République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques**"

Option : **Probabilités et statistique**

Par Mem ATALLAH Soraya

Titre :

Le lien enter les EDSRs et les EDPs.

Devant le Jury :

Mme	BEN GHERBAL Hanane	MCA	U. Biskra	Président
Mme	GUATTAS Rafika	MCB	U. Biskra	Encadreur
Mme	BOUGHERARA Saliha	MCB	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 02/06/2025

Dédicace

À celle qui fut ma patrie avant même que je comprenne le sens du mot . . .

À ma mère, étreinte de la vie et chaleur des jours, toi qui fus la prière sincère dans chaque rak'a, le pilier lorsque le monde m'a déçue . . . Cette réussite est la tienne, et pour toi seule, mille mercis ne suffiraient à égaler ton amour.

À ma famille, ceux qui ont semé en moi l'amour du savoir, supporté ma fatigue et mes hauts et bas . . . Ce travail vous est dédié, car il est le fruit de votre soutien et de votre satisfaction.

À ma directrice de mémoire, qui fut mon guide sur le chemin du savoir, dont la rigueur m'a poussée à donner le meilleur de moi − même . . . Merci pour votre temps, votre patience et votre confiance.

À mes amies, la part douce de ce chemin . . . Vos rires étaient une bouée de sauvetage, vos mots un baume dans les moments les plus durs. Je suis reconnaissante pour chaque instant partagé, chaque souvenir qui a embelli ce parcours.

À tous ceux qui ont cru en moi . . . Cette dédicace ne se dit pas, elle se ressent.

Remerciements

Je remercie Dieu pour Son aide et Son soutien qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Que la paix et les bénédictions soient sur le Prophète Mohammed, qui a montré que le savoir est une lumière et que le chercher est une noble mission.

J'exprime ma profonde gratitude à ma famille pour leur amour, leurs prières et leur soutien constant.

Je remercie sincèrement ma directrice de mémoire "GUATTAS Rafika" pour son accompagnement attentif et ses précieux conseils.

Je remercie également les membres du jury pour l'honneur d'avoir accepté de discuter ce travail et pour leurs remarques précieuses que j'apprécie beaucoup.

Je n'oublie pas de remercier tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Khider – Biskra, pour leur encadrement, leur dévouement et leur encouragement durant toutes ces années d'études.

Enfin, je remercie mes amis et amies pour leur soutien et leur présence à mes côtés tout au long de ce parcours.

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

Table des matières iii

Notations et symbols v

Introduction 1

1 Rappel de calcul stochastique 3

1.1 Processus stochastique 3

1.2 Calcul d'Itô 8

1.3 Équations diférentielles stochastiques 10

1.3.1 Théorèm de l'Existence 11

2 Équations diférentielles stochastiques rétrogrades 12

2.1 Vocabulaire et notations 12

2.1.1 Présentation du problème 12

2.1.2 Notations 14

2.2 Cas Lipschitz 18
2.2.1 résultat de Pardoux–Peng 18
2.2.2 rôle de Z. 23
2.3 Théorème de comparaison 26
2.3.1 EDSR linéaires 26
2.3.2 Théorème de comparaison 28

3 EDSR et application sur EDP **32**
3.1 Équations différentielles partielles (EDP) 32
3.2 EDP linéaire et formule de Feynman-Kac 33
3.2.1 EDP de chaleur et formule de Feynman- Kac 34
3.3 EDSR et systèmes des EDPs paraboliques quasi-linéaires 37

Conclusion **41**

Bibliographie **43**

Notations et symbols

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité fltré.
MB	Mouvement Brownien.
$i.e$	C 'est-à-dire.
$B(\mathbb{R}^d)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
L^2	Espace des processus de carré intégrables.
$S_c^2(\mathbb{R}^k)$	Espace des processus continus à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,à carré intégrable.
$\mathbb{P}$ $p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
EDS	Equations diférentielle stochastique.
C_b^∞	Espace des fonctions indéfiniment dérivables à dérivées bornées.
$C^{1,2}$	espace des fonctions avec dérivée continue en temps(1^{re})et en espace(2^e).
$\triangleq$	indique une définition

Introduction

Le domaine des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a connu un développement remarquable au fil du temps. Les débuts de cette branche de l'analyse stochastique remontent aux travaux de J.-M. Bismut en 1973 [1], qui a introduit les équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades dans le cadre des problèmes de contrôle optimal.

Cependant, le véritable essor de l'étude des EDSR en tant que domaine autonome s'est produit avec la publication de E. Pardoux et S. Peng en 1990 [5]. Dans ce travail fondateur, ils ont fourni la première démonstration complète de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades dans le cas non linéaire, marquant ainsi un tournant majeur dans la compréhension et l'application de ces équations.

Depuis lors, les EDSR sont devenues un outil fondamental dans l'étude des modèles dynamiques aléatoires, offrant un cadre mathématique puissant pour traiter des problèmes avec conditions terminales. Leur étude s'est progressivement étendue à des liens profonds avec les équations différentielles partielles (EDP).

En 1992, S. Peng [6] a apporté une avancée significative en démontrant que les solutions des EDSR peuvent être utilisées pour représenter de manière probabiliste les solutions d'équations différentielles partielles quasi-linéaires de type parabolique. Cette découverte a ouvert la voie à de nouvelles approches reliant analyse

stochastique et mathématiques analytiques.

Dans ce contexte, ce mémoire vise à étudier la relation théorique et appliquée entre les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et les équations différentielles partielles (EDP), en explorant les fondements de chacune et en analysant les correspondances entre solutions stochastiques et solutions analytiques dans le cadre des modèles mathématiques contemporains.

Pour atteindre cet objectif, le mémoire est structuré en trois chapitres principaux :

• Le premier chapitre introduit les notions de base du calcul stochastique, telles que le mouvement brownien, l'intégrale d'Itô, les martingales, les équations différentielles stochastiques classiques, ainsi que certains outils mathématiques essentiels pour l'étude des EDSR.

• Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles stochastiques rétrogrades, en présentant leur définition formelle, les conditions d'existence et d'unicité des solution dans le cas non linéaire.

• Le troisième chapitre explore le lien entre les solutions des EDSR et les équations différentielles partielles quasi-linéaires, en présentant des représentations probabilistes des solutions via les EDSR cela généralise la formule de Feynman–Kac des EDP linéaire.

Chapitre 1

Rappel de calcul stochastique

Le premier chapitre présente un rappel des notions essentielles du calcul stochastique, comme l'intégrale d'Itô, les martingales, les processus de diffusion et les EDS. Cela permet de poser les bases nécessaires à la suite du travail.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *: Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathbb{P})$ *à valeur dans* $(\mathbb{E}, \varepsilon)$ *appelée espaces d'états généralement* $(\mathbb{E}, \varepsilon) = (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.1.1 *Dans la pratique l'indice* t *représente le temps*

- *Pour* $t \in \mathbb{R}_+$ *fixé,* $\omega \to X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathbb{P})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathbb{R}_+ \to X(\omega)$ *est une fonction à valeur réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *: Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastique :*

a) *On dit que Y est une modification de X si, pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}$.p.s c'est à dire :*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

b) *X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}$.p.s, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

c) *On dit que X et Y sont équivalents s'ils ont les mêmes lois de dimension finies.*

d) *X et Y sont identique si :*

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$$

Définition 1.1.3 *: Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1.2 *: Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Proposition 1.1.1 *:*

1. *Indistinguable $\Longrightarrow$ modificatoin $\Longrightarrow$ équivalents.*

2. *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ deux processus stochastique continus alors : X et Y sont indistinguables $\Longleftrightarrow$ X est une modification de Y.*

Définition 1.1.4 *: Un processus X est dit continue si pour presque toutes les trajectoires sont continues, c'est à dire :*

$$\mathbb{P}(t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto X_t \text{ est continu }) = 1.$$

Définition 1.1.5 *: Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ et on note $X \in L_0(\mathcal{F})$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $(s, w) \longmapsto X_s(w)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 1.1.3 *: Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1.2 *: Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.6 *(**Mouvement Brownien**) : Le processus (B_t, t_0) est un mouvement Brownien (standard) si :*

a) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issue de l'origine).*

b) *$s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centré de variance $(t - s)$ i.e $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.*

c) *$\forall n, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.*

Martingale

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.1.7 : *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé :*

a) *Une martingale si pour $s \leq t$: $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$;*

b) *Une sur-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$;*

c) *Une sous-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$.*

Proposition 1.1.3 *(Décomposition de Doob) : Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale $(M_t)_t$ et un processus $\mathcal{F}$-prévisible $(V_t)_t$, tels que :*

$$M_0 = V_0 = 0,$$

et

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.1.8 *: Un processus M adapté, nul en 0 est une martingale locale s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêts telle que $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ et que pour tout n, le processus arrêté $M^{T_n} = (M_{T_n \wedge t})$ est une martingale.*

Définition 1.1.9 *: Un processus adapté et continu X est une semi-martingale continue s'il existe une martingale locale M et un processus adapté A, continu, à variations finies et nul en 0, tels que $X = X_0 + M + A$. Une telle décomposition est unique.*

Remarque 1.1.4 *: L'unicité de la composition d'une semi-martingale résulte du fait que toute martingale locale, continue, à variation finie est constante. Si :*

$$X = X_0 + M^{(1)} + A^{(1)} = X_0 + M^{(2)} + A^{(2)},$$

on a : $M^{(1)} - M^{(2)} = A^{(1)} - A^{(2)}$ *donc* $M^{(1)} - M^{(2)}$ *est une martingale locale, continue, à variation finie et nulle en* 0 *donc nulle.*

Proposition 1.1.4 *: Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une martingale (respectivement une sous-martingale) et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction convexe (resp. Une fonction convexe croissante). Supposons aussi que* $\mathbb{E}[f(X_t)] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$*. Alors,* $(f(X_t))_{t\geq 0}$ *est une sous-martingale.*

Preuve. D'aprés l'intégalité de Jensen. On a pour $s < t$:

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]) \geq f(X_s),$$

la dernière inégalité utilisant le caractère croissant de f lorsque (X_t) est une sous-martingale. ■

Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standrad construit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. Rappelons que si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$ le processus est $\int_0^t H_s dB_t$ une martingale.de carré intégrable, nulle en 0.

Le théorème suivant montre que toutes les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

Théorème 1.1.1 *: Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*. Il existe un processus adapté* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < +\infty$ *et*

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \quad p.s \ . \tag{1.1}$$

Définition 1.1.10 *: (1.1) Note que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien.*
Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$- mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme

$$U = \mathbb{E}(\mathbb{U}) + \int_0^t H_s dB_s \quad p.s \ . \tag{1.2}$$

où (H_t) est une processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < +\infty$. Il suffit pour cela de considérer la martingale $M_t = \mathbb{E}(U/F_t)$. On démontre aussi que si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation du type (1.2) mais avec un processus vérifant seulement $\int_0^T H_s^2 ds \langle \infty$ p.s.

1.2 Calcul d'Itô

Intégrale d'Itô

Définition 1.2.1 *: L'intégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s.$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$est une mouvement brownien et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critéres d'intégrabilité.

