République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Analyse**

Par : MEBARKI IMANE

Titre :

Equations Intégrales Linéaires De Fredholm De Seconde Espèce Et Méthode Des Approximations successives

---

Devant le Jury :

BERBICHE MOHAMED	Président	U. Biskra
CHEMCHAM MADANI	Encadreur	U. Biskra
KABOUL HANANE	Examinatrice	U. Biskra

Soutenu Publiquement le 02/06/2025

Dédicace

Louange à Dieu pour la douceur de l'accomplissement, louange à Lui au début comme à la fin.

J'ai longtemps été connue sous le nom de mon père plus que par mon propre prénom, et ce fut là mon tout premier témoignage de réussite.

Je dédie donc l'obtention de mon diplome à mon pilier constant, mon soutien inébranlable, ma fierté première " mon père".

À mon ange sur terre, à celle qui incarne l'amour, la tendresse et la loyauté, à celle qui a semé en moi l'amour du savoir, dont les prières ont été le secret de ma réussite, "ma chère mère".

À mon grand frère, et à tous ceux qui m'ont précédée en âge parmi mes frères et sœurs, dont la présence m'a toujours insufflé force et amour infinis.

À ma seconde mère, celle qui m'a enseignée, encouragée et soutenue à chaque étape de ma vie : ma grand-mère" Khadraoui Hadda".

À l'épouse de mon père, en reconnaissance de son rôle de soutien et de ses nobles attitudes qui ont laissé une empreinte bienveillante sur mon parcours.

À ceux qui ont uni fraternité, loyauté et générosité, à ceux qui m'ont accompagnée dans les joies et les peines de la vie : mes oncles et tantes, chacun et chacune par son nom : " Ali, Nabil, Fayçal, Fares, Mohamed, Bouchra, Hassiba".

À l'âme pure de mon grand-père "Khadraoui Aribi", parti en corps mais toujours vivant dans mon cœur et mes souvenirs. Qu'Allah lui accorde sa miséricorde et l'accueille dans son vaste paradis.

À l'âme de ma grand-mère "Chaoui Saadia", dont le souvenir reste une lumière guidant mes pas. Qu'Allah lui accorde sa miséricorde et l'accueille dans son vaste paradis.

À mes deux professeurs estimés, "Bar Bachir" et "Gossa Laïd", qui ont été un soutien précieux dans mon parcours de savoir. Je prie Dieu de vous accorder réussite et la récompense pour tout ce que vous m'avez offert.

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu, qui m'a donné la force et la motivation nécessaires pour rédiger ce modeste travail.

Je tiens également à remercier chaleureusement "Pr Chemcham Madani", directeur de mon mémoire, pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils tout au long du processus de rédaction.

Je suis extrémement reconnaissante envers les membres du jury " Pr Berbiche Mohamed " président du jury, et " Pr.Kaboul H anane" examinatrice, qui ont pris le temps d'évaluer mon travail et de m'offrir leur expertise.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail

Notations et symboles

$\varphi(x)$	:	La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
$k(x,t)$	:	Noyau de l'équation intégrale.
T	:	Opérateur linéairel borné.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
EDO	:	Equation différentielle ordinaire.
$C([a,b])$	:	L'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
$L^2([a,b])$	:	L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $[a,b]$.
$\mathcal{L}(E,F)$	:	L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F.
PVB		Problème de valeurs aux limites.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **iii**

Notations et symbols **v**

Table des matières **v**

Table des figures **viii**

Liste des tableaux **ix**

Introduction **1**

1 Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce **3**

1.1 Les équations intégrales linéaires 3

1.1.1 Définition générale 3

1.1.2 Equation intégrale linéaire de Fredholm 5

1.2 Noyaux particuliers dans les équations intégrales linéaires 10

1.3 Relation entre les équations differentielles ordinaires et les équations intégrales 11
1.3.1 Transformation d'un problème aux limites en une équation intégrale linéaire de Fredholm 12
1.3.2 Transformation d'une équation intégrale linéaire de Fredholm en un problème aux limites 16
1.4 **Existence et unicité de la solution** 19
1.4.1 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Banach $(C([a,b]), \|\bullet\|_C)$ 20
1.4.2 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Hilbert $(L^2([a,b]), \|\bullet\|_2)$ 23

2 Méthode des approximations successives **26**
2.1 Développement de la suite des approximations successives 27
2.2 Condition de convergence 29

Conclusion **38**

Bibliographie **38**

Table des figures

2.1 Solution exact, et approximations successives du problem(2.1) . . . 37

Liste des tableaux

Introduction

Les équations intégrales jouent un role fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, notamment dans la modélisation de phénomènes physiques, l'ingénierie et les sciences computationnelles parmi ces équations, l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce occupe une place importante en raison de sa capacité à représenter une grande variété de problèmes en physique, en mécanique quantique et en théorie des système dynamique.

