République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

Mebarek BATTA

Titre :

Jeu différentiel stochastique à changement de régime

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Mansouri Badr eddine	UMKB	Président
Pr.	Tamer Lazhar	UMKB	Encadreur
Dr.	Berouis Nassima	UMKB	Examinatrice

03/06/2025

Dédicace

Je dédie ce humble travail À

*mon père , ma mère Allha yarhamah

* ma deuxieme mére aicha

* mes frères (abd elsalam, yassine , abassa alaha yarhamo)

** dalila, l'epouse de mon frére yassine*

** tous les proches*

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier.....

avant tout ALLAH tout puissant, de m'avoir guidé toutes les années d'etudie et m'avoir donné la volonté, la patience et le courage pour terminer ce travail.

toute oeuvre et quelque soit sa nature est résulta evident d'un long parcours de labeur bien réfléchi ambitieux,encadré, dirige, orienté dont l'unique

objectif est d'apporter un plus positif au domaine destine, telle celui-ci l'affirm aussi ma révérence mon plus profond respect et gratitude à :

d'abord à TAMER Lazhar pour avoir accepter de diriger ce travail tout le long de sa realisationje tiens a remercier egalement les nombres de jurys : Mansouri Badr eddine et Berouis Nassima et je remercie pour

les conseils et m'aide dans travail

pour avoir accpté d'etudier et d'evluer ce travail

mes remerciements aussi pour yassine bouzidi, djamal abd allah, Hekime karhi et les etudiants de la

Département de mathématique

je remercie aussi tous ceux qui ont aidé de prés ou de loin a realisation de ce travail

je dis tout simplemnt merci

Table des matières

Introduction

L'étude des jeux différentiels stochastiques à somme nulle à deux joueurs s'est rapidement développée depuis les travaux pionniers de Fleming et Souganidis [2]. Dans cet article, les auteurs ont démontré que les fonctions de valeur inférieure et supérieure satisfont le principe de la programmation dynamique et sont respectivement les solutions de viscosité uniques des équations aux dérivées partielles de Bellman–Isaacs associées. Dans le cas où la condition d'Isaacs est satisfaite, les fonctions de valeur inférieure et supérieure coïncident, ce qui implique que le jeu admet une valeur.

À la suite de ce travail, les jeux différentiels stochastiques à somme nulle à deux joueurs ont été étudiés dans divers contextes. Par exemple, les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduites dans l'étude de ces jeux par Hamadène et Lepeltier [3], et les jeux avec sauts ont été traités par Biswas [1]. Ces dernières années, les jeux différentiels stochastiques à changement de régime ont suscité un intérêt croissant, comme en témoignent les travaux de Song et al. [10], Lv [6], Li et Tang [5], Menoukeu-Pamen et Momeya [8], et Savku [9].

Ce type de système comprend deux composantes : une composante de diffusion continue, qui décrit l'évolution dynamique d'un processus d'état, et une composante discrète, qui modélise les changements aléatoires de l'environnement. La dynamique du processus d'état est représentée par une équation différentielle stochastique, tandis que le changement de régime est modélisé par une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans un espace d'états fini. Dans la littérature existante sur les jeux différentiels stochastiques à changement de régime, les chaînes de Markov sont généralement supposées indépendantes des processus de diffusion.

Dans ce mémoire, nous considérons un jeu différentiel stochastique à somme nulle à deux joueurs, avec changement de régime contrôlé. Contrairement aux modèles classiques à changement de régime, la chaîne de Markov que nous considérons ici dépend également du processus d'état. Autrement dit, la chaîne de Markov et le processus d'état sont deux processus stochastiques entièrement couplés.

Ces deux types de contrôles représentent deux mécanismes distincts. Un des contrôleurs, joueur relativement faible, peut influencer le processus d'état en agissant sur sa moyenne et sa volatilité, dans le but de maximiser la fonction de gain. L'autre contrôleur, au contraire, peut influencer le choix du régime du processus d'état pour minimiser cette fonction de gain.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons un rappel sur le calcul stochastique. Ensuite, nous formulons notre problème de jeu différentiel stochastique à changement de régime et fournissons quelques estimations utiles qui nous permettent de démontrer la continuité des fonctions de valeur inférieure et supérieure. Nous présentons ensuite les équations de programmation dynamique associées. Dans la dernière section, nous montrons que les fonctions de valeur inférieure et supérieure sont les solutions de viscosité uniques des équations de Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs correspondantes.

Chapitre 1

Rappel sur processus stochastique

Le but de ce chapitre est de donner des définitions importantes et fondamentales, le contenu de ce chapitre est principalement basé sur la référence [4].

1.1 Processus stochastique et filtration

Définition 1.1.1 (processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$ et on considère que le processus est indexé par le temps $t \in T$.Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).Un processus dépend de deux paramétres: $X_t(w)$ dépendde t (en général le temps) et de l'aléatoire $w \in \Omega$:*

1. *Pour $t \in T$ fixé, $w \in \Omega \to X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;*
2. *Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \in T \to X_t(w)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 (Égalités de processus) *Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, ..., t_p \in T$,*

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_p})$$

On écrira $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$. On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$. Deux processus X et Y sont dits indistinguables s'il existe $N \in \mathcal{F}$ négligeable tels que, pour tout $w \notin N$, on a $X_t(w) = Y_t(w)$ pour tout , on écrit: $\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall t \in T\ ) = 1$.

Proposition 1.1.1 *indistinguable $\Rightarrow$ modification $\Rightarrow$ même lois fini-dimensionnelles.*

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$. On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$, on parle d'hypothèses habituelles si :*

1. Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$,
2. La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{t<s} \mathcal{F}_s$.

Définition 1.1.4 (processus adapté) *Un processus stochastique* $X = (X_t\ ,t \geq 0)$ *est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.5 (processus continu) *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \longrightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Définition 1.1.6 (processus càdlàg(resp. càglàd)) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même défnition pour càglad.*

1.2 Martingale

1.2.1 Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$) et la tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.2.1 (Martingale) *Une suite de v.a.r.* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale si :*

1. X_n *est intégrable,* $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable,* $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$), et la tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.2.2 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0,\infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si:*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t.
2. $E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$ $,\forall s \leq t$.

1.3 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \delta(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.3.1 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3.2 (Processus de Markov) *Soit X un processus et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique. On dit que le processus est de Markov si, pour tout t, pour toute variable bornée $Y \in \mathcal{F}_\infty$ l'égalité :*

$$E(Y \circ \theta_t / \mathcal{F}_t) = E(Y \circ \theta_t / X_t),$$

où θ est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par :

$$X_u \circ \theta_s = X_{u+s}.$$

Essayons une autre définition. Pour tout n, pour toute fonction bornée F définie sur $\mathbb{R}^n$, pour tous $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n})/\mathcal{F}_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n})/ X_s).$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f borélienne bornée

$$E(f (X_t)/\mathcal{F}_s) = E(f (X_t)/X_s), \forall t > s.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S avec $T > S$.

1.4 Mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.4.1 *Le processus $(B_t,t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :*

1. *$P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).*

2. *$\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$.*

3. *$\forall n,\ \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 ...... \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.*

1.5 Intégrale stochastique

1.5.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$,soit

$$\theta_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) \coprod_{]t_j, t_j+1]}(s).$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

On a

$$\begin{cases} E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0 \\ Var(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = E[\int_0^\infty \theta_s^2 d_s] \end{cases}$$

On obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)).$$

1.5.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que :

$$\|\theta\|^2 \overset{déf}{=} E\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

1.6 Processus d'Itô

Définition 1.6.1 *Un processus X est un processus d'Itô si :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ. On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

1.7 Lemme d'Itô

1.7.1 Première forme

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 d_s.$$

1.7.2 Fonction dépendant du temps

Théorème 1.7.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f\ (t, X_t) = \ f\ (0, X_0) + \int_0^t\ f'_t(s, X_s)d_s + \int_0^t\ f'_x(s, X_s)dXs + \frac{1}{2}\int_0^t\ f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 d_s.$$

1.7.3 Cas multidimensionnel

Théorème 1.7.2 *Soit $(X_i,\ i = 1, 2)$ deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = \ b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. On a

$$\begin{aligned} df\ (X_1(t), X_2(t)) \ &= f'_1(X_1(t), X_2(t))dX_1(t) + f'_2(X_1(t), X_2(t))dX_2(t) \\ &+ \tfrac{1}{2}(f''_{11}\sigma_1^2(t) + 2f''_{12}\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f''_{22}\sigma_2^2(t))(X_1(t), X_2(t))dt. \end{aligned}$$

où f'_i désigne la dérivée par rapport à $x_i, i = 1, 2$ et f''_{ij} la dérivée seconde par rapport à x_i, x_j.

