

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en **Mathématiques**

Option : **Probabilités et statistique**

Par

MAALLA Amina

Titre :

La Distribution des caractéristique des files d'attentes

Devant le Jury :

Dr. BENAMEUR Sana U. Biskra Président

Dr. BENBRAIKA Ghazlane U. Biskra Encadreur

Dr. AFROUN Fairouz U. Biskra Examinatrice

Soutenu Publiquement le 02/06/2025

Dédicace

Je dédie ce travail à...

Ma source d'inspiration et aux héros silencieux de ma réussite académique mes chers parents.

Mes chers frères et à mes chères sœurs Hamza Hanane et Hasna.

Tous mes chers amis et camaredes.

Amina

Remerciements

Louange à Allah, pour m'avoir accordé la patience, le courage et la volonté d'achever cette recherche.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à plusieurs personnes qui, directement ou indirectement, m'ont encouragé et aidé à accomplir ce travail de recherche.

Tout d'abord je suis profondément redevable à mon Encadreur **BENBRAIKA GHOZLANE** pour son aide précieuse son accompagnement constant et son soutien indéfectible. Je lui suis reconnaissante pour son esprit scientifique bienveillant et sa générosité.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers les membres du comité d'examen le **Dr. BENAMEUR Sana** et **Dr. AFROUN Fairouz** pour leur temps et leur expertise et pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissante aux **Dr BENAMEUR Sana** pour ses conseils. Je lui exprime tout mon respect et ma profonde gratitude, merci pour tout ce que vous m'avez apporté au cours de mon parcours universitaire.

Notations et symbols

λ	: Taux d'arrivée
μ	: Taux de service
λ_i	: taux de naissance à l'état i
μ_i	: le taux de mort à l'état i
Δt	: petit intervalle de temps
π_n	: probabilités stationnaires
π_0	: Probabilité stationnaire de l'état 0
ρ	: Taux d'occupation
L_s	: nombre moyen de clients dans le système
L_q	: Le nombre moyen de clients dans la file d'attente
L_e	: nombre moyen de clients en service
W_s	: temps moyen qu'un client passe dans le système
W_q	: Le temps moyen d'attente d'un client dans la file
W_e	: temps moyen passé en service
B	: processus d'arrivée
Z	: nombre de serveurs
A	: capacité de la file
Y	: discipline de service
F	: fonction de repartition

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	i
Résumé du mémoire	iii
Notations et symbols	iii
Table des matières	iii
Table des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Introduction	1
1 File d'attente	3
1.1 Définition d'une file d'attente	3
1.1.1 Différents modèles de files d'attente	4
1.2 Processus de naissance et de mort	5
1.3 Régime stationnaire	7

TABLE DES MATIÈRES

1.4	Gestion d'une File D'attente	8
1.4.1	Processus d'arrivées	8
1.4.2	Processus de service	9
1.4.3	Structure et discipline de la file	9
1.4.4	Discipline de service	9
1.5	Notation de Kendall	9
1.6	Caractéristiques d'un système d'attente	10
1.7	La loi de little	10
1.8	Mesures de performance d'une file d'attente	11
1.9	Systèmes de file d'attente markoviens	12
1.9.1	Modèle d'attente M/M/1	12
2	Distribution des caractéristique des files d'attente	15
2.1	Définition d'un estimateur	15
2.2	Processus stochastique	16
2.3	Loi exponentielle	16
2.4	Chaîne de Markov	17
2.5	Méthode de Monte Carlo	18
2.6	Méthode utilisée dans le programme de simulation (M/M/1)	19
2.7	Estimations des caractéristiques du système	21
2.8	Estimations des paramètres de départ du système	22
2.9	Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats de simulation	22
2.9.1	Discussion des résultats	27

TABLE DES MATIÈRES

2.10 Distribution des estimations	28
2.10.1 Discussion des résultats	31
Conclusion	32
Bibliographie	33

Table des figures

1.1 Représentation d'une File d'attente	4
1.2 File d'attente à capacité limitée	4
1.3 File d'attente avec plusieurs serveurs	5
1.4 Processus de naissance et de mort	5
2.1 Temps total dans le système	23
2.2 Temps total d'attente dans la file	24
2.3 Nombre de clients dans la file	25
2.4 Nombre de clients dans le système	26
2.5 Distribution de nombre de clients dans la file	30
2.6 Distribution de clients dans le système	30

Liste des tableaux

2.1 Estimations des caractéristiques du système	21
2.2 Estimations des paramètres de départ du système	22

Introduction

Les files d'attente sont aujourd'hui des phénomènes que l'on rencontre quotidiennement dans de très nombreux domaines tels que les télécommunications, les systèmes informatiques, les transports ou encore la gestion des files d'attente dans les établissements publics et privés. L'étude des files d'attente, ou théorie des files d'attente, vise à modéliser et analyser les systèmes où les demandes de service sont soumises à un processus d'attente avant traitement.

Dans le cadre de l'analyse des modèles de files d'attente, les paramètres de départ du système sont généralement supposés connus et constants. Cette hypothèse facilite le développement théorique et la déduction analytique des indicateurs de performance. Cependant, dans les situations réelles, ces paramètres ne sont pas directement accessibles, ils doivent être déduits à partir d'observations empiriques ou de données collectées sur le terrain.

Ainsi, pour évaluer de manière fiable les performances du système étudié, il est essentiel de recourir à des techniques d'estimation statistique. Ces méthodes permettent d'approximer les valeurs inconnues des paramètres et obtenir des résultats.

L'objectif de ce mémoire est d'analyser la distribution des caractéristiques fondamentales des files d'attente, telles que le temps d'attente, le nombre moyen de clients dans le système, ou encore le temps de séjour. Nous nous intéressons particulièrement aux files d'attente markoviennes, et plus précisément au modèle $M/M/1$, qui est l'un des modèles les plus simples et les plus étudiés. Ce modèle repose sur des hypothèses de base : les arrivées suivent un processus de Poisson, les temps de service sont exponentiels. L'étude ne se limitera pas à l'aspect théorique, elle sera complétée par la mise en œuvre d'un programme de calcul visant à effectuer l'estimation statistique des caractéristiques du système. Ce programme permettra également de déterminer les distributions associées à ces caractéristiques.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre de ce mémoire contient une introduction générale à la théorie des files d'attente, ainsi que quelques définitions fondamentales et les notations utilisées. Après cela, nous décrivons le système de file d'attente $M/M/1$.

