

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques**”

Option : **probabilité et statistique**

Par

Chahinez Chemmar

Titre :

Sur les L-moments

Devant le Jury :

Dr Chine Amel U. Biskra Encadreur

Pr Benatia Fatah U. Biskra Président

Dr Roubi Affef U. Biskra Examinatrice

Soutenu Publiquement le 03/06/2025

Dédicace

À mes chers parents, qui ont été la lumière éclairant mon chemin et le soutien qui m'a porté à chaque étape. Cette réussite est le fruit de vos prières et de vos sacrifices. Merci d'avoir toujours été ma force et mon inspiration.

À mes frères et sœurs bien-aimés, qui ont été mes piliers à chaque instant. Merci d'avoir toujours été à mes côtés avec votre soutien et vos encouragements.

À mes chers amis, qui ont transformé ce parcours académique en une expérience inoubliable. Merci pour votre soutien sans faille et pour les rires qui ont allégé les jours difficiles.

À tous ceux qui ont marqué mon parcours universitaire, je vous dédie ce projet en reconnaissance pour tout le soutien et la motivation que vous m'avez apportés.

Remerciements

*Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant <<**Allah**>>le tout
puissant de m'avoir donné la force et la volonté
pour terminer ce travail.*

*Deuxièmement, je remercie mon encadreur de mémoire Madame
<<**Chine Amel**>> pour les efforts déployés et le temps qu'elle m'a consacré
pour le suivi et la réussite de ce travail.*

*Je remercie vivement les membres du jury monsieur **Benatia Fatah** et
madame **Roubi Affef**
pour leur présence et pour l'évaluation de ce travail.*

*Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant
la réalisation de ce travail, famille, collègue, amis,
sans exceptio*

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iv
Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les statistiques d'ordre	3
1.1 Distributions d'une statistique d'ordre	4
1.1.1 Distribution des statistiques d'ordre extrêmes	4
1.1.2 Distribution de la k-ième statistique d'ordre	6
1.2 Distribution conjointe de deux statistiques d'ordre	9
1.3 Propriétés des statistiques d'ordre	11
2 L-moment	15

2.1 Définitions et propriétés de base	15
2.1.1 Ratios des L-moments	18
2.1.2 Propriétés des L-moments	20
2.2 Représentation des L-moments	20
2.2.1 Représentation en termes de polynôme de legendre décalés	21
2.2.2 Représentation en termes de covariance	22
2.2.3 Représentation en termes de L-statistique	23
2.2.4 Représentation en termes de moments de probabilité pondérés	24
2.3 Estimation de L-moment	27
2.4 Estimation par la méthode des L-moments	30
2.5 Diagramme de rapports de L-moment	31
3 Simulation : estimation des paramètres de quelques lois	34
3.1 Rappels	34
3.1.1 Estimation par la méthode des moments	34
3.1.2 Le biais et l'erreur quadratique moyenne	35
3.2 Distrubition uniforme	36
3.2.1 L-moment de la loi uniforme	37
3.2.2 Estimation par la méthode des L-moment	38
3.2.3 Simulation dans R	38
3.3 Distribution logistique	40
3.3.1 L-moment de la loi logistique	40
3.3.2 Estimation des paramètres	41
3.3.3 Simulation dans R	42

TABLE DES MATIÈRES

3.3.4 Estimation des paramètres par la méthode des moments	43
3.3.5 Comparaison entre la méthode des L-moments et la méthode des moment classiques	43
Conclusion	45
Bibliographie	46
Annexe A.	48
Annexe B	49

Table des figures

2.1	Diagramme des rapports de L-moments théoriques(τ_3 et τ_4) pour certaines distributions	32
2.2	Diagramme des rapports de L-moments théoriques pour certaines distributions avec les rapports de L-moments empiriques d'échantillons simulés selon la loi uniforme.	33

Liste des tableaux

2.1	L-moments de quelques distributions	27
2.2	Estimation des paramètres pour quelques distributions	30
3.1	Estimateurs, biais et EQM du paramètre b de la loi uniforme par la méthode des L-moments.	39
3.2	Estimateurs, biais et EQM du paramètre S de la distribution logistique par la méthode des L-moments	42
3.3	Estimateurs, biais et EQM du paramètre S de la distribution logistique par les méthodes des L-moments et des moments	44

Introduction

*D*ans le cadre de la recherche d'outils statistiques plus précis et fiables pour analyser les données extrêmes, notamment dans les domaines hydrologique et climatique, la méthode des L-moments a été introduite pour la première fois par Hosking en 1990 comme une alternative robuste aux moments classiques, qui souffrent de certaines limites, comme leur sensibilité aux valeurs aberrantes, leur inefficacité pour modéliser des distributions asymétriques ou à queues lourdes, et la faible précision de leurs estimations avec des échantillons de petite taille.

La méthode des L-moments a été développée pour surmonter ces inconvénients, car elle repose sur des statistiques d'ordre à travers des combinaisons linéaires de données ordonnées, ce qui la rend moins sensible aux valeurs extrêmes et plus efficace pour estimer les paramètres des distributions. Au fil du temps, ses applications se sont étendues à divers domaines, tels que l'analyse fréquentielle hydrologique, l'évaluation des risques financiers et les sciences du climat et de l'environnement, où elle a démontré sa capacité à fournir des résultats précis et fiables.

Ce mémoire se compose de trois chapitres principaux, structurés comme suit :

Chapitre 1 (Généralité sur les statistiques d'ordre) Dans ce chapitre, nous définissons les statistiques d'ordre et étudions ses distributions, présentons certaines de ses propriétés, et examinons enfin ses moments statistique.

Chpitre 2 (*L*-moment) Ce chapitre est consacré à l'étude des L-moments, nous en présenterons la définition fondamentale, étudions certaines de leurs propriétés, explorons leurs différentes représentations et méthodes de calcul, enfin, leur méthode d'estimation par la technique des L-moments.

Chapitre 3 (Simulation : estimation des paramètres pour quelques lois) Le dernier chapitre est consacré à l'estimation des paramètres de certaines distributions en R avec la méthode des L-moments et à l'étude de leur efficacité à travers le biais et l'EQM, ainsi que la comparissons avec la méthode des moments.

Chapitre 1

Généralités sur les statistiques d'ordre

Puisque les L-moments sont basés sur les statistiques d'ordre, il est essentiel d'en comprendre les fondements. Ce chapitre commencera par définir les statistiques d'ordre, étudiera leurs distributions et examinera certaines de leurs propriétés fondamentales. Enfin, nous aborderons les moments des statistiques d'ordre, qui jouent un rôle clé dans le calcul des L-moments.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées définie sur l'espace (Ω, B) , d'une densité f et d'une fonction de répartition F :

$$(F(x) = P(X_n \leq x), x \in \mathbb{R})$$

Soit S_n l'ensemble des permutation de $\{1, \dots, n\}$ [4].

Définition 1.0.1 *La statistique d'ordre de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ est le réarrangement croissant de $(X_1, \dots, X_n)$. On la note $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$. On a $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ et il existe une permutation aléatoire $\sigma_n \in S_n$ tq :*

$$(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}) = (X_{\sigma_n(1)}, \dots, X_{\sigma_n(n)}) .$$

Remarque 1.0.1 – Pour $1 \leq k \leq n$, la v.a $X_{k,n}$ est appelée la $k^{\text{ième}}$ statistique d'ordre.