1.8 Chaines de markov a temps continu

Définition 1.8.1 *Soit $E = \{a_0, a_1, a_3, ..., a_n\}$, ou plus généralement $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ un espace d'état discret. On considère un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,tel que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}} : \Omega \to E$. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov si, pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$,la propriété suivante est satisfaite*

$$P\left(X_{t+s} \in A/\mathcal{F}_s^X\right) = P\left(X_{t+s} \in A/X_s\right), \forall A \subset E,$$

où $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$ *est la filtration naturelle associée au processus jusqu'au temps* s.

Cela équivaut à la propriété suivante dite de Markov :$\Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{N}$, $\forall\ x_0, ..., x_n \in E$,$\forall\ 0 < t_1 < ..... < t_n$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n \ / \ X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, .., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n \ /X_{t_{n-1}} = x_{n-1})\end{aligned}$$

Hypothèse : dans la suite, nous supposerons que la chaîne est homogène, c'est-à-dire que la loi de transition ne dépend pas du temps. Autrement dit,

$$P\left(X_{t+s} = y/X_s = x\right) = P\left(X_t = y/X_0 = x\right) = P_{xy}\left(t\right)$$

où $P_{xy}(t)$ est la probabilité de transition de l'état x vers l'état y en un temps t. Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, la probabilité jointe d'un trajet donné peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n) = \\ &\mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1/X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{t_2} = x_2/X_{t_1} = x_1)....... \times \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n/X_{t_{n-1}} = x_{n-1})\end{aligned}$$

1.8.1 Semi-groupe

Définition 1.8.2 *Semi-groupe de transition d'une chaîne de Markov à temps continu : soit* $E = \{a_0, a_1, a_3, ..., a_n\}$ *un espace d'états fini (ou dénombrable), et soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une chaîne de Markov homogène à temps continu prenant ses valeurs dans* E. *On définit la matrice des probabilités de transition à l'instant* t, *notée* $P(t) = (P_{ij}(t))_{a_i a_j \in E}$, *par :*

$$P_{ij}(t) = P\left(X_t = a_j/X_0 = a_i\right), \forall a_i a_j \in E, t \in \mathbb{R}^+.$$

L'application $t \mapsto P$ forme un semi-groupe de matrices stochastiques, appelé semi-groupe de transition, si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1) Condition initiale (identité à l'origine) :

$$P(0) = I \; i.e \quad P_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

Ou δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

2) Propriété de semi-groupe (composition temporelle) :

$$P\left(s+t\right) = P\left(s\right).P\left(t\right), \forall t, s \in \mathbb{R}^{+}.$$

Autrement dit, le passage de la loi de X_s à celle de X_t pour $t \geq s$ est régi par :

$$\pi\left(t\right) = \pi\left(s\right) P\left(t-s\right)$$

où $\pi\left(t\right)$ désigne la loi de X_t, représentée comme un vecteur ligne :

$$\pi\left(t\right) = \left(P\left(X_t = a_0\right), ..., P\left(X_t = a_n\right)\right)$$

En particulier, si l'on connaît la loi initiale $\pi\left(0\right)$, alors :

$$\pi(t) = \; \pi(s)P(t-s) = \; \pi(0)P(t).$$

1.8.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.8.3 *Générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov à temps continu : Soit $\left(P(t)\right)_t$ le semi-groupe de transition d'une chaîne de Markov homogène à temps continu à valeurs dans un espace d'états discret $E = \left\{a_0, a_1, a_3, ..., a_n\right\}$. Le générateur infinitésimal (ou matrice de taux de transition) associé à $\left(P(t)\right)_t$ est la matrice*

$Q = (q_{ij})_{i,j}$ *définie par la limite :*

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}, \forall i, j \in \{0, ..., n\}$$

si cette limite existe.

En d'autres termes, le générateur Q est la dérivée en zéro du semi-groupe $P(t)$:

$$Q = \frac{dP(t)}{dt}|_{t=0}$$

Les coefficients de Q satisfont les propriétés suivantes :

1) $q_{ij} \geq 0$ pour tout $i \neq j$ (taux de saut de l'état a_i vers a_j).

2) $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ les lignes de Q ont une somme nulle.

3) Q est appelée matrice génératrice ou matrice de transition infinitésimale. Ce générateur gouverne l'évolution du semi-groupe via l'équation de Kolmogorov directe (ou avant) :

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\,Q,\;\; P(0) = I$$

et, de manière équivalente, l'équation de Kolmogorov rétrograde (ou arrière) :

$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t)$$

on core

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \alpha_i q_{ij} t + o(t) & \text{si } a_i \neq a_j \\ 1 - \alpha_i t + o(t) & \text{si } a_i = a_j \end{cases}$$

Chapitre 2

Problème de contrôle à deux joueurs

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet sur lequel une équation différentielle stochastique (EDS) de dimension d est considérée, définie comme suit :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \theta_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, \theta_t, u_t)dB_t, \; 0 \leq s \leq t \leq T, \\ X_s = x \in \mathbb{R}^d, \theta_s = i \in S, \end{cases} \tag{2.1}$$

où B est un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et θ une chaîne de Markov en temps continu prenant des valeurs dans un espace d'états fini S. On note $\{ \mathcal{F}_t^s$, $s \leq t \leq T$ $\}$ la filtration naturelle générée par $B.$ et $\theta.$ et augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$. Le processus u est $\mathcal{F}_t^s$-adapté et prenant ses valeurs dans un sous-ensemble compact U de $\mathbb{R}^k$, est appelé un processus admissible. On note U_s l'ensemble de toutes les processus admissibles. Les coefficients

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times S \times U \rightarrow \mathbb{R}^d, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times S \times U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d},$$

sont supposés satisfaire les conditions suivantes :

Hypothèse 1

(1) Pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^d \times S$, les fonctions $b(\cdot, x, i, \cdot)$ et $\sigma(\cdot, x, i, \cdot)$ sont continues.

(2) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 \leq s \leq T$, x, $y \in \mathbb{R}^d$, $i \in S$ et $u \in U$

$$|b(s, x, i, u) - b(s, y, i, u)| + \|\sigma(s, x, i, u) - \sigma(s, y, i, u)\| \leq C\, |x - y|\, .$$

A partie de l'hypothèse (1), nous pouvons obtenir les conditions de croissance linéaire de b et σ par rapport à x, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 \leq s \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$, $i \in S$ et $u \in U$.

$$|b(s, x, i, u)| + \sigma(s, x, i, u) \leq C(1 + |x|).$$

On suppose que la chaîne de Markov $\theta\cdot$ satisfait la condition de régularité, c'est-à-dire

$$\lim_{s \downarrow t} p(\theta_s = j/\theta_t = i) = \delta_{ij,}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$ ou 0 sinon. On note V_s l'ensemble de toutes les controles admissibles v, prenant des valeurs dans un autre sous-ensemble compact V de $\mathbb{R}^k$ et étant adaptées à $\{F_t^s\}_{t \geq s}$, de la chaîne de Markov $\theta\cdot$. Pour tout $v \in V_s$, les probabilités de transition infinitésimales de $\theta\cdot$ sont données par :

$$P(\theta_{s+\delta} = j/\theta_s = i, X_s = x, v_{s=v} = v) = \begin{cases} q_{ij}(x, v)\delta + \sigma(\delta),\ \ if\ \ j \neq i, \\ 1 + q_{ij}(x, v)\delta + \sigma(\delta),\ \ sinon, \end{cases} \tag{2.2}$$

où les taux de transition q_{ij} dépendant du contrôle et de l'état satisfons les conditions suivantes :

Hypothèse 2

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $v \in V$, $q_{ij}(x,v) \geq 0$, si $j \neq i$.