Processus d'Itô

Définition 1.2.2 *: Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s.$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable ; θ et φ deux processus $\mathcal{F}$ adapté vérifant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T \mid \theta_s \mid^2 ds < \infty \ p.s \ et \ \int_0^T \mid \varphi_s \mid^2 ds < \infty p.s.$$

On note de manière infnitésimale :

$$dX_t = \varphi_t dt + \theta_t dB_t.$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus θ et φ. Afin de pouvoir présenter ici la démonstration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer les conditions d'intégrabilités suivantes :

$$\mathbb{E}[\int_0^T \mid \theta_s \mid^2 ds] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[\int_0^T \mid \varphi_s \mid^2 ds] < \infty.$$

Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 ***(Première formule d'Itô)*** *: Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérife p.s :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds; \forall t \leq T.$$

La notion différentielle de cette relation est :

$$df(B_s) = f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s) ds$$

Théorème 1.2.2 ***(Deuxième formule d'Itô)*** *: Soit f une fonction défnie sur*

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *par rapport à* t *; de classe* C^2 *par rapport à* x*. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{x,x}(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

1.3 Équations diférentielles stochastiques

Définition 1.3.1 *: Soient* $b : [0; T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma : [0; T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ *deux fonction mesurable, où* T *un réel strictement positif,* U *est une variable aléatoire, de carré intégrable, et indépendante du* MB*. Une solution de l'EDS :*

$$\mathbb{E}_U(b, \sigma) = \begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = U \end{cases}$$

est consistée par :

a) *Un espace de probabilité fltré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$*.*

b) *Un* $(\mathcal{F}_t)$ *mouvement brownien* $B = (B_1, ..., B_n)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*.*

c) *Un processus* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *continu* $(\mathcal{F}_t)$ *adapte tel que les intégrales :*

$$\int_0^t b(r, X_r)dr \quad et \quad \int_0^t \sigma(r, X_r)dB_r$$

aient un sens et tel que l'égalité

$$X_t = U + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dB_r \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.3}$$

soit satisfaite pour tout t $\mathbb{P}$ *p.s.*

1.3.1 Théorèm de l'Existence

Théorème 1.3.1 *Supposons que les fonctions b et σ satisfont pour tout $t \in [0,T], x, y \in \mathbb{R}$; le condition suivante :*

i) ***Condition de Lipschitz*** *: Pour tout compact $L \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $\mathbb{K} = \mathbb{K}(L)$, telle que :*

$$| b(t,x) - b(t,y) | + \| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \| \leq \mathbb{K} \ |x - y| .$$

ii) ***Croissance linéaire :***

$$| b(t,x) | + \| \sigma(t,x) \| \leq \mathbb{K}(1 + |x|).$$

iii) $\mathbb{E}[| U |^2] < \infty$

Alors l'EDS 1.3 posséde une unique solution.

Chapitre 2

Équations diférentielles stochastiques rétrogrades

Ce chapitre a pour objectif de présenter le cadre théorique des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), en définissant les notions fondamentales et la terminologie utilisée dans ce contexte. Nous y exposons le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions sous des hypothèses appropriées, et nous complétons le chapitre par des exemples illustrant la structure générale de ces équations ainsi que le comportement de leurs solutions.

2.1 Vocabulaire et notations

2.1.1 Présentation du problème

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à la filtration $\mathcal{F}$. L'objectif est de résoudre l'équation dif-

férentielle suivante

$$\frac{-dY}{dt} = f(Y_t), t \in [0,T] \quad \text{, avec} \quad Y_t = \xi, \ .$$

en imposant que le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ soit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire que Y_t ne dépende pas t de l'information future au-delà de l'instant Commençons par le cas particulier où $f \equiv 0$. Une solution naturelle semble être $Y_t = \xi$, mais cette solution n'est pas adaptée si ξ n'est pas déterministe. On considère alors le meilleur approximant adapté dans L^2, à savoir la martingale suivante :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

Dans le cadre de la filtration naturelle d'un mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingales assure l'existence d'un processus Z, adapté et à carré intégrable, tel que :

$$Y_t = E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

En réécrivant cette expression, on obtient :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,$$

ce qui équivaut à :

$$-dY_t = -Z_t dW_t \quad \text{avec} \quad Y_t = \xi.$$

Cet exemple simple met en évidence l'apparition d'une seconde inconnue, le processus Z, qui joue un rôle fondamental pour assurer l'adaptabilité de Y. Dès lors,

afin de généraliser le cadre, il est naturel de permettre à la fonction f de dépendre également de t, Y_t et Z_t L'équation devient alors :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \quad \text{avec} \quad Y_T = \xi.$$

2.1.2 Notations

Considérons un espace de probabilité comple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et un mouvement Brownien W de dimension d défini sur cet espace. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée à W.

Nous utiliserons deux espaces de processus stochastiques :

L'espace $S^2(\mathbb{R}^k)$ regroupe les processus Y à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, mesurables progressivement, satisfaisant :

$$\| Y \|^2_{S^2} := \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} | Y_t |^2] < \infty.$$

Le sous-espace $S^2_c(\mathbb{R}^k)$ est formé des processus continus appartenant à S^2. Par convention, deux processus indiscernables (égaux presque sûrement pour tout t) sont considérés comme équivalents, et les notations resteront les mêmes dans les espaces quotient.

L'espace $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ contient les processus Z, eux aussi progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\| Z \|^2_{M^2} := \mathbb{E}[\int_0^T \| Z_t \|^2] < \infty.$$

où, pour toute matrice $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, on définit $\| z \|^2 = trace(zz^*)$. L'espace $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne donc l'ensemble des classes d'équivalence associées.

Pour alléger les notations, on omettra les indices $\mathbb{R}^{k\times d}$ et $\mathbb{R}^k$ lorsque le contexte est clair. Les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach, chacun muni de sa norme. On définit l'espace produit suivant :

$$\mathcal{B}^2 := S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d}),$$

nous considérons une fonction aléatoire :

$$f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

telle que, pour chaque couple (y,z), le processus $\{f(t,w,Y,Z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit mesurable progressivement.

On suppose également donnée une variable aléatoire $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\mathcal{F}_T$ -mesurable. L'objectif est alors de résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$Y_t = \xi,\ 0 \leq t \leq T,\ \ -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dW_t,$$

ou, de manière équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f est appelée le générateur de l'EDSR, et ξ constitue la condition terminale. Nous allons maintenant préciser ce que l'on entend par une solution de l'équation 2.1.