Le deuxième chapitre contient la présentation de quelques notions de base liées à l'estimation statistique. Nous allons présenter aussi une application sous forme de simulation réalisée à l'aide du logiciel R, suivie de l'affichage des résultats obtenus et des graphiques qui feront l'objet d'une interprétation et discussion approfondies.

Ce mémoire est clôturé par une conclusion.

Chapitre 1

File d'attente

*L*a théorie des files d'attente a de nombreuses applications dans différents domaines. Dans ce chapitre nous allons présenter les concepts fondamentaux de cette théorie à savoir : la gestion des files d'attente, les modèles markoviens et leurs caractéristiques.

1.1 Définition d'une file d'attente

Un système de files d'attente est un modèle mathématique représentant un processus dans lequel des clients arrivent pour recevoir un service, attendent en cas d'indisponibilité des serveurs, puis quittent le système après avoir été servis. Un système d'attente comprend donc «un espace de service» avec une ou plusieurs stations de service et «un espace d'attente» dans lequel se forme une éventuelle file d'attente. Comme le montre le schéma [\[3\]](#)

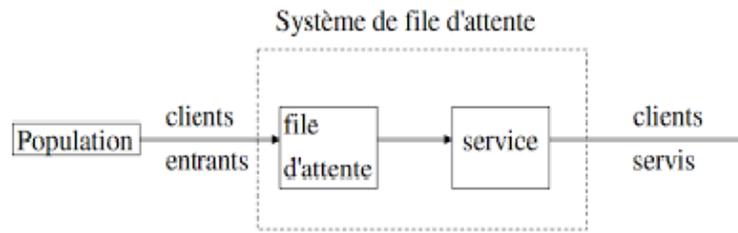


FIG. 1.1 – Représentation d'une File d'attente

1.1.1 Différents modèles de files d'attente

- $(M/M/1/K)$ Ce type de file d'attente impose une limite maximale au nombre de clients pouvant attendre dans le système. Lorsqu'un nouveau client arrive alors que la file est pleine, il est refusé. [4]

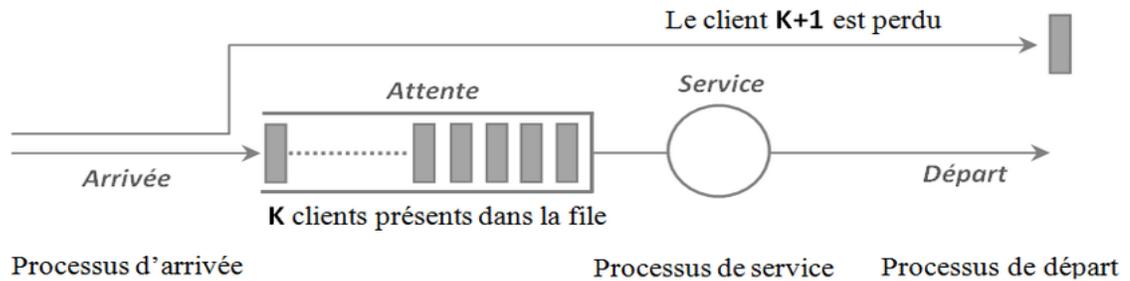


FIG. 1.2 – File d'attente à capacité limitée

- $(M/M/c/K)$ Dans ce modèle, plusieurs serveurs sont disponibles pour traiter les clients simultanément. Si tous les serveurs sont occupés, les clients attendent dans une file unique jusqu'à ce qu'un serveur se libère.

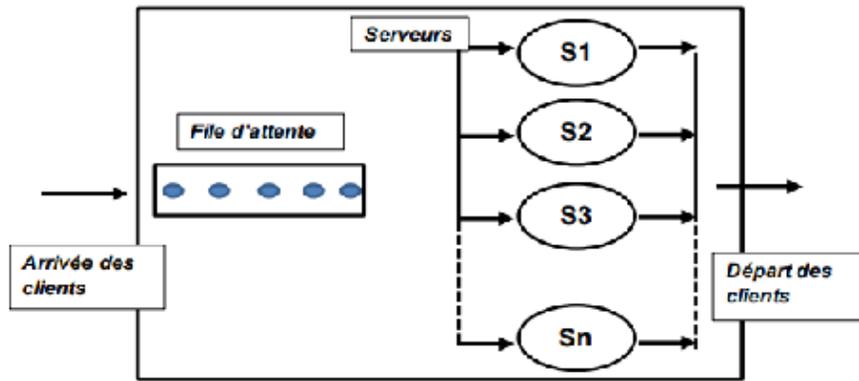


FIG. 1.3 – File d'attente avec plusieurs serveurs

1.2 Processus de naissance et de mort

Le processus de naissance et de mort est un processus stochastique utilisé pour décrire l'évolution du nombre d'entités dans un système au fil du temps, comme le nombre de clients dans une file d'attente, le nombre d'individus dans une population ...etc. [5]

Le schéma suivant montre le processus de naissance et de mort. [12]

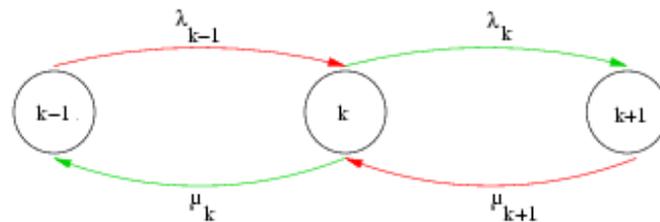


FIG. 1.4 – Processus de naissance et de mort

• On considère que le système peut être dans un état numérique $n \in N$, représentant le nombre d'entités dans le système.

Naissance : un nouvel élément entre dans le système $\rightarrow n \rightarrow n + 1$

Mort : un élément quitte le système $\rightarrow n \rightarrow n - 1$

Soit $X(t)$ l'état du système au temps t , et soit Δt un petit intervalle de temps on a :

• **Naissance (passage de i à $i + 1$) :**

$$P(X(t + \Delta t) = i + 1 \mid X(t) = i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t).$$

λ_i : le **taux de naissance** à l'état i

$\lambda_i \Delta t$: Probabilité d'une naissance pendant Δt

$o(\Delta t)$: terme négligeable lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

• **Mort (passage de i à $i - 1$) :**

$$P(X(t + \Delta t) = i - 1 \mid X(t) = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t).$$

μ_i : le **taux de mort** à l'état i .

