utilisé pour souligner la dépendance de  $t(u)$  sur  $\theta$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(u_1, \dots, u_n)$  peut donc être trouvé en résolvant le problème d'optimisation [\[11\]](#).

$$\hat{\theta}_n = \arg \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta, u_1, \dots, u_n).$$

**Exemple 2.1.1 (Copule Gaussienne multivariée)** Soit  $R$  une matrice symétrique définie positive avec  $\text{diag}(R) = (1, \dots, 1)$ ,  $R$  la distribution normale multivariée standardisée avec matrice de corrélation  $R$ . [\[8\]](#). La copule gaussienne multivariée  $\Pi$  est donné comme suit :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

avec la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}X'R^{-1}X\right) = c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_j^2\right)\right).$$

Nous concluons que :

$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{\left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} X' R^{-1} X\right)}{\prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right) \right)}.$$

Soit  $u_j = \Phi(x_j)$ ,  $x_j = \Phi^{-1}(u_j)$  et on peut réécrire comme suit :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varsigma' (R^{-1} - I) \varsigma\right).$$

où  $\varsigma = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))'$ . L'expression de la fonction log-vraisemblance est :

$$l(\theta) = -\frac{T}{2} \log |R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' (R^{-1} - I) \varsigma_t.$$

$\theta$  est l'ensemble de tout les paramètres  $R$  et  $\varsigma_t = (\Phi^{-1}(u_{1t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{nt}))'$ .

L'estimateur de maximum de vraisemblance de  $R$  est donné par :  $\hat{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' \varsigma_t$ .

## Estimation par maximum de vraisemblance de quelques copules

### Le copule de Gumbel-Barnet

Elle est définie par :

$$C(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)), 0 \leq \theta \leq 1.$$

La fonction de densité :

$$c(u, v) = \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)) [(\theta \log(1 - v) - 1)(\theta \log(1 - u) - 1) - \theta].$$

La fonction de vraisemblance :

$$L(u, v; \theta) = \prod_{i=1}^n \exp(-\theta \log(1 - u_i) \log(1 - v_i)) ((\theta \log(1 - u_i) - 1)(\theta \log(1 - v_i) - 1) - \theta).$$

La fonction log de vraisemblance :

$$l(u, v; \theta) = -\sum_{i=1}^n \theta \log(1 - u_i) \log(1 - v_i) + \sum_{i=1}^n \log((\theta \log(1 - u_i) - 1)(\theta \log(1 - v_i) - 1) - \theta). \quad (2.5)$$

Etant donné qu'il n'existe pas de méthode analytique pour obtenir le maximum de l'équation (2.5), il est nécessaire d'utiliser des algorithmes numériques pour approximer la solution. [16].

### Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern

Elle est définie par :

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1].$$

La fonction de densité :

$$c(u, v) = (1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)).$$

La fonction de vraisemblance :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (1 + \theta(1 - 2u_i)(1 - 2v_i)).$$

La fonction log de vraisemblance :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(1 + \theta(1 - 2u_i)(1 - 2v_i)).$$

### La copule de Clayton

Elle est définie par :

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}, \quad \theta \in [-1, +\infty[ \setminus \{0\}.$$

La fonction de densité :

$$c(u, v) = (\theta + 1) (uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2}.$$

La fonction de vraisemblance :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta + 1) (v_i u_i)^{-\theta-1} (u_i^{-\theta} + v_i^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2}.$$

La fonction log de vraisemblance :

$$l(\theta) = n \log (\theta + 1) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \log (u_i v_i) - \left( \frac{1}{\theta} + 2 \right) \sum_{i=1}^n (u_i^{-\theta} + v_i^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2}.$$

### Copule de Frank

Elle est définie par :

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)} \right).$$

La densité :

$$c(u, v) = \frac{\theta (1 - \exp(-\theta)) \exp(-\theta(v + u))}{[(1 - \exp(-\theta)) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)]^2}.$$

La fonction de vraisemblance :

$$\begin{aligned} L(\theta) = & \prod_{i=1}^n \theta (1 - \exp(-\theta)) \exp(-\theta(u + v)) \\ & \times [(1 - \exp(-\theta)) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)]^{-2}. \end{aligned}$$