Définition 2.1.1 *On dit qu'un couple de processus*$\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) donnée par (1) s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. Y, Z sont des processus progressivement mesurables, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;

2. Presque sûrement, on a :

$$\int_0^T (\mid f(r, Y_r, Z_r) \mid - \parallel Z_r \parallel^2) dr < \infty.$$

3. Presque sûrement, l'équation intégrale suivante est satisfaite :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Remarque 2.1.1 *Deux points importants doivent être soulignés :*

Tout d'abord, les intégrales de l'équation 2.1 étant bien définies, Y est nécessairement une semi-martingale continue.

Ensuite, comme Y est progressivement mesurable, il est en particulier adapté, ce qui implique que Y_0 est une valeur déterministe.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif et appartenant à $M^2(\mathbb{R})$, ainsi qu'une constante $\lambda > 0$, tels que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \mid f(t, y, z) \mid \leq f_t + \lambda(\mid y \mid + \parallel z \parallel).$$

Alors, si (Y, Z) est une solution de l'EDSR (2.1) avec $Z \in M^2$ et $Y \in S_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^T Z_r dWr,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \parallel Z_r \parallel)dr + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^T Z_r dW_r \mid + \lambda \int_0^t |Y_r| dr.$$

Posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \mid Z_r \mid)dr + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^T Z_r dWr \mid .$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{ft\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. comme Y est un processus continu – cf. remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T}$ qui montre que Y appartient à S^2.

Remarque. le résultat est encore valable lorsque $\mid f_1 \mid$ est une variable aléatoire de carré intégrable.

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise. ■

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k) et Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\int_0^T Y_s Z_s dWs, t \in [0,T]$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités BDG donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^T Y_r.Z_r dWr \mid] &\leq c\mathbb{E}[(|Y_r|^2 \parallel Z_r \parallel^2 dr)^{1/2}] \\ &\leq c\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 (\int_0^T \parallel Z_r \parallel^2 dr)^{1/2}],\end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^T Y_r.Z_r dWr \mid] \leq c(\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T \parallel Z_r \parallel^2 dr]).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

2.2 Cas Lipschitz

2.2.1 résultat de Pardoux–Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé. Ce résultat est dû à E.Pardoux et S. Peng [PP90] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas ou le générateur est non-linéaire.

Rappelons pour la dernière fois que f est définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus$\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t$ –mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous les quelles nous allons travailler.

(L) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s$,

1.Condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t,y,y',z,z',

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')|\leq\lambda(|y-y'|+\parallel z-z'\parallel);$$

2.condition d'intégrabilité :

$$E[|\xi|^2+\int_0^T|f(r,0,0)|^2dr]<\infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et

on veut trouver une solution de l'EDSR,

$$Yt = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dWr, 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi \in L^2(F_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution*
(Y, Z) telle que $Z \in M^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$.

Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Yt = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_r dr \mid F_t).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z.

Remarquons que,d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{F_t\}_t \in [0, T]$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr \mid F_t) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dWr - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée

puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dWr - \int_0^t F_r dr - M_0 + \int_0^T Z_r dWr - \int_0^T F_r dr \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dWr. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.

■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng :

Théorème 2.2.1 . *Pardoux–Peng 90 [5]. Sous l'hypothèse (L), l'EDSR (2.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. . Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (2.1). si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Yt = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)dr - \int_t^T Z_r dWr, \ 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.

En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda|U_r| + \lambda \parallel V_r \parallel .$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le lemme 2.2.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.(Y, Z) appartient à $\mathcal{B}^2$:

l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition 2.1.1, Y

appartient à S_c^2. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien définie. Soient (U, V) et (U_0, V_0) deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et

$$(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y', Z') = \Psi(U', V').$$

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$.Ona, $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\}dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir :

$$de^{\alpha t}|y_t|^2 = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\}dt + 2e^{\alpha t} y_t \cdot z_t dW_t + e^{\alpha t} \parallel z_t \parallel^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \mid z_r \mid^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r} - \alpha|y_r|^2 + 2y_r\{f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r\prime, V_r\prime)\}dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r, \tag{2.3}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U\prime$ e t$V - V\prime$ respectivement,

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r||u_r| + 2\lambda|y_r| \parallel v_r \parallel)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r} - (\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon)|y_r|^2 dr - \int 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r$$

$$+\varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}|u_r|^2 + \parallel vr \parallel^2 dr,$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int e^{\alpha r}|u_r|^2 + \| v_r \|^2 \, dr$,

$$\forall t \in [0,T], e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \mid z_r \mid 2dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r z_r dW_r. \tag{2.4}$$

D'après le Lemme 2.1.1, la martingale locale $\{\int_0^T e^{\alpha r} y_r z_r dW_r\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à S^2 et Z, Z'appartiennent àM^2.

En particulier, prenant l'espérance − ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente−, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{\alpha r} \| z_r \|^2 \, dr] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] \tag{2.5}$$

Revenant à l'inégalité 2.4, les inégalités BDG fournissent – avec C universelle,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2 \| z_r \|^2 \, dr)^{1/2}] \\ &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}[(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2}|y_t| \int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2 \| z_r \|^2 \, dr)^{1/2}], \end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}[\int_0^T e^{\alpha t} \| z_r \|^2 \, dr.$$

Prenant en considération l'inégalité 2.5, on obtient finalement

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t} \| z_r \|^2 \, dr] \leq (3+c^2)\mathbb{E}[R_\varepsilon]$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t} \| z_r \|^2 \, dr] \leq \varepsilon(3+c^2)(1\vee T)\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t} \| v_r \|^2 \, dr].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+c^2)(1 \vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\| (U,V) \|_\alpha = \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t} \| V_r \|^2 \, dr]^{1/2}$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition 2.1.1 implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ■

Remarque 2.2.1 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z \in M^2$.*

2.2.2 rôle de Z.