$\mu_i \Delta t$: Probabilité d'une mort pendant Δt .

Remarque 1.2.1 *les processus de naissance et de mort interviennent non seulement lors de la modélisation de systèmes d'attente, mais encore ils permettent aussi de façon générale de décrire l'évolution temporelle de la taille d'une population d'un type donné. De tels phénomènes sont naturellement étudiés en biologie, en démographie et en sociologie, mais on les rencontre aussi en physique et dans des domaines techniques.*

1.3 Régime stationnaire

Le régime stationnaire désigne l'état d'un processus stochastique lorsque ses propriétés statistiques (comme les probabilités d'état) ne changent plus au cours du temps. Dans ce régime, les probabilités d'état sont constantes et ne dépendent plus de l'instant initial. [8]

•Conditions de Stationnarité :

Pour un processus de naissance et de mort, le régime stationnaire se caractérise par les probabilités stationnaires π_n qui représentent la probabilité que le système soit dans l'état n lorsque le processus est en régime stationnaire. Les probabilités stationnaires satisfont les équations de balance qui dépendent des taux de naissance et de mort.

•Les équations de balance sont données par :

Les équations de balance sont utilisées pour déterminer les probabilités stationnaires π_n en fonction des taux de naissance et de mort.

Pour $n = 0$:

$$\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1.$$

Le taux d'entrée dans l'état 1 est égal au taux de sortie de l'état 1 vers 0.

Pour $n \geq 1$:

$$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1}.$$

$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n$: représente le taux total de sortie de l'état n :

soit vers $(n + 1)$ par une naissance (à un taux λ_n).

soit vers $(n - 1)$ par une mort (à un taux μ_n).

$\lambda_{n-1}\pi_{n-1}$: Taux d'entrée dans l'état (n) depuis l'état $(n - 1)$.

$\mu_{n+1}\pi_{n+1}$: Taux d'entrée dans l'état (n) depuis l'état $(n + 1)$.

•Calcul des probabilités stationnaires :

En résolvant les équations de balance, on obtient les probabilités stationnaires en fonction de π_n :

$$\pi_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) \pi_0.$$

π_0 : Probabilité stationnaire de l'état 0.

λ_{k-1} : taux de naissance de l'état $(K - 1)$ vers (K) .

μ_k : taux de mort de l'état (K) vers $(K - 1)$.

Et on détermine π_0 à l'aide de la condition de normalisation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n$: la somme de toutes les probabilités possibles pour les états n

1.4 Gestion d'une File D'attente

1.4.1 Processus d'arrivées

En général, nous devons faire attention aux moments d'arrivée des clients, car ils sont généralement aléatoires. Nous faisons certaines hypothèses sur leur loi. Premièrement, un client arrive à la fois. Deuxièmement, il y a une homogénéité dans le temps. la loi concerne les moments d'arrivées des clients. Le cas le plus connu est celui où cette loi est exponentielle. Donc, dans ce cas le modèle des moments d'arrivée est un processus de Poisson (aléatoire et indépendents)

1.4.2 Processus de service

Il dépend du nombre de serveurs et de la loi de probabilité décrivant la durée des services (absence de mémoire)

1.4.3 Structure et discipline de la file

La discipline de service détermine le classement des clients et comment chacun bénéficie du service.

1.4.4 Discipline de service

Il y a plusieurs façons d'organiser le service dans une file d'attente les plus connues sont :

- **FIFO (PAPS)** : Premier Arrivé Premier Servi.
- **LIFO (DAPS)** : Dernier Arrivé Premier Servi.
- **Priorité (SP)** : (Service avec Priorité) C'est-à-dire que les clients sont servis selon leur importance. La personne prioritaire sera servie avant une personne non prioritaire, même si celle-ci arrive avant elle.
- **Aléatoire** : C'est-à-dire que le client qui bénéficie de son service est sélectionné aléatoirement.

1.5 Notation de Kendall

La notation de Kendall pour un système de file d'attente est d'écrite par six symboles :

$$B/C/Z/A/N/Y.$$

1.6 Caractéristiques d'un système d'attente

Les caractéristiques d'un système d'attente sont les suivantes :

- Le processus d'arrivée (distribution du temps d'arrivée), noté B .
- Le temps de service (la distribution du temps de service), noté C .
- Le nombre de serveurs, noté Z .
- La capacité de la file, noté A .
- La discipline de service (FIFO,LIFO,...), noté Y .
- La taille de la population, noté N .

1.7 La loi de little

La loi de little relie trois concepts principaux dans le système de files d'attente :

6

$$L_s = \lambda W_s.$$

L_s : le nombre moyen de clients dans le système.

λ : le taux moyen d'arrivée des clients dans le système.

W_s : le temps moyen qu'un client passe dans le système (temps d'attente + service).

- tout d'abord si on concentrons sur l'attente dans la file on trouve :

$$L_q = \lambda W_q.$$

L_q : Le nombre moyen de clients dans la file d'attente

W_q : Le temps moyen d'attente d'un client dans la file.

Si on concentrons sur le service, on trouve :

$$L_e = \lambda W_e.$$

L_e : le nombre moyen de clients en service.

W_e : temps moyen passé en service.

Ainsi, on peut déduire :

$$L_s = L_q + L_e.$$

$$W_s = W_q + W_e.$$

1.8 Mesures de performance d'une file d'attente

On définit les mesures de performance d'une file d'attente par :

- L_s : le nombre moyen de clients dans le système.
- L_q : Le nombre moyen de clients dans la file d'attente
- L_e : le nombre moyen de clients en service.
- W_s : le temps moyen qu'un client passe dans le système (temps d'attente + service).
- W_q : Le temps moyen d'attente d'un client dans la file.
- W_e : temps moyen passé en service.
- λ : le taux moyen d'arrivée des clients dans le système.
- μ : Taux de service.

• $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$: taux d'occupation du serveur.

• Le temps moyen de service est donné par :

$$W_e = \frac{1}{\mu},$$

En remplaçant dans la formule de W on a :

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

▷ De même, pour le nombre moyen de clients dans le système

$$L_s = L_q + \rho.$$

1.9 Systèmes de file d'attente markoviens

1.9.1 Modèle d'attente M/M/1

Le modèle M/M/1 est un modèle de file d'attente stochastique utilisé pour représenter un système à une seule file et un seul serveur [8]

• Ce modèle est noté M/M/1 :

Le premier M pour les arrivées.