- Les v.a minimum et maximum du n -échantillon iid correspondent mieux à l'idée que l'on se fait d'une valeur extrême :

$$X_{1,n} = m_n = \min (X_1, X_2, \dots, X_n) = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

et

$$X_{n,n} = M_n = \max (X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

- En fait, on peut se limiter à l'étude du maximum car :

$$m_n = -\max (-X_1, -X_2, \dots, -X_n).$$

1.1 Distributions d'une statistique d'ordre

Définition 1.1.1 La densité jointe des statistiques d'ordre $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$ est donné par :

$$f_{(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(x_i) & , -\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1.1.1 Distribution des statistiques d'ordre extrêmes

- La distribution et la densité de la statistique d'ordre minimum $X_{1,n}$ sont données respectivement par :

$$F_{1,n}(x) = F_{X_{1,n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n,$$

et

$$f_{1,n}(x) = f_{X_{1,n}}(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x).$$

– Pour la statistique du maximum $X_{n,n}$ la distribution et la densité sont :

$$F_{n,n}(x) = F_{X_{n,n}}(x) = [F(x)]^n,$$

et

$$f_{n,n}(x) = f_{X_{n,n}}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x).$$

Preuve. En utilisant la propriété d'indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} F_{X_{1,n}}(x) &= P(X_{1,n} \leq x) = 1 - P(X_{1,n} > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i > x\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(X_i \leq x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$f_{X_{1,n}}(x) = \frac{dF_{X_{1,n}}(x)}{dx} = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x).$$

et

$$\begin{aligned} F_{X_{n,n}}(x) &= P(X_{n,n} \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F(x)]^n. \end{aligned}$$

alors

$$f_{X_{n,n}}(x) = \frac{dF_{X_{n,n}}(x)}{dx} = n[F(x)]^{n-1}f(x).$$

■

1.1.2 Distribution de la k-ième statistique d'ordre

– La distribution de la statistique d'ordre $X_{k,n}$ pour $1 \leq k \leq n$ et donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_{k,n}(x) &= P(X_{k,n} \leq x) \\
 &= P(\text{au moins } k \text{ de } X_i \text{ sont inférieurs ou égale à } x) \\
 &= \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(x) [1 - F(x)]^{n-i}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\text{avec } C_n^i = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

En utilisant la relation :

$$\sum_{i=k}^n C_n^i P^i (1-P)^{n-i} = \int_0^P \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt.$$

Donc la 2^{ème} forme de la distribution $F_{k,n}(x)$ est donnée par [2] :

$$\begin{aligned}
 F_{k,n}(x) &= \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(x) [1 - F(x)]^{n-i} \\
 &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \\
 &= \int_0^{F(x)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \\
 &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt = I_{F(x)}(k, n-k+1)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tq :

$$\begin{aligned} I_x(a, b) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, B(a, b) \\ &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \end{aligned}$$

où

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La densité de la $k^{ième}$ statistique d'ordre $X_{k,n}$ est facilement obtenue à partir de 1.2 comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f_{k,n}(x) &= \frac{d}{dx} F_{k,n}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-1} dt \right] \\ &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \left[\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \right\} \right] \\ &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} f(x) F(x)^{k-1} [1-F(x)]^{n-k}, \end{aligned}$$

alors

$$f_{k,n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) F(x)^{k-1} [1-F(x)]^{n-k}.$$

Exemple 1.1.1 Soit $X_1, X_2, \dots, X_5$ un échantillon aléatoire simple et $X_{1,5} < X_{2,5} < \dots < X_{5,5}$ les

statistiques d'ordre associées de taille $n = 5$, avec :

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1,$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Alors :

1. Loi de $X_{1,n}$:

$$F_{1,5}(x) = 1 - [1 - F(x)]^5 = 1 - [1 - x^2]^5,$$

$$f_{1,5}(x) = 5 [1 - F(x)]^{5-1} f(x) = 10x [1 - x^2]^4.$$

2. Loi de $X_{n,n}$:

$$F_{5,5}(x) = [F(x)]^5 = x^{10},$$

$$f_{5,5}(x) = 5 [F(x)]^{5-1} f(x) = 10x^9.$$

3. Loi de la 4^{ième} statistique d'ordre $X_{4,5}$:

$$F_{4,5}(x) = \sum_{i=4}^5 C_5^i F^i(x) [1 - F(x)]^{5-i} = 8x^8 [1 - x^2] + x^{10},$$

$$f_{4,5}(x) = \frac{5!}{3!1!} [x^2]^3 [1 - x^2] 2x = 40x^7 [1 - x^2].$$

4. Densité jointe de tout statistique d'ordre :

$$f_{(X_{1,5}, X_{2,5}, \dots, X_{5,5})}(x_1, x_2, \dots, x_5) = 5! \prod_{i=1}^5 f(x_i) = 5! \prod_{i=1}^5 2x_i.$$

1.2 Distribution conjointe de deux statistiques d'ordre

Supposons que nous ayons un échantillon aléatoire de taille n provenant d'une fonction de distribution $F(x)$ et que les observations soient arrangées comme $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$, la fonction de distribution conjointe de $X_{i,n}$ et $X_{j,n}$ pour $i \leq j$ est donnée par Arnold et al (2008) [2] comme suit :

$$\begin{aligned}
 F_{i,j:n}(x_i, x_j) &= P(X_{i:n} \leq x_i, X_{j:n} \leq x_j) \\
 &= P(\text{au moins } i \text{ de } X_1, \dots, X_n \text{ est inférieur ou égal à } x_i \text{ et au moins} \\
 &\quad j \text{ de } X_1, \dots, X_n \text{ est inférieur ou égale à } x_j) \\
 &= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^j P(\text{exactement } i \text{ de } X_1, \dots, X_n \text{ sont inférieur ou égale à } x_i \\
 &\quad \text{et exactement } j \text{ de } X_1, \dots, X_n \text{ sont inférieur ou égal } x_j) \\
 &= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^j \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} F(x_i)^r [F(x_j) - F(x_i)]^{s-r} [1 - F(x_j)]^{n-s}. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^j \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} P_1^r (P_2 - P_1)^{s-r} (1 - P_2)^{n-s} \\
 &= \int_0^{P_1} \int_{t_1}^{P_2} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1 - t_2)^{n-j} dt_2 dt_1.
 \end{aligned}$$

Alors, on obtient la deuxième forme de $F_{i,j:n}(x_i, x_j)$ comme suit :

$$F_{i,j:n}(x_i, x_j) = \int_0^{F(x)} \int_{t_1}^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1 - t)^{n-j} dt_2 dt_1,$$

avec $-\infty < x_i < x_j < \infty$.

Lorsque $F(x)$ est absolument continue, alors la densité de $X_{i:n}$ et $X_{j:n}$ peut être obtenue :

$$\begin{aligned}
 & f_{i,j:n}(x_i, x_j) \\
 &= \frac{d^2}{dx_i dx_j} F_{i,j:n}(x_i, x_j) \\
 &= \frac{d^2}{dx_i dx_j} \left[\int_0^{F(x_i)} \int_{t_1}^{F(x_j)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1-t_2)^{n-j} dt_2 dt_1 \right] \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(x_i) f(x_j) F(x_i)^{i-1} \cdot [F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1} [1 - F(x_j)]^{n-j} \\
 &= \frac{1}{B(i, j-i, n-j+1)} f(x_i) f(x_j) F(x_i)^{i-1} [F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1} [1 - F(x_j)]^{n-j} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Où :

$$B(a, b, c) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} = \frac{(a-1)!(b-1)!(c-1)!}{(a+b+c-1)!}$$

Remarque 1.2.1 Pour $i = 1$ et $j = n$ la densité conjointe de la plus petite et la plus grande observation s'écrit facilement comme :

$$f_{1,n:n}(x_1, x_n) = n(n-1) f(x_1) f(x_n) [F(x_n) - F(x_1)]^{n-2}.$$

De plus, pour $j = i + 1$ la distribution conjointe de deux statistiques d'ordre contigues est :

$$f_{i,i+1:n}(x_i, x_{i+1}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} f(x_i) f(x_{i+1}) F^{i-1}(x_i) [1 - F(x_{i+1})]^{n-i-1}$$

De manière analogue, la distribution conjointe de k statistique d'ordre $(X_{i_1:n}, X_{i_2:n}, \dots, X_{i_k:n})$,

Pour $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ est :

$$f_{(i_1, i_2, \dots, i_{k:n})}(x_1, x_2, \dots, x_k) = n! \prod_{j=0}^k \left\{ \frac{[F(x_{i_{j+1}}) - F(x_{i_j})]^{i_{j+1} - i_j - 1}}{(i_{j+1} - i_j - 1)!} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^n f(x_j) \right\}. \quad (1.5)$$

avec $x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty, i_0 = 0, i_{n+1} = n + 1$.

L'expression 1.5 peut être utilisée pour obtenir une distribution jointe de n'importe quel nombre d'observations ordonnées.