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.2.1 *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (2.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (L), que ξ est $\mathcal{F}_\tau$–mesurable et que $f(t,y,z) = 0$ dès que $t \geq \tau$.Alors $Y_t = Y_t \wedge \tau$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.*

Preuve. On a, $P-p.s$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T,$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dWr = \xi - \int_\tau^T Z_r dWr.$$

Il vient alors $Y_\tau = \mathbb{E}(\xi|F_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r dWr = 0$ d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}[(\int_\tau^T Z_r dWr)^2] = \mathbb{E}[\int_\tau^T \| Z_r \|^2 \, dWr] = 0,$$

et finalement que $Z_r \mathbb{I}_{r \geq \tau} = 0$. Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau, Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + Z_\tau t \; f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = Y_t + 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve. ■

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), Y_t = \xi.$$

Une estimation à priori. Nous finissons ce paragraphe en donnant une première estimation sur les EDSR : il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de l'EDSR par rapport aux données qui sont ξ et le processus $\{f(t, 0, 0)\}_{0 \leq t \leq T}$. Cette étude sera reprise au chapitre suivant.

Proposition 2.2.2 *Supposons que (ξ, f) vérifie (L). Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (2.1) telle que $Z \in M^2$. Alors, il existe une constante C_u universelle telle*

que, pour tout $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t} \parallel Z_t \parallel^2 dt] \leq c_u \, \mathbb{E}[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta t} \mid f(t,0,0) \mid^2 dt].$$

Preuve. On applique la formule de Itô à $e^{\beta t}|Y_t|^2$ pour obtenir :

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr = e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r} - \beta|Y_r|^2 + 2Y_r.f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T 2e^{\beta r}Y_r.Z_r dW_r.$$

Comme f est λ–Lipschitz, on a, pour tout (t,y,z),

$$2y.f(t,y,z) \leq 2|y||f(t,0,0)| + 2\lambda|y|^2 + 2\lambda|y| \parallel z \parallel$$

et donc utilisant le fait que $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ pour $\varepsilon = 1$ puis 2,

$$2y.f(t,y,z) \leq (1 + 2\lambda + 2\lambda^2)|y|^2 + |f(t,0,0)|^2 + \parallel z \parallel^2 /2.$$

Pour $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$ on obtient, pour tout $t \in [0,T]$,

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr \leq e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr - 2\int_t^T e^{\beta r}Y_r \cdot Z_r dW_r. \tag{2.6}$$

La martingale locale $\{\int_0^t e^{\beta r}Y_r \cdot Z_r dW_r, t \in [0,T]\}$ est une martingale – cf. Lemme 2.1.1 En particulier, prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr] \leq 2\mathbb{E}[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr].$$

Revenant à l'inégalité 2.6, les inégalités BDG fournissent – avec C universelle –,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 \leq \mathbb{E}[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr] + C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\beta r} \mid Y_r \mid^2 \parallel Z_r \parallel^2 dr)^{1/2}].$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\beta r} \mid Y_r \mid^2 \parallel Z_r \parallel^2 dr)^{1/2}] &\leq C\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t/2}|Y_t|(\int_0^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr)^{1/2}, \\ &\leq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2] + \tfrac{c^2}{2}[\int_0^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr)]. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2] \leq 2\mathbb{E}[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr] + C^2\mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr],$$

et finalement on obtient

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta r} \parallel Z_r \parallel^2 dr] \leq 2(2+C^2)\mathbb{E}[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr]$$

ce qui termine la preuve de la proposition prenant $C_u = 2(2+C^2)$. ■

2.3 Théorème de comparaison

2.3.1 EDSR linéaires

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.3.1 . *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t$–mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.L'EDSR*

linéaire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\} dr - \int_t^T Z_r dW_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\{\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\}.$$

Preuve. Commençons par remarquer que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t.dW_t), \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à S^2.

De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y,Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(t,y,z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que (L) est satisfaite. Y appartient à S^2 par la Proposition 2.3.1.

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t.dW_t,$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $c \in M^2$ et Γ, Y sont dans S^2.

Par suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = \mathbb{E}(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t),$$

ce qui donne la formule annoncée. ■

Remarque 2.3.1 *Notons que si $\xi \geq 0$ et si $c_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$. Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théorème de comparaison au paragraphe suivant. pour illustrer ce résultat prenons le cas où a et c sont nuls. On a alors*

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \exp\{\int_t^T b_r \cdot \, dW_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 dr\} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(\xi|\mathcal{F}_t),$$

où $\mathbb{P}^*$ est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$L_T = \exp\{\int_t^T b_r \cdot \, dW_r - \frac{1}{2}\int_0^T |br|^2 dr\}$$

Une autre façon de voir cela, plus dans l'esprit « probabilité risque neutre », est de regarder l'EDSR sous $\mathbb{P}^*$. En effet, sous $\mathbb{P}^*$, $B_t = W_t - \int_0^t b_r dr$ est un MB – c'est le théorème de Girsanov.
Or l'équation peut s'écrire

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dW_t = -Z_t dB_t, \; Y_T = \xi.$$

Donc, sous $\mathbb{P}^*$,Y est une martingale, ce qui montre aussi la formule.On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité du type «transformation de Girsanov».

2.3.2 Théorème de comparaison

Ce paragraphe est consacré au «théorème de comparaison»
qui permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$) dès que l'on sait

comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng [Pen92].

Théorème 2.3.1 *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, f), (ξ', f') vérifient l'hypothèse (L). On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que $P - p.s. \xi \leq \xi'$ et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t) m \otimes P - p.p.$ (m mesure de Lebesgue). Alors,*

$$P - p.s., \forall t \in [0, T],\ Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, alors P–$p.s.$,$Y_t = Y'_t, 0 \leq t \leq T$ et $f(t, Yt, Zt) = f'(t, Y_t, Z_t) m \otimes P - p.p.$ En particulier, dès que $P(\xi < \xi\prime) > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) < f\prime(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes P-$mesure strictement positive alors $Y_0 < Y'_0$.