Le second M pour les services.

Le chiffre 1 pour un seul serveur.

Arrivées : Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Cela implique que le temps entre deux arrivées successives suit une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

Service : La durée de service suit une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu}$ avec μ le taux de service.

Un seul serveur : Un client est servi à la fois.

Ordre de service : Les clients sont servis selon la règle Premier arrivé, premier servi (FIFO).

Indépendance : Les processus d'arrivée et de service sont indépendants l'un de l'autre.

Pour que le système atteigne un état stationnaire, il faut que :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

• **Nombre moyen de clients dans le système :**

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

• **Nombre moyen de clients dans la file d'attente :**

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Il représente les clients dans la file (en attente de service)

Puisqu'on a :

$$L_e = \rho \text{ (clients en service)} \rightarrow L_q = L_s - L_e.$$

• **Temps moyen passé dans le système :**

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

• **Temps moyen d'attente d'un client dans la file :**

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

il représente le temps moyen d'attente d'un client avant le service

Puisqu'on a :

$$W_q = W_s - W_e = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}.$$

• **Temps moyen passé en service :**

$$W_e = \frac{1}{\mu}.$$

Car on suppose un service exponentiel de paramètre μ .

*Le modèle M/M/1 n'est pas seulement une notion mathématique. Il peut aussi être utilisé dans la vie quotidienne pour mieux comprendre et gérer les situations d'attente. Par exemple, on peut l'utiliser pour organiser le travail dans un hôpital, un service administratif. Ce modèle aide à améliorer l'organisation, à réduire le temps d'attente, et à utiliser les ressources de façon plus efficace. Cela montre qu'il peut vraiment être utile dans la réalité, et pas seulement dans les calculs ou les théories.

Chapitre 2

Distribution des caractéristique des files d'attente

Dans ce chapitre, nous étudions la distribution des caractéristiques du modèle M/M/1. Nous présentons une comparaison entre les résultats théoriques issus de l'analyse mathématique et les résultats obtenus par simulation à l'aide du logiciel R avec une explication détaillée de toutes les étapes du travail et une discussion des résultats obtenus.

2.1 Définition d'un estimateur

On appelle estimateur d'un paramètre inconnu θ toute suite de variable aléatoire réelles $(T_n)_{n \geq 1}$ où : \square

$$T_n = g(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

g : est une fonction réelle de n variables (par exemple la moyenne, la variance, la médiane, etc.).

On dira, par abus de langage, que T_n est un estimateur de θ (l'estimateur T_n est lui-même une variable aléatoire).

Exemple 2.1.1 *Pour estimer la moyenne réelle φ d'une population, un estimateur classique est la moyenne empirique :*

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$\varphi = \theta$: c'est le paramètre à estimer (la moyenne réelle de la population).

T_n : est l'estimateur de φ .

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$: c'est la fonction qui donne l'estimateur.

Donc T_n est une fonction des variables aléatoires de l'échantillon, qui permet de fournir une approximation de la moyenne réelle φ

2.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X(t), t \in T)$, définies sur un même espace de probabilité, où t représente généralement le temps

2.3 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi de probabilité continue, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui modélise le temps entre deux événements successifs dans un processus aléatoire.

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée :

T suit $Exp(\lambda)$

Elle est caractérisée par :

- Fonction de densité de probabilité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

- Fonction de répartition

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

La loi exponentielle est fréquemment utilisée pour modéliser :

le temps entre les arrivées dans un système de files d'attente, le temps de service dans un serveur

2.4 Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est un processus stochastique discret en temps, qui évolue entre différents états, avec la propriété fondamentale que l'état futur dépend uniquement de l'état présent et pas du passé complet.

C'est ce qu'on appelle la propriété de Markov ou propriété sans mémoire.

Formellement, soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires représentant l'état du système au temps n le processus est une chaîne de Markov si :

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

pour tous les états i_0, \dots, i_{n-1} pour tout $n \geq 0$.

2.5 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une technique de calcul probabiliste et numérique qui repose sur l'utilisation de simulations aléatoires pour estimer des quantités mathématiques complexes. Elle consiste à générer un grand nombre de valeurs aléatoires suivant une distribution donnée, puis à les utiliser pour approximer des résultats théoriques ou analytiques, notamment lorsqu'il est difficile, voire impossible, de les obtenir par des méthodes exactes. [11]

•Principe général :

1-On définit un modèle aléatoire qui représente le problème à étudier (par exemple : un modèle de file d'attente M/M/1).

2-On génère un grand nombre de données aléatoires (qui suivent une loi de probabilité connue, comme la loi exponentielle).

3-On effectue des calculs statistiques sur ces données (par exemple : moyenne, fréquence, proportion).

4-Le résultat obtenu est une estimation approchée de la grandeur recherchée (comme un temps moyen d'attente ou une probabilité).

•Applications typiques :

Estimation de probabilités.

Calculs d'intégrales complexes.

Simulation de systèmes stochastiques (files d'attente, chaînes de Markov,...etc).

2.6 Méthode utilisée dans le programme de simulation (M/M/1)

1-Objectif du programme :

Le programme R vise à simuler un système de file d'attente de type M/M/1 afin d'estimer ses mesures de performance (nombre moyen de clients, temps d'attente, etc.), puis de comparer les résultats obtenus par simulation avec les valeurs théoriques et j'ai également ajouté la distribution des caractéristiques du système, telles que les temps inter-arrivées et les temps de service.

2-Méthode utilisée :

Il s'agit d'une technique de simulation qui repose sur la génération de données aléatoires selon une loi de probabilité connue, afin d'estimer des grandeurs ou de modéliser le comportement d'un système complexe.

Dans notre cas, cette méthode est utilisée pour générer :

- Les temps d'inter-arrivée sont générés selon une loi exponentielle de paramètre λ .

- Les temps de service sont générés selon une loi exponentielle de paramètre μ .

Ces données sont produites à l'aide de la fonction R : *rexp()*.

- Le programme exécute une simulation pendant une durée *tmax*.

- À chaque arrivée d'un client, il génère un temps de service.