Exemple 1.2.1 *Un échantillon aléatoire de tail n d'une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ tq :*

$$f(x) = 1, F(x) = x.$$

La densité conjointe de $X_{i:n}$ et $X_{j:n}$ est donnée par :

$$f_{i,j:n}(x, y) = \frac{1}{B(i, j-i, n-j+1)} x^{i-1} [y-x]^{j-i-1} [1-y]^{n-j}.$$

La densité conjointe de $X_{1,n}$ et $X_{n,n}$ est :

$$f_{1,n:n}(x, y) = n(n-1)[y-x]^{n-2}.$$

1.3 Propriétés des statistiques d'ordre

Définition 1.3.1 (*Fonction de répartition empirique*) *La fonction de répartition empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est évaluée à l'aide des statistiques d'ordre comme suit :*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{1,n} \\ \frac{i-1}{n} & \text{si } X_i \leq x < X_{i+1,n} \quad 2 \leq i < n. \\ 1 & \text{si } x \geq X_{n,n} \end{cases}$$

et

$$E[F_n(x)] = F(x), \text{Var}[F_n(x)] = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

Définition 1.3.2 (*Fonctions quantile et quantile de queue*) La fonction quantile de la fonction de répartition F est la fonction inverse généralisée de F définie par :

$$Q(s) = F^{\leftarrow}(s) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}, 0 < s < 1.$$

Dans la théorie des extrêmes [4], une fonction notée U et appelée fonction quantile de queue, est définie par :

$$U(t) := Q\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{F}\right)^{\leftarrow}(t), \quad 1 < t < \infty.$$

Définition 1.3.3 (*Fonctions empiriques de quantile et de quantile de queue*) La fonction quantile empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est définie par :

$$Q_n(s) := F_n^{\leftarrow}(s) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1.$$

La fonction empirique de quantile de queue correspondante est :

$$U_n(t) := Q_n\left(1 - \frac{1}{t}\right), \quad 1 < t < \infty.$$

On Peut être exprimée comme une fonction simple des statistiques d'ordre relatives à l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et nous avons :

$$Q_n(s) := \begin{cases} X_{i,n} & \text{si } \frac{(i-1)}{n} < s \leq \frac{i}{n}, \\ X_{[ns]+1,n} & \text{si } \frac{i}{n} < s \leq \frac{i+1}{n}. \end{cases} \quad 0 < s < 1$$

Notons que pour $0 < s < 1$, $X_{[ns]+1,n}$ est le quantile d'échantillon de l'ordre s

Propriété 1.3.1 (*Transformation quantile*) Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des v.a indépendantes et de fonction de répartition F . soit $U_1, \dots, U_n$ des variable aléatoires indépendants de loi uniforme standard alors :

1. Pour tout fonction de distribution F on a :

$$X_{i,n} \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(U_{i,n}) \quad , i = 1, \dots, n.$$

2. Lorsque F est continué on a :

$$F(X_{i,n}) \stackrel{d}{=} U_{i,n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Définition 1.3.4 (*Moment des statistique d'ordre*) Le moment d'ordre m [2] de la $k^{\text{ième}}$ statistique d'ordre $X_{k:n}$ tq $1 \leq k \leq n$ et $m \geq 1$ est définit par :

$$\begin{aligned} E(X_{k:n}^m) &= \mu_{k:n}^m = \int_{\mathbb{R}} x f_{k:n}(x) dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} x^m f(x) F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k} dx \\ &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_{\mathbb{R}} x^m f(x) F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k} dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En utilisant la propriété 1.3.1, on trouve :

$$\begin{aligned}
 E(X_{k:n}^m) &= \mu_{k:n}^m = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 \{F^{-1}(u)\}^m u^{k-1} (1-u)^{n-k} du \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 Q(u)^m u^{k-1} (1-u)^{n-k} du \\
 &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^1 Q(u)^m u^{k-1} (1-u)^{n-k} du.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Exemple 1.3.1 Soit $X_1, \dots, X_n$ n - échantillon et $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ les statistiques d'ordres associées. Soit X est de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors le moment d'ordre m de la statistique d'ordre $X_{k:n}$ est :

$$E(X_{k:n}^m) = \mu_{k:n}^m = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_{\mathbb{R}} x^m x^{k-1} [1-x]^{n-k} dx.$$

Chapitre 2

L-moment

Les L-moments est une méthode statistique introduite par Hosking (1990) pour estimer les paramètres des distributions de probabilité. ils ont été proposés comme une alternative aux moments classiques, en raison de leur moindre sensibilité aux valeurs extrêmes et de leur meilleure précision, notamment pour les petits échantillons. Principalement utilisés en hydrologie et enclimatologie. Les L-moments linéaires permettent une modélisation plus robuste des phénomènes extrêmes. Dans ce chapitre, nous explorons les L-moments à travers : leurs définitions, leurs principales propriétés, ses représentation graphiques ainsi que les méthodes d'estimation associées.

2.1 Définitions et propriétés de base

Définition 2.1.1 Soit X une v.a avec une fonction de distribution $F(x)$ et de fonction quantile $Q(u) = F_X^{-1}(u)$, et soient $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre d'un échantillon

aléatoire de taille n , le $r^{ième}$ L-moments de X [6] est défini par :

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}), \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

tq $E(X_{r-k:r})$ présente l'espérance de la statistique d'ordre (voire [1.6]).

Alors, les premiers L-moments sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= E(X_{1:1}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} E(X_{2:2} - X_{1:2}) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3} E(X_{3:3} - X_{2:3} + X_{1:3}) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4} E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) \end{aligned}$$

Avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ Sont les mesures de position, d'échelle, de Skewness et de Kurtosis analogue aux moments classiques.

En utilisant [1.7], alors nous pouvons réécrire le $r^{ième}$ L-moments λ_r en terme de fonction de quantile comme suit :

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \frac{r!}{(r-k-1)!k!} \int_0^1 Q(u) u^{r-k-1} (1-u)^k du. \quad (2.2)$$

Exemple 2.1.1 Soit X une v.a uniforme sur $[0, 1]$ tq :

$$\begin{aligned} F(x) &= x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) &= 1. \end{aligned}$$

pour calculer les premiers L-moments, on calcule d'abord $E(X_{k:r})$ voir 1.6, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X_{k:r}) &= \int_0^1 x \cdot f_{k:r}(x) dx \\
 &= \int_0^1 x \frac{r!}{(k-1)!(r-1)!} x^{k-1} (1-x)^{r-k} dx \\
 &= \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{r-k} dx \\
 &= \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} B(k+1, r-k+1) \\
 &= \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} \cdot \frac{k!(r-k)!}{(r+1)!}
 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{E}(X_{k:r}) = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r} + \mathbf{1}}$$

Après avoir calculé $E(X_{k:r})$, en déduire les premiers L-moments :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= E(X) = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}, \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{2} (E(X_{2:2}) - E(X_{1:2})) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}, \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{3} (E(X_{3:3}) - 2E(X_{2:3}) + E(X_{1:3})) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0, \\
 \lambda_4 &= \frac{1}{4} (E(X_{4:4}) - 3E(X_{3:4}) + 3E(X_{2:4}) - E(X_{1:4})) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} - 3\frac{3}{5} + 3\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Alors pour la loi uniforme sur $[0, 1]$, les premiers L-moments sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{6} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array} \right.$$

2.1.1 Ratios des L-moments

Définition 2.1.2 *Les ratios des L-moments [8] sont des mesures statistiques utilisées pour décrire la forme d'une distribution, ils sont définis comme le rapport entre un L-moment d'ordre r (λ_r) et le L-moment d'ordre 2 (λ_2) de la façon suivante :*

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, \quad r \neq 2.$$

– On peut aussi définir le **L-CV** (coefficient de L-variation) comme suit :

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

cette quantité est analogue au coefficient de variation ordinaire $\left(C_v = \frac{\sigma}{\mu}\right)$.

– Pour $r = 3$, on définit le **L-Skewness** :

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

qui mesure le degré d'asymétrie d'une distribution.

– pour $r = 4$, on définit le **L-Kurtosis** :

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}.$$

qui indique le degré d'aplatissement d'une distribution par rapport à une distribution normale.

Propriété 2.1.1 *Pour une distribution symétrique, on a :*

$$\tau_r = 0, \quad \text{si } r \text{ impair.}$$

Théorème 2.1.1 *Soit X une v.a d'espérance finie ($E(X) < \infty$), Alors les rapports des L-moments de X vérifient :*

$$|\tau_r| < 1 \quad \text{pour } r \geq 3.$$

de plus si $X \geq 0$ presque sûrement, alors le L_{CV} de X satisfait :

$$-1 < \tau < 1.$$

Remarque 2.1.1 *Les ratios des L-moments [3] sont bornés contrairement aux moments classiques comme le Skewness G et le Kutosis K si $n \rightarrow \infty$, certaines limites importantes sont :*

$$\frac{1}{4} (5\tau_3^2 - 1) \leq \tau_4 < 1, \quad \tau_4 \geq -\frac{1}{4}, \quad \text{et } -1 < \tau_r < 1 \text{ pour } r \geq 3.$$

ces bornes sont utiles car elles offrent une meilleure quantification de la l'asymétrie et du kurtosis dans l'analyse des échantillons et des distributions, des contraintes supplémentaires incluent :

$$\tau_6 \geq -\frac{1}{6}, \text{ et } \frac{1}{25} (42\tau_4^2 - 14\tau_4 - 3) < \tau_6.$$

2.1.2 Propriétés des L-moments

Propriété 2.1.2 (*Transformation linéaire*)

Soient X et Y des v.a avec des L-moments λ_r et λ_r^* respectivement, supposons que $\mathbf{X} = \mathbf{a}\mathbf{Y} + \mathbf{b}$.