(2) Pour tout $i, j \in S$, les taux de transition $q_{ij}(\cdot,\cdot)$ sont bornés et continues.

(3) Pour tout $i \in S$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $v \in V$,

$$\sum_{j \in S} q_{ij(x,v)=0}$$

Dans la suite, nous désignons X_t et θ_t par $X_{t,u,v}^{s,x,i}$ et $\theta_{t,u,v}^{s,x,i}$, respectivement, lorsque nous voulons faire apparaître explicitement les conditions initiales et les contrôles. Considérons un ouvert borné non vide $D \subset \mathbb{R}^d$ de bord $\partial\, D$ et de fermeture $\overline{D}$. Nous définissons $\tau_{u,v}^{s,x,i}$ comme le premier instant de sortie de $X_{t,u,v}^{s,x,i}$ du domaine borné D (ou le premier instant d'atteinte du bord $\partial\, D$), c'est-à-dire

$$\tau_{u,v}^{s,x,i} := \inf \left\{ t \geq s, X_{t,u,v}^{s,x,i} \notin D \right\} \wedge T = \inf \left\{ t \geq s, X_{t,u,v}^{s,x,i} \in \partial D \right\} \wedge T. \tag{2.3}$$

Pour alléger la notation, on notera simplement $\tau_{u,v}$ lorsque la dépendance est claire. Nous considérons la fonction de gain suivante, pour $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$

$$J(s,x,i,u,v) := E\left[\int_s^{\tau_{u,v}} f(t, X_{t,u,v}^{s,x,i}, \theta_{t,u,v}^{s,x,i}, u_t, v_t) dt + g(\tau_{u,v}, X_{\tau_{u,v},u,v}^{s,x,i}, \theta_{\tau_{u,v},u,v}^{s,x,i}) \right], \tag{2.4}$$

où les applications

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times S \times U \times V \to R,\ \ g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times S \to R,$$

satisfont les conditions suivantes :

Hypothèse 3

(1) Pour tout $(x,i) \in \mathbb{R}^d \times S$, les applications $(t,u,v) \longmapsto f\ (t,x,i,u,v)$ et $t \longmapsto g(t,x,i)$ sont continues.

(2) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in [0, T]$, x, $y \in \mathbb{R}^d$, $i \in S$, $u \in U$ et $v \in V$,

$$|f(s, x, i, u, v) - f(s, y, i, u, v)| + |g(s, x, i) - g(s, y, i)| \leq C\,|x - y|\,.$$

L'hypothèse (3) implique également des conditions de croissance linéaire de f et g par rapport à x. En effet, les fonctions b, σ, f et g sont toutes bornées sur $[0, T] \times \overline{D} \times S \times U \times V$.

Sous les hypothèses (1), (2) et (3), pour tout $u \in U_S$ et $v \in V_s$, l'EDS (2.1) possède une unique solution forte, et donc la fonction de gain (2.4) est bien définie.

De plus, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} E\ \sup_{s\leq t\leq T} \left|X^{s,x,i}_{t,u,v}\right|^2 & \leq C(1 + |x|^2), \\ E\ \sup_{s\leq t\leq T} \left|X^{s,x,i}_{t,u,v} - X^{s,y,i}_{t,u,v}\right|^2 & \leq L\,|x - y|^2\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où C et L sont des constantes positives. En utilisant ces estimations et les conditions de croissance linéaire de f et g, on montre que la fonction de gain a une croissance au plus linéaire en x

$$|J(s, x, i, u, v)| \leq C(1 + |x|),$$

où la constante $C > 0$ peut varier d'une ligne à l'autre.

Définition 2.1.1 *Une stratégie admissible pour le joueur I est une application* α : $Vs \to Us$ *satisfaisant que, pour tout temps d'arrêt* τ *de* $\mathcal{F}^s_t$ *et tout* v_1, $v_2 \in v_s$ *avec* $v_1 \equiv v_2$ *sur* $[s, \tau]$, *on a* $\alpha(v1) \equiv \alpha(v2)$ *sur* $[s, \tau]$. *Une stratégie admissible* β *pour le joueur II est définie de manière similaire. L'ensemble des stratégies admissibles* α *et* β *est noté respectivement* A_s *et* B_s.

Associée à la fonction de gain (2.4), la fonction de valeur inférieure est définie comme

$$W^{-}(s,x,i) = \inf_{\beta \in B} \sup_{u \in U_s} J(s,x,i,u,v,\beta(u)), \tag{2.6}$$

et la fonction de valeur supérieure est définie comme

$$W^{+}(s,x,i) = \sup_{\alpha \in A_s} \inf_{u \in V_s} J(s,x,i,u,v,\alpha(v),v). \tag{2.7}$$

On note que $W^{+}(s,x,i) \leq W^{-}(s,x,i)$ pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$ et $W^{-}(s,x,i)$ et $W^{+}(s,x,i)$ sont dominés par $C(1+|x|)$. Dans le cas où $W^{-} = W^{+}$, on dit que le jeu admet une valeur.

2.2 Continuité des fonctions de valeurs

L'une des approches les plus couramment utilisées pour résoudre les problèmes de jeux différentiels stochastiques consiste à établir le principe de programmation dynamique (PDP), cependant, la continuité des fonctions de valeur par rapport aux variables de temps et d'état essentielle à l'établissement du PDP n'est généralement pas assurée lorsque l'on considère une fonction de gain du type "temps de sortie d'un domaine borné D". Des conditions supplémentaires sont donc nécessaires pour garantir la continuité des fonctions de valeur.

Par ailleurs, l'interaction entre la chaîne de Markov et le processus d'état peut engendrer de nombreuses difficultés. La chaîne de Markov, couplée à l'évolution du processus d'état, peut passer d'un état à un autre, ce qui entraîne un changement de régime pour ce dernier. De plus, une chaîne de Markov dépendant de l'état de contrôle peut avoir des distributions totalement différentes lorsque les processus de diffusion d'état correspondants ont des conditions initiales différentes.

Lemme 2.2.1 *Pour toute fonction continue f, lipschitzienne par rapport à la va-*

riable d'état, et pour tout $T>0$, il existe une constante $K>0$ telle que

$$E\int_0^T \left|f(t,X_{t,u,v}^{x,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})\right|^2 dt\leq K\left|x-y\right|^2,$$

et

$$E\left|f(T,X_{T,u,v}^{x,i},\theta_{T,u,v}^{x,i})-f(T,X_{T,u,v}^{y,i},\theta_{T,u,v}^{y,i})\right|^2 dt\leq K\left|x-y\right|,$$

Preuve. Pour tout $\eta>0$

$$\begin{aligned}
&E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})\right|^2 dt\\
&\leq KE\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})\right|^2 dt\\
&+KE\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})\right|^2 dt\\
&+KE\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})-f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})\right|^2 dt
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Par la continuité lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned}
&E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})\right|^2 dt \qquad (2.9)\\
&\leq KE\int_s^{s+\eta}\left|X_{t,u,v}^{y,i}-\theta_{s,u,v}^{y,i}\right| dt\\
&\leq K\int_s^{s+\eta}(t-s)dt\leq K\eta^2.
\end{aligned}$$

De même, nous avons également

$$E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})\right|^2 dt\leq K\eta^2 \tag{2.10}$$