Les équations intégrales linéaires de Fredholm(qui ont été introduites par le mathématicien suédois **Erik Ivar Fredholm** (1866_1927) en 1903) ;

Dans ce mémoire est dédié à l'étude **des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce** et à la mise en oeuvre de **la méthode des approximations successives,** une technique puissante et largement utilisée pour trouver des solutions approchées à ce type de problème. Cette méthode repose sur l'idée de construire une suite de fonction convergeant vers la solution exacte en partant d'une estimation initiale.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier les fondements de ce type des équations et présenter la méthode des approximations successives qu'on utilise pour le résoudre, notre travail est divisé en deux chapitres :

Le premièr chapitre on étudie les types et la forme générale des équations intégrales linéaires. Ensuite, nous avons présenté les définitions et propositions le plus importantes sur les opérateurs linéaire bornés . De plus, on explique la relation entre les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce et les équations différentielles ordinaires (EDO). Au final, on présente théorèmes d'existence et d'unicité de la solution à ces équations dans deux espaces Hilbert et Banach en utilisant le théorème du série de Neumann, car ces notions sont nécessaires à l'étude du deuxième chapitre.

La deuxième chapitre, il existe plusieurs méthodes pour obtenir la solution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, et nous allons présenter la méthode des approximations successives et nous étudions le condition de sa convergence et l'appliquons à des exemples.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce

1.1 Les équations intégrales linéaires

Une équation intégrale linéaire est une équation dans la quelle la fonction inconnue apparait sous le signe intégrale, et l'opérateur intégral agit de manière linéaire sur cette fonction.

1.1.1 Définition générale

On dit qu'une équation est une équation intégrale linéaire si elle s'écrit sous la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

Où

- $\varphi(t)$ est la fonction inconnue à déterminer, $f(x)$ est une fonction donnée.

- $k(x,t)$ est une fonction donnée qui dépend des deux variables x et t, appellée noyau de l'équation intégrale.
- λ est un paramètre réel ou complexe different de 0.
- $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les bornes de l'intégration.(Il convient de noter que les bornes de l'intégration peuvent être à la fois variables, constantes ou mixtes).
- $h(x)$ est une fonction qui détermine le type de l'équation intégrale.

Les principaux types :

Les équations intégrales linéaires peuvent être classées en plusieurs types selon leur forme et leur structure :

1. Equations intégrales de Volterra : elle est définie sur un interval $[a,b]$ où la borne supérieure $\beta(x)=x$ et la borne inférieur $\alpha(x)=a$.

$$h(x)\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha}^{x}k(x,t)\varphi(t)dt.$$

2. Equations intégrales de Fredholm : ici l'intégrale est définie sur un intervalle $[a,b]$ où les borne $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont constantes.

$$h(x)\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}k(x,t)\varphi(t)dt.$$

3. Equations singulières : ce sont des équations intégrales où le noyau $k(x,t)$ présente une singularité pour centaires valeurs de x et t.
4. Equations différentielles intégrales : elles combinent des termes différentiels

et intégrales.

$$\varphi'(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt.$$

5. Equations intégrales homogènes et non homogènes.

- Si $f(x) = 0$, l'équation (1.1) est dite homogène.
- Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.1) est dite non homogène.

Remarque 1.1.1

La position de l'inconnue $\varphi(x)$ déterminer le type de l'équation :

- Equation intégrale de première espèce :

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt = 0.$$

- Equation intégrale de deuxième espèce :

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x).$$

1.1.2 Equation intégrale linéaire de Fredholm

Une équation intégrale linéaire de Fredholm s'écrit sous la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,t)\varphi(t)dt, \qquad a \leq x \leq b. \tag{1.2}$$

Ici, $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer. Le paramètre λ est un scalaire donné (réel ou complexe). $k(x,t)$ est le noyau de l'équation, c'est-à-dire une fonction donnée définie sur $L^2([a,b])$ ou continu. Enfin, $f(x)$ est une fonction connue, souvent issue d'un problème physique ou d'ingénierie.

On distingue les types d'équations intégrales linéaires de Fredholm :

1. Si $h(x) = 0$, alors l'inconnue apparait uniquement sous le signe intégral :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0.$$

   et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = 1$, alors l'inconnue apparait à la fois à l'extérieur et à l'intérieur de l'intégrale :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt,$$

   et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3. Sinon, la formule de équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.

On présente dans les exemples suivants quelques type des équations intégrales linéaires de Fredholm :

1. $2x^2 - x + 4 = \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt$ (équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce).
2. $\varphi(x) = x + 4 - \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt$ (équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce).

• ***Opérateurs linéaires bornés***

Définition 1.1.1 *(Opérateur linéaire) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, un opérateur T défini sur E dans F qui vérifie :*
pour tout $x, y \in E$, et pour touts scalaires α et β, on a :

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Définition 1.1.2 *(Opérateur linéaire borné) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dit borné s'il existe une constant $M \geqslant 0$, telle que*

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \ \ , \forall x \in E.$$

Proposition 1.1.1 *Le plus petit des nombres M vérifiant l'inégalité précédente s'appelle norme de l'opérateur T et se note $\|T\|$ on a :*

$$\|T\| = \inf \left\{ M \geq 0 / \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E , \forall x \in E \right\}$$
$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\| .$$

• ***Opérateur intégral linéaire***

Définition 1.1.3 *(Opérateur intégral linéaire)*

Un opérateur intégral linéaire K est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :

$$K\varphi(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \qquad x \in [a,b]$$

Evidemment, cet opérateur intégral est linéaire, la fonction $k(x,t)$ est appelée noyau de l'opérateur intégral.