- Il enregistre les moments d'arrivée, de début de service, et de départ.

Il calcule plusieurs indicateurs sont :

•**Estimation de l'intensité du trafic :**

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}}$$

$\hat{\lambda}$: l'estimation de taux d'arrivée.

$\hat{\mu}$: l'estimation de taux de service.

•**Estimation de temps moyen passé dans la file d'attente :**

$$\hat{W}_q = \frac{\hat{\rho}}{(1 - \hat{\rho}) \hat{\mu}}$$

•**Estimation de nombre moyen de clients dans la file d'attente :**

$$\hat{L}_q = \frac{\hat{\rho}^2}{1 - \hat{\rho}}$$

•**Estimation de temps moyen passé dans le système :**

$$\hat{W}_s = \frac{1}{\hat{\mu} - \hat{\lambda}}$$

•**Estimation de nombre moyen de clients dans le système :**

$$\hat{L}_s = \frac{\hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}}$$

3-Comparaison :

- Le programme répète les simulations pour plusieurs valeurs de λ (0.2, 0.4, 0.6, 0.8).
- Pour chaque cas, il effectue 10 simulations pour lisser les résultats.

- Il compare les résultats simulés aux valeurs théoriques et les affiche dans des graphiques.

4-Distribution des caractéristiques issues de la simulation :

- Pour chaque valeur de λ la simulation a été répétée 10 fois.
- À chaque répétition, on a enregistré les valeurs simulées de caractéristique.
- Ces valeurs ont ensuite été utilisées pour construire des histogrammes représentant leur distribution.

2.7 Estimations des caractéristiques du système

	$\hat{\rho}$	\hat{L}_s	\hat{L}_q	\hat{W}_q	\hat{W}_s	<i>tmax</i>
0.2	0.2115184	0.2729669	0.06144857	0.2766525	1.267471	200
	0.2024171	0.2553551	0.05293799	0.2585233	1.257260	500
	0.1981344	0.2473827	0.04924826	0.2459281	1.235958	1000
0.4	0.4021712	0.6837873	0.28161614	0.6894211	1.690498	200
	0.4160837	0.7189092	0.30282557	0.7315536	1.740215	500
	0.4025503	0.6756869	0.27313659	0.6814185	1.688981	1000
0.6	0.6028712	1.6085238	1.00565259	1.6892074	2.717813	200
	0.6210806	1.7778911	1.15681046	1.8577503	2.874682	500
	0.5965011	1.4801179	0.88361674	1.4731594	2.468137	1000
0.8	0.7966340	4.2157378	3.41910373	4.2627838	5.268338	200
	0.7885407	4.6901901	3.90164945	4.9104349	5.912028	500
	0.7828767	3.7893187	3.00644210	3.7692128	4.756959	1000

TAB. 2.1 – Estimations des caractéristiques du système

2.8 Estimations des paramètres de départ du système

$tmax$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$
200	0.2117754	1.0201839
500	0.2027422	1.0126189
1000	0.2004026	1.0146751
200	0.4017585	1.0027798
500	0.4126056	0.9965681
1000	0.3995432	0.9931228
200	0.5847429	0.9789967
500	0.6090338	0.9886893
1000	0.6003154	1.0065382
200	0.7931133	0.9964047
500	0.7869596	1.0040357
1000	0.7924403	1.0134340

TAB. 2.2 – Estimations des paramètres de départ du système

2.9 Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats de simulation

- Les graphes suivantes présentent une comparaison détaillée entre les valeurs théoriques calculées analytiquement et les résultats estimés par simulation.

•Le graphique suivant illustre une comparaison détaillée entre le temps moyen total passé dans le système tel qu'estimé par la simulation et la valeur théorique prédite par le modèle M/M/1. Cette comparaison permet d'évaluer la précision de la simulation par rapport aux résultats analytiques attendus.

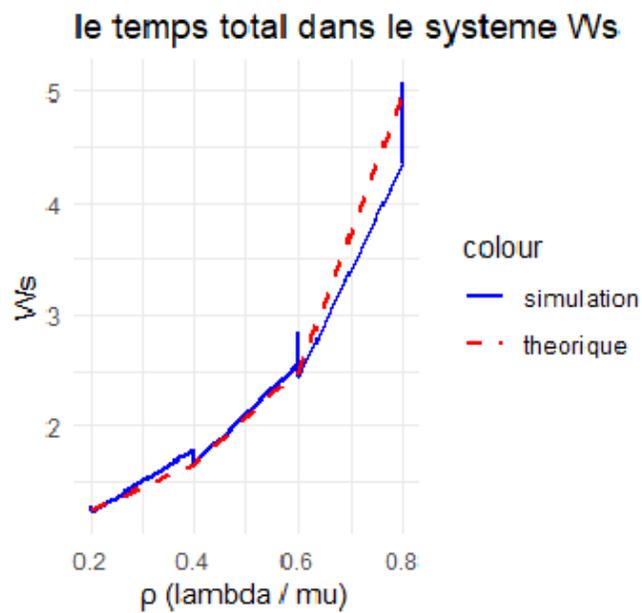


FIG. 2.1 – Temps total dans le système

•Le graphique suivant illustre une comparaison détaillée entre le temps d'attente total dans la file tel qu'estimé par la simulation et la valeur théorique prédite par le modèle M/M/1. Cette comparaison permet d'évaluer la précision de la simulation par rapport aux résultats analytiques attendus.