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathbf{a}\lambda_1^* + \mathbf{b}, \\ \lambda_2 &= |\mathbf{a}|\lambda_2^*, \\ \tau_r &= (\text{sign } a)^r \tau_r^*, \quad r \geq 3.\end{aligned}$$

Propriété 2.1.3 Pour $r \geq 2$; les L-moments sont des contrastes linéaires entre les statistique d'ordre espérées [6]. Par conséquent, ils sont invariants par translation :

$$\lambda_r(\theta + \eta X) = \eta \lambda_r(X), \text{ où } : \theta \in \mathbb{R}, \eta > 0.$$

De plus

$$\lambda_r(-X) = (-1)^r \lambda_r(X).$$

Proposition 2.1.1 (*L'existence de L-moments*)

1. Les L-moments λ_r , pour $r = 1, 2, \dots$ d'une v.a X existent si et seulement si X a une moyenne finie ($E(X) < \infty$).
2. Une distribution dont l'espérance existe et finie se caractérise par ses L-moments λ_r , $r \geq 1$.

2.2 Représentation des L-moments

Les L-moments admettent plusieurs représentations utiles, notamment en termes de polynômes de Legendre, de L-statistique, de covariance, et de moments de probabilité pondérés.

2.2.1 Représentation en termes de polynôme de legendre décalés

La simplification de la relation [2.2](#) conduit à une autre expression des L-moments basée sur les polynômes de legendre décalés, donnée par :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u) P_{r-1}^*(u) du, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Tq :

$$P_r^*(u) = \sum_{k=0}^r P_{r,k}^* u^k, \text{ et } P_{r,k}^* = (-1)^{r-1} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k}.$$

$P_r^*(u)$ est le polynôme de legendre décalé d'ordre r , lié au polynôme de legendre habituel $P_r(u)$, tq : $P_r^*(u) = P_r(2u - 1)$, les P_r^* sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, 1]$ [\[9\]](#).

– Pour $r = 1, 2, 3, 4$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0^*(u) = 1, \\ P_1^*(u) = (2u - 1), \\ P_2^*(u) = (6u^2 - 6u + 1), \\ P_3^*(u) = 20u^3 - 30u^2 + 12u - 1. \end{array} \right.$$

Alors on trouve les premiers L-moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \int_0^1 Q(u) du, \\ \lambda_2 = \int_0^1 (2u - 1) Q(u) du, \\ \lambda_3 = \int_0^1 (6u^2 - 6u + 1) Q(u) du, \\ \lambda_4 = \int_0^1 (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1) Q(u) du. \end{array} \right.$$

2.2.2 Représentation en termes de covariance

En appliquant le changement de variable $u = F(x)$ dans la formule (2.3), on obtient :

$$\lambda_r = \int_0^1 x \cdot P_{r-1}^*(F(x)) dF(x) = E[X \cdot P_{r-1}^*(F(X))].$$

Et utilisant $P_0^*(u) = 1$ et l'orthogonalité des P_r^* conduit à une représentation en termes de covariance :

$$\lambda_k = \begin{cases} E(X) & r = 1, \\ cov(X, P_{r-1}^*(F(X))) & r \geq 2. \end{cases}$$

– pour $r = 2$, on a :

$$\lambda_2 = 2cov(X, F(X)) = cov(X, 2F(X) - 1),$$

où λ_2 représente la covariance entre X et son rang centré, une représentation bien connue pour la différence moyenne de gini ($G = 4cov(X, F(X)) = 2\lambda_2$), par l'inégalité de cauchy-schwartz, on obtient une comparaison du deuxième L-moment avec l'écart-type habituel : $\lambda_2 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$.

– Pour $k = 3$

$$\lambda_3 = -6cov(X, F(X)(1 - F(X))),$$

où cette covariance implique X et une fonction symétrique par rapport à la médiane de F , il en résulte que λ_3 est nul lorsque F est symétrique [6].

2.2.3 Représentation en termes de L-statistique

Définition 2.2.1 Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variable aléatoire iid, et soit

$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ les statistiques d'ordre associées à cet échantillon. On définit la L-statistique comme une combinaison linéaire de ces statistique d'ordre comme suit :

$$L = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

où a_i sont des poids fixes.

La representation de L-moment par la L-statistique [6] est définie par :

$$\lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{r:n}^{(k)} E(X_{r:n}),$$

où :

$$w_{r:n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1, k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1-j}{j} \binom{n-1}{j}^{-1} \binom{r-1}{j}.$$

2.2.4 Représentation en termes de moments de probabilité pondérés

Définition 2.2.2 les moments de probabilité pondérés (PWM) d'une variable aléatoire X avec une fonction de distribution $F(X) = P(X \leq x)$ on été définis par Greenwood et al.(1979) [8] comme suit :

$$M_{p,r,s} = E[X^p F(X)^r (1 - F(X))^s] = \int_0^1 Q(u)^p u^r (1 - u)^s du,$$

où : $Q(u)$ représente la fonction quantile de X ($Q(u) = F_X^{-1}(u)$), et p, r, s sont des nombres réels.

– pour $r = s = 0$ et $p \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_{p,0,0} = E[X^p] = \int_0^1 Q_X(u)^p du.$$

qui sont les moments classique d'ordre i .

– On définit les deux moments de probabilité pondérés α_r et β_r comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_r = M_{1,0,s} = E[X (1 - F(X))^r] = \int_0^1 Q(u) (1 - u)^r du \\ \beta_r = M_{1,r,0} = E[X (F(X))^r] = \int_0^1 Q(u) u^r du \end{array} \right.$$

les α_r et β_r sont essentiels pour le calcul des L-moments, ces moments pondérés permetent d'estimer les paramètres des distributions de probabilité avec plus de précision et de fiabilité que les méthode des moments classique. Cette approche a été développée par landwehr et al(1979), et hoshing et al (1985).

On écrit une autre représentation des L-moments en termes de (PWM) :

$$\lambda_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} p_{r-1,k}^* \alpha_k = \sum_{j=0}^{r-1} p_{r-1,j}^* B_j. \quad (2.4)$$

En particulier, les premiers L-moments sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0, \\ \lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0, \\ \lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0, \\ \lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Exemple 2.2.1 Soit X une v.a suit la loi de gembel des paramètre μ et σ , de fonction de répartition F et de quantile Q tq :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right], \\ Q(u) = \mu - \sigma \ln(-\ln u). \end{array} \right.$$

Pour calculer les premiers L-moments par la représentation en terme de (PWM), on caluler le β_r :

$$\begin{aligned} \beta_r &= \int_0^1 Q(u) u^r du \\ &= \int_0^1 \mu - \sigma \ln(-\ln u) u^r du \\ &= \frac{\mu}{r+1} - \sigma \int_0^1 \ln(-\ln u) u^r du \end{aligned}$$

On utilise le chengement de variable : $t = -\ln(u)$, Alors :

$$= \frac{\mu}{r+1} - \sigma \int_0^1 \ln(t) \exp(-(r+1)t) dt,$$

par changement de variable : $v = (r + 1)t$, on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{r+1} - \sigma \left\{ \int_0^1 \ln v \cdot \exp(-v) dv - \frac{\ln(r+1)}{r+1} \int_0^1 \exp(-v) dv \right\} \\ &= \frac{\mu}{r+1} - \sigma \left\{ \Gamma'(1) - \frac{\ln(r+1)}{r+1} \Gamma(1) \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$\beta_r = \frac{\mu + \sigma(\gamma + \ln(r+1))}{r+1}.$$

Tq : $\Gamma'(1) = -\gamma$ et $\Gamma(1) = 1$, où γ est la constante d'euler-mascheroni ($\gamma \simeq 0.5772$).