La fonction log de vraisemblance :

$$\begin{aligned}
 l(\theta) = & n(\log(\theta) + \log(1 - \exp(-\theta))) \\
 & - \theta \sum_{i=1}^n (u + v) \\
 & - 2 \sum_{i=1}^n \log [1 - \exp(-\theta) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)].
 \end{aligned}$$

### Estimation du maximum de vraisemblance simulée

**Définition 2.1.3** *Si les dérivées du générateur d'Archimède sont inconnues, on peut s'attendre à ce que y soit une approximation de la densité de la copule générée. De cette manière, les dérivées d'ordre supérieur peuvent être remplacées par une seule intégrale, où la transformée de Laplace-Stieltjes de  $F$  également connue sous le nom de transformée de Laplace de la distribution, [12] est définie comme :*

$$\mathcal{LS}[F] = \int_0^\infty \exp(-xt) dF(x) = \psi(t),$$

si  $\psi \in \Psi_\infty$  alors,

$$(-1)^d \psi^{(d)}(t) = \int_0^\infty x^d \exp(-xt) dF(x) = \mathbb{E} [V^d \exp(-Vt)], \quad t \in [0, +\infty[,$$

où  $V$  a une fonction de distribution  $F$ . Une approximation de  $(-1)^d \psi^{(d)}(t)$  est donc donnée par

$$(-1)^d \psi^{(d)}(t) \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m V_k^d \exp(-V_k t), \quad t \in [0, +\infty[,$$

où  $V_k \sim F$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$  alors

$$F = \mathcal{LS}^{-1} [\psi].$$

Comprend le tableau suivant, les transformées inverses de Laplace-Stieltjes  $F$  pour les familles à paramètre unique :

| Famille        | $\Psi(t)$                                         | $F$                                                                                                               |
|----------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Clayton</b> | $(1 - \theta) / (\exp(t) - \theta)$               | $\Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$                                                                          |
| <b>Frank</b>   | $\log(1 - (1 - \exp(-\theta)) \exp(-t)) / \theta$ | $(1 - \exp(-\theta))^k / k\theta$                                                                                 |
| <b>Gumbel</b>  | $\exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$          | $S\left(\frac{1}{\theta}, 1, \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)\right)^{\theta}, 1(\theta = 1), 1\right)$ |
| <b>Joe</b>     | $1 - (1 - \exp^{-t})^{\frac{1}{\theta}}$          | $(-1)^{k+1} \left(k^{\frac{1}{\theta}}\right)$                                                                    |

TAB. 2.1 – Famille d’Archimède avec générateur un paramètre couramment utilisés et transformées inverses de Laplace-Stieltejes

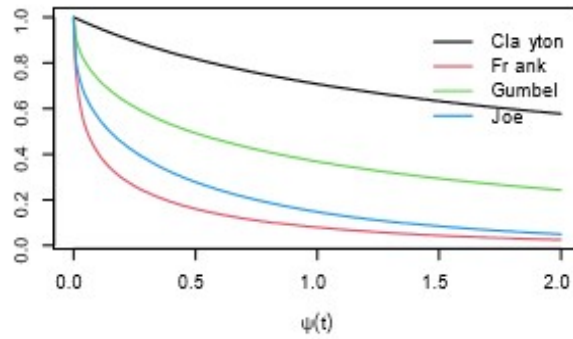


FIG. 2.1 – Graphiques des générateurs d’Archimède répertoriés dans le tableau (2.1)

### 2.1.2 Méthode des Moments

Cette méthode est souvent employée pour les évaluation de dépendance et représente des adaptations directes des estimateur par le méthode des moments, très répandus dans divers domaines de la statistique. On substitue les moments des variables aléatoires par ceux de la copule, tels que le tau de kendall ou le rho de spearman.

**Définition 2.1.4** *Cette méthode consiste à estimer les paramètres  $\theta$  des lois marginales et le paramètre  $\alpha$  de la copule par la méthode des moments. Résoudre le système à  $d$  équations et  $d$  inconnues*

$$\begin{cases} \overline{X} = f(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ S_n^2 = g(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \mu_{3,n} = h(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \vdots \end{cases}.$$

Où  $d$  désigne la dimension de  $\theta$ ,  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont les expressions des moments (ordinaires) d'ordre 1, 2 et 3 en fonction du paramètre  $\theta$ . Répéter cette étape pour toutes les marginales. [1].