Notons que

$$
\begin{aligned}
& E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})\right|^2dt \\
& \leq KE\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})\right|^2dt \\
& +KE\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Le deuxième terme de (2.11) peut être estimé comme

$$
\begin{aligned}
& E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{s,u,v})-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt \\
& =E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{s,u,v})-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2 I_{\left\{\theta^{y,i}_{t,u,v}\neq\theta^{y,i}_{s,u,v}\right\}}dt \\
& =\sum_{m\in S}\sum_{j\neq m}E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{s,u,v},m)-f(t,X^{y,i}_{s,u,v},j)\right|^2 I_{\left\{\theta^{y,i}_{s,u,v}=m\right\}}I_{\left\{\theta^{y,i}_{t,u,v}\neq j\right\}}dt \\
& \leq k\sum_{m\in S}\sum_{j\neq m}E\int_s^{s+\eta}\left[1+\left|X^{y,i}_{s,u,v}\right|\right]I_{\left\{\theta^{y,i}_{s,u,v}=m\right\}}E\left[I_{\left\{\theta^{y,i}_{t,u,v}\neq j\right\}}\left|X^{y,i}_{s,u,v},v_s,{}^{y,i}_{s,u,v}=m\right.\right]dt \\
& \leq k\sum_{m\in S}E\int_s^{s+\eta}\left[1+\left|X^{y,i}_{s,u,v}\right|^2\right]I_{\left\{\theta^{y,i}_{s,u,v}=m\right\}}\left[\sum_{j\neq m}q_{mj}(X^{y,i}_{s,u,v},v_s)(t-s)+\sigma(t-s)\right]dt \\
& \leq K\int_s^{s+\eta}(t-s)dt\leq K\eta^2
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Pour traiter le premier terme de (2.11), une méthode de couplage est utilisée. Pour $x,\widetilde{x}$ et $i,j\in S$, considérons la distance $\Gamma((x,j),(\widetilde{x},i))=|x-\widetilde{x}|+d(j,i)$, où $d(j,i)=0$ si $j=i$ et $d(j,i)=1$ si $j=i$. Soit $(\theta^{y,i}_s,\theta^{x,i}_s)$ un processus aléatoire discret d'espace d'états fini $S\times S$ tel que

$$
P\left[\theta^{y,i}_{t+h},\theta^{x,i}_{t+h}=(m,n)\left|\theta^{y,i}_t,\theta^{x,i}_t\right)=(k,l),(X^{y,i}_t,X^{x,i}_t)=(\widetilde{y},\widetilde{x}),v_t=v\right]
$$

$$
=\begin{cases} q_{(k,l)(m,n)}(\widetilde{y},\widetilde{x},v)h+\sigma(h), if(m,n)\neq(k,l), \\ 1+q_{(k,l)(k,l)}(\widetilde{y},\widetilde{x},v)h+\sigma(h), if(m,n)=(k,l), \end{cases}
$$

où les taux de transition satisfont, pour toute fonction $\widetilde{f}$ définie sur $S \times S$

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j\times i)\in S\times S} q_{(k,l)(m,n)}(\widetilde{y},\widetilde{x},v)(\widetilde{f}(j,i)-\widetilde{f}(k,l)) \\
&= \sum_j (q_{kj(x,v)-}q_{ij}(\widetilde{x},v)) + (\widetilde{f}(j,i)-\widetilde{f}(k,l)) \\
&+ \sum_j (q_{lj(\widetilde{x},v)-}q_{kj}(x,v)) + (\widetilde{f}(k,j)-\widetilde{f}(k,l)) \\
&\sum_j (q_{kj(x,v)} \wedge q_{lj}(\widetilde{x},v))(\widetilde{f}(j,j)-\widetilde{f}(k,l)).
\end{aligned}$$

En raison du couplage défini ci-dessus, pour $t \in [s, s+\eta)$

$$\begin{aligned}
&E\left[I_{\left\{\theta_t^{x,i}=j\right\}}\left|\theta_s^{x,i}=i_1,\theta_s^{y,i}=i_2,X_s^{x,i}=\widetilde{x},X_s^{y,i}=\widetilde{y},v_s=v\right.\right] \\
&= \textstyle\sum_{l\in S} E\left[I_{\left\{\theta_t^{x,i}=j,\theta_t^{y,i}=l\right\}}\left|\theta_s^{x,i}=i_1,\theta_s^{y,i}=i_2,X_s^{x,i}=\widetilde{x},X_s^{y,i}=\widetilde{y},v_s=v\right.\right] \\
&\textstyle\sum_{l\in S} \widetilde{q}_{(i_1,i_{2})(j,l)}(\widetilde{x},\widetilde{y},v)(t-s)+\sigma(t-s)
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&E\textstyle\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},\theta_{s,u,v}^{y,i})\right|^2 dt \\
&E\textstyle\sum_{i_1\in S}\sum_{j\neq i_1}\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{s,u,v}^{y,i},j)-f(t,X_{s,u,v}^{y,i},i_1)\right|^2 I_{\left\{\theta_{t,u,v}^{x,i}=j\right\}} I_{\left\{\theta_{s,u,v}^{y,i}=i_1\right\}}dt \\
&\le E\textstyle\sum_{i_1,i_2\in S}\sum_{j\neq i_1}\int_s^{s+\eta}\left[1+\left|X_{s,u,v}^{y,i}\right|^2\right] I_{\left\{\theta_{s,u,v}^{y,i}=i_1,\theta_{s,u,v}^{x,i}=i_2\right\}} \\
&\times E\left[I_{\left\{\theta_{t,u,v}^{x,i}=j\right\}}\left|\theta_{s,u,v}^{x,i}=i_1,\theta_{s,u,v}^{y,i}=i_2,X_{s,u,v}^{x,i},X_{s,u,v}^{y,i},v_s\right.\right]dt \\
&\le K\eta^2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Nous avons donc maintenant prouvé à partir de (2.9), (2.10), (2.12), (2.13) que (2.8) s'avère être

$$E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{x,i})-f(t,X_{t,u,v}^{y,i},\theta_{t,u,v}^{y,i})\right|^2 dt \le K\eta^2$$

Ensuite, nous avons

$$
\begin{aligned}
&E\int_s^{s+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt\\
&\sum_{k=0}^{[T/\eta]+1}E\int_{k\eta}^{k\eta+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt\\
&\leq k\eta
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

De la même manière

$$E\int_T^{T+\eta}\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt\leq K\eta^2$$

Ici, nous avons noté que les deux processus X_s et θ_s sont définis au-delà de T. Pour tout $\delta>0$

$$\frac{1}{\eta}E\int_T^{T+\eta}\frac{\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2}{\eta+\delta}dt\leq k$$

Est si $\eta\rightarrow0$, on a

$$\lim_{\eta\rightarrow0}\frac{1}{\eta}E\int_T^{T+\eta}\frac{\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2}{\eta+\delta}dt\leq k$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{d\eta}\int_T^{T+\eta}\left|\frac{E\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2}{\eta+\delta}\right|_{\eta=0}\leq k$$

c'est à dire

$$-\int_{T}^{T+\eta}\left|\frac{E\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2}{(\eta+\delta)^2}dt\right|_{\eta=0}$$
$$+\left.\frac{E\left|f(T,X^{y,i}_{T,u,v},\theta^{x,i}_{T,u,v})-f(T,X^{y,i}_{T,u,v},\theta^{y,i}_{T,u,v})\right|^2}{\eta+\delta}\right|_{\eta=0}\leq k.$$

ll est ici souhaitable de considérer l'intervalle$[T,T+\eta]$ plutôt que $[T-\eta,T]$ car la chaîne de Markov θ_s, $s\geq 0$ est uniquement continue à droite. Par conséquent, nous avons

$$E\left|f(T,X^{y,i}_{T,u,v},\theta^{x,i}_{T,u,v})-f(T,X^{y,i}_{T,u,v},\theta^{y,i}_{T,u,v})\right|^2\leq k\delta \tag{2.15}$$