Nous considérons des noyaux $k(x,t) \in L^2([a,b] \times [a,b])$ donc :

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} |k(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty$$

Théorème 1.1.1 *Soit K l'opérateur intégral avec un noyau $k(x,t)$ continu sur $[a,b] \times [a,b]$. Alors l'opérateur K est borné, et donc continu De plus :*

1) $k : L^2(a,b) \to L^2(a,b) \qquad \|Kf\|_2 \leq M(b-a)\|f\|_2 \qquad$ pour $f \in L^2(a,b)$

2)$k : C[a,b] \to C[a,b] \qquad \|Kf\|_C \leq M(b-a)\|f\|_C \qquad$ pour $f \in C[a,b]$

Preuve. Puisque $k(x,t)$ est continu sur l'intervale fermé $[a,b] \times [a,b]$, il existe $M \geq 0$ tel que

$$M = \max_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|$$

1)

$$
\begin{aligned}
\|Kf\|_2 = ((Kf)(x),(Kf)(x))^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_a^b |(kf)(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_a^b \left|\int_a^b k(x,t)f(t)dt\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\int_a^b \|k\|_2^2\,\|f\|_2^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \left[\int_a^b \left(\int_a^b |k(x,t)|^2\,dt\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_2 \left[\int_a^b \left(\int_a^b M^2 dt\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M\,\|f\|_2 \left[\int_a^b \left(\int_a^b dt\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= M\,\|f\|_2\,(b-a)
\end{aligned}
$$

2)

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_C &= \max_{x\in[a,b]} |(Kf)(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b k(x,t)f(t)dt \right| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\,|f(t)|\,dt \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \|f\|_C \int_a^b M dt \\
&= \max_{x\in[a,b]} \|f\|_C \, M(b-a) \\
&= M(b-a)\,\|f\|_C
\end{aligned}$$

■

1.2 Noyaux particuliers dans les équations intégrales linéaires

Dans le cadre des équations intégrales linéaires, les noyaux jouent un role central et définissent la nature de l'intégrale. Les noyaux peuvent être utilisés en fonction des caractéristiques de l'équation, voici quelques types de noyaux particulièrs :

1. On dit que le noyau $k(x,t)$ d'une équation intégrale est *séparable* ou (dégénéré) si :

   $$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

   Où $\alpha_i(x)$ et $\beta_i(t), i = \overline{1,n}$ sont linéairement indépendantes.

2. Si $k(x,t) \in L^2([a,b] \times [a,b])$, i.e

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty$$

alors ce type de noyau est de carré *sommable* sur $([a,b] \times [a,b])$.

3.

• Si $k(x,t)$ est une fonction à valeurs complexes et si $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ alors il dit *hermitien* .

• Si $k(x,t)$ est une fonction à valeurs réelles et si $k(x,t) = k(t,x)$.

alors il est dit symétrique, une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi *symétrique.*

Exemple 1.2.1

1. $k(x,t) = e^x e^t$, ici on peut identifier $f(x) = e^x$ et $g(t) = e^t$.
2. $k(x,t) = e^{-(x-t)^2}$, vérifions la symétrie : $k(t,x) = e^{-(t-x)^2} = e^{-(x-t)^2} = k(x,t)$.

1.3 Relation entre les équations differentielles ordinaires et les équations intégrales

Les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce sont étroitement liées dans de nombreux contextes mathématiques et physique. Il est souvent possible de transformer un problème de valeurs aux limites (PVB) en une équation intégrale équivalente. Cette correspondance permet d'exploiter des méthodes analytiques et numériques spécifiques à chaque type d'équation pour mieux comprendre et résoudre certains problèmes complexes.

Dans cette section, nous examinerons deux types de conversions :

1.3.1 Transformation d'un problème aux limites en une équation intégrale linéaire de Fredholm

Considérons l'équation différentielle linéaire suivante avec conditions aux limites :

$$y''(x) + g(x)y(x) = h(x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.3}$$

avec les condition aux limites :

$$y(0) = \alpha \ , y(1) = \beta, \qquad \text{ou } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nous définissons une fonction $\varphi(x)$ représentant la dérivée seconde de $y(x)$:

$$y''(x) = \varphi(x) \tag{1.4}$$

En intégrant cette expression sur l'intrvalle $[0, x]$, nous obtenons :

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x \varphi(t)dt,$$

Ce qui implique

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) \tag{1.5}$$

En intégrant les deux membres, on trouve

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^x y'(0)dt \tag{1.6}$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Nous avons utilisé la formule suivante (formule de Cauchy pour l'intégrale itérée)

$$\underbrace{\int_{x0}^x dx \int_{x0}^x dx ... \int_{x0}^x f(x)dx}_{n \text{ intégrales}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x0}^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

En imposant la condition aux limites $y(0) = \alpha$, cette équation devient :

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \ , \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{1.7}$$

Détermination de $y'(0)$ en utilisant la condition $y(1) = \beta$ en évaluant $y(x)$ en $x = 1$, nous obtenons

$$\beta = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt.$$

D'où nous pouvons exprimer $y'(x)$ comme

$$y'(0) = (\beta - \alpha) - \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt \tag{1.8}$$

en remplaçant (1.8) dans l'équation de (1.7), nous obtenons

$$y(x) = \alpha + x(\beta - \alpha) - x\int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \tag{1.9}$$

