

République Démocratique et Populaire d'Algérie

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des Sciences Exactes

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : EDP

**Présenté par
Basma FERHAT**

Titre :

Quelques études numérique sur les problèmes paraboliques

Devant le jury composé de

Dr. OUAAR Fatima	UMKB	Présidente
Dr. TABRHA Ouarda	UMKB	Encadrante
Dr. SOLTANI Siham	UMKB	Examinatrice

Soutenue le : **Lundi 02 juin 2025**

DÉDICACE

À ma chère mère **Fraih Mabrouka**, symbole d'amour, de patience et de sacrifices, merci pour ton soutien inestimable et ta prière constante.

À mon père bien-aimé **Hocine Ferhat**, pour sagesse, son dévouement et son encouragement tout au long de mon parcours.

À ma sœur jumelle **Salsabil**, complice de toujours, avec qui j'ai partagé chaque étape de ce chemin.

À mes sœurs **Imane**, **Fatima**, **Ikram** et **Yasmine**, pour leur affection, leur compréhension et leur présence réconfortante.

À mon frère **Ahmed**, pour gentillesse, son humour et son soutien discret mais précieux.

À toutes **mes chères amies**, et à toutes les personnes que j'ai croisées sur mon chemin et qui m'ont soutenue par un mot, une prière, un sourire ou un geste, À ceux et celles qui ont été un appui dans les moments difficiles, ou une source de joie dans les instants de doute, Recevez ici l'expression de ma gratitude sincère et de mes remerciements les plus chaleureux.

Je vous dédie ce travail, fruit d'un long cheminement, avec tout mon amour et ma profonde gratitude.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à son aboutissement.

Mes remerciements les plus sincères vont à Madame **Ouarda Tabrha**, ma directrice de mémoire, pour sa disponibilité, son encadrement rigoureux et ses conseils avisés tout au long de cette recherche. Son accompagnement méthodique et son expertise ont grandement enrichi la qualité de ce travail.

Je remercie également l'**ensemble des enseignants du département des Équations aux Dérivées Partielles (EDP)** pour la qualité de l'enseignement dispensé et leur engagement continu dans notre formation.

Mes pensées reconnaissantes vont également à ma famille, pour soutien moral inébranlable, sa patience et sa confiance, qui ont constitué pour moi une source constante de motivation.

À tous, merci du fond du cœur.

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	1
Remerciements	2
Introduction	7
1 Généralités et Méthodes numériques	9
1.1 Les équations différentielles	9
1.2 Les types des équations différentielles	10
1.2.1 Equations différentielles ordinaires	10
1.2.2 Equations aux dérivées partielles	10
1.2.3 Dimension et ordre d'une EDP	11
1.2.4 Linéarité	12
1.2.5 Classement des EDP linéaires du 2^{eme} ordre :	12
1.2.6 conditions initiales et aux limites :	13
1.2.7 Les problèmes aux limites	14
1.2.8 Quelques problèmes aux valeurs limites en une et deux dimensions :	15

1.3	Équation parabolique	16
1.4	Formulation variationnelle	17
1.4.1	Théorème de Lax-Miligram	17
1.4.2	Développement de Taylor	18
1.5	Méthodes numériques	18
1.5.1	Méthode des différences finies	19
1.5.2	Méthode des éléments finies	21
1.5.3	Avantages et inconvénients des deux méthodes	25
2	Méthode des différences finies sur les problèmes paraboliques	26
2.1	Problèmes paraboliques	26
2.2	Discrétisation par Euler explicite en temps	28
2.3	Discrétisation par schéma implicite à 3 points	30
2.4	Consistance-Convergence des schéma	32
2.5	Schéma de Crank-Nicholson (Schéma semi implicite)	34
3	APPLICATION	35
3.1	Exemples	35
3.1.1	Le schéma explicite :	36
3.1.2	Le schéma implicite :	38
3.2	Exemples Matlab	41
3.2.1	Exemple 1	41
3.2.2	Exemple 2	44
3.2.3	Exemple 3	46
	Conclusion	50

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Comparaison entre les méthodes: D.F et E.F 25

TABLE DES FIGURES

2.1	Schéma explicatif de la discrétisation.	27
2.2	Schéma illustrant le maillage de la discrétisation.	29
2.3	Représentation du schéma implicite à 3 points	31
3.1	Solution approchée par le schéma explicite	43
3.2	Solution approchée par le schéma implicite	46
3.3	Solution approchée par le schéma de Crank-Nicolson	49

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques et économiques. Parmi elles, les équations paraboliques occupent une place de choix, notamment dans l'étude des processus de diffusion, de conduction thermique et d'évolution temporelle.

L'étude des équations aux dérivées partielles remonte aux premiers siècles de l'analyse mathématique, mais c'est au XVIIIe siècle qu'elle a pris un véritable essor, notamment grâce aux travaux de grands scientifiques comme Fourier, qui a introduit les équations paraboliques dans l'analyse de la conduction thermique, ou encore Laplace, à travers ses études sur la gravitation et l'électricité.

Au fil du temps, les méthodes analytiques et numériques ont connu un développement remarquable, surtout avec l'avènement de l'informatique, permettant de traiter des problèmes complexes autrefois inaccessibles. Cette évolution a consolidé l'importance des approches numériques dans la résolution des EDP, en particulier les problèmes paraboliques.

Cependant, dans la plupart des cas réels, il est difficile, voire impossible, d'obtenir des solutions analytiques exactes à ces équations. D'où l'intérêt croissant pour les méthodes numériques, qui permettent

d'obtenir des approximations satisfaisantes de la solution, tout en garantissant une bonne précision et une stabilité du schéma utilisé.

Ce travail s'inscrit dans cette perspective. Il a pour objectif d'étudier numériquement certains problèmes paraboliques à travers différentes méthodes d'approximation, telles que les différences finies ou les éléments finis, en mettant l'accent sur leur mise en œuvre, leur précision et leur efficacité.

Ainsi, notre mémoire se compose de trois chapitres :

Chapitre 01: Dans ce chapitre, nous commençons par des généralités sur quelques définitions sur équations aux dérivées partielles (EDP) et Formulation Variationnelle, Ensuite, nous présentons les deux méthodes numériques (c'est-à-dire : Méthode de D.F et Méthode des éléments finis).

Chapitre 02: Dans ce chapitre, nous présenterons une étude plus approfondie de la méthode des différences finies appliquée aux équations paraboliques. L'accent sera mis sur l'analyse théorique de chaque schéma (explicite, implicite et Crank-Nicolson), en mettant en évidence leurs avantages, leurs inconvénients et leurs conditions de stabilité, sans entrer dans les applications numériques.

Chapitre 03: Ce chapitre est consacré aux applications. Dans la première partie, nous présenterons une application numérique de la méthode des différences finies pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur. Dans la seconde partie, nous utiliserons le logiciel MATLAB pour simuler et analyser les résultats obtenus.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

1.1 Les équations différentielles

Soit $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ une fonction de n variables réelles.

On dit que u est une variable dépendante et que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont des variables indépendantes.

Définition 1.1 *une équation dans laquelle apparaît (uniquement) une variable dépendante et ses dérivées par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes est appelée **équation différentielle**.*[\[6\]](#)

Exemple 1.1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x + u$$

est une équation différentielle à une variable x du premier ordre tq : $u = f(x)$

Exemple 1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{(\partial^2 u)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

est une équation différentielle à deux variables x, y tq : $u = f(x, y)$

1.2 Les types des équations différentielles**1.2.1 Equations différentielles ordinaires**

L'exemple le plus simple est lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable.