L'estimation des paramètres de copule via la méthode des moments basés sur tau de kendall et rho de spearman est présentée ci-dessous.

### Estimateur basé sur le tau de kendall

Pour diverses familles des copules, un lien biunivoque est établi entre  $\tau$  et  $\theta$  le tau de kendall. Puisqu'il est possible d'estimer  $\tau$  de façon cohérent à partir de l'échantillon, une autre approche pour déterminer  $\theta$  pourrait être fondée sur la technique des moments.

**Définition 2.1.5 (Tau de kendall)** Soit  $(X_1, Y_2)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux vecteurs aléatoire indépendants et indentiquement distribués de même fonction de répartition jointe  $H$ . Le tau de kendall est définie par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

**Théorème 2.1.1** Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire continu de copule  $C$ , et  $C$  est associée à la fonction de répartition jointe  $H(x, y) = C(F(x), G(x))$ , alors [10]

$$\tau = 4 \iint_{\{[0,1] \times [0,1]\}} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.6)$$

Une estimateur du tau de kendall se construit à partir d'un échantillon  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$  de  $(X, Y)$  de la façon suivante :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{j=2}^T \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign}\{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\}, \quad (2.7)$$

où

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

**Définition 2.1.6** La relation générale entre le tau de Kendall et le générateur de la copule d'Archimède peut être exprimée comme suit :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\dot{\varphi}(u)} du.$$

**Définition 2.1.7** On a  $g_\tau$  la fonction définie par

$$\tau = g_\tau(\theta),$$

où  $\tau$  sont définis en (2.6).

L'estimateur par la méthode des moments  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est définie par :

$$\hat{\theta}^{TK} = g_\tau^{-1}(\hat{\tau}),$$

et  $\hat{\tau}$  sont définis en (2.7).

1. Le tau de kendall de la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est  $\tau = \frac{2\theta}{9}$  avec  $\theta \in [-1, 1]$ . L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{9\hat{\tau}}{2}$$

2. Le tau de kendall de la copule de Gumbel est  $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$  avec  $\theta \in [1, +\infty[$ .

L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}.$$

3. Le tau de kendall de la copule de Clayton est  $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$  avec  $\theta \in [-1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .

L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{2\hat{\tau}}{(1 - \hat{\tau})}.$$

### Estimateur basé sur le rho de Spearman

Il est possible d'élaborer un estimateur fondé sur le moments de  $\theta$  en utilisant le rho de spearman, sous réserve qu'il y ait une corrélation un-à-un entre le rho de spearman et  $\theta$ .

**Définition 2.1.8 (*Rho de Spearman*)** Soient  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  trois vecteurs indépendantes des variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$  et ayant la même fonction de répartition jointe  $H$  et les mêmes fonctions de répartition marginales  $F$  et  $G$ . Le rho de Spearman est défini par

$$\rho = 3 (P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]).$$

**Théorème 2.1.2** Si  $C$  désigne la copule des variables  $X$  et  $Y$ , le rho de Spearman est :

$$\rho = 12 \iint_{\{[0,1] \times [0,1]\}} C(u, v) dC(u, v) - 3. \quad (2.8)$$

Une estimateur du rho de Spearman se construit à partir d'un échantillon  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$

de  $(X, Y)$  de la façon suivante :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R}) (S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^T (S_i - \bar{S})^2}}, \quad (2.9)$$

où  $R_i$  est le rang de  $x_i$ ,  $S_i$  celui de  $y_i$  et  $\bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Z_i$ .

**Définition 2.1.9** on a  $g_\rho$  la fonction définie par

$$\rho = g_\rho(\theta),$$

où  $\rho$  est définis en (2.8)

L'estimateur par la méthode des moments  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est définie par

$$\hat{\theta}^{RS} = g_\rho^{-1}(\hat{\rho}),$$

et  $\hat{\rho}$  sont définis en (2.9).

Le rho de spearman de la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est

$$\rho = \frac{\theta}{3}, \text{ avec } \theta \in [-1, 1].$$

L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = 3\hat{\rho}.$$

## 2.2 Critères d'ajustement et sélection de copule

### 2.2.1 Goodness-of-fit (GoF)

Ces tests évaluent si une copule donnée s'ajuste bien aux données observées.