En utilisant (1.4), nous pouvons substituer et remplaçer aussi (1.9)dans (1.3) ceci donne

$$\varphi(x) + \alpha g(x) + x(\beta - \alpha)g(x) - \int_0^1 xg(x)(1-t)\varphi(t)dt + \int_0^x g(x)(x-t)\varphi(t)dt = h(x) \tag{1.10}$$

On peut utiliser la formule

$$\int_0^1 (.) = \int_0^x (.) + \int_x^1 (.)\,,$$

On obtient

$$\varphi(x) = h(x) - \alpha g(x) - x(\beta - \alpha)g(x) + xg(x)\left[\int_0^x (1-t)\varphi(t)dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt\right]$$
$$- \int_0^x g(x)(x-t)\varphi(t)dt,$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)g(x)\varphi(t)dt + \int_x^1 x(1-t)g(x)\varphi(t)dt,$$

Finalement, nous obtenons l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt.$$

Où

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - x(\beta - \alpha)g(x),$$

et le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), \text{ si } 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)g(x), \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

i.e nous obtenons une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèces.

Remarque 1.3.1 *Dans le cas ou $y(0) = y(1) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = 0$, la fonction $f(x)$ se réduit à $h(x)$. Cela signifie que si le problème aux limites est homogène, l'equation intégrale résultate sera également homogène, et la même chose pour le cas non homogène.*

Exemple 1.3.1 *Former l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle*

$$y''(x) + xy(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec les conditions aux limites suivantes $y(0) = y(1) = 2$.

On peut remarqer $\alpha = 0, \beta = 2$, $g(x) = x$ (constante) et $f(x) = -2x^2$ donc en remplaçant dans l'équation (1.12), on trouve

$$\varphi(x) = -2x^2 + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt.$$

avec

$$k(x,t) = \begin{cases} xt(1-x), \text{ si } 0 \leq \ t \leq x, \\ x^2(1-t), \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pour un autre exemple vous pouvez consulter[5] *page*51.

1.3.2 Transformation d'une équation intégrale linéaire de Fredholm en un problème aux limites

Nous pouvons convertir aussi les équations intégrales de Fredholm en un problème aux limites, en utilisant la règle de Leibnitz

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx.$$

Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.11}$$

Où $f(x)$ est une fonction donnée, $k(x,t)$ est le noyau défini par :

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), \text{ si } 0 \leq \ t \leq x, \\ x(1-t)g(x), \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pour simplifier l'analyse, supposons que $g(x) = \lambda$ où λ est une constante réelle. L'équation (1.11) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x t(1-x)\varphi(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)\varphi(t)dt,$$

Et de manière équivalente, nous obtenons

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(1-x)\int_0^x t\varphi(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt \tag{1.12}$$

en dérivant les deux membres par rapport à x et en utilisant le règle de *Leibnitz*, nous trouvons

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda(1-x)x\varphi(x) - \lambda\int_0^x t\varphi(t)dt - \lambda(1-x)x\varphi(x) + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt \tag{1.13}$$

ce qui simplifie en :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda\int_0^x t\varphi(t)dt + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt$$

en différenciant à nouveau par rapport à x, on obtient :

$$\varphi''(x) = f^{''}(x) - \lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x) \tag{1.14}$$

D'où l'équation différentielle associée :

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = f''(x) \tag{1.15}$$

les conditions aux limites associées peuvent être obtenues en substituant $x = 0$ et $x = 1$ dans l'équation intégrale d'origine :

$$\varphi(0) = f(0), \varphi(1) = f(1) \tag{1.16}$$

Ainsi, le système

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = f''(x), \\ \varphi(0) = f(0), \varphi(1) = f(1). \end{cases}$$

est un problème aux limites équivalent à l'équation de Fredholm (1.13).

Exemple 1.3.2 *Convertir l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt.$$

Où le noyau donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x), \ si \ 0 \leq \ t \leq x, \\ 9x(1-t), si \ x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

l'équation intégrale de Fredholm s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) + 9(1-x)\int_0^x t\varphi(t)dt + 9x\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt.$$

en dérivant des deux membres deux fois par rapport à x et en utilisant la régle de *Leibnitz*, nous trouve

$$\varphi'(x) = e^x - 9\int_0^x t\varphi(t) + 9\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt,$$
$$\varphi''(x) = e^x - 9\varphi(t),$$

Ceci donne (EDO)

$$\varphi''(x) + 9\varphi(t) = e^x.$$

on peut obtenir les condition aux limites en remplaçant x par 0 et par 1 dans l'équation (1.16)

$$\varphi(0) = f(0) = 1 \quad , \quad \varphi(1) = f(1) = e$$

Finalement, on trouve

$$\begin{cases} \varphi''(x) + 9\varphi(t) = e^x, \\ \varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi(1) = e. \end{cases}$$

qui est un problème aux limites équivalents à l'équation de Fredholm.

Pour un autre exemple vous pouvez consulter [5] *page*56.

1.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.4.1

Série de Neumann : Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur compact, avec $\|A\| < 1$. Alor :

1. La série infinie $\sum_{i=0}^{\infty} A^i$ est aussi un élement de $\mathcal{L}(E, F)$, et appelée la série de Neumann.