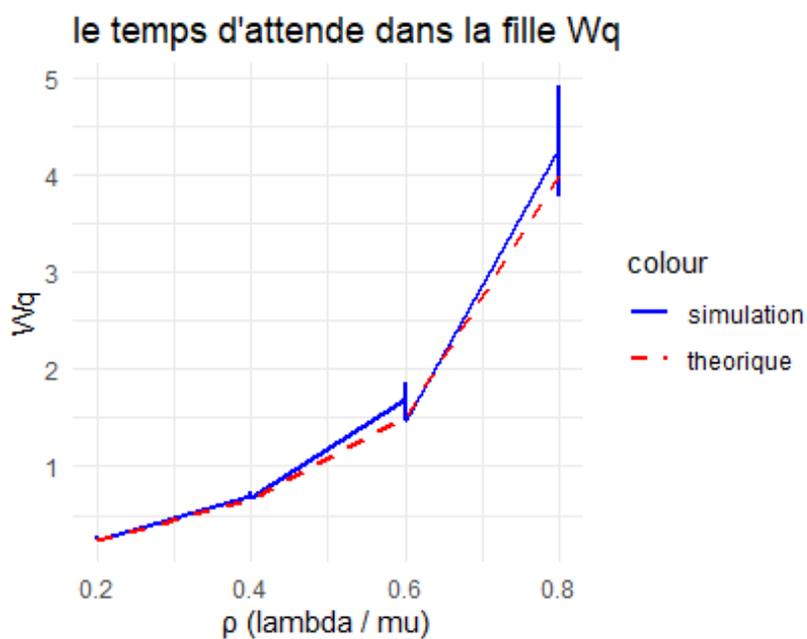


FIG. 2.2 – Temps total d'attente dans la file

•Le graphique suivant illustre une comparaison détaillée entre le nombre de clients dans la file tel qu'estimé par la simulation et la valeur théorique prédite par le modèle M/M/1. Cette comparaison permet d'évaluer la précision de la simulation par rapport aux résultats analytiques attendus.

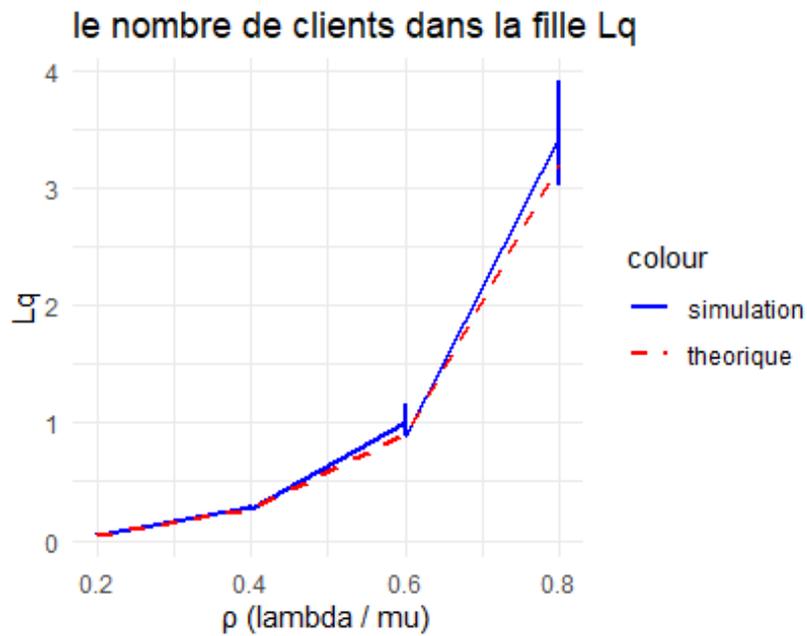


FIG. 2.3 – Nombre de clients dans la file

•Le graphique suivant illustre une comparaison détaillée entre le nombre de clients dans le système tel qu'estimé par la simulation et la valeur théorique prédite par le modèle M/M/1. Cette comparaison permet d'évaluer la précision de la simulation par rapport aux résultats analytiques attendus.

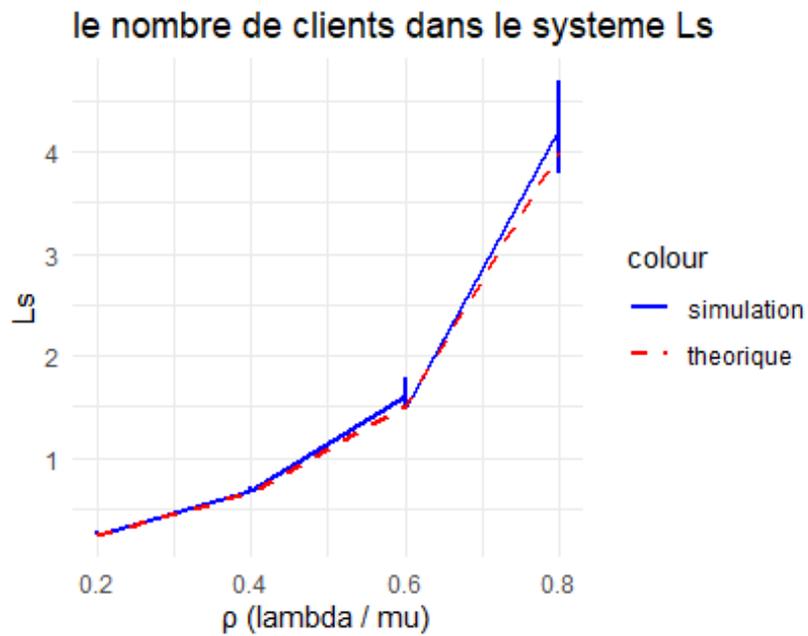


FIG. 2.4 – Nombre de clients dans le système

2.9.1 Discussion des résultats

Les graphiques produits à partir des simulations donnent un aperçu complet de la comparaison entre des valeurs simulées et théoriques des mesures de performances de système de file d'attente M/M/1.

1. Concordance entre simulation et modèle théorique :

Il est facile de voir que dans ce cas, les courbes de simulation sont très proches des théoriques, en particulier avec des valeurs faibles et moyennes du taux d'occupation : $\rho = \lambda / \mu$ ($\rho < 0,8$). Ainsi, le modèle de simulation est assez précis pour simuler le système réel.

2. Effet du taux d'occupation ρ :

À mesure que ρ approche de 1 (c'est-à-dire quand λ se rapproche de μ), les indicateurs tels que Wq et Lq croissent rapidement, ce qui est en accord avec la théorie. Le système tend alors vers la saturation et ses performances se dégradent.

3. Stabilité des écarts entre simulation et théorie :

Les différences légères observées entre les valeurs simulées et les valeurs théoriques peuvent s'expliquer par :

- La nature aléatoire des temps d'arrivée et de service (distribution exponentielle).
- Le nombre limité de répétitions (10 simulations), qu'on pourrait augmenter pour améliorer la précision.
- L'influence de la durée de simulation t_{max} , car les écarts diminuent lorsque t_{max} augmente.

La simulation développée a montré une grande efficacité dans la reproduction du comportement théorique du système M/M/1. La comparaison avec les résultats analytiques confirme la validité du modèle utilisé et souligne l'importance de la simulation comme outil d'analyse et d'aide à la décision dans la gestion des files d'attente.