D'après [2.5](#), on trouve les premier L-moment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \mu + \sigma\gamma, \\ \lambda_2 = \sigma \ln(2), \\ \lambda_3 = \sigma \left(\frac{2}{3} \ln 3 - \ln 2 \right), \\ \lambda_4 = \sigma \left(\frac{3}{4} \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 3 + \ln 2 \right). \end{array} \right.$$

Exemple 2.2.2 Les premiers L -moments de certaines distributions [9] sont donnés dans le tableau suivant :

Distribution	$F(x)$ ou $Q(u)$	L-moment et
Uniforme	$Q(u) = \alpha + (\beta - \alpha)u$	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \lambda_2 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)$
Exponentielle	$Q(u) = \xi - \alpha \log(1 - u)$	$\lambda_1 = \xi + \alpha, \lambda_2 = \frac{\alpha}{2}$
Gumbel	$Q(u) = \xi - \alpha \log(-\log u)$	$\lambda_1 = \xi + \alpha\gamma, \lambda_2 = \alpha \log 2$
Logistique	$Q(u) = \xi + \alpha \log\left(\frac{u}{1-u}\right)$	$\lambda_1 = \xi, \lambda_2 = \alpha$
Paréto généralisée	$Q(u) = \xi + \alpha \frac{\{1-(1-u)^k\}}{k}$	$\lambda_1 = \frac{\xi+\alpha}{1+k}, \lambda_2 = \frac{\alpha}{(1+k)(2+k)}$
Extrême valeur	$Q(u) = \xi + \alpha \frac{\{1-(-\log u)^k\}}{k}$	$\lambda_1 = \xi + \frac{\alpha\{1-\Gamma(k+1)\}}{k},$ $\lambda_2 = \frac{\alpha(1-2^{-k})\Gamma(k+1)}{k}$
Logistique généralisée	$Q(u) = \xi + \alpha \frac{\{1-((1-u)/u)^k\}}{k}$	$\lambda_1 = \xi + \alpha \frac{\{1-\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)\}}{k},$ $\lambda_2 = \alpha \Gamma(1+k) \Gamma(1-k)$
Normale	$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\lambda_1 = \mu, \lambda_2 = \frac{\sigma}{\Pi}$
Gamma	$F(x) = \beta^{-\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-t/\beta}{\Gamma(\alpha)}\right) dt$	$\lambda_1 = \alpha\beta, \lambda_2 = \frac{\beta\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\Pi}\Gamma(\alpha)}$

TAB. 2.1 – L-moments de quelques distributions

2.3 Estimation de L-moment

Définition 2.3.1 Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ un échantillon de taille n , et soit $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées à cet échantillon. L'estimation du $r^{\text{ième}}$ L-moment est définie par :

$$\hat{\lambda}_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} (-1)^k \binom{r-1}{k} X_{ir-k:n}, \quad r \geq 1.$$

En particulier, les estimateurs des premiers L-moments sont donnés par :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_{i:n} \\ \hat{\lambda}_4 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j < n} (X_{j:n} - X_{i:n}) \\ \hat{\lambda}_3 &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (X_{k:n} - 2X_{j:n} + X_{i:n}) \\ \hat{\lambda}_4 &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} (X_{l:n} - 3X_{k:n} + 3X_{j:n} - X_{i:n})\end{aligned}$$

On définit L'estimateur de moments de probabilité pondéré β_r , noté $\hat{\beta}$, développé par (Landwehr et al 1979) [8], est donné par :

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1)(j-2) \dots (j-r)}{(n-1)(n-2) \dots (n-r)} X_{j:n}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j:n} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} X_{j:n} \\ \hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)(n-2)} X_{j:n} \\ \hat{\beta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=4}^n \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{j:n} \end{array} \right.$$

D'après (2.4), l'estimateur $\hat{\lambda}_r$ est aussi définit par :

$$\hat{\lambda}_r = \sum_{j=0}^{r-1} p_{r-1,j}^* \hat{\beta}_j.$$

On déduit les estimateurs du premier L-moment comme suit :

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 = \hat{\beta}_0, \\ \hat{\lambda}_2 = 2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0, \\ \hat{\lambda}_3 = 6\hat{\beta}_2 - 6\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0, \\ \hat{\lambda}_4 = 20\hat{\beta}_3 - 30\hat{\beta}_2 + 12\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j:n}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (2j-1-n) X_{j:n}, \\ \hat{\lambda}_3 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^n (6(j-1)(j-2) - 6(n-2)(j-1) + (n-1)(n-2)) X_{j:n}, \\ \hat{\lambda}_4 &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{j=1}^n (20(j-1)(j-2)(j-3) - 30(n-3)(j-1)(j-2) \\ &\quad + 12(n-2)(n-3)(j-1) - (n-1)(n-2)(n-3)) X_{j:n}. \end{aligned}$$

Les $\hat{\lambda}_r$ s s'écrivent également comme une combinaison linéaire des valeurs ordonnées $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$, comme suit :

$$\hat{\lambda}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{j;n}^{(r)} X_{j:n}.$$

Définition 2.3.2 *L'estimateur de rapport des L-moments est défini par :*

$$t_r = \frac{\hat{\lambda}_r}{\hat{\lambda}_2}, \quad r \geq 3.$$

et l'estimateur de **L-cv** est :

$$t = \frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1}.$$

2.4 Estimation par la méthode des L-moments

Soit X une v.a ayant une fonction de densité de probabilité $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$, où $\theta_1, \dots, \theta_k$ sont k paramètres inconnus, ces paramètres sont estimés en résolvant le système d'équations résultant de l'égalité entre les k premiers L-moments théorique et leurs équivalents empiriques [12], c'est-à-dire :

$$\lambda_i = \hat{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, k$$

Hosking(1990) et hosking et wallis(1997) ont fourni des estimations des paramètres pour certaines distributions de probabilité univariées basées sur la méthode des L-moments, les estimations des paramètres pour quelques distributions sont présentée dans le tableau suivant :

Distribution	Etimation des paramètres
Uniforme	$\hat{\alpha} = \hat{\lambda}_1 - 3\hat{\lambda}_2, \hat{\beta} = 2\hat{\lambda}_1 - \hat{\alpha}$
Exponentielle	$\hat{\alpha} = 2\hat{\lambda}_2, \hat{\xi} = \hat{\lambda}_1 - \hat{\alpha}$
Normale	$\hat{\mu} = \hat{\lambda}_1, \hat{\sigma} = \sqrt{\Pi\hat{\lambda}_2}$
Logistique	$\hat{\xi} = \hat{\lambda}_1, \hat{\alpha} = \hat{\lambda}_2$
paréto généralisée	$\hat{k} = \frac{1-3\hat{\lambda}_3}{1+\hat{\lambda}_3}, \hat{\sigma} = \hat{\lambda}_2 \left(\hat{k} + 1 \right) \left(\hat{k} + 2 \right), \hat{\xi} = \hat{\lambda}_1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}+1}$
Exstrêm-valeur généralisée	$\hat{k} \simeq 7,859z = 2,9554z^2, \text{ avec } z = \frac{2}{3+\hat{\lambda}_3} - \log_3 2,$ $\hat{\sigma} = \frac{\hat{\lambda}_2}{\Gamma(\hat{k}) \left(1-2^{-\hat{k}} \right)}, \hat{\xi} = \hat{\lambda}_1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} + \hat{\sigma} \Gamma \left(\hat{k} \right)$

TAB. 2.2 – Estimation des paramètres pour quelques distributions

Exemple 2.4.1 (*Estimation des paramètre de la loi de gumbel*)

Puisque la loi de gumbel possède deux paramètres μ et σ , nous allons résoudre un système composé

de deux équations, on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu + \sigma\gamma, \\ \lambda_2 = \sigma \ln 2, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \mu = \lambda_1 - \sigma\gamma, \\ \sigma = \frac{\lambda_2}{\ln 2}. \end{cases}$$

En remplaçant λ_1 et λ_2 par leurs estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ pour trouver les estimateurs de μ et σ , Alors :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \hat{\lambda}_1 - \sigma\gamma, \\ \hat{\sigma} = \frac{\hat{\lambda}_2}{\ln 2}. \end{cases}$$

2.5 Diagramme de rapports de L-moment

Hosking (1990) a développé le diagramme des rapports de L-moments en tracant les coefficients théorique d'asymétrie linéaire ($L - Skweness$) et d'aplatissement linéaire ($L - Kurtosis$) [13] pour différentes distributions statistiques, comme dans la figure (2.1). L'avantage principal de ce diagramme est de déterminer la distribution statistique optimale qui décrit l'échantillon de données étudié, la distribution la plus adaptée aux données est déterminée en tracant les valeurs des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement linéaires issus des données échantillonnées, puis en les comparant aux courbes théoriques des différentes distributions. Cette méthode repose sur une comparaison visuelle entre la position du point représentant les données échantillonnées et les positions théoriques des distributions sur le diagramme, la proximité du point avec la courbe d'une distribution particulière indiquant son degré d'adéquation avec les données.