Alors cette relation est décrite simplement par ce qu'on appelle une EDO.[5]

Définition 1.2 Une EDO est une relation du type

$$F(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x), \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)) = 0 \quad (1.1)$$

Entre la variable $x \in \mathbb{R}$ (parfois $x \in I \subset \mathbb{R}$) et les dérivées de la fonction inconnue au point x tel que :

$$F : (x, y) \longrightarrow F(x, y)$$

$$\mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, n est le nombre de variables.

1.2.2 Equations aux dérivées partielles

La généralisation de la définition précédente en considérant des fonctions de plusieurs variables permet de construire le concept d'une EDP. Nous commençons par donner la définition d'une EDP du

1^{er} ordre.

Définition 1.3 Une équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre d'inconnue u de n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n est un équation de la forme :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (1.2)$$

Où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^n .

Pour une fonction de deux variables, la définition est donnée par :

Définition 1.4 La forme général d'une EDP d'ordre 2 est :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0 \quad (1.3)$$

Pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.3 L'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$, cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

(1.3) ci-dessus, il suffit de noter qu'elle est équivalente à l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2) = 0$$

1.2.3 Dimension et ordre d'une EDP

La dimension : D'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variable indépendantes dont dépend la fonction inconnue u .

L'ordre : D'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

Exemple 1.4 L'EDP de l'exemple (1.3) est de dimension 2 et l'ordre 2.

Exemple 1.5 L'EDP suivante : $x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = e^{x+y}$ est de dimension 2 et ordre 3.

1.2.4 Linéarité

une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si la fonction F est linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles.[10]

Exemple 1.6 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ "équation de Chaleur" est une équation aux dérivées partielles linéaire.

Exemple 1.7 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ "équation de la Place" est une équation aux dérivées partielles linéaire.

Exemple 1.8 $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0 \rightarrow$ c'est une EDP non linéaire.

1.2.5 Classement des EDP linéaires du 2^{eme} ordre :

La forme générale d'une équation différentielle partielle du 2^{eme} ordre est donnée par :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = G$$

où A, B, C, D, E, F, G sont des constantes réelles. Ce type d'équations se classé en trois catégories :

1. Equation elliptique : On dit qu'un équation différentielle partielles est elliptique si :

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Exemple 1.9 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

EDP elliptique car $B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$

2. Equation hyperbolique : On dit que l'EDP est hyperbolique si : $B^2 - 4AC > 0$.

Exemple 1.10 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

EDP hyperbolique car $B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)(2) = 8 > 0$

3. Equation parabolique : On dit que l'EDP est parabolique si : $B^2 - 4AC = 0$.

Exemple 1.11 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

EDP parabolique car $B^2 - 4AC = 4 - 4(1)(1) = 0$

1.2.6 conditions initiales et aux limites :

Définition 1.5 Les conditions initiales sont des conditions imposées aux équations différentielles.

Elles doivent être satisfaites dans la solution et définies au même point.

Exemple 1.12 Les deux conditions suivantes sont des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x_0) = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = b \end{cases}$$

Définition 1.6 Les conditions aux limites sont des conditions imposées aux équations différentielles.

Elles doivent être satisfaites dans la solution et définies aux bornes du domaine considéré.

Exemple 1.13 Les deux conditions suivantes sont des conditions aux limites, ou x_0 et x_1 sont les

bornes du domaine :

$$\begin{cases} u(x_0) = a \\ u(x_1) = b \end{cases}$$

1.2.7 Les problèmes aux limites

Définition 1.7 *Les problèmes aux limites sont un type de problèmes d'équation différentielles ou l'équation différentielle doit satisfaire à la fois des conditions initiales et des conditions aux limites à une valeur donnée de la variable indépendante. L'application de ces conditions restreint l'ensemble des solutions admissibles, qui doit alors vérifier ces contraintes tout en restant une fonction de la solution de l'équation différentielle.*

Exemple 1.14 *Problème :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4(u - x) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 & ; \quad u(1) = 2 \end{cases}$$

c'est une problème aux limites.

Conditions aux limites et problèmes bien posés

Trouver la solution qui satisfait un système d'EDP et les conditions aux limites (conditions initiales + conditions aux frontières) forme un problème bien posé si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- la solution existe.
- la solution est unique.
- la solution dépend continûment des données.

Noter que ce sont des questions difficiles de mathématiques. Ces questions restent valables lorsque l'on a discrétisé le problème : même si le problème continu est bien posé (ce qui est un pré-requis pour faire du numérique), le problème discret peut être mal posé : il faut que la procédure de discrétisation soit stable et fournisse une solution proche de la solution exacte (ce qui est un problème d'analyse numérique).

Exemple 1.15 *L'exemple (1.14) est un problème aux limites bien posé.*

Les types de conditions aux limites

1. Condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} u(x_0) = a \\ u(x_1) = b \end{cases}$$

2. Condition de Neumann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) = b \end{cases}$$

3. Condition de Robin : c'est un cas général englobant les deux conditions précédentes :

$$\begin{cases} \alpha u(x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = a \\ \delta u(x_1) + \sigma \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) = b \end{cases}$$

1.2.8 Quelques problèmes aux valeurs limites en une et deux dimensions :

1. Problème de Cauchy-Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ (x, t) \in]0; 1[\times]0; 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad ; u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

2. Problème de Poisson :

Il fait partie des problèmes elliptiques et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) & a < x < b \quad ; c < y < d \\ u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j), u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j) & j = \overline{0, m} \\ u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0), u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m) & i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

3. Problème de Chaleur :

Il représente un exemple d'équations paraboliques et s'écrit en une dimension sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = \gamma, \quad u(1, t) = \beta, \quad t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad , x \in [0, 1]. \end{cases}$$

1.3 Équation parabolique

L'équation parabolique (de la Chaleur) est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad / 0 < x < l; t > 0$$

qui satisfait les conditions suivantes :

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad , t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

1.4 Formulation variationnelle

On reformule le problème d'équations aux dérivées partielles sous la forme suivante, dite variationnelle :

$$\begin{cases} a(u, v) = \langle f, v \rangle_H & ; \forall v \in H. \\ u \in H. \end{cases}$$

où H est un espace de Hilbert bien choisi (par exemple parcequ'il y a existence et unicité de la solution dans cet espace), $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le produit scalaire sur H et a une forme bilinéaire sur H . Dans un tel cadre fonctionnel, la discrétisation consiste à remplacer H par un sous espace de dimension finie H_k construit par exemple à l'aide de fonction de base. [2]

éléments finis que l'on introduira plus loin :

$$\begin{cases} a(u_k, v_k) = \langle f, v_k \rangle_H & ; \forall v \in H_k. \\ u_k \in H_k. \end{cases}$$

1.4.1 Théorème de Lax-Miligram

Soit V un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ et de norme associée $\|\cdot\|_V$. on se propose de résoudre le problème suivant :

Trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait :

$$a(u, v) = L(v) \tag{1.4}$$

on impose les conditions suivantes :

1. L est une application définie sur V , à valeurs dans \mathbb{R} qui est linéaire et continue (i.e- il existe une

constante $c > 0$ telle que : pour tout $v \in V$: $|L(v)| \leq c\|v\|_V$.