2. L'opérateur $(I-A) \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijectif et sont inverse est donné par $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$.
3. $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ la norme de l'inverse est bornée.
4. $\forall f \in E$, l'équation $(I-A)\varphi = f$ avec l'inconnue $\varphi \in F$ admet une solution unique :

$$\varphi = (I-A)^{-1} f = \sum_{i=0}^{\infty} A^i f.$$

Preuve. pour le preuve voir [2]. ■

1.4.1 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Banach $(C([a,b]), \|\bullet\|_C)$

On considère l'équation integrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad a \leq x \leq b \tag{1.17}$$

Où $f \in C([a,b])$, $k \in C([a,b] \times [a,b])$ et le paramètre λ vérifiant la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{1.18}$$

où $M = \max_{x,t \in [a,b]}(|k(x,t)|)$, alors l'équation integrale(1.17) admet une solution unique $\varphi \in C([a,b])$.

Preuve. Soient $f \in C([a,\,b])$ et $k \in C([a,b] \times [a,b])$ supposons que la condition (1.18) et satisfaite.

On considére l'opérateur A défini par

$$A\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

1. On montre que A est bien défini sur $C([a,\ b])$, soit$\varphi \in C([a,b])$.

$$\begin{aligned}
\|A\varphi(x)\|_C &= \max_{x\in[a,b]} \left| \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right| \\
&= |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\,|\varphi(t)|\,dt \\
&= |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \|\varphi\|_C \max_{x\in[a,b]} \int_a^b k(x,t)dt \\
&= |\lambda|\,\|\varphi\|_C \int_a^b \max_{x\in[a,b]} |k(x,t)|\,dt \\
&= |\lambda|\,\|\varphi\|_C \int_a^b M dt \qquad (M = \max_{x\in[a,b]} |k(x,t)|) \\
&= |\lambda|\,\|\varphi\|_C\, M(b-a) < 1
\end{aligned}$$

Alors

$$\|A\| = \sup \frac{\|A\varphi\|_C}{\|\varphi\|_C} = |\lambda|\, M(b-a) < 1$$

on trouve

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

La condition est vérivier.

2. On montrer que la solution existe et unique dans $C([a,b])$.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right\| &= \max_{x\in[a,b]}\left|\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \max_{x\in[a,b]}\left|A^i f\right| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \max_{x\in[a,b]}\left|A^i\right| |f| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \max_{x\in[a,b]}\left|\lambda\int_a^b k(x,t)dt\right|^i |f| \qquad \left(\ A = \lambda\int_a^b k(x,t)dt\right) \\
&= \|f\|_C\, |\lambda|^i \sum_{i=0}^{\infty} \max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^b k(x,t)dt\right|^i \\
&= \|f\|_C\, |\lambda|^i \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b M^i dt \qquad \left(M = \max_{x\in[a,b]}|k(x,t)|\right) \\
&= |\lambda|^i\, \|f\|_C \sum_{i=0}^{\infty} [M(b-a)]^i
\end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation $\varphi \in C([a,b])$.

■

Alors φ verifie les condition du théorème (1.4.1) et donc (1.17) admet une solution unique $\varphi \in C([a,b])$.

1.4.2 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Hilbert $(L^2([a,b]), \|\bullet\|_2)$

On considère l'équation intégrale (1.17)ou $f \in L^2([a,b])$, $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ et le paramètre λ vérifiant la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \tag{1.19}$$

Où

$$B = \left(\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} k^2(x,t)dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors l'équation intégrale(1.17)admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$.

Preuve. Soit $f \in L^2([a,b])$ et $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, supposons que la condition (1.19) est satisfaite.

On considère l'opérateur A défini par

$$A\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

1. On monter que l'opérateur A est bien défini sur $L^2([a,b])$, on pose que $\varphi \in L^2([a,b])$.

$$\|A\varphi(x)\|_2 = \int_a^b |A\varphi(x)|^2 \, dx = \int_a^b \left| \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right|^2 dx$$
$$= \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right)^2 dx$$

On appliquant le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right)^2 dx \leq \iint_{[a,b]\times[a,b]} k^2(x,t)dxdt \left\|\varphi\right\|_2^2$$
$$= \left\|k\right\|_2^2 \left\|\varphi\right\|_2^2$$

Finalement, on trouve

$$\int_a^b \left|A\varphi(x)\right|^2 dx \leq \lambda^2 \left\|k\right\|_2^2 \left\|\varphi\right\|_2^2$$
$$= \left(|\lambda| \left\|k\right\|_2 \left\|\varphi\right\|_2\right)^2 < 1$$

On trouve

$$\left\|A\right\| = |\lambda| \left\|k\right\|_2 < 1$$

Alors

$$|\lambda| < \frac{1}{\left\|k\right\|_2} < \frac{1}{B}$$

Donc la condition est vérivier

$$A\varphi \in L^2([a,b]), \qquad \forall \varphi \in L^2([a,b])$$

Ce qui montre que l'opérateur A est bien défini sur $L^2([a,b])$.

2. On montre que la solution existe et unique dans $L^2([a,b])$.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right\|_2 &= \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right)\right) = \left[\int_a^b \left|\sum_{i=0}^{\infty} A^i f\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_a^b \left|\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \int_a^b k^i(x,t) f(t) dt\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \left(|k(x,t)|^i\right)^2 dt dx\right]^{\frac{1}{2}} |\lambda|^2 \|f\|_2 \\
&\leq |\lambda|^2 \|f\|_2 \sum_{i=0}^{\infty} B^i
\end{aligned}$$

Alors φ verifie les conditions du théorème (1.4.1) et donc l'équation (1.17) admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$.