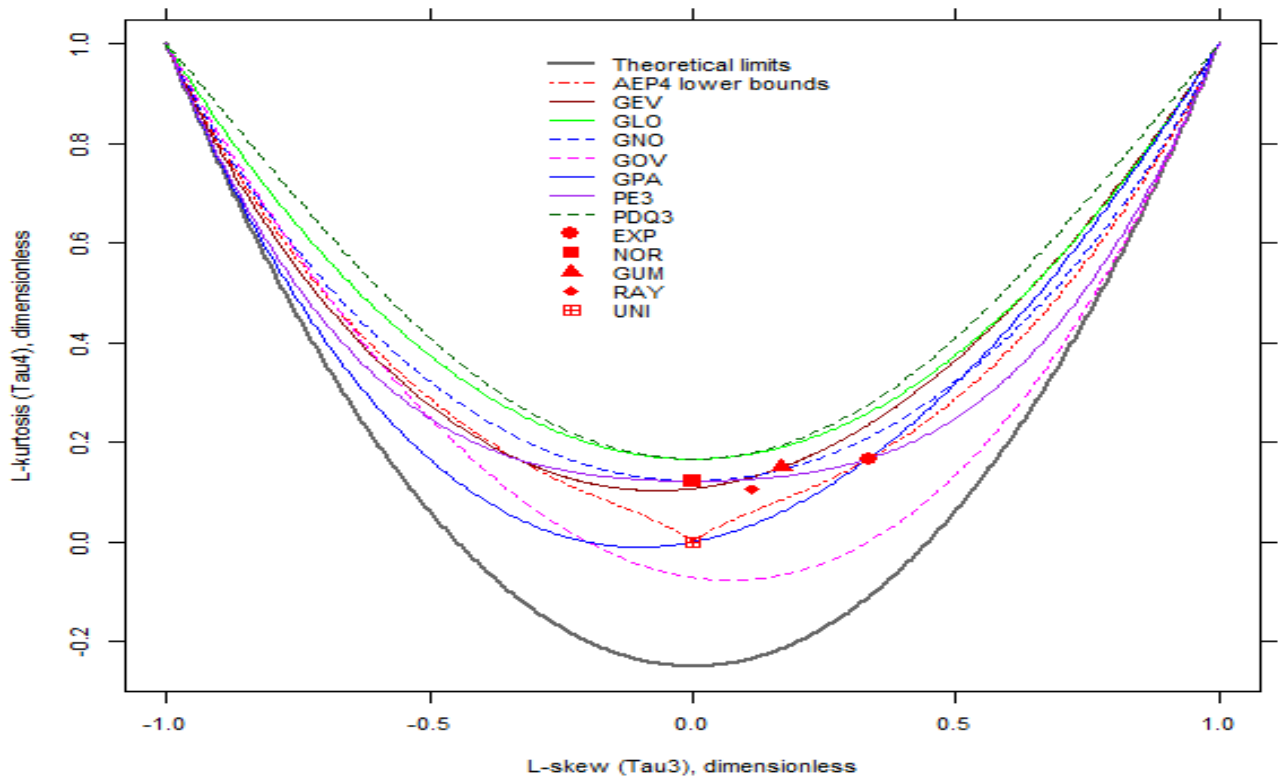


FIG. 2.1 – Diagramme des rapports de L-moments théoriques(τ_3 et τ_4) pour certaines distributions

Remarque 2.5.1 *Les distributions à deux paramètres, lorsqu'elles possèdent des paramètres de position et d'échelle, ont des valeurs constantes pour τ_3 et τ_4 quelles que soient les valeurs de λ_1 et λ_2 , et ces distributions à deux paramètres se représentent par des points particuliers sur le diagramme. Par exemple, la distribution normale, qui n'est pas tracée sur la figure en raison de l'échelle d'axe horizontal sélectionnée a $\tau_3 = 0$ et $\tau_4 \simeq 0.123$.*

Exemple 2.5.1 On ajoute les rapports des L -moments empiriques calculés pour 100 échantillons simulés selon la loi uniforme $U(0,10)$ de taille $n = 50$ au diagramme des rapports de L -moment (2.1) comme suit :

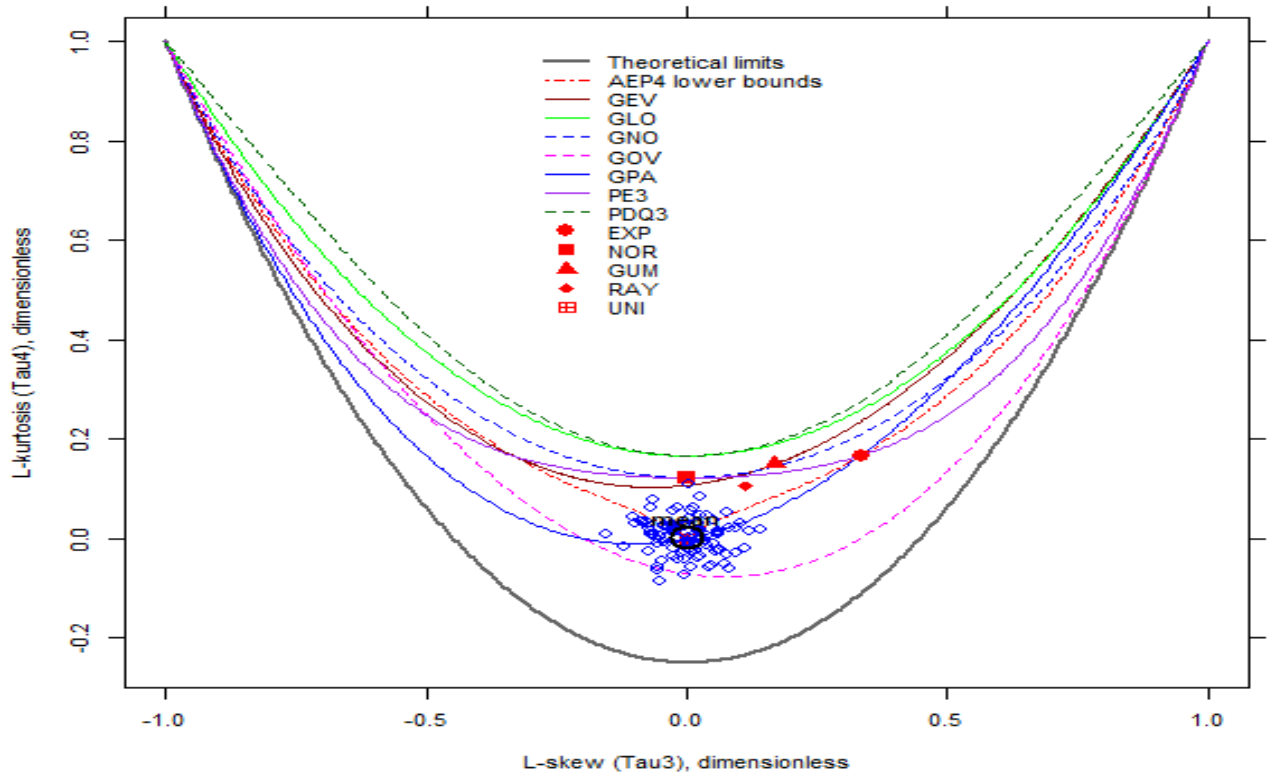


FIG. 2.2 – Diagramme des rapports de L -moments théoriques pour certaines distributions avec les rapports de L -moments empiriques d'échantillons simulés selon la loi uniforme.

On remarque que la moyenne des valeurs empiriques se rapproche du point représentant la distribution uniforme, ce qui indique que les échantillons suivent exactement cette distribution.

Chapitre 3

Simulation : estimation des paramètres de quelques lois

Dans ce chapitre, nous rappellerons la méthode des moments, les notions de biais et d'erreur quadratique moyenne (*EQM*). puis nous estimerons les paramètres de certaines distributions en utilisant la méthode des L-moments. Enfin, nous effectuerons une comparaison entre la méthode des L-moments et celle des moments classiques afin d'identifier la meilleure approche d'estimation.