2. a est une application définie sur $V \times V$, à valeur dans \mathbb{R} vérifiant : $a(u, v)$ soit bilinéaire et continue (i.e : il existe une constante $M > 0$ telle que : pour tout $(u, v) \in V^2$, $|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$) et coercive (i.e : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : pour tout $v \in V$, $|a(u, v)| \geq \alpha\|v\|_V^2$)[3]

Théorème 1.1 *Théorème de Lax-Miligram*

Soit V un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur V . Alors, il existe un unique élément u de V solution de problème variationnel (1.4).

1.4.2 Développement de Taylor

Soit une fonction $f(x)$ est dite définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$ [7]

1.5 Méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution des problèmes rencontrés par l'ingénieur, parmi ces méthodes, on a la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

Dans ce chapitre nous étudierons la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

1.5.1 Méthode des différences finies

1)-Principe de la méthode des différences finies

Le principe de la méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées par des différences appropriées. Pour ce faire, On approche les dérivées par une expression de différence sur un certain intervalle. Ainsi, la solution évolue d'un schéma à un autre. puis, la solution est reconstruite à partir d'un réseau de points qui contribuent à la formation d'un ensemble d'équations discrètes, résolues ensuite par différentes méthodes.

2)-Approximation de dérivées par des différences finies

Lorsqu'une fonction u et ses dérivées sont des fonctions bornées et régulières de x , alors selon le théorème de Taylor nous avons les développements, en amont (forward)

$$u(x + h) = u(x) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x) + \dots$$

et en aval (backward)

$$u(x - h) = u(x) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x) + \dots$$

leur somme est :

$$u(x + h) + u(x - h) = 2u(x) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + o(h^4)$$

Nous pouvons donc approcher

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \simeq \frac{1}{h^2} [u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)]$$

avec une erreur d'ordre h^2 , prenant la différence, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{1}{2h}[u(x+h) - u(x-h)]$$

avec une erreur d'ordre h^2 aussi, ce sont des approximations par des différences centrées, Nous pouvons également approcher par des différences avant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{1}{h}[u(x+h) - u(x)]$$

approximée par une différence arrière

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h)]$$

avec une erreur d'ordre h .

En suivant les mêmes étapes, nous pouvons déterminer les différences finies pour les deux variables x et y . Ainsi, les différences finies en deux dimensions pour la variable x sont données par :

Premières différences :

- Différence vers l'arrière :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \simeq \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}$$

- Différence vers l'avant :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \simeq \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \simeq \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h}$$

Deuxièmes différences :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \simeq \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}$$

La même méthode est utilisée pour calculer les différences finies par rapport à la variable y . [4]

1.5.2 Méthode des éléments finis**1)-Principe de la méthode des éléments finis**

Le principe de la méthode des éléments finis consiste en :

1. Subdivision : Diviser la zone étudiée en un certain nombre de sous-domaines géométrique simples.

Ces sous-domaines simples sont appelés éléments et les sommets des éléments, qui relient les éléments entre eux, sont appelés noeuds. On obtient ainsi un maillage d'éléments simples. Il est essentiel d'éviter l'utilisation d'éléments trop petits ou trop grands lors de la subdivision, même s'ils ont la même forme. Il faut également s'assurer que la subdivision ne génère pas d'éléments très fins ou disproportionnés.

2. Formulation Variationnelle : Transformer l'équation différentielle donnée en un problème variationnel. Comme expliqué précédemment.

3. Établissement du système matriciel : Reformuler le problème variationnel sous forme d'un système matriciel $A-U = B$ où A est une matrice connue, U est l'ensemble des solutions inconnues et B est un vecteur connu. Cette étape aboutit à un système d'équation linéaire.

4. Résolution : Résoudre le système d'équations précédent pour obtenir la solution approchée recherchée.

Exemple simple de dimension un

Soit $\Omega =]0, 1[$. Considérons le problème aux limites suivants :

Trouver u solution de ($f \in L^2(\Omega)$).

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1) Le problème variationnel est la forme :

$$\begin{cases} V = \{v \in H^1(\Omega), v(0) = v(1) = 0\} \\ A(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \\ L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{cases} \quad (1.5)$$

2) On se donne un ensemble de points et $x_i, i = 0, 1, \dots, N$ de $]0, 1[$ tels que :

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = 1$$

on considère un pas constant

$$x_i = ih \quad \forall i = 0, \dots, N \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N}$$

les points x_i sont aussi appelés les sommets (ou noeuds) du maillage.

3) on introduit l'espace variationnel discret V_h défini par :

$$V_h = \{v_h \in C^0([0, 1]), [x_j, x_{j+1}] \in \mathbb{R}; 0 \leq j \leq N - 1; v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1 *L'espace V_h est un sous-espace de V de dimension $N - 1$, et une base est formée des fonctions $\varphi^{(i)}$; $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ suivantes :*

$$\varphi^{(i)} \in V_h, \quad \varphi^{(i)}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les fonctions sont appelées fonctions chapeaux, et on a :

pour tout $v_h \in V_h$,

$$v_h = \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) \varphi^{(j)}(x) \quad , \forall x \in [0, 1]$$

Introduisons la fonction $\varphi^{(j)}$ suivante :

$$\varphi^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & , x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & , x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

4) le problème variationnel discret admet une solution unique et cette solution est de la forme :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(x_j) \varphi^{(j)}(x) \quad ; \forall x \in [0, 1]$$

Où le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes u_j est la solution du système linéaire $AU = B$ où

$$U = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N-1}$$

$$B = \left(\int_0^1 f(x) \varphi^{(i)}(x) dx \right)_{1 \leq i \leq N-1}$$

et

$$A = \left(\int_0^1 \varphi^{(j)}(x) \varphi^{(i)}(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq N-1}$$

La plus part des coefficients de A sont nuls. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i,i-1} = \int_0^1 \varphi^{(i)}(x) \varphi^{(i-1)}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h}$$

$$A_{i,i} = \int_0^1 (\varphi^{(i)}(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h}$$

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi^{(i+1)}(x) \varphi^{(i)}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \left(\frac{-1}{h} \right) dx = -\frac{1}{h}$$

Finalement :

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur b , il faut calculer l'intégrale

$$B = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi^{(i)}(x) dx \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq N-1$$

En pratique, on a recours à des formules d'intégration numérique (formule du point milieu, formule des Trapèzes, formule de Simpson).

formule des trapèzes :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (h(x_{i+1}) + h(x_i))$$

Par la formule du Trapèze, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi^{(i)}(x)dx &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i)\varphi^{(i)}(x_i) + f(x_{i-1})\varphi^{(i-1)}(x_{i-1})) \\ &= \frac{h}{2} f(x_i) \end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi^{(i)}(x)dx &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_{i+1})\varphi^{(i)}(x_{i+1}) + f(x_i)\varphi^{(i)}(x_i)) \\ &= \frac{h}{2} f(x_i) \end{aligned}$$

D'où $b = h(f(x_i))_{1 \leq i \leq N}$

1.5.3 Avantages et inconvénients des deux méthodes

Dans le tableau suivant nous comparons les avantages et les inconvénients entre la méthode des différences finies et méthode des éléments finis : [7]

	Avantages	Inconvénients
Méthode de D.F	1) Méthode simple. 2) Rapidité et performance des algorithmes. 3) Facilité de monter en ordre. 4) Grand nombre d'EDP approchable.	1) Forte régularité des solutions nécessaires. 2) souplesse de maillage. 3) Condition de type Neumann difficiles à gérer.
Méthode de E.F	1) Existence d'une solution faible. 2) Maillage robuste et souple.	1) Coût de calcul très important. 2) EDP non-linéaire mal gérés.