### Test de Kolmogorov-Smirnov (KS)

Compare la fonction de distribution empirique et théorique.

$$D_n = \sup_{\mathbf{x}} |C_n(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x})|.$$

où  $C_n$  est la copule empirique (Deheuvels, 1979)

$$C_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x})} \quad (2.10)$$

et  $C$  la copule théorique et  $\mathbf{x} : = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### Test de Cramér-von Mises (CvM)

Mesure l'écart quadratique entre les copules empirique et théorique.

$$W_n^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} (C_n(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}))^2 dC(\mathbf{x})$$

### Test d'Anderson-Darling (AD)

Donne plus de poids aux queues de distribution.

$$A_n^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(C_n(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}))^2}{C(\mathbf{x})(1 - C(\mathbf{x}))} dC(\mathbf{x}).$$

### Test basé sur Kendall's Plot

Ces deux méthodes graphiques et quantitatives permettent d'évaluer la structure de dépendance entre deux variables et d'aider à choisir une copule appropriée.

**Kendall's Plot** Le K-Plot (ou Kendall's Plot) est un outil graphique qui compare la dépendance empirique avec la dépendance théorique sous l'hypothèse d'indépen-

dance. Alors on calcule les  $W_i$  (statistiques de Kendall empiriques) :

$$W_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \mathbf{1}_{(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i)}$$

C'est la proportion de paires  $(X_j, Y_j)$  qui sont inférieures à  $(X_i, Y_i)$ , on suite on ordonne ces  $W_i$  par ordre croissant notée  $W_{(i)}$ , après on trace, en abscisse :  $H_{(i)} = \frac{i}{n+1}$  (quantiles théoriques sous indépendance) et en ordonnée les  $W_{(i)}$ . Maintenant :

Si les points suivent la diagonale alors on a une indépendance.

Si les points sont au-dessus alors la dépendance est positive (ex : Clayton, Gumbel).

Si les points sont en-dessous alors la dépendance est négative (peu fréquent avec les copules classiques).

### 2.2.2 Critères de sélection

Ces critères comparent différentes copules et choisissent la meilleure en fonction d'une métrique.

#### Critère d'Information d'Akaike (AIC)

Pénalise la vraisemblance par le nombre de paramètres.

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k$$

où  $L$  est la vraisemblance et  $k$  le nombre de paramètres.

#### Critère d'Information Bayésien (BIC)

Pénalise plus fortement les modèles complexes.

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(n)$$

où  $n$  est le nombre d'observations.

### Log-Vraisemblance

Plus la log-vraisemblance est élevée, meilleur est l'ajustement.

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(X_{1i}), \dots, F_d(X_{di}))$$

où  $c$  est la densité de la copule.

### 2.2.3 Validation Graphique des Copules

La validation graphique est une étape essentielle pour vérifier visuellement si une copule sélectionnée modélise correctement la structure de dépendance des données. Elle complète les critères statistiques (AIC, BIC, tests d'ajustement) et permet de détecter des motifs que les méthodes numériques pourraient manquer.

#### QQ-Plot

Comparer les quantiles empiriques et théoriques de la copule pour vérifier l'adéquation du modèle, on calcule les pseudo-observations (rangs uniformes) :

$$\mathbf{x}_i = \frac{R_{\mathbf{x}_i}}{n+1}, \quad i = 1, \dots, d.$$

où  $R_{\mathbf{x}_i}$  est le rang de  $\mathbf{x}_i$  dans l'échantillon, on simule des données sous la copule théorique (avec le même nombre d'observations) et on trace ensuite dans l'axe  $X$  : Les Quantiles empiriques et dans l'axe  $Y$  : les Quantiles théoriques. Si les points suivent la diagonale alors on a un bon ajustement sinon on remarque un écart systématique qui explique une mauvaise spécification de la copule.

### Graphique de la Copule Empirique vs Théorique

Comparer directement la copule empirique (2.10) (estimée à partir des données) et la copule théorique candidate (fonction de la copule testée (Gaussienne, Clayton,... etc.). En suite on compare la surface 3D de la copule  $C_n$  vs.  $C$ , ou bien on compare les contours de densités. Si les surfaces sont recouvertes alors on a un bon ajustement s'il y a un écart remarquable alors la copule sélectionnée ne capture pas la dépendance.