Étant donné que le η dans (2.14) et le δ dans (2.15) sont arbitraires, soit tous deux η dans (2.14) et δ dans (2.15) $|x-y|^{\gamma_0}$ avec $\gamma_0>2$, alors à partir des estimations dans (2.5), nous avons

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T\left|f(t,X^{x,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt\\
&\leq E\int_0^T\left|f(t,X^{x,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})\right|^2dt\\
&+E\int_0^T\left|f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{x,i}_{t,u,v})-f(t,X^{y,i}_{t,u,v},\theta^{y,i}_{t,u,v})\right|^2dt\\
&\leq kE\int_0^T\left|X^{x,i}_{t,u,v}-X^{y,i}_{t,u,v}\right|^2dt+\sigma(|x-y|^2)\\
&\leq k\left|x-y\right|^2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

De même, nous avons

$$E\left|f(T,X^{s,i}_{T,u,v},\theta^{x,i}_{T,u,v})-f(T,X^{y,i}_{T,u,v},\theta^{y,i}_{T,u,v})\right|\leq k\left|x-y\right| \tag{2.17}$$

Dans cette section, nous donnons principalement la preuve de la continuité de la fonction de valeur inférieure $W^{-}(s,x,i)$ par rapport aux variables de temps et d'état, la preuve pour la fonction de valeur supérieure $W^{+}(s,x,i)$ est analogue. ■

Soit $\psi : \mathbb{R}^d \times S \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout x,$y \in \mathbb{R}^d$ et $i \in S$,

$$\left|\psi^{+}(x,i) - \psi^{-}(y,i)\right| \leq C\left|x-y\right|, \tag{2.18}$$

où $\psi^{+} = \max\left\{\psi, 0\right\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, définissons

$$\Gamma_{\varepsilon}^{s,x,i}(t) := \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\psi^{+}(X_{r,u,v}^{s,x,i}, \theta_{r,u,v}^{s,x,i})dr\right\},\ t \in [s,T].$$

On remarque que $: 0 < \Gamma_{\varepsilon}^{s,x,i}(t) \leq 1$. Considérons une fonction de gain auxiliaire

$$J^{\varepsilon}(s,x,i,u,v) = E\left[\int_{s}^{T}\Gamma_{\varepsilon}^{s,x,i}(t)f(t,X_{t,u,v}^{s,x,i},\theta_{t,u,v}^{s,x,i},u_t,v_t)dt + \Gamma_{\varepsilon}^{s,x,i}(T)g(T,X_{T,u,v}^{s,x,i},\theta_{T,u,v}^{s,x,i})\right] \tag{2.19}$$

et la fonction de valeur correspondante

$$W^{\varepsilon}(s,x,i) = \inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s} J^{\varepsilon}(s,x,i,u,v). \tag{2.20}$$

On démontre que pour tout $i \in S$ fixé, la fonction de valeur $W^{\varepsilon}(.,.,i)$ est continue. Ensuite, par approximation, nous en déduisons que la fonction de valeur inférieure $W^{-}(.,.,i)$ est également continue.

Théor■me 2.2.1 *Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé et $i \in S$, la fonction valeur $W^{\varepsilon}(s,x,i)$ est continue par rapport à s et x*

Preuve. Nous allons diviser la preuve en deux étapes.

Étape 1. Dans cette partie, nous allons démontrer que $W^{\varepsilon}(s,x,i)$ est continue par rapport à x. D'après la définition (2.20) de $W^\varepsilon(s,x,i)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
& |W^\varepsilon(s,x,i) - W^\varepsilon(s,y,i)| \\
& = \left|\inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s} J^\varepsilon(s,x,i,u,v) - \inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s} J^\varepsilon(s,y,i,u,v)\right| \\
& \leq \sup_{u,v} |J^\varepsilon(s,x,i,u,v) - J^\varepsilon(s,y,i,u,v)| \\
& \leq \sup_{u,v} E\int_s^T \left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(t) f(t, X_{t,u,v}^{s,x,i}, \theta_{t,u,v}^{s,x,i}, u_t, v_t) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(t) f(t, X_{t,u,v}^{s,y,i}, \theta_{t,u,v}^{s,y,i}, u_t, v_t)\right| dt \\
& \sup_{u,v} E\int_s^T \left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T) g(T, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right|
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $0 < \Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(t) \leq 1$

$$
\begin{aligned}
& E\left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T) g(t, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right| \\
& \leq E\left[|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T)| \times \left|g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i})\right|\right] \\
& + E\left[|\Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T)| \times \left|g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - g(T, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right|\right] \\
& \leq (E|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T)|^2)^{1/2} \times (E\left|g(t, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i})\right|^2)^{1/2} \\
& + E\left|g(t, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - g(t, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right|.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

De plus, en notant que $\left|e^{-a} - e^{-b}\right| \leq |a-b|$ pour tout a,$b \geq 0$ et en utilisant les estimations (2.5) et (2.16), nous pouvons obtenir que

$$
\begin{aligned}
& E|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T)|^2 \\
& \leq \frac{k}{\varepsilon^2} E\int_s^T \left|\psi^+(X_{r,u,v}^{s,x,i}, \theta_{r,u,v}^{s,x,i}) - \psi^+(X_{r,u,v}^{s,y,i}, \theta_{r,u,v}^{s,y,i})\right|^2 dr \\
& \leq \frac{k}{\varepsilon^2} |x-y|^2,
\end{aligned}
$$

et par (2.17)

$$
E\left|g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - g(T, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right| \leq k|x-y|
$$

Ainsi, nous avons

$$
E\left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T) g(T, X_{T,u,v}^{s,x,i}, \theta_{T,u,v}^{s,x,i}) - \Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T) g(T, X_{T,u,v}^{s,y,i}, \theta_{T,u,v}^{s,y,i})\right| \leq C'_\varepsilon |x-y|
$$

où la constante C'_ε ne dépend pas de s,y et u,v. De même, nous avons également par (2.16) que

$$E\int_s^T \left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(T)f(t,X_{t,u,v}^{s,x,i},\theta_{t,u,v}^{s,x,i},u_t,v_t)-\Gamma_\varepsilon^{s,y,i}(T)f(t,X_{t,u,v}^{s,y,i},\theta_{t,u,v}^{s,y,i},u_t,v_t)\right|dt$$
$$\leq C''_\varepsilon\left|x-y\right|.$$

Par conséquent, nous obtenons qu'il existe une constante $L_\varepsilon>0$ telle que

$$\left|W^\varepsilon(s,x,i)-W^\varepsilon(s,y,i)\right|\leq L_\varepsilon\left|x-y\right|. \tag{2.22}$$

Autrement dit, la fonction valeur $W^\varepsilon(s,x,i)$ est continue par rapport à x.

Étape 2. Dans cette étape, nous allons prouver que $W^\varepsilon(s,x,i)$ est continue par rapport à s.