Tab. 1.1: Comparaison entre les méthodes : D.F et E.F

CHAPITRE 2

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES SUR LES PROBLÈMES PARABOLIQUES

La méthode des différences finies est très utilisée pour résoudre des problèmes paraboliques notamment l'équation de la chaleur.

2.1 Problèmes paraboliques

Nous considérons le problème parabolique de **l'équation de la chaleur** en une dimension d'espace avec conditions aux limites de type Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , x \in [0, 1] \quad t \in [0, T]. \\ u(0, t) = \delta \quad , u(1, t) = \beta & , t \in [0, T]. \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.1)$$

soit $\alpha > 0$, β et δ des constantes données.

Où $u(x, t)$ représente la température au point x au temps t et u_0 une fonction régulière donnée. Si $u_0 \in C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ alors il existe une fonction qui vérifie (2.1)

Pour calculer une solution approchée de (2.1), on se donne une discrétisation en temps et en espace.

En prenant M et N comme deux nombres naturels non nuls, on divise les intervalles $[0, 1]$ et $[0, T]$ en sous-intervalles de longueur égale.

On définit :

- h comme le pas de discrétisation de l'espace, donné par : $h = \frac{1}{M+1}$
- k comme le pas de discrétisation du temps, donné par : $k = \frac{T}{N+1}$

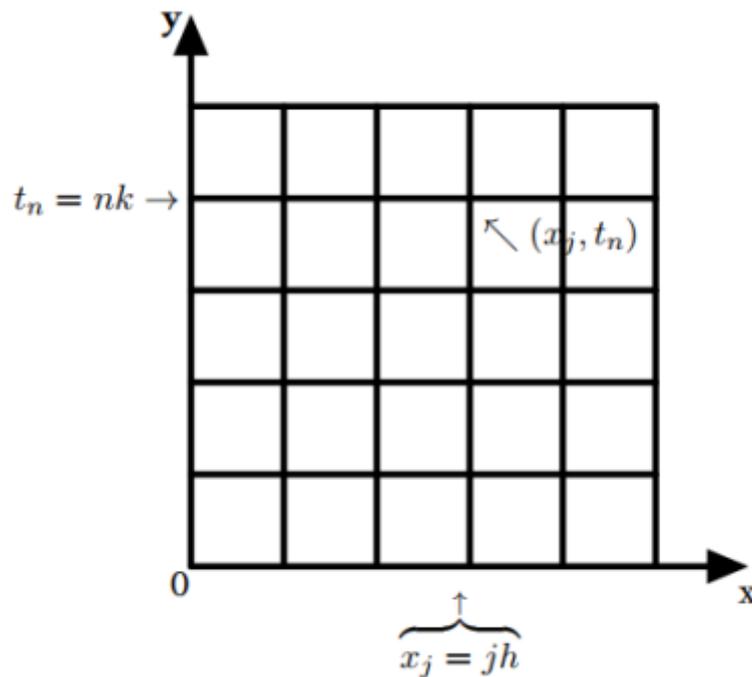


Fig. 2.1: Schéma explicatif de la discrétisation.

On obtient :

$$\begin{cases} x_i = ih & , i = 0, 1, \dots, M+1. \\ t_j = jk & , j = 0, 1, \dots, N+1. \end{cases}$$

Nous noterons la fonction u au point (x_i, t_j) par $u_{i,j}$.

La solution du problème discret peut généralement être obtenue de trois schémas :

2.2 Discrétisation par Euler explicite en temps

On prend les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \end{cases}$$

On obtient le schéma suivant :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

D'où :

$$\alpha \frac{k}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = u_{i,j+1} - u_{i,j}$$

Ce qui donne :

$$\alpha \frac{k}{h^2} u_{i+1,j} - 2\alpha \frac{k}{h^2} u_{i,j} + \alpha \frac{k}{h^2} u_{i-1,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j}$$

En posant : $\lambda = \alpha \frac{k}{h^2}$, l'équation devient :

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j} \\ 1 \leq i \leq M \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \\ 1 \leq i \leq M \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N \end{cases}$$

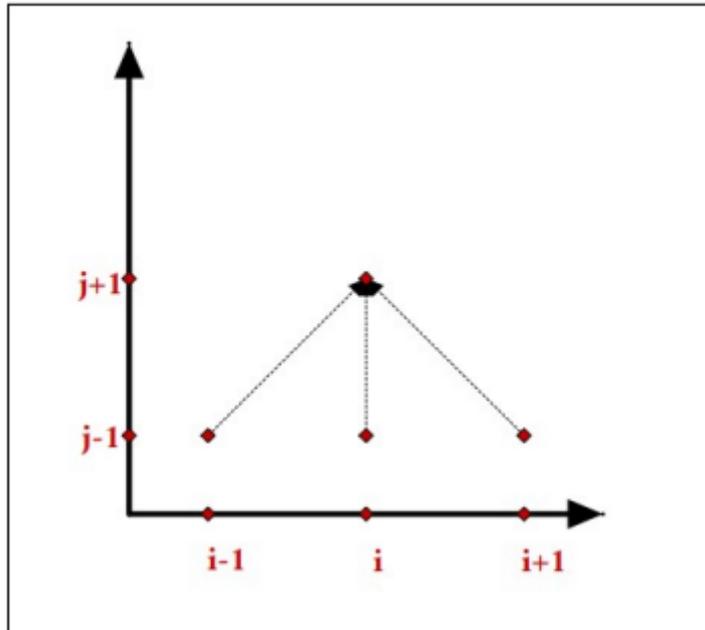


Fig. 2.2: Schéma illustrant le maillage de la discrétisation.

Nous pouvons étendre en cette équation en un système d'équations :

$$\begin{cases} u_{1,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{1,j} + \lambda(u_{2,j} + u_{0,j}) \\ u_{2,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{2,j} + \lambda(u_{3,j} + u_{1,j}) \\ \vdots \\ u_{M,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{M,j} + \lambda(u_{M+1,j} + u_{M-1,j}) \end{cases}$$

donc, la forme matricielle de ce schéma est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{M,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j+1} - \lambda u_{0,j} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{M,j+1} - \lambda u_{M+1,j} \end{pmatrix}$$

2.3 Discrétisation par schéma implicite à 3 points

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \end{cases} \quad (2.2)$$

En remplaçant les dérivées par leurs expressions discrètes dans le problème (2.1), on obtient :

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \alpha \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

D'où :

$$\alpha \frac{k}{h^2} u_{i+1,j} - 2\alpha \frac{k}{h^2} u_{i,j} + \alpha \frac{k}{h^2} u_{i-1,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{k}{h^2}$, on obtient l'équation sous la forme :

$$u_{i,j-1} = -\lambda u_{i-1,j} + (1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} \quad , (i = 1, \dots, M) \wedge (j = 1, \dots, N)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{i,j-1} = (1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \\ 1 \leq i \leq M \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N \end{cases}$$