La validation graphique constitue une étape indispensable pour apprécier visuellement la qualité d'ajustement d'une copule aux données. Des outils comme les  $QQ$ -plots, les comparaisons entre copules empiriques et théoriques, ainsi que le  $K$ -plots, offre des perspectives complémentaires sur la structure de dépendance, en révélant notamment des inadéquations dans les queues de distribution ou des biais systématiques. Ces méthodes, combinées aux critères statistiques (AIC, BIC, tests d'ajustement), permettent de sélectionner de manière robuste la copule la plus adaptée. En pratique, une analyse simultanée de plusieurs graphiques et une interprétation critique des écarts observés garantissent un modèle fiable pour la modélisation des dépendances multivariées.

# Chapitre 3

## Application des copules en finance et assurance

### 3.1 Application

Les relations entre le paramètre de la copule et le tau de Kendall nous ont permis de calculer la valeur de  $\theta$  en supposant une copule de Gumbel ou de Clayton. Une fois muni de la valeur du paramètre, nous sommes en mesure de calculer toute probabilité conjointe entre les indices boursiers.

Par exemple, nous avons analysé 500 observations provenant de séries de rendements de quatre indices boursiers européens, calculées par  $\log(X_{t+1}/X_t)$  pour la période de 1991 à novembre 1992 (voir Fig. 3.1). Ces données sont disponibles dans les packages "QRM and data sets" du logiciel R et contiennent les prix de clôture quotidiens des principaux indices boursiers européens : l'Allemagne **DAX** (Ibis), la Suisse **SMI**, la France **CAC** et le Royaume-Uni **FTSE**.

Les données sont échantillonnées en temps ouvré, c'est-à-dire que les week-ends et jours fériés sont omis. Le tableau 3.1 résume le tau de Kendall entre les rendements des quatre indices de marché.

| Variable    | <i>DAX</i> | <i>SMI</i> | <i>CAC</i> | <i>FTSE</i> |
|-------------|------------|------------|------------|-------------|
| <i>DAX</i>  | 1.000      | 0.4087     | 0.3695     | 0.2913      |
| <i>SMI</i>  | 0.4087     | 1.000      | 0.3547     | 0.4075      |
| <i>CAC</i>  | 0.3695     | 0.3547     | 1.000      | 0.3670      |
| <i>FTSE</i> | 0.2913     | 0.4075     | 0.3670     | 1.000       |

TAB. 3.1 – Estimations de la matrice tau de Kendall à partir des rendements de quatre indices boursiers Européens.

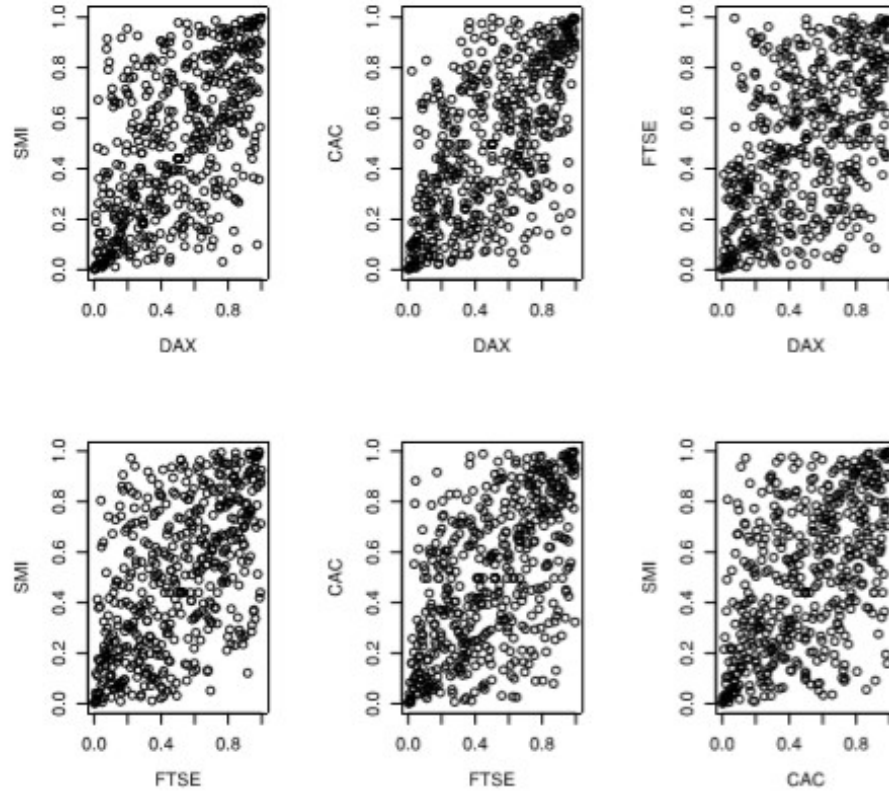


FIG. 3.1 – Nuages de points de 500 pseudo-observations tirées des rendements de quatre indices boursiers Européens