Preuve. La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR linéaires. on cherche une équation satisfaite par $U = Y' - Y$; on a notant $V = Z' - Z$ et $\zeta = \xi' - \xi$,

$$U_t = \zeta + \int_t^T (f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r))dr - \int_t^T V_r dW_r.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$f'(r, Y_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) = f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r) + f'(r, Y_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z_r)$$

$$+ f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r) (\text{qui est positif ici}).$$

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. on pose :

$$a_r = \frac{f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r)}{U_r}, \text{ si } U_r \neq 0, \text{ et } a_r = 0 \text{ sinon.}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $0 \leq i \leq d, Z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d-i$ dernières composantes sont celles de Z'_r et les i premières celles de Z_r. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose

$$b_r^i = \frac{f(r, Y_r, Z_r^{(i-1)}) - f(r, Y_r, Z_r^{(i)})}{V_r^i}, \text{si } V_r^i \neq 0, \text{et } b_r^i = 0 \text{ sinon}$$

Remarquons que, puisque f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés. Avec ces notations, on a,

$$U_t = \zeta + \int_t^T (a_r U_r + V_r b_r + c_r)dr - \int_t^T V_r dW_r,$$

où $c_r = f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r)$. Par hypothèse, on a $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule« explicite » pour les EDSR linéaires -la Proposition 2.3.1-, on a, pour $t \in [0, T]$,

$$U_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}(\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t),$$

avec, pour $0 \leq r \leq T$,

$$\Gamma_r = \exp\{\int_0^r b_u \cdot dW_u - \frac{1}{2}\int_0^r |b_u|^2 du + \int_0^r a_u du\}.$$

Comme déjà mentionné lors de la remarque suivant la Proposition 2.3.1, cette formule montre que $U_t \geq 0$,dèsque $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$.Pour la seconde partie du

résultat, si de plus $U_0 = 0$ on a :

$$0 = \mathbb{E}(\zeta\Gamma_T + \int_0^T c_r\Gamma_r dr),$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $P-p.s.$ ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\zeta = 0$ et $c_r = 0$. ■

Remarque 2.3.2 *On peut supposer que* $f(t, Y'_t, Z'_t) \leq f'(t, Y'_t, Z'_t)$ *au lieu de* $f(t, Y_t, Z_t) \leq f(t, Y_t, Z_t)$. *pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture*

$$\begin{aligned} f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) &= f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y'_r, Z'_r) \text{ (\textit{supposé positif ici})} \\ &\quad + f(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z'_r) + f(r, Y_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r). \end{aligned}$$

Chapitre 3

EDSR et application sur EDP

Ce chapitre traite de la relation entre les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et les équations aux dérivées partielles (EDP). Nous commençons par présenter quelques notions de base sur les EDP, puis nous montrons comment les EDSR permettent de représenter les solutions de certaines équations quasi-linéaires, en mettant l'accent sur le cas linéaire et la formule de Feynman-Kac.

3.1 Équations différentielles partielles (EDP)

Définition 3.1.1 ***(E.D.P)*** *Soient d, m, n, s des entiers naturels non nuls, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

On appelle système d'E.D.P à coefficients réels dans $\mathbb{R}^d$ de taille n, d'ordre m une relation de la forme :

$$\phi(x, u(x), \partial_i(u(x))_{i\in\{1,...d\}}, \partial^2_{i,j}(u(x))_{i,j\in\{1,...,d\}^2}, ..., \partial^m_{i_1,i_2,...,i_m}(u(x))_{(i_1,i_2,...,i_m)\in\{1,...,d\}^m}) = 0$$

où

$$\begin{cases} u: & \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ est solution de l'E.D.P} \\ \phi: & \Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s. \end{cases}$$

On dit que l'E.D.P est linéaire si et seulement si $\phi(x,.)$ *l'est pour tout* $x \in \Omega$.

On dit que l'E.D.P est scalaire si $s = n = 1$ *(une seule équation et* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$*).*

On considère la dynamique stochastique :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x} = & b(X_s^{t,x})ds + \sigma(X_s^{t,x})dW_s, t \leq s \leq T \\ X_t^{t,x} = & x, \end{cases}$$

où b et σ sont des fonctions régulières à valeurs bornées, et $\{X_s^{t,x}; 0 \leq t \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^d\}$ représente la solution unique de cette équation pour un point initial (t,x).

3.2 EDP linéaire et formule de Feynman-Kac

Afin d'introduire le lien entre les équations aux dérivées partielles d'une part, les équations différentielles stochastiques rétrogrades d'autre part, Nous commencerons par l'étude d'un exemple élémentaire d'équations aux dérivées partielles linéaires.

On fixe un entier $d > 1$, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, ainsi qu'un mouvement Brownien défini sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la filtration usuelle associée à ce mouvement brownien.

Pour tous entiers naturels strictement positifs m et p, on note $|\ .\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\ .\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{m \times p}$, que l'on peut également

interpréter comme une norme matricielle.

3.2.1 EDP de chaleur et formule de Feynman- Kac

Intéressons nous tout d'abord pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé à l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^p$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x}.$$

L'interprétation probabiliste de la solution de cette équation peut se résumer à la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 *Soient $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et u solution bornée et continue sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^p$ de l'équation :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x}. \text{ sur } [0, +\infty[\times\mathbb{R}^p \\ u(0, x) & = \Phi(x). \end{cases}$$

Alors pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^p$

$$u(t, x) = E_x[\Phi(B_t)]$$

Où E_x signifie qu'en prenant l'espérance, on suppose que le Brownien part de x au temps $t = 0$.