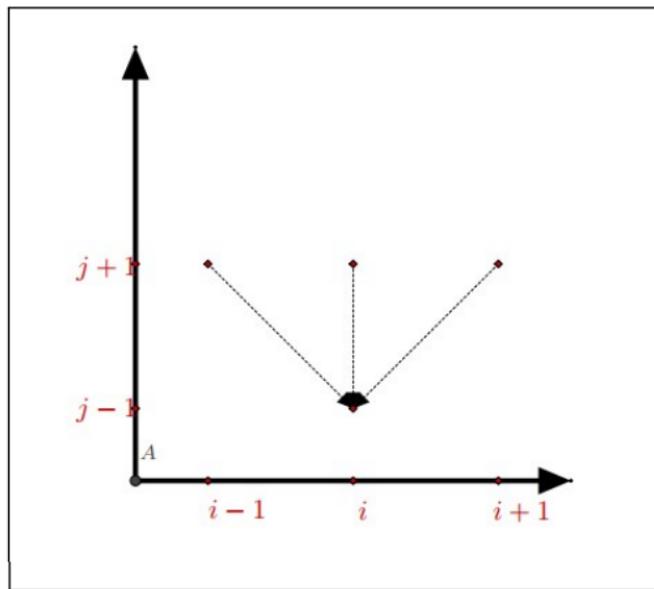


Fig. 2.3: Représentation du schéma implicite à 3 points

En peut étendre cette équation en un système d'équations comme suit :

$$\begin{cases} u_{1,j-1} = (1 + 2\lambda)u_{1,j} - \lambda(u_{0,j} + u_{2,j}) \\ u_{2,j-1} = (1 + 2\lambda)u_{2,j} - \lambda(u_{1,j} + u_{3,j}) \\ \vdots \\ u_{M,j-1} = (1 + 2\lambda)u_{M,j} - \lambda(u_{M-1,j} + u_{M+1,j}) \end{cases}$$

La forme matricielle du schéma :

$$\begin{pmatrix}
 (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) &
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_{1,j} \\
 u_{2,j} \\
 u_{3,j} \\
 \vdots \\
 u_{M,j}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 u_{1,j-1} + \lambda u_{0,j} \\
 u_{2,j-1} \\
 u_{3,j-1} \\
 \vdots \\
 u_{M,j-1} + \lambda u_{M+1,j}
 \end{pmatrix}$$

2.4 Consistance-Convergence des schéma

On pose : $\alpha = 1$

1. Soit $\overline{u_i^j} = u(x_i, t_j)$ la valeur exacte de la solution en x_i et en t_j , l'erreur de consistance R_i^j en (x_i, t_j) est la somme des erreurs de consistance en temps et en espace

$$R_i^j = \widetilde{R}_i^j + \widehat{R}_i^j$$

avec

(Erreur de consistance en temps) :

$$\widetilde{R}_i^j = \frac{\overline{u_i^{j+1}} - \overline{u_i^j}}{k} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$$

(Erreur de consistance en espace) :

$$\widehat{R}_i^j = \frac{\overline{u_{i-1}^j} - u_{i+1}^j - 2\overline{u_i^j}}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)$$

Supposons que la solution u de problème (2.1) est de C^2 par rapport à la variable t de C^4 par rapport à la variable x . Les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ indépendant que de u tel que

$$|R_i^j| \leq C(k + h^2)$$

2. Sous les conditions $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ le schéma explicite converge en $\|\cdot\|_\infty$, donc il est nécessaire de choisir h petit, ce qui impose un choix de k plus petit.
3. Soit e^j l'erreur de convergence définie par

$$e_i^j = u(x_i, t_j) - u_i^j \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N.$$

Si $\|e^0\|_\infty \rightarrow 0$, quand $h, k \rightarrow 0$, le schéma implicite est convergent.

2.5 Schéma de Crank-Nicholson (Schéma semi implicite)

On pose : $\alpha = 1$

Le schéma de Crank-Nicholson est une combinaison des schémas explicite et implicite, par sommation en faisant la moyenne des 2 égalités pour $i = 1, \dots, N$ et $j = 0, \dots, M$, in obtient :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{2h^2} - \frac{u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}}{2h^2} = 0$$

Soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{2k}{h^2}(2u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j) - \frac{2k}{h^2}(2u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j+1}) = 0, \\ \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad j = 0, \dots, M \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \quad \forall j = 0, \dots, M + 1 \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, N + 1 \end{array} \right.$$

- Le schéma numérique de Crank-Nicholson est consistant d'ordre 2 en temps et espace.
- Le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable et il est très largement utilisé.

CHAPITRE 3

APPLICATION

3.1 Exemples

Exemple 3.1 Dans cette exemple, nous allons trouver une solution approche du problème (3.1) pour

$h = k = \frac{1}{4}$ en utilisant les deux schémas.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , t \in [0, 1]. \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad , x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sachant que $h = k = \frac{1}{4}$ et $\alpha = 1$, on obtient :

$$\lambda = 1 \times \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

Nous trouvons les conditions suivantes $u_0^j = u_4^j = 0, j = \overline{0,4}$

3.1.1 Le schéma explicite :

D'après la formule :

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}$$

Pour déterminer $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}$ on fixe $j = 0$:

$$\begin{cases} 4u_{2,0} - 7u_{1,0} + 4u_{0,0} = u_{1,1} \\ 4u_{3,0} - 7u_{2,0} + 4u_{1,0} = u_{2,1} \\ 4u_{4,0} - 7u_{3,0} + 4u_{2,0} = u_{3,1} \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.94974 \\ -1.3431 \\ -0.94974 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $u_{3,2}, u_{2,2}, u_{1,2}$, on fixe $j = 1$:

$$\begin{cases} 4u_{2,1} - 7u_{1,1} + 4u_{0,1} = u_{1,2} \\ 4u_{3,1} - 7u_{2,1} + 4u_{1,1} = u_{2,2} \\ 4u_{4,1} - 7u_{3,1} + 4u_{2,1} = u_{3,2} \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2755 \\ 1.8041 \\ 1.2755 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $u_{1,3}, u_{2,3}, u_{3,3}$, on fixe $j = 2$:

$$\begin{cases} 4u_{2,2} - 7u_{1,2} + 4u_{0,2} = u_{1,3} \\ 4u_{3,2} - 7u_{2,2} + 4u_{1,2} = u_{2,3} \\ 4u_{4,2} - 7u_{3,2} + 4u_{2,2} = u_{3,3} \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{pmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.714 \\ 2.4242 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $u_{1,4}, u_{2,4}, u_{3,4}$, on fixe $j = 3$:

$$\begin{cases} 4u_{2,3} - 7u_{1,3} + 4u_{0,3} = u_{1,4} \\ 4u_{3,3} - 7u_{2,3} + 4u_{1,3} = u_{2,4} \\ 4u_{4,3} - 7u_{3,3} + 4u_{2,3} = u_{3,4} \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{pmatrix} u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.714 \\ 2.4242 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Le schéma implicite :

D'après la formule :

$$u_{i,j-1} = -\lambda u_{i-1,j} + (1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j}$$