Ensuite, nous considérons les rendements des quatre indices de marché ajustés par la copule  $t$ , donnée par :

$$C_{\rho,v}(u, v) = t_{\rho,v}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)),$$

où  $v$  est le paramètre de degré de liberté,  $t_v^{-1}$  est l'inverse de la fonction de distribution

de Student  $t$  univariée standard, et  $t_{\rho,v}$  est la distribution de Student  $t$  standard bivariée paramétrée par le paramètre de corrélation  $\rho$  et  $v$ . La densité de la copule  $t$  bivariée est donnée par :

$$c_{\rho,v}(u,v) = \frac{v}{2\sqrt{1-\rho}} \frac{\Gamma(v/2)^2}{\Gamma((v+1)/2)^2} \frac{\left(1 + \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{v(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2}}{\left(\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)\left(1 + \frac{y^2}{v}\right)\right)^{-(v+1)/2}},$$

où  $x = t_v^{-1}(u)$ ,  $y = t_v^{-1}(v)$  et  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

En supposant que la copule  $t$  représente la structure de dépendance de nos quatre indices, nous obtenons les paramètres de dépendance ajustés des six fonctions de distribution jointes bivariées, présentés dans le tableau [3.3](#).

On a :

$$CCTE_{X_1}(t) = \frac{\int_{\alpha}^1 J_t(u) F_{X_1}(u) du}{\int_{\alpha}^1 J_t(u) du}. \quad (3.1)$$

En utilisant les équations [\(3.1\)](#) avec la copule  $t$ , nous calculons pour un niveau fixe  $\alpha = t = 0.9$  les mesures de risque CCTE pour tous les cas. Les résultats sont résumés dans le Tableau [3.4](#).

Dans le Tableau [3.4](#), la plus petite valeur indique le risque le plus faible. Ainsi, le couple  $(X, Y)$  le moins risqué est : (CAC, FTST), où  $X$  est le risque cible et  $Y$  est le risque associé.

| Variable    | <i>SMI</i> | <i>FTSE</i> | <i>CAC</i> | <i>Copula</i>   |
|-------------|------------|-------------|------------|-----------------|
| <i>DAX</i>  | 0.0019     | 0.0015      | 0.0005     | <i>Gumbel</i>   |
|             | 0.0004     | 0.0005      | 0.0004     | <i>Clayton</i>  |
|             | 0.1543     | 0.2572      | 0.2662     | <i>Gaussian</i> |
|             | 0.4381     | 0.2942      | 0.3302     | <i>t</i>        |
| <i>SMI</i>  | —          | 0.0004      | 0.0004     | <i>Gumbel</i>   |
|             | —          | 0.0004      | 0.0004     | <i>Clayton</i>  |
|             | —          | 0.4071      | 0.2283     | <i>Gaussian</i> |
|             | —          | 0.3390      | 0.5220     | <i>t</i>        |
| <i>FTSE</i> | —          | —           | 0.0394     | <i>Gumbel</i>   |
|             | —          | —           | 0.0004     | <i>Clayton</i>  |
|             | —          | —           | 0.3941     | <i>Gaussian</i> |
|             | —          | —           | 0.5230     | <i>t</i>        |

TAB. 3.2 – Valeur p du test bootstrap d'adéquation des copules de Gumbel, Clayton, gaussienne et t de dimension 2, avec 'method' = "Sn", 'estim.method'="itau"

| Variable    | <i>DAX</i> | <i>SMI</i> | <i>CAC</i> | <i>FTSE</i> |
|-------------|------------|------------|------------|-------------|
| <i>DAX</i>  | $\infty$   | 0.5945     | 0.6344     | 0.5498      |
| <i>SMI</i>  | 0.5945     | $\infty$   | 0.5610     | 0.5781      |
| <i>CAC</i>  | 0.6344     | 0.5610     | $\infty$   | 0.5974      |
| <i>FTSE</i> | 0.5498     | 0.5781     | 0.5974     | $\infty$    |