Avec la continuité de $W^\varepsilon(s,x,i)$ par rapport à x, nous avons l'équation de programmation dynamique suivante, pour tout petit $\delta>0$

$$W^\varepsilon(s,x,i)=\inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s}E\left[\int_s^{s+\delta}\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(r)f(r,X_{t,u,v}^{s,x,i},\theta_{t,u,v}^{s,x,i},u_r,v_r)dr+\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(s+\delta)W^\varepsilon(s+\delta,X_{s+\delta,u,v}^{s,x,i},\theta$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|W^\varepsilon(s+\delta,x,i)-W^\varepsilon(s,x,i)\right|\\
&=\left|\inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s}E\left[\int_s^{s+\delta}\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(r)f(r,X_{t,u,v}^{s,x,i},\theta_{t,u,v}^{s,x,i},u_r,v_r)dr\right.\right.\\
&\left.\left.+\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(r)(s+\delta)W^\varepsilon(s+\delta,X_{s+\delta,u,v}^{s,x,i},\theta_{s+\delta,u,v}^{s,x,i})-W^\varepsilon(s+\delta,x,i)\right]\right|\\
&\leq\sup_{u,v}E\int_s^{s+\delta}\left|f(r,X_{t,u,v}^{s,x,i},\theta_{t,u,v}^{s,x,i},u_r,v_r)\right|dr\\
&+\sup_{u,v}E\left|\Gamma_\varepsilon^{s,x,i}(s+\delta)W^\varepsilon(s+\delta,X_{s+\delta,u,v}^{s,x,i},\theta_{s+\delta,u,v}^{s,x,i})-W^\varepsilon(s+\delta,x,i)\right|\\
&\leq C\delta+\sup_{u,v}E\left|W^\varepsilon(s+\delta,X_{s+\delta,u,v}^{s,x,i},\theta_{s+\delta,u,v}^{s,x,i})-W^\varepsilon(s+\delta,x,\theta_{s+\delta,u,v}^{s,x,i})\right|
\end{aligned}$$

$$\sup_{u,v} E\left|W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}) - W^{\varepsilon}(s+\delta, x, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v})\right|$$

$$\sup_{u,v} E\left|(\Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(s+\delta) - 1)W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v})\right|$$

Par (2.22),

$$\begin{aligned}
&E\left|W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}) - W^{\varepsilon}(s+\delta, x, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v})\right| \\
&\sum_{j\in S} E\left[I_{\left\{\theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}=j\right\}} \times \left|W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, j) - W^{\varepsilon}(s+\delta, x, j)\right|\right] \\
&\leq KL_{\varepsilon} E\left|X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v} - x\right|.
\end{aligned}$$

De plus, il est facile de voir que

$$E\left|X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v} - x\right| \leq C(\delta + \delta^{1/2}).$$

et

$$\begin{aligned}
&E\left|W^{\varepsilon}(s+\delta, x, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}) - W^{\varepsilon}(s+\delta, x, i)\right| \\
&\textstyle\sum_{j\neq i} P\left\{\theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v} = j\right\} \times \left|W^{\varepsilon}(s+\delta, x, j) - W^{\varepsilon}(s+\delta, x, i)\right| \\
&\leq CP\left\{\theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v} \neq i\right\} \leq K\delta + \sigma(\delta).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de (2.2).et

$$\begin{aligned}
&E\left|(\Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(s+\delta) - 1)W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v})\right| \\
&\leq (E\left|W^{\varepsilon}(s+\delta, X^{s,x,i}_{s+\delta,u,v}, \theta^{s,x,i}_{s+\delta,u,v})\right|^2)^{1/2}(E\left|\Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(s+\delta) -\right|^2)^{1/2} \\
&\frac{K}{\varepsilon}(E\left|\int_s^{s+\delta} \psi^{+}(X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v})dr\right|^2)^{1/2} \\
&\leq \frac{K\delta}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons que

$$|W^{\varepsilon}(s,x,i) - W^{\varepsilon}(s+\delta,x,i)| \to 0, \text{ as } \delta \to 0.$$

La continuité de $W^{\varepsilon}(s,x,i)$ par rapport à s est démontrée ■

Pour observer la continuité de la fonction de valeur inférieure $W^{-}(s,x,i)$, on suppose que :

Hypothèse 4. Il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times S \to \mathbb{R}$ satisfaisant (2.18) et que

$$\psi^{+}(x,i) \leq 0, \, \forall (x,i) \in \overline{D} \times S,$$

et pour tout $x \in \partial D$, il existe un $v \in V_s$ tel que

$$\inf_{u \in U_s} \int_s^t \psi^{+}(X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}) dr > 0, \text{ a.s } \; t \in (s,T]. \tag{2.23}$$

On dit que σ a un inverse borné si

$$\left\| \sigma^{-1} \right\|_{\infty} < \infty.$$

Nous supposons que le domaine D est convexe avec une frontière continue, σ et son inverse sont bornés.

Considérons l'EDS suivante :

$$\begin{cases} d\widetilde{x} = \sigma(t,\widetilde{x},\theta_t,u_t) dBt, \;\; 0 \leq s \leq t \leq T \\ \widetilde{x}_s = x \in \mathbb{R}^d, \;\; \theta_s = i \in S. \end{cases}$$

soit $\widetilde{P}(d\omega) = P(d\omega) M_t$, où

$$M_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_s^t |\alpha(r)|^2\, dr - \int_s^t |\alpha(r)|\, dBt\right\},$$

et $\alpha(r) = -\alpha^{-1}(r, \widetilde{X}_r, \theta_r, u_r) b(r, \widetilde{X}_r, \theta_r, u_r)$. Le théorème de Girsanov implique que

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_s^t \alpha(r) dr$$

est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité $\widetilde{P}$. Alors $\widetilde{X}_r = x + \int_s^t \sigma(r) dB_r$ est la solution de l'EDS (2.1) sous l'espace de probabilité $(\Omega\ ,\mathcal{F}\ ,\widetilde{P})$. Il existe un mouvement brownien $(V_t,\, t \geq s)$ de valeur initiale $V_s = x$ tel que pour tout $t \geq s$

$$\widetilde{X} = V_{s+\left[\widetilde{X}\right]_t}.$$

Par (2.23), on pose $\psi(x,i) = -dist(x, \partial D)$ si $x \in D$ ou $dist(x, \partial D)$ si $x \notin D$. Considérons maintenant un temps fixe $t > s$. Nous avons pour $i \in S$

$$\int_s^t \psi^+(V(r), i) dr > 0 \text{ presque sûrement}$$

Puisque $V.$ est un mouvement brownien indépendant des processus de contrôle et il existe des constantes positives $\lambda_1 < \lambda_2$ indépendantes de u,v et x telles que $\frac{1}{r-s}\left[X\right]_r \in [\lambda_1,\lambda_2]$ pour tout $r > s$, nous avons donc

$$\inf_{u \in U_s} \int_s^t \psi^+(V(r), i) dr > 0 \text{ presque sûrement}$$

c'est-à-dire

$$\inf_{u\in U_s}\int_s^t \psi^+(X^{s,x,i}_{r,u,v})dr > 0 \text{ presque sûrement}$$

Ainsi, dans ce cas, l'hypothèse (4) est vraie.

Théor■me 2.2.2 *En plus des hypothèses 1, 2, 3 et 4, nous supposons également que la fonction terminale $g(\cdot,\cdot,i)\in C^{1,2}$ pour chaque $i\in S$ fixé, et que*

$$\partial_s g(s,x,i) + H(s,x,i,u,v,g,Dg,D^2g) \geq 0, \tag{2.24}$$

où la fonction hamiltonienne H est définie comme

$$\begin{aligned} H(s,x,i,u,v,g,Dg,D^2g) \quad &= f(s,x,i,u,v) + Dg(s,x,i)\cdot b(s,x,i,u) \\ &+\tfrac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma'(s,x,i,u)D^2g(s,x,i)\right] \\ &+\textstyle\sum_{j\neq i} q_{ij}(x,v)(g(s,x,i)-g(s,x,j)). \end{aligned}$$

Alors $W\ (;\ ;\ i)$ est continue.

Preuve. Nous divisons la preuve en deux étapes.