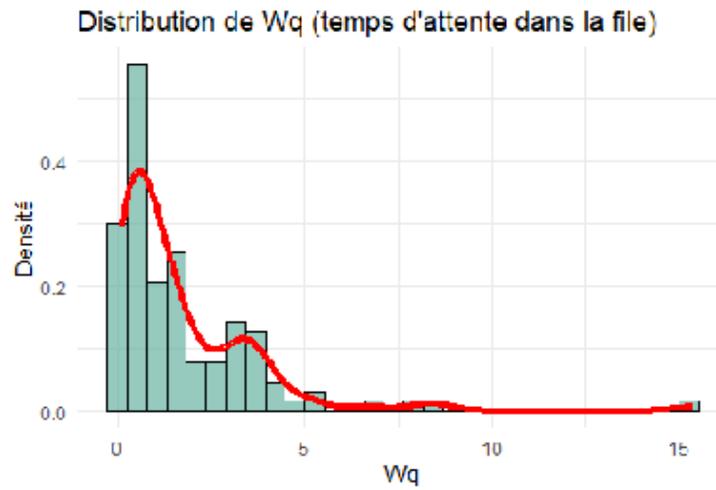
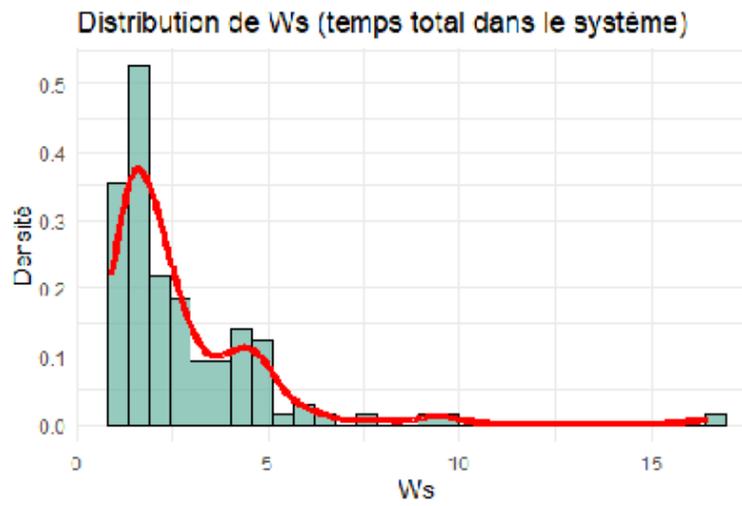
2.10 Distribution des estimations

Afin de mieux appréhender le comportement global du système M/M/1, il est important de s'intéresser à **la distribution** des indicateurs de performance. Cette approche permet de mettre en évidence la variabilité du système ainsi que la probabilité d'occurrence de situations extrêmes pouvant impacter son bon fonctionnement.

Les graphiques suivants représentent les distributions des principales caractéristiques du système, à savoir :

- le nombre de clients en file d'attente.
- le nombre total de clients dans le système.
- le temps d'attente dans la file.
- le temps total passé dans le système.

Cette analyse offre une vision plus complète et plus précise du comportement du système.



Les graphiques ci-dessous montre la distribution de nombre de clients dans la file et le nombre de clients dans le système

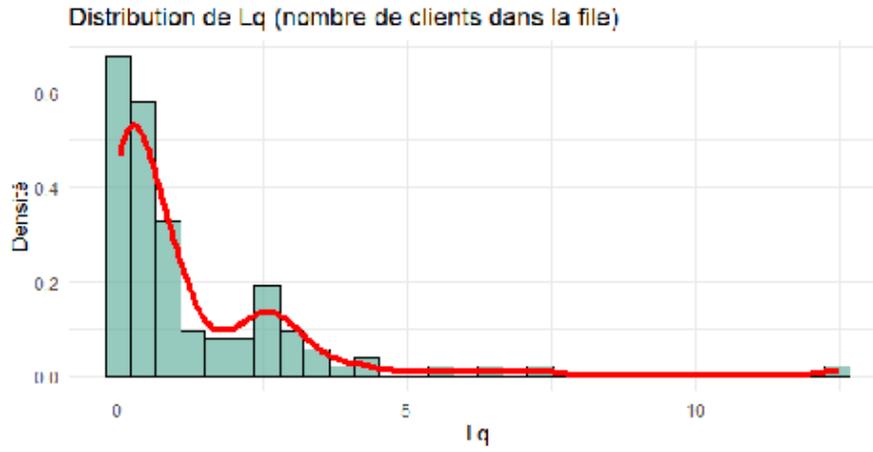


FIG. 2.5 – Distribution de nombre de clients dans la file

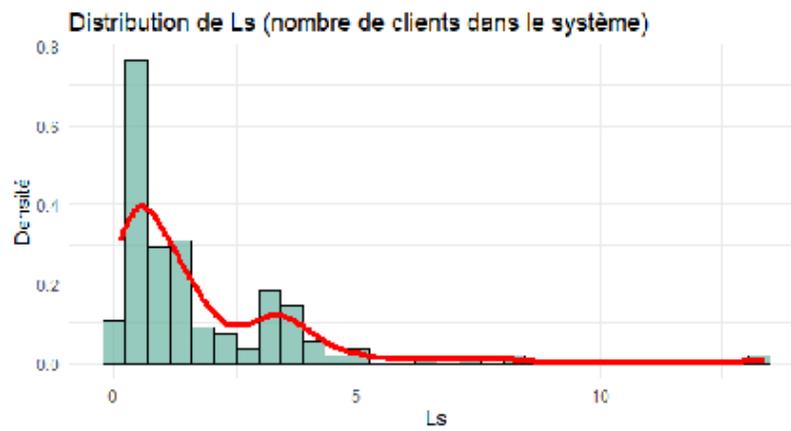


FIG. 2.6 – Distribution de clients dans le système

2.10.1 Discussion des résultats

L'étude des distributions des caractéristiques du système $M/M/1$ nous a permis de mettre en évidence plusieurs comportements essentiels. Les distributions de L_q, L_s, W_q, W_s présentent toutes une forte asymétrie positive, caractérisée par une concentration de la densité de probabilité autour de petites valeurs et par l'existence d'une longue traîne vers des valeurs plus élevées.