En fixant $j = 1$, nous avons les valeurs de $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{3,1}$:

$$\begin{cases} -4u_{0,1} + 9u_{1,1} - 4u_{2,1} = u_{1,0} \\ -4u_{1,1} + 9u_{2,1} - 4u_{3,1} = u_{2,0} \\ -4u_{2,1} + 9u_{3,1} - 4u_{4,1} = u_{3,0} \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} -4u_{0,1} + 9u_{1,1} - 4u_{2,1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -4u_{1,1} + 9u_{2,1} - 4u_{3,1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -4u_{2,1} + 9u_{3,1} - 4u_{4,1} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système d'équations revient à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21151 \\ 0.29912 \\ 0.21151 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $u_{1,2}$, $u_{2,2}$, $u_{3,2}$, on fixe $j = 1$

$$\begin{cases} -4u_{0,2} + 9u_{1,2} - 4u_{2,2} = u_{1,1} \\ -4u_{1,2} + 9u_{2,2} - 4u_{3,2} = u_{2,1} \\ -4u_{2,2} + 9u_{3,2} - 4u_{4,2} = u_{3,1} \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} -4u_{0,2} + 9u_{1,2} - 4u_{2,2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -4u_{1,2} + 9u_{2,2} - 4u_{3,2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -4u_{2,2} + 9u_{3,2} - 4u_{4,2} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système d'équations revient à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

D'ou :

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.063267 \\ 0.089473 \\ 0.063267 \end{pmatrix}$$

• on fixe j à 2:

$$\begin{pmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.018924 \\ 0.26763 \\ 0.018924 \end{pmatrix}$$

• on fixe j à 3:

$$\begin{pmatrix} u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0056606 \\ 0.0080053 \\ 0.0056606 \end{pmatrix}$$

3.2 Exemples Matlab

3.2.1 Exemple 1

Considérons le problème unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[\end{cases} \quad (3.2)$$

En prenant un pas de discrétisation constant $h = \frac{1}{n+1}$ en espace et $\Delta t = \frac{T}{m}$ en temps. **Donnons le schéma de discrétisation du problème (3.2)**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) = 0$$

D'où le schéma s'écrit :

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n, \quad \text{avec } 1 \leq i \leq N \quad \text{et } 0 \leq n \leq m - 1$$

Calculons cette solution pour $n = 9$; $T = 20$; $m = 100$ et $u_0(x) = 2x$ [1]

Script 1:

```
1     function [u]=chaleur1(N,m,u0,T)
2     N=9; m=100; T=20;
3     dt=T/m;
4     h=1/(N+1);
5     mu=dt/h^2;
6     ah=(1-2*mu)*eye(N)+mu*diag(ones(N-1,1),-1)+mu*diag(ones(N-1,1),1);
7     for i=1:N
8         x(i)=i*h
9         u0=initial(x);
10        u(i)=u0(i);
11    end
12    u=u';
13    for j=1:m
14        u=ah*u;
15        plot(x,u','--');
16        mov(j)=getframe;
17    end
18    hold on
19    legend('solution approchée');
20    title('Solution approchée par le schéma explicite');
21    end
```

Script 2:

```
1 function y=initial(x)
2 y=2.*x;
3 return
```

D'où la solution u est :

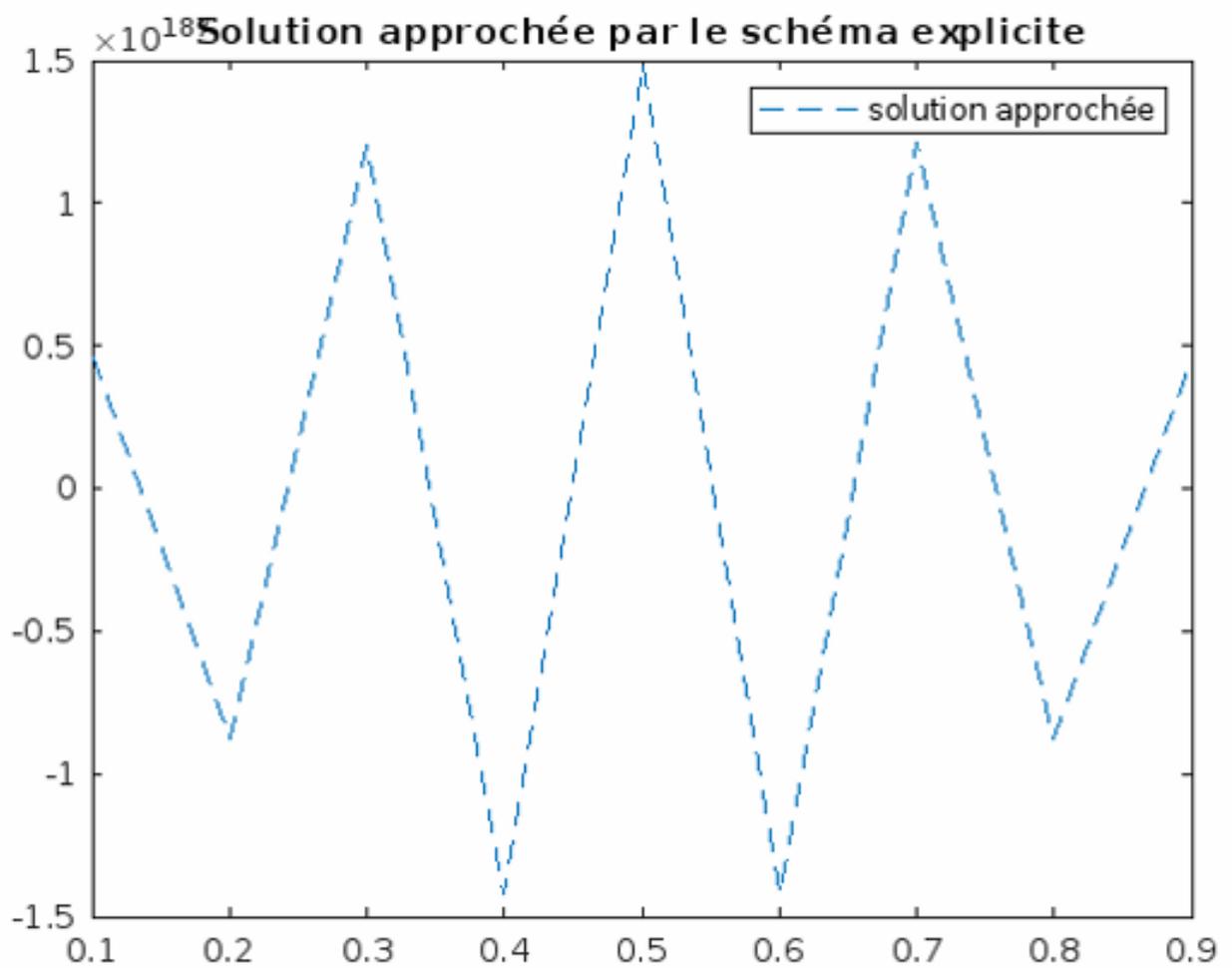


Fig. 3.1: Solution approchée par le schéma explicite

3.2.2 Exemple 2

Considérons l'équation de Chaleur suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[\end{cases} \quad (3.3)$$

Ecrivons une fonction Matlab diff-imp qui prend pour arguments n, m, T, u_0 qui **retourne la solution approchée du problème (3.3) ainsi que son graphique**

On écrit le schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) = 0$$

D'où le schéma s'écrit :

$$u_i^n = -\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1}, \quad \text{avec } 1 \leq i \leq N \quad \text{et } 0 \leq n \leq m - 1$$

Calculer la solution approchée u_h ainsi que l'erreur pour $n = 10; m = 37;$

$T = 1; u_0(x) = \sin(x)$ [1]