Preuve. La formule d'Itô appliquée à $M_s = u(t - s, B_s)$ nous permet d'écrire que :

$$M_s = M_0 + \int_0^s [(-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x})(t - r, B_r)]dr + \int_0^s \bigtriangledown u(t - r, B_r)dB_r$$

et donc $M_s = u(t-s, B_s)$ est une martingale bornée. en particulier,

$$u(t,x) = E_x[M_0] = E_x[M_t] = E_x[\Phi(B_t)].$$

■

De plus, réciproquement, on a

Proposition 3.2.2 *Si* Φ *est continue et vérifie la condition*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\sup(0, \ln \mid \Phi(x) \mid)}{\mid x \mid^2} = 0$$

alors v *définie sur* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^p$ *par* $v(t,x) = E_x[\Phi(B_t)]$ *est solution de l'équation de la chaleur.*

Proposition 3.2.3 *Donnons nous des fonctions*

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p\times d}$$

vérifiant

$$\parallel f(t,x) - f(t,y) \parallel + \parallel \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \parallel \leq K \parallel x - y \parallel$$

$$\parallel f(t,x) \parallel^2 + \parallel \sigma(t,x) \parallel^2 \leq K^2(1+ \leq M(1+ \parallel x \parallel))$$

pour tous $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^p$ *et où* K *est une constante positive.*
On peut alors considérer (X_t, x) *le processus stochastique solution de l'équation*

différentielle stochastique suivante :

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r)dB_r.$$

On se donne

$$\begin{cases} \Phi : & \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \\ g : & [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \\ K : & [0,T] \times \mathbb{R}^p \to [0, +\infty[\end{cases}$$

continues et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$| \Phi(x) | \leq L(1+ \| x \|^2)$$

$$| g(t,x) | \leq L(1+ \| x \|^2)$$

où L est une constante strictement positive.

Alors si $u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^p)$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \max_{0 \leq t \leq T} | u(t,x) | \leq M(1+ \| x \|^2)$$

où M est une constante strictement positive, est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{1}{2}\sum_{ij}(\sigma\sigma*)_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ku + g = 0 \text{ sur } [0;T] \times \mathbb{R}^p \\ u(T,x) = & \Phi(x) \end{cases}$$

alors on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} u(t,x) = E[\Phi(X_T^{t,x}) \exp(-\int_t^T k(r, X_r^{t,x})dr) \\ + \int_t^T g(r, X_r^{t,x}) \exp(-\int_t^T k(u, X_u^{t,x})du)dr] \end{aligned}$$

3.3 EDSR et systèmes des EDPs paraboliques quasi-linéaires

Pardoux et Peng [5] montrent que les EDP quasilinéaires paraboliques peuvent être caractérisées de manière probabiliste via une EDSR, c'est une extension du lien de Feynman-Kac qui ne s'applique qu'aux EDP linéaires à des EDP non linéaire.

On considère une EDP de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x,u(t,x),(\nabla u.\sigma)(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

ou $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$,et

$$\mathcal{L}_u = \begin{pmatrix} L_{u_1} \\ . \\ . \\ . \\ L_{u_k} \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{i,j=1}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Cette EDP est quasilinéaire car le terme f dépend non seulement de u, mais aussi de $\nabla u.\sigma$.

Rappelons d'abord un résultat de [8] :

Étape 01 : Construction de l'EDSR à partir de l'EDP

Théorème 3.3.1 *Si $u \in C^{1,2}([0,T]) \times \mathbb{R}^d)$ résout l'équation 3.1, alors $u(t,x) = Y_t^{t,x}, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$.ou $\{(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}); t \leq s \leq T\}_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ est l'unique solution de l'EDSR suivante :*

$$Y_s^{t,s} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r, t \leq s \leq T. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit : $Y_s = u(s, X_s^{t,x})$ et $Z = \nabla(s, X_s^{t,x}).\sigma(s, X_s^{t,x})$

On applique la formule d'Itô à $u(s, X_s)$:

$$\begin{aligned} du(s, X_s) = (\partial_s u + \nabla u.b + \frac{1}{2} Tr[\sigma\sigma^T \partial_s^2 u])(s, X_s)ds \\ + \nabla u(s, X_s).\sigma(s, X_s)dW_s. \end{aligned}$$

Mais comme u satisfait l'EDP, on :

$$\partial_s u + \nabla u.b + \frac{1}{2} Tr[\sigma\sigma^T \triangle^2 u] = -f(s, X_s, u, \nabla u.\sigma).$$

Ce que donne l'intégration rétrograde

$$Y_s = Y_T + f(r, X_r, Y_r, Z_r)ds - \int_s^T Z_r dW_r,$$

avec $Y_T = \Phi(X_T)$. c'est exactement une EDSR.

■

Étape 02 : Réciproque-Construction de solution de l'EDP à partir de l'EDSR

nous sommes maintenant en mesure de prouver l'inverse du résultat ci-dessus :

Théorème 3.3.2 *Sous les hypothéses énoncées dans le chapitre 1 ie le théoreme (1.3.1) et le chapitre 2 dans le cas lipschitz*

$$u(t,x) \triangleq Y_t^{t,x}; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

est de classe $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ *et résoult l'équation 3.1*

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin le théorème et le lemme suivants :

Théorème 3.3.3 $\{Y_s^{t,x}; (s,t) \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d\}$,*a une version dont les trajectores appartiennent à* $C^{0,0,2}([0,T]^2 \times \mathbb{R}^d)$.