■

Chapitre 2

Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives est une méthode intérative utilisé pour approcher la solution d'une équation ou d'un problème mathématique en affinant progressivement l'estimation initiale.

Elle est couramment employée en analyse numérique et en algèbre linéaire pour résoudre des équations différentielles, des systèmes d'équations linéaires ou non linéaires.

Le principe générale de la méthode des approximations successives pour résoudre une équation linéaire de Fredholm de seconde espèce repose sur la transformation du problème intégrale en une suite des solutions approchées qui convergeant vers la solution exacte.

L'idée principale est d'utiliser une itération pour approximation $\varphi(x)$ ou définite une suite de fonctions $\varphi_n(x)$ par suivante :

1. **Initialisation :** généralement on pose

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

2. **Itération :** a chaque étape, on définit $\varphi_n(x)$ par :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt \qquad n = 1, 2, ...$$

   On répète cette opération jusqu'à ce que la différence entre deux approximations consécutives soit suffisamment petite : $\|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\| < \varepsilon$.

3. **Convergence :** la suite $\varphi_n(x)$ converge uniformément vers la solution $\varphi(x)$.

2.1 Développement de la suite des approximations successives

L'abjectif de cette section est d'expliquer en détail pourquoi la méthode des approximations successives conduit à une solution convergente en utilisant *le développement en série de Neumann.*

Les itérations suivantes de méthode des approximations successives sont définies par :

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

$$\varphi_n(x) = \lambda K\varphi_{n-1} + f \qquad n = 1, 2, ...$$

Lemme 2.1.1

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i K^i f \qquad pour\ K^i = \underbrace{K(K(...K))}_{n\ fois}$$

Preuve. • $n = 0$

$$\varphi_0(x) = \lambda^0 K^0 f \ = f(x) \qquad\qquad (confirmé)$$

• Supposons que la formule est vraie pour n, montrons-la : pour $n + 1$

$$\begin{aligned}
\varphi_{n=1}(x) &= \lambda K \varphi_n + f \qquad\qquad (par\ définition) \\
&= \lambda K \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i K^i f \right) + f \\
&= f + \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i+1} K^{i+1} f \qquad (linéarité) \\
&= f + \sum_{p=1}^{n+1} \lambda^p K^p f \qquad (changement\ d'indice\ p = i + 1) \\
&= \lambda^0 K^0 f + \sum_{p=1}^{n+1} \lambda^p K^p f \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \lambda^p K^p f \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i K^i f \qquad\qquad (changement\ d'indice\ p = i)
\end{aligned}$$

Alors, la série $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i K^i f$ est appelée la série de Neumann.([7]) ■

2.2 Condition de convergence

Estimation des itérations

$$\begin{aligned}
\|K^n f\|_C &= \left\|k(k^{n-1}f)\right\|_C \\
&\leq M(b-a)\left\|K^{n-1}f\right\|_C \\
&\leq M^2(b-a)^2\left\|K^{n-2}f\right\|_C \\
&\ldots \\
&\leq M^n(b-a)^n\|f\|_C \\
\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i K^i f\right\|_C &\leq \|f\|_C\sum_{i=0}^{\infty}|\lambda|^i M^i(b-a)^i \\
&= \|f\|_C\sum_{i=0}^{\infty}[|\lambda| M(b-a)]^i \\
&= \frac{\|f\|_C}{1-|\lambda| M(b-a)}
\end{aligned}$$

La série géométrique $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i K^i f$ est converge si :

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Soit la somme de la série de Neumann une fonction $\varphi(x)$ tell que :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i K^i f.$$

montrons que cette fonction satifait l'équation intégrale $\varphi = \lambda K\varphi + f$ et considérons les itérations :

$$\varphi_n(x) = \lambda K\varphi_{n-1} + f$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \\
&= \lambda K \lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1}(x) + f \\
&= \lambda \int_a^b k(x,t) \lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1}(t)dt + f \\
&= \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt + f
\end{aligned}$$

En rappelant l'estimation suivante :

$$\|\varphi(x)\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{1-|\lambda| M(b-a)}.$$

Montrons maitenant que cette solution est unique pour cela, il suffite de montrer que l'équation homogène $\varphi = \lambda K\varphi$ que la solution triviale.En effet, si $\varphi_0 = \lambda K\varphi_{0,}$ alors $\varphi_0 \in C[a,b]$, et

$$\|\varphi_0\|_C \leq |\lambda| M(b-a) \|\varphi_0\|_C$$

donc

$$[1-|\lambda| M(b-a)] \|\varphi_0\|_C \leq 0.$$

Puisque $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ et $[1-|\lambda| M(b-a)] > 0$ donc $\|\varphi_0\|_C = 0$.

Ce qui donne $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.Alors, seule la solution triviale existe pour l'équation homogène .

L'équation non homogène $\varphi = \lambda K\varphi + f$ peut être réecrite sous la forme

$$(I-\lambda K)\varphi = f$$

Où I est opérateur identité. Donc, la solution de cette équation peut être prétée comme l'inverse de l'opérateur $\varphi = (I - \lambda K)^{-1} f$.

Par conséquent, si $\lambda M(a,b) < 1$, alors l'opérateur inverse $(I - \lambda K)^{-1}$ existe.