Cela signifie que, dans la majorité des cas, le système fonctionne avec peu de clients en attente ou dans le système, et avec des temps d'attente courts. Toutefois, il subsiste une probabilité non négligeable que des files d'attente longues ou des temps d'attente prolongés apparaissent, même si ces événements sont rares. Ce comportement est typique des systèmes d'attente où les arrivées et les services suivent des lois exponentielles. Il est également notable que la distribution de L_s est globalement décalée vers des valeurs supérieures par rapport à celle de L_q ce qui est logique car L_s inclut le client en cours de service. De même, W_s est supérieur à W_q car il additionne le temps d'attente au temps de service. L'analyse globale montre que, même si la performance moyenne du système semble acceptable, il est crucial de prendre en compte la variabilité et le risque d'événements extrêmes. L'étude des distributions offre donc une vision plus complète et réaliste du comportement du système que l'analyse basée uniquement sur les moyennes, donc l'analyse approfondie des distributions nous a permis de mieux comprendre les dynamiques internes d'un système d'attente $M/M/1$. Bien que les indicateurs moyens puissent donner une idée générale de la performance, seule l'étude des distributions révèle l'étendue de la variabilité et les risques associés aux situations extrêmes.

Conclusion

Dans le cadre de ce memoire,nous avons entrepris une etude rigoureuse de la distribution des estimateurs des caracteristiques stationnaires d'un systeme de files d'attente modelise par le model M/M/1. Cette analyse s'est appuyee sur une demarche experimentale basee sur la simulation, mise en œuvre à l'aide du logiciel R, dans le but d'évaluer empiriquement la performance des estimateurs dans divers contextes operationnels.

Les resultats obtenus revelent que la qualite des estimations est fortement influencee par plusieurs parametres, notamment la duree de la simulation, le niveau de charge du systeme, ainsi que la nature de la caracteristique étudiée. Il apparaît également que les propriétés inhérentes au modèle de files d'attente ont un effet déterminant sur le comportement des estimateurs, parfois plus marqué que les considérations statistiques classiques

Par ailleurs, l'étude a mis en évidence que la distribution asymptotique des estimateurs ne s'aligne pas systématiquement sur une loi normale, ce qui suggère que le théorème central limite ne s'applique pas dans toutes les situations envisagées, en particulier lorsque le volume de données est restreint ou lorsque les conditions de simulation sont spécifiques

Ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche, parmi lesquelles :

- L'identification des lois de distribution précises associées aux estimateurs, ainsi que l'analyse de leurs comportements asymptotiques

- La consolidation théorique des résultats empiriques obtenus, notamment en ce qui concerne la convergence en loi

L'examen de stratégies alternatives d'échantillonnage et l'étude comparative de leur impact sur la précision des estimations

Bibliographie

- [1] Bhat, U. N. (2008). *An introduction to queueing theory : Modeling and analysis in applications*. Birkhäuser Basel
- [2] Bonnet, B. (s.d.). *Probabilités* [Document pédagogique, Lycée International de Valbonne].
- [3] Bose, S. K. (2002). *An introduction to queueing systems*. Springer Science+Business Media.
- [4] Bourouis, A. (n.d.). File d'attente à capacité limitée [Figure]. ResearchGate.https://www.researchgate.net/figure/File-dattente-a-capacite-limitee_fig3_330076333
- [5] Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1* (3rd ed.). Wiley
- [6] Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., & Harris, C. M. (2018). *Fundamentals of queueing theory* (5th ed.). Wiley
- [7] Hamadouche, D. (2024). *Systèmes de files d'attente* [Document de cours, Université de Tizi-Ouzou - Dr Mouloud Mammeri]
- [8] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Volume 1 : Theory*. Wiley-Interscience

- [9] Moulay,H.R Y,(2015),p.7. *Files d'attente et applications* (Mémoire de Master 2,.Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen).
- [10] Noui, N. (2023). *Analyse de la qualité de certains estimateurs paramétriques* (Mémoire de Master 2,Université Mohamed Khider Biskra).
- [11] Rubinstein, R. Y., & Kroese, D. P. (2017). *Simulation and the Monte Carlo method* (3rd ed.). Wiley
- [12] Saheb, N. (2004, octobre 6). Processus de file d'attente – Séquence 3.8 [Figure]. IUP MIAGE <https://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/formation-a-distance/cibermiage-processus/c1.7/ch03/seq08/sequence.htm>
- [13] Zeghoudi, A., & Mokhdar, A.-E. (2020). *L'utilisation de la théorie des files d'attente pour la gestion des feux tricolores* (Mémoire de Master 2, Université Abou Bekr Belkaïd- Tlemcen).Image intitulée File d attente avec plusieurs serveurs, p. [34]

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des caractéristiques des files d'attente, en se concentrant sur le modèle M/M/1. A travers une approche de simulation sous le logiciel R, nous avons évalué la performance de certains estimateurs liés aux grandeurs stationnaires du système. Les résultats obtenus montrent que la qualité des estimations dépend de plusieurs facteurs tels que la durée de la simulation, la charge du système et la variable étudiée. Ce travail ouvre la voie à des recherches complémentaires, tant sur le plan théorique qu'expérimental.

Mots-clés : Files d'attente, simulation, estimateurs, analyse stationnaire

المخلص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة خصائص أنظمة الطوابير، مع التركيز على نموذج الأول. تم اعتماد منهجية تعتمد على المحاكاة باستخدام برنامج احصائي حيث قمنا بتحليل أداء بعض المقدرات الإحصائية المرتبطة بالحالة المستقرة للنظام. أظهرت النتائج أن جودة التقديرات تتأثر بعوامل متعددة مثل مدة المحاكاة، درجة انشغال النظام، والمتغير المدروس كما تفتح هذه الدراسة المجال لأعمال مستقبلية أكثر تعمقاً سواء من الناحية النظرية أو التطبيقية.

الكلمات المفتاحية: الطوابير, المحاكاة, التقدير الإحصائي, الحالة المستقرة

Abstract

This thesis focuses on the study of queuing system characteristics, specifically the M/M/1 model. A simulation-based approach using the R software was adopted to analyze the performance of certain statistical estimators associated with the system's steady-state behavior the results show that the quality of the estimations depends on several factors such as the simulation duration, the system load, and the observed variable. This work opens the way for further theoretical and experimental investigations.

Keywords: Queuing systems , simulation, statistical estimation, steady-state