3.1 Rappels

3.1.1 Estimation par la méthode des moments

La méthode des moments, introduite par **Karl pearsos** en 1894, [7] est l'une des plus anciennes méthodes d'estimation. Les estimateurs par la méthode des moments sont obtenus en égalisant les moments d'échantillon aux moments de population correspondants. Soient les k premiers moments empiriques :

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^1 = \bar{X}, \dots, M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

et les k premiers moments théoriques $E_{\theta}(X^1), \dots, E_{\theta}(X^k)$. Si le paramètre θ est un vecteur de dimension k , ses k éléments peuvent être estimés en résolvant un système d'équation suivant :

$$M_1 = E_{\theta}(X^1), \dots, M_k = E_{\theta}(X^k).$$

Exemple 3.1.1 Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a iid suivant une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ avec une moyenne μ et une variance $\sigma^2 > 0$.

Il est bien connu que $E(X) = \mu$ et $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$, pour estimer μ et σ^2 , il suffit de résoudre :

$$\mu = \bar{X}, \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Ce qui donne les estimateurs des moments :

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

3.1.2 Le biais et l'erreur quadratique moyenne

Définition 3.1.1 Le biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ [14] est :

$$Biais(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

On dit que $\hat{\theta}$ est sans biais si : $Biais(\hat{\theta}) = 0$.

Le biais est une mesure de l'erreur systématique faite en approximant θ par $\hat{\theta}$.

Définition 3.1.2 *L'erreur quadratique moyenne (EQM) d'un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ est :*

$$EQM\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right].$$

L'EQM est une mesure de la précision d'un estimateur.

Théorème 3.1.1 *Si $\hat{\theta}$ est un estimateur du paramètre θ alors :*

$$EQM\left(\hat{\theta}\right) = V\left(\hat{\theta}\right) + \text{Biais}\left(\hat{\theta}\right)^2.$$

3.2 Distrubition uniforme

Définition 3.2.1 *Soit X une v.a. suit la loi uniforme sur l'intervale $[a, b]$, de densité f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction de répartition F et sa fonction quantile Q sont données par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ Q(u) = a + (b-a)u, & u \in [0, 1]. \end{cases}$$

3.2.1 L-moment de la loi uniforme

Pour calculer les premiers L-moments de la loi uniforme en utilisant la représentation en termes de (*PWM*), on a :

$$\begin{aligned}
 B_r &= \int_0^1 Q(u) u^r du \\
 &= \int_0^1 (a + (b-a)u) u^r du \\
 &= a \int_0^1 u^r du + (b-a) \int_0^1 u^{r+1} du
 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
 B_r &= \frac{a}{r+1} + \frac{b-a}{r+2} \\
 &= \frac{br + a + b}{(r+1)(r+2)},
 \end{aligned}$$

en mettant au même dénominateur, B_r est égal à :

$$B_r = \frac{br + a + b}{(r+1)(r+2)}.$$

D'après [2.5](#) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{a+b}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{b-a}{6}, \\ \lambda_3 = 0, \\ \lambda_4 = 0. \end{array} \right.$$

Alors Le **L-cv** : $\tau_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{b-a}{3(a+b)}$, Le **L-skewness** et le **L-kurtosis** $\tau_3 = \tau_4 = 0$.

3.2.2 Estimation par la méthode des L-moment

On a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a+b}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{b-a}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = a + b & (1) \\ 6\lambda_2 = b - a & (2) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), et on soustrayant (2) de (1), on trouve :

$$\begin{cases} b = \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ a = \lambda_1 - 3\lambda_2. \end{cases}$$

D'après la méthode de L-moment on a : $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$ et $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$, donc les estimateurs des a et b sont :

$$\begin{cases} \hat{a} = \hat{\lambda}_1 - 3\hat{\lambda}_2, \\ \hat{b} = \hat{\lambda}_1 + 3\hat{\lambda}_2. \end{cases}$$

3.2.3 Simulation dans R

Nous avons estimé le paramètre b de la distribution uniforme en utilisant la méthode des L-moments, en considérant différentes valeurs des paramètres a et b , à savoir : $U(-2, 2)$, $U(0, 1)$ et $U(0, 10)$. La simulation a été répétée 1000 fois pour des échantillons de tailles différentes. Nous avons ensuite calculé le biais et l'erreur quadratique moyenne (EQM) afin d'étudier la précision et l'efficacité de la méthode, Cette étude a permis d'obtenir les résultats suivants :

	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$u [-2, 2]$					
Estimateur	1.991361	1.991232	2.002276	2.000649	2.000765
Biais	0.008639	-0.008768	0.002276	0.000649	0.000765
EQM	0.239851	0.043720	0.020544	0.004675	0.002233
$u [0, 1]$					
Estimateur	0.997429	1.001529	0.999778	0.999389	0.999238
Biais	-0.002571	0.001529	-0.000222	-0.000610	-0.000610
EQM	0.015833	0.002836	0.001386	0.000255	0.000124
$u [1, 10]$					
Estimateur	9.980585	9.991681	9.991681	9.991681	9.991681
Biais	-0.019415	-0.008319	0.004647	-0.000146	0.007160
EQM	1.178607	0.219904	0.117714	0.021896	0.011042

TAB. 3.1 – Estimateurs, biais et EQM du paramètre b de la loi uniforme par la méthode des L-moments.

D'après les résultats du tableau, nous observons que les estimations du paramètre b par la méthode de L-moment étaient très proches de la vraie valeur, avec un biais quasi nul et une erreur quadratique moyenne (EQM) très faible, et ce pour différentes tailles d'échantillon. Ce qui confirme l'efficacité de cette méthode.

3.3 Distribution logistique

Définition 3.3.1 Soit X une v.a suit la loi logistique de paramètre μ (paramètre de position) et S (paramètre d'échelle), de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(-(x-\mu)/S)}{S(1 + \exp(-(x-\mu)/S))^2}, \quad x \in \mathbb{R}, S > 0.$$

Sa fonction de répartition F et Sa fonction de quantile Q sont données par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(x-\mu)/S)}, & x \in \mathbb{R}, \\ Q(u) = \mu + S \ln\left(\frac{u}{1-u}\right), & u \in [0, 1]. \end{cases}$$

3.3.1 L-moment de la loi logistique

Par la représentation en termes de PWM on a :

$$\begin{aligned} B_r &= \int_0^1 Q(u) u^r du = \mu \int_0^1 u^r du + S \int_0^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) u^r du, \\ &= \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ \int_0^1 \ln(u) u^r du - \int_0^1 \ln(1-u) u^r du \right\}. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on a utilisé l'intégration par parties, et pour la deuxième intégrale, on a appliqué le développement de Taylor de $\ln(1-u)$, tq : $\ln(1-u) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 B_r &= \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ -\frac{1}{(r+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 u^{k+r} du \right\} \\
 &= \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ -\frac{1}{(r+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+r+1)} \right\} \\
 &= \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ -\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r+1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+r+1} \right] \right\} \\
 &= \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ -\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r+1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=r+2}^{\infty} \frac{1}{k} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

donc

$$B_r = \frac{\mu}{r+1} + S \left\{ -\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors d'après [2.4](#), on obtient les premier L-moment :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu, \\ \lambda_2 = S, \\ \lambda_3 = 0, \\ \lambda_4 = \frac{S}{6}. \end{cases}$$

Avec le **L-cv** : $\tau_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{S}{\mu}$, **L-skewness** : $\tau_3 = \frac{0}{S} = 0$, **L-kurtosis** : $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{1}{6} \simeq 0,1667$.

3.3.2 Estimation des paramètres

On a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu, \\ \lambda_2 = S. \end{cases}$$

En remplaçant λ_1, λ_2 par leur estimateurs empiriques, on obtient les estimations de μ et S :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \hat{\lambda}_1, \\ \hat{S} = \hat{\lambda}_2. \end{cases}$$

3.3.3 Simulation dans R

Afin d'étudier la précision et l'efficacité de l'estimation des paramètres par la méthode des L-moments, nous avons estimé le paramètre S et calculé le biais ainsi que l'*EQM* (Erreur Quadratique Moyenne) pour la distribution logistique. Nous avons utilisé des échantillons de différentes tailles et répété les simulations 1000 fois, et en fixant $\mu = 1$, Nous avons obtenu les résultats suivants :

	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$S = 2$					
Estimateur	1.983422	1.999621	2.005042	2.002704	1.998282
Biais	-0.016578	-0.000379	0.005042	0.002704	-0.001718
EQM	0.154126	0.060820	0.030873	0.005616	0.002652
$S = 3.5$					
Estimateur	3.503038	3.483611	3.491279	3.496060	3.498224
Biais	0.003038	-0.016389	-0.008721	-0.003939	-0.001776
EQM	0.440290	0.168824	0.085787	0.0167841	0.008598

TAB. 3.2 – Estimateurs, biais et EQM du paramètre S de la distribution logistique par la méthode des L-moments

D'après les résultats du tableau, nous remarquons que :

- Les estimations du paramètre S sont très proches de sa vraie valeur pour les différentes tailles d'échantillon.