Théorème 2.2.1 *L'équation intégrale de Fredholm $\varphi = \lambda K \varphi + f$ avec*

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

et noyau continu $k(x,t)$, il existe une solution unique $\varphi(x) \in C[a,b]$ pour tout fonction $f(x) \in C[a,b]$.

Cette solution est donnée par une série de Neumann convergente

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K^i f$$

et satisfait

$$\|\varphi(x)\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| M(b-a)}.$$

Si $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, alors il existe un opérateur inverse$(I - \lambda K)^{-1}$.

Les conditions du théorème (2.2.1) sont seulement des conditions suffisantes, si ces conditions ne sont pas satisfaites, il se peut quants même que l'équation intégrale ait une solution et que la série de Neumann soit convergente.

Exemple 2.2.1 *Trouver la solution de l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 x \varphi(t) dt.$$

par la méthode des approximations successives et sous la forme de la série de Neumann

• *Identifier :* $k(x,t) = x \qquad f(x) = 1 \qquad b - a = 1$

$$M = 1 \qquad \lambda = 1$$

Vérifier la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

On a

$$\frac{1}{1.1} < 1 \quad \text{donc la condition n'est pas vérifier.}$$

1. **iteration :**

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^1 x\varphi_0(t)dt = 1 + \int_0^1 xdt = 1 + x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^1 x\varphi_1(t)dt = 1 + \int_0^1 x(1+t)dt = 1 + x(1 + \frac{1}{2})$$

$$...$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^1 x\varphi_{n-1}(t)dt = 1 + x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}... + \frac{1}{2^{n-1}})$$

Alors, la solution de l'équation intégrale est la limite des itération :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1 + \lim_{n\to\infty} x\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \\ &= 1 + x(1 - \frac{1}{2})^{-1} \\ &= 1 + 2x.\end{aligned}$$

Ce résultat c'est la solution de l'équation .

2. **Série de Neumann**

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^k K^k f = \lambda^1 K^1 f + \lambda^2 K^2 f + ... \\
f(x) &= 1 \\
Kf &= \int_0^1 x dt = x \int_0^1 dt = x \\
K^2 f &= \int_0^1 x(Kf) dt = x \left(\int_0^1 t dt \right) = \frac{1}{2} x \\
K^3 f &= x \left(\int_0^1 t \left(\int_0^1 s ds \right) dt \right) = \frac{1}{4} x \\
K^n f &= \frac{1}{2^{n-1}} x
\end{aligned}$$

Alors, la série de Neumann est

$$\varphi(x) = 1 + x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + 2x$$

Puisque $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, parce que c'est une série géométrique dont la somme est

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Donc, la méthode de la série de Neumann donne la meme solution.

Exemple 2.2.2 *Trouver la solution de l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(t) dt. \tag{2.1}$$

par la méthode des approximations successives et sous la forme de la série de Neumann

• $Identifier:$ $\qquad k(x,t)=1 \qquad f(x)=e^x \qquad b-a=1$

$$M=1 \qquad \lambda=\tfrac{1}{2}$$

Vérifier la condition

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$$

On a

$$\left|\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{1.1}=1 \quad \text{donc la condition est vérifier.}$$

1. **iteration :**

$$\varphi_0(x)=e^x$$

$$\varphi_1(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_0(t)dt=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=e^x+\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1$$

$$=e^x+\frac{1}{2}(e-1)$$

$$\varphi_2(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_1(t)dt=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^t+\frac{1}{2}(e-1)dt$$

$$=e^x+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^t dt+\frac{1}{2}(e-1).1\right)=e^x+\frac{1}{2}\left(e-1+\frac{1}{2}(e-1)\right)$$

$$=e^x+\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(e-1)=e^x+\frac{3}{4}(e-1).$$

Nous remarquens que la solution se rapproche de la forme

$$\varphi_n(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_{n-1}(t)dt=e^x+D_n(e-1)$$

Alors que

$$D_1 = \frac{1}{2}, \quad D_2 = \frac{3}{4}, \quad D_3 = \frac{7}{8}, \quad D_4 = \frac{15}{16}, \quad D_5 = \frac{31}{32}.$$

Et cette série converge vers

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Donc

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = e^x + (e-1).$$

Ce résultat c'est la solution de l'équation .

2. **Série de Neumann**

Puisque la série de Neumann converge ici parceque

$$\lambda = \frac{1}{2} < 1$$

Donc la forme générale de la série de Neumann

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K^i f$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^k K^k f = \lambda^1 K^1 f + \lambda^2 K^2 f + ...$$

$$f(x) = e^x$$

$$\lambda K f = \lambda \int_0^1 k(x,t)f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}(e-1)$$
$$\lambda^2 K^2 f = \lambda^2 \int_0^1 (Kf)dt = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (e-1)\left(\int_0^1 dt\right) = \frac{1}{4}(e-1)$$
$$\lambda^3 K^3 f = \lambda^3 \int_0^1 (Kf)^2 dt = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (e-1)\left(\int_0^1 dt\right) = \frac{1}{8}(e-1).$$

De cette façon

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... = e^x + (e-1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...).$$

Etant donné que la série géométrique

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1.$$

Donc la solution finale est

$$\varphi(x) = e^x + (e-1).$$

Nous avons essayé de tracer quelques approximations avec la solution exacte afin de comparer leur convergence vers celle-ci.