Étape 1. Supposons que $f\geq 0$ et $g\equiv 0$. Alors par (2.23), pour tout $x\in\partial D$, $u\in U_s$ et un certain $v\in V_s$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \psi^+(X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v})dr\right\} = 0,\ \text{ a.s. pour tout } t\in(s,T]$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on obtient pour tout $x\in\partial D$ et $s\in[0,T]$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} W^{\varepsilon}(s,x,i) = 0. \tag{2.25}$$

soit

$$h(\varepsilon) := \sup\left\{W^{\varepsilon}(s,x,i) : (s,x,i) \in [0,T] \times \partial D \times S\right\},$$

Par le théorème de Dini nous avons que $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$. Pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$, et par l'équation de la programmation dynamique pour W^{ϵ}, nous avons

$$\begin{aligned}
&W(s,x,i)\\
&= \inf_{v\in V_s} \sup_{u\in U_s} E\left[\int_s^{\tau_{u,v}} f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr + W^{\varepsilon}(\tau_{u,v}, X^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v}, \theta^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v})\right]\\
&\inf_{v\in V_s} \sup_{u\in U_s} E\int_s^{\tau_{u,v}} f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr + h(\varepsilon)\\
&= W^{-}(s,x,i) + h(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Notons que, pour tout $r \in [s, \tau_{u,v}]$, $X_r \in \overline{D}$. Ainsi, nous avons $\Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(t) = 1$. Par les définitions de J^{ε} et $\tau_{u,v}$ et en supposant que $g \equiv 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&J^{\varepsilon}(s,x,i,u,v)\\
&E\int_s^T \Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(r) f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr\\
&E\left[\int_s^{\tau_{u,v}} f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr\right.\\
&\left.+ I_{\{\tau_{u,v}<T\}} \int_{\tau_{u,v}}^T \Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(r) f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr\right]\\
&J^{\varepsilon}(s,x,i,u,v) + E\left[I_{\{\tau_{u,v}<T\}} \int_{\tau_{u,v}}^T \Gamma^{s,x,i}_{\varepsilon}(r) f(r, X^{s,x,i}_{r,u,v}, \theta^{s,x,i}_{r,u,v}, u_r, v_r)dr\right]\\
&\geq J(s,x,i,u,v)
\end{aligned}$$

des que

$$W^{\varepsilon}(s,x,i) \geq W^{-}(s,x,i)$$

En combinant (2.26) et (**??**), nous avons

$$W^{-}(s,x,i) \leq W^{\varepsilon}(s,x,i) \leq W^{-}(s,x,i) + h(\varepsilon)$$

Cela implique que $W^{\varepsilon} \to W^{-}$ uniformément sur $[0,T] \times \overline{D} \times S$. Comme W^{ε} est continue par rapport à s et x, W^- l'est aussi.

Étape 2. Pour le cas général pour f et g satisfaisant (2.24), soit

$$\widetilde{f}(s,x,i,u,v) = \partial_s g(s,x,i) + H(s,x,i,u,v,g,Dg,D^2g)$$

et $\widetilde{g} \equiv 0$. Alors la condition (2.24) implique que $\widetilde{f} \geq 0$, et l'étape 1 implique que

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(s,x,i) &= \inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s} \widetilde{J}(s,x,i,u,v)\\ &= \inf_{v\in V_s}\sup_{u\in U_s} E\left[\int_s^{\tau_{u,v}} \widetilde{f}(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_r,v_r)dr\right]\end{aligned}$$

est continue par rapport à s et x. En appliquant maintenant la formule d'Itô et la formule de Dynkin à g de s à $\tau_{u,v}$, nous avons

$$\begin{aligned}&E\left[g(\tau_{u,v},X^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v},\theta^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v}) - g(s,x,i)\right]\\ &= E\int_s^{\tau_{u,v}} \partial_s g(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_r,v_r) + Dg(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v})\cdot b(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_v)\\ &+\tfrac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma'(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_v)D^2g(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v})\right]\\ &+\textstyle\sum_{j\neq\theta^{s,x,i}_{r,u,v}} q_{\theta^{s,x,i}_{r,u,v}\cdot j}(X^{s,x,i}_{r,u,v},v_r)(g(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},j) - g(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v}))dr\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned}\widetilde{J}(s,x,i,u,v) &= E\int_s^{\tau_{u,v}} \widetilde{f}(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_r,v_r)dr\\ &= E\int_s^{\tau_{u,v}} f(r,X^{s,x,i}_{r,u,v},\theta^{s,x,i}_{r,u,v},u_r,v_r)dr\\ &+E\left[g(\tau_{u,v},X^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v},\theta^{s,x,i}_{\tau_{u,v},u,v}) - g(s,x,i)\right]\\ &= J(s,x,i,u,v) - g(s,x,i)\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que $W^-(s,x,i) = \widetilde{W}(s,x,i) + g(s,x,i)$ est continue.

■

Avec la continuité de W^- et W^+ en main, nous pouvons établir le DPP satisfait respectivement par W^- et W^+. nous donnons le théorème suivant sans démonstration.

Théor■me 2.2.3 *(Principe de programmation dynamique) Pour tout* F_t^s*,,temps d'arrêt* $\Theta \geq s$ *nous avons l'équation de programmation dynamique inférieure suivante*

$$\begin{aligned} W^-(s,x,i) &= \inf_{\beta \in B_s} \sup_{u \in U_s} E\left[\int_s^{\tau_{u,\beta(u)} \wedge \Theta} f(r, X_r, \theta_r, u_r, \beta(u)_r) dr \right. \\ &\left. + W^-(\tau_{u,\beta(u)} \wedge \Theta, X_{u,\beta(u) \wedge \Theta}, \theta_{u,\beta(u) \wedge \Theta})\right] \end{aligned} \tag{2.27}$$

et l'équation de programmation dynamique supérieure

$$\begin{aligned} W^+(s,x,i) &= \sup_{\alpha \in A_s} \inf_{v \in V_s} E\left[\int_s^{\tau_{u,\beta(u)} \wedge \Theta} f(r, X_r, \theta_r, \alpha(v)_r, v_r) dr \right. \\ &\left. + W^-(\tau_{\alpha(v),v} \wedge \Theta, X_{\tau_{\alpha(v)_r} \wedge \Theta}, \theta_{\tau_{\alpha(v)_r} \wedge \Theta})\right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Preuve. voir [6]. ■

2.3 Solution de Viscosité

Dans cette section , nous considérons les équations de Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs (HJBI) à changement de régime : le cas inférieur

$$\begin{cases} \partial_s W^-(s,x,i) + \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s,x,i,u,v,W^-,DW^-,D^2W^-) = 0, \\ (s,x,i) \in [0,T) \times D \times S \\ W^-(s,x,i) = g(s,x,i), \quad (s,x,i) \in D_T \times S, \end{cases} \tag{2.29}$$

et le cas superieur

$$\begin{cases} \partial_s W^+(s,x,i) + \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s,x,i,u,v,W^+,D^1W^+,D^2W^+) = 0, \\ (s,x,i) \in [0,T) \times D \times S \\ W^+(s,x,i) = g(s,x,i), \quad (s,x,i) \in D_T \times S. \end{cases} \tag{2.30}$$

où $DT := \{T\} \times D \cup [0,T] \times \partial D$ et H la fonction hamiltonienne définie précédemment.

Si les fonctions de valeur inférieure et supérieure $W^-(\cdot,\cdot,i)$ et $W^+(\cdot,\cdot,i)$ sont de classe $C^{1,2}([0,T]\times\overline{D})$, alors elles sont des solutions classiques uniques des équations HJBI inférieure et supérieure (2.29) et (2.30), respectivement. Grâce aux continuités et au théorème de sélection mesurable (voir Barmish 1978 et les références qui y sont citées), nous pouvons également prouver l'existence de contrôles et de stratégies optimaux pour ce jeu. Cependant, les fonctions de valeur ne sont pas généralement suffisamment régulières ; pour traiter le cas de non-régulier, la solution de viscosité, comme solution faible, a été initialement introduite par Crandall et al. (1992) (un autre type de solution faible : la solution faible de Sobolev, de telles équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires est considérée dans Wei et al. 2014). Dans cette section, nous démontrerons que les fonctions de valeur inférieure et supérieure $W^-(s,x,i)$ et $W^+(s,x,i)$ définies comme dans (2.6) et (2.7) sont des solutions de viscosité uniques des équations HJBI inférieure et supérieure (2.29) et (2.30), respectivement. De plus, les fonctions de valeur inférieure et supérieure coïncident sous la condition d'Isaacs, ce qui implique que le jeu admet une valeur, c'est-à-dire

$$W^-(s,x,i) = W^+(s,x,i) \text{ pour tout } (s,x,i)\in[0,T]\times\overline{D}\times S.$$

Dans cette partie, nous nous concentrons principalement sur la preuve que la fonction de valeur inférieure $W^-(s,x,i)$ est l'unique solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29). La preuve que la fonction de valeur supérieure $W^-(s,x,i)$ est l'unique solution de viscosité de l'équation HJBI supérieure (2.30) peut être effectuée de la même manière.