TAB. 3.3 – Paramètre ajusté de la copula t correspondant au tau de Kendall avec v=1

| Variable    | <i>DAX</i> | <i>SMI</i> | <i>CAC</i> | <i>FTSE</i> |
|-------------|------------|------------|------------|-------------|
| <i>DAX</i>  | —          | 0.617      | 0.677      | 0.666       |
| <i>SMI</i>  | 0.617      | —          | 0.842      | 0.624       |
| <i>CAC</i>  | 0.677      | 0.842      | —          | 0.590       |
| <i>FTSE</i> | 0.666      | 0.624      | 0.590      | —           |

TAB. 3.4 – Mesure de risque du CCTE pour t=0.9 avec une copule t

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons mené une étude approfondie des copules en tant qu'outil moderne et efficace pour la modélisation de la dépendance entre variables aléatoire, notamment dans les contextes financiers et assurantiels où une représentation précise des relations non linéaires est essentielle. Nous avons tout d'abord présenté les fondaments théoriques des copules et les différentes familles existantes, avant d'abord les méthodes d'estimation ainsi que les critères d'ajustement et de sélection du modèle adéquat. L'application pratique réalisée a permis de mettre en évidence l'importance de l'utilisation des copules dans l'analyse des données financières. Les résultats obtenus montrent que les copules offrent une modélisation plus réaliste de la dépendance que les méthodes classiques basées uniquement sur la corrélation linéaire.

En conclusion, cette étude ouvre la voie à de nombreuses perspectives de recherche, que ce soit à travers le développement de modèles de copules plus flexibles, ou par l'élargissement des application à d'autres domaines tels que la gestion des risques, la finance ou encore les secteurs de la santé et des sciences sociales.

# Bibliographie

- [1] Anne-lise, C, Christophe, D, Véronique, L. M, & Triet, N. (2008). Copule de Gumbel.
- [2] Baadache, R. (2022). Estimation des paramètres de copule par la méthode maximum de vraisemblance. [Mémoire de Master, Université Mohammed Khider, Biskra].
- [3] Bailly, P, Carrère, C. (2015). Statistique des criptives : Théorie et applications.
- [4] Ben Hamza, H. (2022). Estimation des copules à un paramètre. [Mémoire de Master, Université Mohammed Khider, Biskra].
- [5] Bernard, P. M, Lapointe, C. (1995). Mesures statistique en épidémiologie, presse de l'Université du Québtouee, Sainte-Foy, page 89.
- [6] Brahimi, B, Benatia,F,& Djabrane, Y. (2018). Copula conditional tail expectation for multivariate financial risks. Arab journal of Mathematical Sciences.
- [7] Cadoux, D., & Loizeau, J. M. (2004). Copules et dépendances : Application pratique la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Bulletin Franais dActuariat, 6(12), 173-208.
- [8] Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). Copula methods in nance. John Wiley & Sons.
- [9] Chine, A. (2017). Sur la statistique de copules. [Mémoire de Doctorat, Université Mohammed Khider, Biskra]

- [10] Fontaine, C. (2016). Utilisation de copules paramétriques en présence de données observationnelles : cadre théorique et modélisations (Doctoral dissertation, Université Montpellier)
- [11] Hofert, M., Mchler, M., & McNeil, A. J. (2011). Likelihood inference for Archimedean copulas. arXiv preprint arXiv :1108.6032.
- [12] Hofert, M., Mchler, M., & McNeil, A. J. (2013). Archimedean copulas in high dimensions : Estimators and numerical challenges motivated by nancial applications. *Journal de la Société Française de Statistique*, 154(1), 25-63.
- [13] Nelsen, R. B., 2006. An Introduction to copula. Springer Verlag, New York
- [14] Slimani. (2012). Estimation des parametres d'une copule. [Mémoire de Master, Université Mohammed Khider, Biskra].
- [15] Toupin, M-H. (2008). Nouveau test d'équation pour les copules basé sur le processus de spearman. [Mémoire du maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières].
- [16] Yela, J. P., & Cuevas, J. R. T. (2018). Estimating the Gumbel-Barnett copula parameter of dependence. *Revista Colombiana de Estadística*, 41(1), 53-73.

# Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

|              |                                      |
|--------------|--------------------------------------|
| $v.a$        | : variable aléatoire                 |
| $fd$         | : Fonction de distribution.          |
| $X, Y$       | : Vas réelles                        |
| $F, G$       | : fds des lois marginales            |
| $\mathbb{I}$ | : Intervalle $[0;1]$ .               |
| $H$          | : Distribution jointe                |
| $h$          | : Densité de distribution jointe     |
| $C$          | : Distribution de la copule          |
| $c$          | : Densité de la copule               |
| $U, V$       | : Vas qui suivent la loi uniforme U. |
| $M$          | : Copule minimum                     |
| $W$          | : Copule maximum.                    |
| $\prod$      | : Copule produit                     |
| $F^{-1}$     | : Fonction inverse.                  |
| $\Phi$       | : fd de la loi normale.              |
| $F_n, G_n$   | : fds empiriques.                    |

|                 |                                                   |
|-----------------|---------------------------------------------------|
| $\tau$          | : Tau de Kendall.                                 |
| $\rho$          | : Rho de Spearman                                 |
| $\varphi$       | : Fonction génératrice de la copule archimédienne |
| $\varphi^{-1}$  | : Fonction quantile de $\varphi$                  |
| $\varrho$       | : Coefficient de corrélation de Pearson.          |
| $C_{\varrho}$   | : Copule normale.                                 |
| $C_{\varrho,v}$ | : Copule de Student.                              |
| $L(\theta)$     | : Fonction log-vraisemblance de                   |
| $\mathbb{R}$    | : Ensemble des nombres réels                      |

## الملخص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة واستخدام الكوبولات وتطبيقاتها في نمذجة التبعية بين المتغيرات العشوائية خصوصا في مجالي **المالية والتأمين**. تمثل الكوبولات أداة قوية تسمح بفصل الهيكل التابع بين المتغيرات عن سلوكها الهامشي مما يمنح مرونة أكبر في النمذجة مقارنة بالطرق التقليدية. تبدأ الدراسة بتقديم الجانب النظري للكوبولات من خلال التعريف بها واستعراض خصائصها الأساسية مع التركيز على أهم العائلات مثل الاهليجية والارشيميدية. ثم تتناول المذكرة طرق تقدير الكوبولات كطريقة الإمكان الاعظمي وطريقة العزوم إضافة الى معايير تقييم الجودة واختيار النموذج الأنسب. وأخيرا يتم تقديم تطبيق عملي يوضح كيفية استخدام الكوبولات في تحليل بيانات مالية حقيقية مما يعكس أهمية وفعالية هذا المنهج في التمثيل الدقيق للعلاقات المعتمدة.

## Résumé

**C**e mémoire a pour objectif l'étude des copules et leurs applications dans la modélisation de la dépendance entre variables aléatoires, notamment dans les domaines de **la finance et l'assurance**. Les copules constituent un outil puissant permettant de séparer la structure de dépendance du comportement marginale des variables, offrant ainsi une flexibilité supérieure par rapport aux méthodes classiques. L'étude commence par une présentation théorique des copules, en introduisant leurs définitions, propriétés fondamentales, et principales familles telles que les copules elliptiques et archimédiennes. Ensuite, le mémoire aborde les méthodes d'estimation des copules, ainsi que critère d'ajustement et de sélection du meilleur modèle. Enfin, une exemple d'application pratique est proposée pour illustrer l'utilisation des copules dans l'analyse de données financières réelles, démontrant ainsi leurs pertinences et leur efficacité dans la modélisation précise des relations de dépendance.

## Abstract

**T**his dissertation aims to study copulas and their applications in modeling the dependence between random variables, particularly in the fields of **finance and insurance**. Copulas are powerful tools that allow the separation of the dependence structure of the marginal behavior of variables, offering greater flexibility compared to traditional methods. The study begins with a theoretical overview of copulas, introducing their definition, fundamental properties, and main families, such as elliptical and Archimedean copulas. It then explores estimation methods, as well as criteria for goodness-of-fit and model selection. Finally, a practical application is presented to demonstrate how copulas can be used to analyze real financial data, highlighting their effectiveness in accurately modeling dependence relationships.