Script 1:

```

1  function [u]=diff_imp(N,m,u0,T)
2  dt=T/m;
3  h=1/N;
4  mu=dt/(h^2);
5  A=(1+2*mu)*eye(N-1)-mu*diag(ones(N-2,1),-1)-mu*diag(ones(N-2,1),1);

```

```
6
7 x = (1:N-1) * h;
8     u0 = initial3(x);
9     u = u0(:);
10 for j=1:m
11     u = A \ u;
12     plot(x,u,'--');
13     drawnow;
14
15 end
16 hold on
17 legend('solution approchée');
18 title('solution approchée par le schéma implicite');
19 return
```

Script 2:

```
1 function [y] = initial3(x)
2     y = sin(pi.*x);
3 end
```

D'où la solution u est :

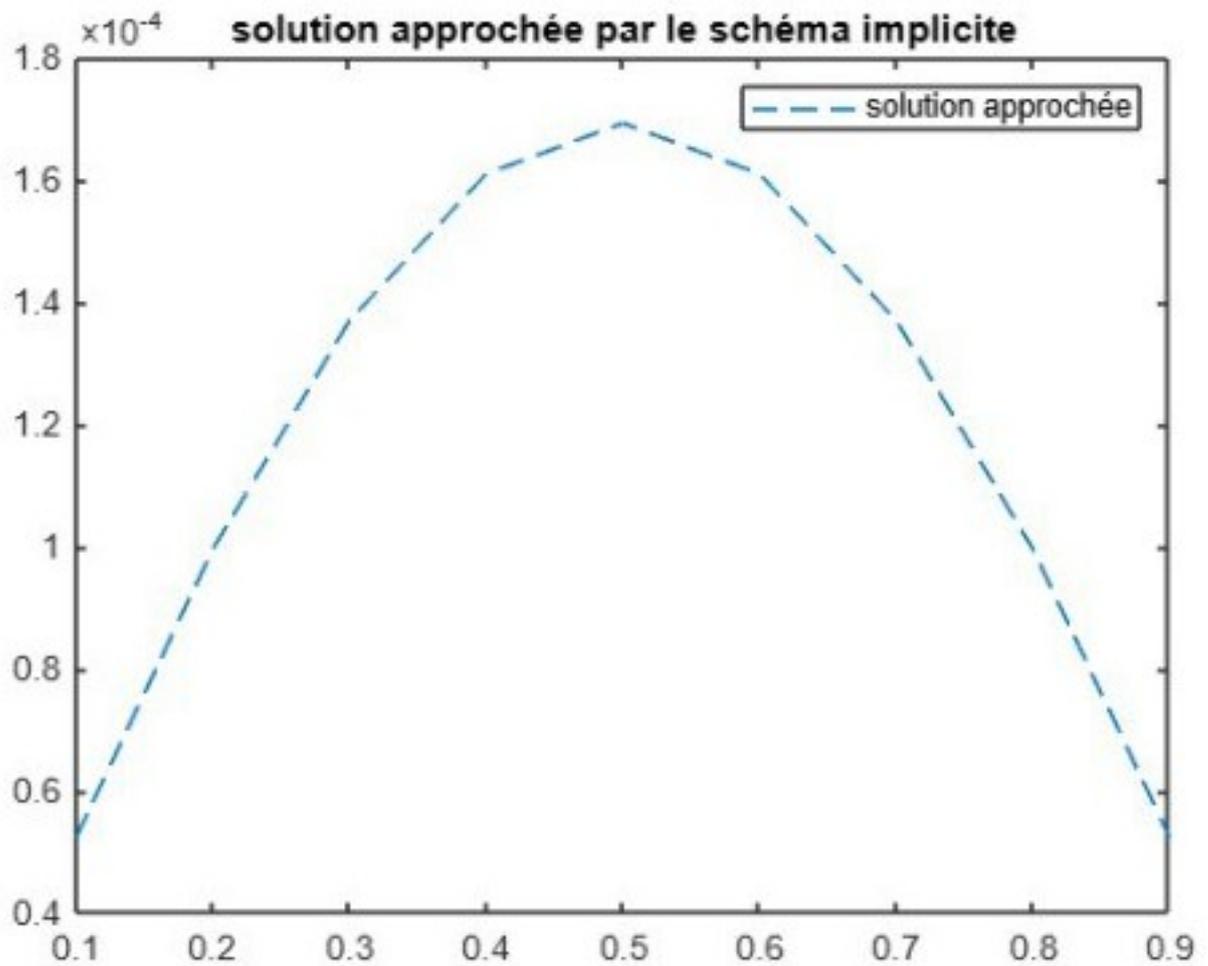


Fig. 3.2: Solution approchée par le schéma implicite

3.2.3 Exemple 3

Considérons l'équation de Chaleur suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[\end{cases} \quad (3.4)$$

En prenant un pas de discrétisation constant $h = \frac{1}{n+1}$ en espace et $\Delta t = \frac{T}{m}$ en temps. **Donner le schéma de discrétisation du problème (3.4) en utilisant le schéma de Crank-Nicolson**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + \lambda)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\lambda u_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}\lambda u_{i-1}^n + (1 - \lambda)u_i^n + \frac{1}{2}\lambda u_{i+1}^n$$

Ecrire une fonction Matlab cranni d'arguments $n; m; T; u_0$ qui retourne la solution approchée de (3.4) ainsi que son graphe.[1]

Script 1:

```

1  function [u] = cran_nicol(n, m, u0, T)
2  n=9; m=9; T=0.2;
3  dt=T/m;
4  h = 1/n;
5  mu = dt/(h^2);
6  e=ones(n-1,1);
7  aa=(1-mu)*eye(n-1)+(mu/2)*diag(ones(n-2,1),-1)
8  +(mu/2)*diag(ones(n-2,1),1);
9  bb=(1+mu)*eye(n-1)-(mu/2)*diag(ones(n-2,1),-1)
10 -(mu/2)*diag(ones(n-2,1),1);
11
12 for i=1:n-1
13     x(i)=i*h;
14     u0=initial2(x)
15     u(i)=u0(i);

```

```
16 end
17 u=u';
18 for j=1:m
19     b=aa*u;
20     u=bb\b;
21 end
22 u = [0, u', 0];
23 x = [0, x, 1];
24 plot(x,u, 'b');
25 hold on;
26 legend('sol Crank-Nicol');
27 title('Solution approchée par le schéma de Crank-Nicolson');
28 end
```

Script 2:

```
1 function y = initial2(x)
2 if x>=0 & x<=1/2
3     y=2.*x;
4 else x>=1/2 & x<=1
5     y=2-2.*x;
6 end
7 return
```

D'où la solution u est :