On remarque que plus la valeur de n augmente, plus la courbe se rapproche de la solution exact.

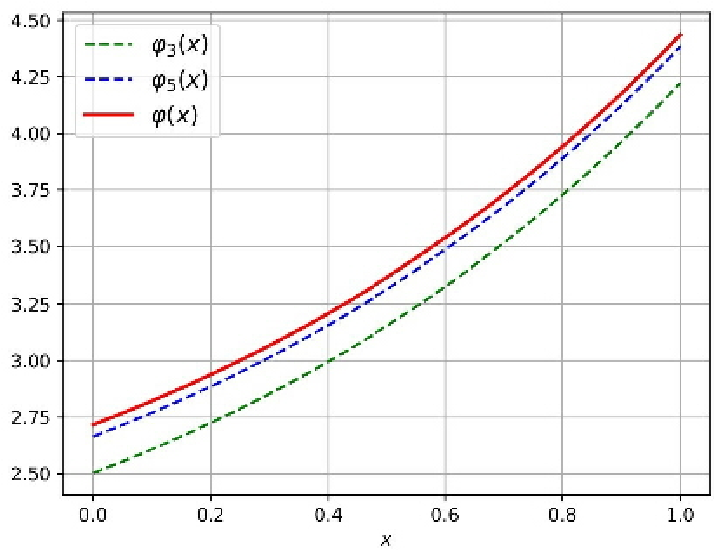

FIG. 2.1 – Solution exact, et approximations successives du problem(2.1)

Conclusion

En conclusion de ce mémoire, nous avons étudié de l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce, en raison de son importance dans les domaines de la modélisation mathématique, ainsi que dans les applications en physique et en ingénierie. L'accent a été mis sur la méthode des approximations successives comme l'une des méthodes numériques efficaces utilisées pour obtenir des solutions approchées, notamment dans les cas ou il est difficile de trouver des solutions analytiques exactes.

Dans ce travail, nous avons présenté les fondements théoriques de la méthode des approximations successives et nous avons illustré son application à travers une série d'exemples variés, qui ont montré la convergence vers la solution exacte. Les résultats ont démontré qu'il s'agit d'une outil simple et pratique, contribuant à la résolution de nombreux problèmes appliqués liés aux équations intégrales.

Nous espérons que cette étude contribuera à renforcer la recherche scientifique dans ce domaine et qu'elle constituera un point de départ pour des travaux futurs plus approfondis, ce soir en développant des algorithmes numériques plus avancés, on en comparant les avancés, on en comparant les performances de cette méthode à d'autres méthodes numériques.

Bibliographie

[1] Collins, P. J. Differential and Integral Equations.Oxford University Press, 2006.

[2] Kress, R. Linear Integral Equations. Springer.

[3] Krasnov, M., Kisselev,A., & Makarenko,G. Equations intégrales : Promlémes et exercices. Mir Moscou, 1977.

[4] Rahman, M. Integral Equations and their Applications. WIT Press.

[5] Wazwaz,A. M. Linear and nonlinear Integral Equations : Methods and Applications. Springer.

[6] Zemyan, S.M. The Classical Theory Of Integral Equations, 2010.

[7] Lecture notes on Integral Equations. Retrieved from : https ://www.et.byu.edu/~vps/ET502WWW/NOTES/CH7m.pdf.

[8] Sekkal, S. Equations intégrales Linéaires de Fredholm de seconde espèce et méthode de résolution (Mémoire de Master en Mathématiques Appliquées, option Analyse). Université Mohamed Khider, Biskra, 2023.

الملخص

في هذا العمل, قمنا بدراسة المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم, نظرا لدورها المهم في العديد من التطبيقات النظرية و العملية. كان هدفنا هو التعرف على كيفية حل هذا النوع من المعادلات و ركزنا على النوع الثاني منها باستخدام طريقة التقريبات المتتالية, بدانا بتقديم بعض النظريات المتعلقة بوجود و وحدانية الحلول لهذه المعادلات التكاملية ثم درسنا طريقة التقريبات المتتالية و شروط تقاربها.

الكلمات المفتاحية المعادلات التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني, الوجود و الوحدانية, طريقة التقريبات المتتالية, شروط التقارب .

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudie les équations intégrales linéaires de Fredholm, en montrant de leur role important dans de nombrueses applications théoriques et pratique.Notre objectif était de découvrir comment résoudre ce type d'équations surtout le seconde espèce, en mettant l'accent sur la méthode des approximations successives.Nous avons commencé par présenter quelques théorèmes relatifs à l'existence et à l'unicité des solutions de ce type d'équation intégrales, puis nous avons étudié la méthode des approximations successives ainsi que les conditions de sa convergence.

Mots_clés Equations intégrales linéaires de fredholmde seconde espèce, existence et unicité,la méthode des approximations successives, conditions de convergence.

Abstract

In this work , we studied the linear Fredholm integral equations, showing their important role in many theoretical and practical applications. Our focus was on understanding this type of equation and particularly on the second kind.Using the method of successive approximations. We began by presenting some related theories of the existence and uniqueness of the solutions to these integral equations. Then, we studied the method of successive approximations and the conditions for its convergence.

Keywords Fredholm linear integral equations of the second kind, existence and uniqueness, successive approximations method, convergence conditions .