Lemme 3.3.1 *Pour tout* $0 \leq t \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^d$

$$Z_s^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} (\nabla X_s^{t,x})^{-1} \sigma(X_s^{t,x})$$

en particulier

$$Z_t^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} \sigma(x).$$

Preuve de théorème 3.3.2. D'après le théorème 3.3.3 ,$u \in C^{0,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, soit $h>0$ tel que $t+h\leq T$. clairement ,$Y_{t+h}^{t,x}=Y_{t+h}^{t+h,X_{s+h}^{t,x}}$.ainsi

$$\begin{aligned}u(t+h,x)-u(t,x) &= u(t+h,x)-u(t+h,X_{t+h}^{t,x})+u(t+h,X_{t+h}^{t,x})-u(t,x)\\ &= -\int_t^{t+h} Lu(t+h,X_r^{t,x})dr-\int_t^{t+h}(\nabla u\sigma)(t+h,X_r^{t,x})dW_r\\ &\quad -\int_t^{t+h} f(X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr+\int_t^{t+h} Z_r^{t,x}dW_r\end{aligned}$$

ou nous avons utilisé la formule d'Itô (et le fait que $u(t,.)\in C^2(\mathbb{R}^d)$) et d'aprés que u est une solution de l'EDSR 3.2 ■

Soit maintenant $t=t_0<t_1<...<t_n=T$. nous avons

$$\begin{aligned}g(x)-u(t,x) &= -\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+1} Lu(t_{i+1},X_r^{t_i,x})+f(X_r^{t_i,x},Y_r^{t_i,x},Z_r^{t_i,x})dr\\ &\quad +\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+1}[Z_r^{t_i+1}-(\nabla u\sigma)(t_{i+1},X_r^{t_i,x})]dW_r\end{aligned}$$

Il résulte maintenant du Théorème 3.3.3 et du Lemme 3.3.1 que, si l'on prend une suite $t=t_0<t_1<...<t_n=T$ telle que $\lim_{n\to\infty}\sup_{i\leq n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)=0$, on obtient à la limite :

$$u(t,x)=g(x)+\int_t^T[Lu(s,x)+f(s,x,u(s,x),(\nabla u)(s,x))]ds,$$

où $u\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et satisfait l'équation 3.1

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) à travers une approche progressive, débutant par les fondements du calcul stochastique, poursuivant par l'étude des propriétés de ces équations, et aboutissant aux applications liées aux équations aux dérivées partielles (EDP).

Nous avons tout d'abord rappelé les outils de base tels que le calcul d'Itô, le mouvement brownien, les martingales, qui constituent une base essentielle pour comprendre la nature des modèles aléatoires et leur rôle en analyse mathématique.

Nous avons ensuite introduit la formulation générale des EDSR, avec une étude approfondie du cas lipschitzien garantissant l'existence et l'unicité de la solution sous des conditions appropriées, en nous appuyant sur les résultats de Pardoux et Peng. Nous avons également mis en évidence l'importance structurelle de la variable Z, qui joue un rôle crucial dans l'expression du terme aléatoire de la solution.

Dans la dernière partie, nous avons montré comment les EDSR permettent de représenter certaines équations aux dérivées partielles, en particulier dans le cadre quasi-linéaire.

En somme, nous avons constaté que les EDSR ne constituent pas simplement une

généralisation stochastique des équations différentielles classiques, mais bien un cadre mathématique riche permettant de modéliser et d'analyser des phénomènes complexes difficilement accessibles par les méthodes traditionnelles. Ces équations ouvrent ainsi de nouvelles perspectives de recherche et d'application, aussi bien en mathématiques théoriques que dans des domaines variés tels que la finance quantitative ou le contrôle optimal.

Bibliographie

[1] Bismut, J.-M. (1973). Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Memoirs of the American Mathematical Society, 4(167), 1–112.

[2] Briand, P. (1997). Équations différentielles stochastiques rétrogrades : Applications aux équations aux dérivées partielles [Thèse de doctorat, Université Savoie Mont Blanc].

[3] Briand, P. (2001, mars). Équations différentielles stochastiques rétrogrades [Manuscrit non publié]. Université de Savoie.

[4] Jeanblanc, M. (2006, septembre). Cours de calcul stochastique [Manuscrit non publié]. Master 2IF, Université d'Évry.

[5] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55–61. https ://doi.org/10.1016/0167-6911(90)90082-6

[6] Pardoux, E., & Peng, S. (1992). Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In B. L. Rozovskii & R. B. Sowers (Eds.), Stochastic partial differential equations and their applications (pp. 200–217). Springer. https ://doi.org/10.1007/BFb0007334

[7] Peng, S. (1992). Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations. SIAM Journal on Control and Optimization, 30(2), 284–304.

https ://doi.org/10.1137/0330015

[8] Pent, S. (1991). Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. Stochastics, 37(1), 61–74.

[9] Rivière, O. (2005). Équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées : Équations aux dérivées partielles et discrétisation [Thèse de doctorat, Université René Descartes - Paris

Résumé du mémoire

ملخص:

تتناول هذه المذكرة العلاقة بين المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية (EDSR) والمعادلات التفاضلية الجزئية (EDP). بعد استعراض أساسيات حساب الاحتمالات العشوائي، نقدم المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ونثبت وجود حل فريد لها تحت شرط ليبشيتز، وذلك استنادًا إلى نتائج باردو وبينغ. وفي الختام، نوضح وجود حل للمعادلات التفاضلية الجزئية شبه الخطية باستخدام المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، والذي يُعتبر الحالة العامة لصيغة فاينمان–كاك.

Résumé :

Ce mémoire étudie la relation entre les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et les équations différentielles partielles (EDP). Après avoir présenté les bases du calcul des probabilités stochastiques, nous introduisons les EDSR et démontrons l'existence et l'unicité de leur solution sous une condition de Lipschitz, en nous appuyant sur les résultats de Pardoux et Peng. Enfin, nous montrons qu'il existe une solution pour les équations différentielles partielles quasi-linéaires en utilisant les EDSR, ce qui représente le cas général de la formule de Feynman–Kac.

Abstract :

This thesis explores the relationship between backward stochastic differential equations (BSDEs) and partial differential equations (PDEs). After presenting the basics of stochastic probability calculus, we introduce BSDEs and prove the existence and uniqueness of their solution under a Lipschitz condition, based on the results of Pardoux and Peng. Finally, we show the existence of a solution for quasi-linear partial differential equations using BSDEs, which represents the general case of the Feynman–Kac formula.