- Avec l’augmentation de la taille de l’échantillon, la précision et l’efficacité de la méthode des L-moments s’améliorent, ce qui rend l’estimation sans biais et l’erreur quadratique moyenne proche de zéro.

3.3.4 Estimation des paramètres par la méthode des moments

Pour la loi logistique nous avons les moments de la population :

$$E(X) = \mu \text{ et } E(X^2) = \frac{\Pi^2 S^2}{3} + \mu^2.$$

Et on a les moments empiriques de l’échantillon :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

En égalisant les deux premiers moments de l’échantillon aux moments correspondants de la population, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \bar{X} \\ \frac{\Pi^2 S^2}{3} + \mu^2 = \bar{X}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{S} = \frac{\sqrt{3(\bar{X}^2 - \bar{X}^2)}}{\Pi} \end{array} \right.$$

3.3.5 Comparaison entre la méthode des L-moments et la méthode des moments classiques

Nous avons estimé le paramètre S et calculé le biais ainsi que l’erreur quadratique moyenne de la distribution logistique en utilisant les méthodes des L-moments et des moments classiques, dans le but d’étudier la méthode la plus efficace pour l’estimation des paramètres. Pour cela, nous avons utilisé des échantillons de tailles différentes et répété la simulation 1000 fois, en prenant les vraies valeurs $\mu = 1$ et $S = 4$. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$
mm					
$\hat{S}$	3.768391	3.901257	3.925721	3.943735	3.993661
Biais	-0.231609	-0.098743	-0.074279	-0.056265	-0.006339
EQM	1.367414	0.786755	0.317758	0.173852	0.034333
lm					
$\hat{S}$	3.956158	3.997162	3.969681	3.970865	4.001631
Biais	-0.043841	-0.002838	-0.030319	-0.029135	0.001631
EQM	1.277375	0.671541	0.248237	0.129951	0.024840

TAB. 3.3 – Estimateurs, biais et EQM du paramètre S de la distribution logistique par les méthodes des L-moments et des moments

D'après les résultats du tableau(3.3), on remarque que :

La méthode des L-moments était plus précise et plus efficace dans l'estimation, car elle a produit un biais et une erreur quadratique moyenne plus faibles, et elle était la plus proche de la vraie valeur, notamment pour les petits échantillons.

Conclusion

Les L-moments sont des mesures statistiques basées sur une combinaison linéaire de statistiques d'ordre, développées comme alternative plus efficace aux moments traditionnels pour l'analyse des distributions de probabilité.

Parmi leurs principaux avantages :

- Mesure robuste de l'asymétrie (via le L-skewness) et de l'aplatissement (via le L-kurtosis)
- Identification facilitée de la distribution la plus appropriée aux données, notamment à l'aide des diagrammes de ratios de L-moments.
- Estimation précise des paramètres avec un biais plus faible, particulièrement pour les petits échantillons comparés aux méthodes traditionnelles.
- Résistance accrue aux valeurs aberrantes.

Cependant, malgré ces avantages, elles présentent certaines limitations puisqu'elles ne peuvent pas être appliquées aux distributions avec moyenne non-définie comme la distribution de Cauchy .

Bibliographie

- [1] Ahsanullah, M., Nevzorov, V. B., & Shakil, M. (2013). An introduction to order statistics. Atlantis Press
- [2] Ahsanullah, M., Shahbaz, M. Q., Shahbaz, S. H., & Al-Zahrani, B. M. (2016). Ordered random variables : Theory and applications. Atlantis Press.
- [3] Asquith, W. H. (2012). Distribution analysis with L-moment statistics using the R environment for statistical computing.
- [4] Berkane, H. (2021/2022). Cours 2-ème master en mathématiques appliquées. Université de Biskra
- [5] Chine, A. (2018). Sur la statistique de copules. Doctoral dissertation, Université de Biskra.
- [6] Robert serfling .,Peng Xiao.,(2006) :A contribution to multivariate L-moments :Lcomoment matrices.University of texas at dallas.
- [7] Gudivada, V. N., & Rao, C. R. (Eds.). (2018). Computational analysis and understanding of natural languages : Principles, methods and applications (Vol. 38). Handbook of Statistics
- [8] Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1997). Regional frequency analysis : An approach based on L-moments. Cambridge University Press.
- [9] Hosking, J. R. M. (1990). L-moments : Analysis and estimation of distributions using linear combinations of statistics. Journal of the Royal Statistical Society, 52(1), 105-124.

- [10] Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1995). A comparison of unbiased and plotting-position estimators of L-moments. T. J. Watson Research Centre, New York.
- [11] Hosking, J. R. M. (2003). On the characterization of distribution by their L-moment. T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights.
- [12] Imková, T. Statistical inference based on L-moments. Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic
- [13] Jaiswal, R. K., Thomas, T., & Galkate, R. V. (2011). Regional flood frequency modeling for a basin of Central India. *Journal of Flood Engineering*, 2(1), 61–78.
- [14] Le Digabel, S. (2017). Estimation (MTH2302D, v2). École Polytechnique de Montréal.

Annexe A

R est un langage de programmation et un environnement informatique open source dédié à l'analyse statistique et au traitement des données. Il a été initialement développé par Ross Ihaka et Robert Gentleman à l'Université d'Auckland en Nouvelle-Zélande. R se distingue par sa puissance dans la réalisation d'analyses complexes et de modélisations statistiques grâce à une vaste bibliothèque de packages et de fonctions qui permettent aux utilisateurs d'importer, de traiter, d'analyser et de visualiser facilement les données.

Dans le troisième chapitre les packages utilisés sont : **lmomco**, **lmom** avec la version **R.4.3.2**.

plotlmrdia : fonction du package **lmom** ou **lmomco**, utilisée pour tracer le diagramme des rapports des L-moments.

samlmu : fonction du package **lmom** permettant de calculer les estimateurs des L-moments L-moments.

pellog : utilisée pour estimer les paramètres de la loi logistique par la méthode des L-moments.

Annexe B

$v.a$	Variable aleatoire
iid	Indépendantes et identiquement distribuées
(Ω, B)	Espace de probabilité(où B tribu sur Ω)
$C_n^i, \binom{n}{i}$	Combinaisons de i éléments parmi n
$B(a, b)$	Loi beta de parametre a et b
$B(a, b, c)$	Fonction bêta généralisée
Γ	Fonction gamma
F^{-1}	Inverse de la fonction de distribution
$F^{\leftarrow}$	Inverse généralisé de la fonction de distribution
$\stackrel{d}{=}$	même loi de probabilité
$L - cv$	L-variation.
PWM	Moments de probabilité pondérés
$Sign a$	Signe de a
$\bar{X}$	La moyenne arithmétique
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
lm	méthode de L-moment
mm	méthode de moment

الملخص

في هذه المذكرة، قدّمنا طريقة العزوم الخطية التي اقترحها هوسكينغ عام 1990 كبديل للعزوم التقليدية. تتميز هذه الطريقة بقدرتها على تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية وتحليل خصائصها، مثل الالتواء والتفرطح، بدقة وكفاءة، خصوصاً عند وجود بيانات تحتوي على قيم متطرفة. كما تعتمد هذه الطريقة على إحصاءات الرتب مما يجعلها أقل حساسية للقيم الشاذة.

كلمات مفتاحية: إحصائية مرتبة، العزوم الخطية، التقدير، المنحنى البياني للعزوم الخطية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté la méthode des L-moments, proposée par Hosking en 1990 comme alternative aux moments classiques. Cette méthode se distingue par sa capacité à estimer les paramètres des distributions de probabilité et à analyser leurs caractéristiques, telles que l'asymétrie et l'aplatissement, avec précision et efficacité, notamment en présence de données contenant des valeurs extrêmes. Elle repose également sur les statistiques d'ordre, ce qui la rend moins sensible aux valeurs aberrantes.

Mots clés : Statistique d'ordre, L-moments, Estimation, Diagramme de L-Moments.

Abstract

In this memory, we presented the L-moment method proposed by Hosking in 1990 as an alternative to classical moments. This method is distinguished by its ability to estimate the parameters of probability distributions and to analyze their characteristics, such as skewness and kurtosis, with accuracy and efficiency, especially when dealing with data containing extreme values. It also relies on order statistics, which makes it less sensitive to outliers.

Key words: Order statistic, L-moments, Estimation, Diagram of L-Moments.