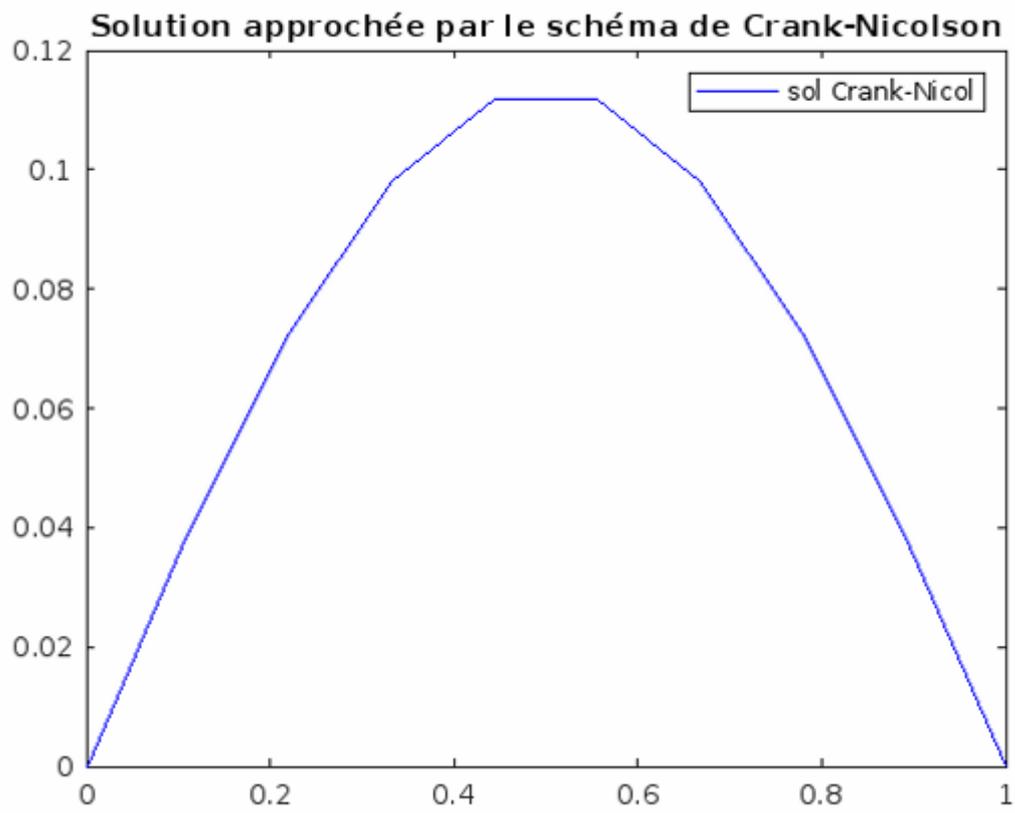


Fig. 3.3: Solution approchée par le schéma de Crank-Nicolson

CONCLUSION

Ce mémoire a porté sur l'étude numérique des équations aux dérivées partielles de type parabolique, avec une attention particulière accordée à l'équation de la chaleur, en tant que modèle mathématique couramment utilisé en modélisation physique. À cette fin, nous avons adopté la méthode des différences finies, reconnue pour son efficacité et sa simplicité dans le traitement de ce type de problèmes.

Trois approches numériques ont été analysées : le schéma explicite, le schéma implicite, et le schéma de Crank-Nicolson, qui combine les avantages des deux premiers. L'analyse théorique, étayée par des simulations numériques réalisées sous MATLAB, a permis de démontrer que le schéma explicite est simple à mettre en œuvre mais soumis à une condition de stabilité stricte. Le schéma implicite, quant à lui, offre une stabilité inconditionnelle au prix d'un coût computationnel plus élevé. Le schéma de Crank-Nicolson s'est révélé être un compromis optimal entre précision et stabilité, ce qui en fait un choix privilégié dans de nombreuses applications pratiques.

La réalisation de ce travail n'a pas été sans obstacles. Le temps limité en raison de mes engagements professionnels en tant qu'enseignante au cycle moyen, ainsi que ma maîtrise initiale limitée de l'environnement MATLAB, ont constitué de véritables défis. Ces contraintes ont toutefois été un moteur

pour approfondir mes recherches, renforcer mes compétences et atteindre les objectifs fixés.

Ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche prometteuses, parmi lesquelles :

L'extension des modèles étudiés aux milieux multidimensionnels.

L'application des schémas à des équations non linéaires.

La comparaison avec d'autres méthodes numériques telles que les éléments finis ou les méthodes spectrales.

L'intégration d'une analyse d'erreur numérique plus détaillée pour évaluer la performance des schémas.

L'exploration de langages de programmation alternatifs comme Python, pour améliorer l'efficacité et la rapidité des simulations.

En définitive, si ce travail a pu aboutir, c'est par la grâce de Dieu. Et si des lacunes subsistent, elles relèvent de notre nature humaine. Louange à Dieu pour l'accomplissement de cette œuvre, et que Ses bénédictions accompagnent nos futures démarches scientifiques.

REFÉRENCES

- [1] Djedaidi, N. (2020). Master 2 analyse Mathématique et application. Université d'Alger 1 Benyoucef Benkhada.
- [2] Herbin, R. (2011). *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Engineering School, Marseille, France.
- [3] Kaci, F. (2022). Cours Master 1 : Chapitre 3 – *Formulation variationnelle aux problèmes aux limites* [Support de cours]. Université de Biskra, Algérie.
- [4] Khelil, N. (2012). *Approximation numérique des équations différentielles ordinaires et partielles* [Mémoire de cours]. Université de Biskra, Algérie.
- [5] Kelleche, A. (2020). *Équations de la physique mathématique* [Cours]. Université Djilali Bounaama, Khemis Miliana, Algérie.
- [6] Lefebvre, M. (2016). *Équations différentielles* (2e éd. revue et augmentée). Les Presses de l'Université de Montréal.
- [7] Lebbar, N. (2021). *Quelques études numériques sur les problèmes hyperboliques* [Mémoire de Master]. Université de Biskra, Algérie.

-
- [8] Lesfari-A. (2015). *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles : cours et exercices corrigés*. Éditions Ellipses.
- [9] Mehri-A. (2019). Cours Master 1 : *Méthodes des différences finies pour les équations aux dérivées partielles* [Cours]. Université de Guelma, Algérie.
- [10] Trai, Z., & Abdeli, T. T. (2023). [Méthode des éléments finis pour la résolution de certains problèmes elliptiques] [Mémoire de Master]. École Normale Supérieure de Bou Saâda, Algérie.

المخلص

في هذه المذكرة، تناولنا بعض الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع شبه-القطع المكافئ، من خلال تطبيق طريقة الفروقات المنتهية على معادلة الحرارة، التي تُعد نموذجاً رياضياً أساسياً في الفيزياء والهندسة. شمل الجانب النظري بناء ثلاثة أنواع من المخططات العددية: المخطط الصريح، والمخطط الضمني، ومخطط كرانك-نيكلسون.

أما الجانب التطبيقي، فقد تم تنفيذه عبر برمجة الخوارزميات باستخدام برنامج MATLAB

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié des méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles paraboliques, à travers l'application de la méthode des différences finies à l'équation de la chaleur, un modèle fondamental en physique et en ingénierie.

La partie théorique a couvert trois schémas numériques : explicite, implicite et Crank-Nicholson.

La partie pratique a consisté en l'implémentation des algorithmes à l'aide du logiciel MATLAB.

Abstract

In this thesis, we studied numerical methods for solving parabolic partial differential equations by applying the finite difference method to the heat equation, a fundamental model in physics and engineering.

The theoretical part covered three numerical schemes : explicit, implicit, and Crank-Nicholson.

The practical part involved implementing the algorithms using MATLAB software

Mots-clés / Keywords :

Différences finies, équation parabolique, équation de la chaleur, schéma explicite, schéma implicite, schéma de Crank-Nicholson, MATLAB.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Fin du mémoire

Merci pour votre attention et votre lecture.

Contact : teacher.basma.99@gmail.com



Année universitaire : 2024 -- 2025