Définition 2.3.1 *Une fonction continue $w(s,x,i)$ est appelée sous-solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29) si $w(s,x,i)\le g(s,x,i)$ pour tout (s,x,i)*

$\in D_T \times S$, *et pour tout* $i \in S$

$$\partial_s \phi(s_0, x_0) + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s_0, x_0, i, u, v, w, D\phi, D^2\phi) \ \geq 0,$$

chaque fois que $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D})$ *et* $w(s,x,i) - \phi(s,x)$ *atteint un maximum local à* $(s_0, x_0) \in [0,T) \times D$.

Une fonction continue $w(s,x,i)$ *est appelée sursolution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (**??**) si* $w(s,x,i) \geq g(s,x,i)$ *pour tout* $(s,x,i) \in D_T \times S$, *et pour tout* $i \in S$

$$\partial_s \phi(s_0, x_0) + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s_0, x_0, i, u, v, w, D\phi, D^2\phi) \ \leq 0$$

chaque fois que $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D})$ *et* $w(s,x,i) - \phi(s,x)$ *atteint un minimum local à* $(s_0, x_0) \in [0,T) \times D$. *Une fonction continue* $w(s,x,i)$ *est appelée solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (**??**), si elle est à la fois une sous-solution de viscosité et une sursolution de viscosité.*

Théor■me 2.3.1 *La fonction de valeur inférieure* $W^-(s,x,i)$ *définit dans (2.6) est une solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29).*

Preuve. Propriété de sous-solution de viscosité. Pour un $i \in S$ et $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D})$ donnés, supposons que $W^-(s,x,i) - \phi(s,x)$ atteigne son maximum à $(s_0, x_0) \in [0,T) \times D$ dans un voisinage $N(s_0,x_0) = [(s_0 - \delta) \vee 0, s_0 + \delta) \times B_\varepsilon(x_0)$, où $B_\varepsilon(x_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d, |y - x_0| < \varepsilon \right\}$ et $\delta,\varepsilon > 0$ sont suffisamment petits pour que $N(s_0,x_0) \subset [0,T) \times D$.Soit τ_θ le premier temps de saut de $\theta\cdot$ après s_0 et $\tau_\varepsilon^{s_0,x_0,i} = \inf \left\{ t \geq s_0, X_t^{s_0,x_0,i} \notin \ B_\varepsilon(x_0) \right\}$. Rappelons l'équation de programmation dynamique inférieure (2.27) satisfaite par $W^-(s,x,i)$. Nous savons que pour tout $\beta \in B_{s_0}$, il existe $\widehat{u} \in U_{s_0}$ tel que

$$\begin{aligned} W^-(s_0,x_0,i) \ &< E\left[\int_{s_0}^{\tau} f(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \widehat{u}, \beta(\widehat{u})_r) dr \right. \\ &\left. + W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) \right] + \delta^2 \end{aligned} \tag{2.31}$$

où $\tau = \tau_0 \wedge \tau_\varepsilon^{s_0,x_0,i} \wedge (s_0+\delta)$. Définissons $\Psi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times S \to \mathbb{R}$ comme suit

$$\Psi(s,x,j) = \begin{cases} \phi(s,x) - \phi(s_0,x_0) + W^-(s_0,x_0,i), \quad j \neq i, \\ W^-(s,x,j), \quad j \neq i \end{cases}$$

En appliquant la formule de Dynkin entre 0 et τ, nous avons

$$\begin{aligned} & E\left[\Psi(\tau, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})\right] - \Psi(s_0,x_0,i) \\ & = E \int_{s_0}^{\tau} \Big[\partial_s \phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) + D\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}).b(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) \\ & + \tfrac{1}{2} tr\left[\sigma\sigma'(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) D^2\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})\right] \\ & + \textstyle\sum_{j\neq i} q_{ij}(X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \beta(\widehat{u})_r) \times (\Psi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, j) - \Psi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i)) dr\Big] \end{aligned} \tag{2.32}$$

De plus, pour tout $r \in (s_0, \tau]$,

$$W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i) \leq W^-(s_0,x_0,i) + \phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})$$

Ainsi, (2.32) s'avère être

$$\begin{aligned} & E\left[W^-(\tau, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})\right] - W^-(s_0,x_0,i) \\ & \leq E\Big[\int_{s_0}^{\tau} \partial_s \phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) + D\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}).b(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) \\ & + \tfrac{1}{2} tr\left[\sigma\sigma'(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) D^2\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})\right] \\ & + \textstyle\sum_{j\neq i} q_{ij}(X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \beta(\widehat{u})_r) \times (W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, j) - W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i)) dr\Big] \end{aligned} \tag{2.33}$$

En combinant (2.31) et (2.33), nous avons

$$\begin{aligned} -\delta^2 \quad & < E\Big[\int_{s_0}^{\tau} f(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, u_r, \beta(\widehat{u})_r) \\ & + \partial_s \phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) + D\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) \cdot b(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) \\ & + \tfrac{1}{2} tr\left[\sigma\sigma'(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i, \widehat{u}_r) D^2\phi(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})})\right] \\ & + \textstyle\sum_{j\neq i} q_{ij}(X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \beta(\widehat{u})_r) \times (W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, j) - W^-(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, i)) dr\Big] \end{aligned}$$

En divisant les deux côtés de l'égalité ci-dessus par δ et en laissant $\delta \to 0$, nous avons

$$\partial_s\phi(s_0, x_0) + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s_0, x_0, i, u, v, W^-, D\phi, D^2\phi) \geq 0$$

Ainsi, nous avons prouvé que la fonction de valeur inférieure W^- est une sous-solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29)

Propriété de sursolution de la viscosité. Pour tout $i \in S$ et $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D})$ fixés, supposons que $W^-(s,x,i)$ $-\phi(s,x)$ admette un minimum en $(s_0, x_0) \in [0,T) \times D$. dans un voisinage $N(s_0,x_0) = [(s_0-\delta) \vee 0, s_0+\delta) \times B_\varepsilon(x_0) \subset [0,T) \times D$.Soit τ_0 le premier temps de saut de $\theta\cdot$ et $\tau_\varepsilon^{s_0,x_0,i} = \inf\left\{t \geq s_0, X_t^{s_0,x_0,i} \notin B_\varepsilon(x_0)\right\}$. Alors, d'après (2.27), pour tout $u \in U_{s_0}$, il existe $\widehat{\beta} \in B_{s_0}$ tel que

$$\begin{aligned} W^-(s_0,x_0,i) \quad &> E\Big[\int_{s_0}^{\tau} f(r, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, u_r, \beta(\widehat{u})_r)dr \\ &+W^-(\tau, X^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}, \theta^{s_0,x_0,i}_{r,\widehat{u},\beta(\widehat{u})}) - \delta^2\Big] \end{aligned}$$

où $\tau = \tau_0 \wedge \tau_\varepsilon^{s_0,x_0,i} \wedge (s_0+\delta)$. Avec un argument similaire à celui de la première partie, nous pouvons prouver que

$$\partial_s\phi(s_0, x_0) + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s_0, x_0, i, u, v, W^-, D\phi, D^2\phi) \leq 0$$

Ainsi, nous avons prouvé que la fonction de valeur inférieure $W^-(s,x,i)$ est une sursolution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (**??**). En combinant ces deux parties, nous obtenons que la fonction de valeur inférieure $W^-(s,x,i)$ est une solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29). ■

Il existe des définitions équivalentes des solutions de viscosité (2.29) et (2.30), respectivement, ce qui est utile pour démontrer l'unicité des résultats (voir Crandall et al., 1992). Définissons le surdifférentiel du second ordre de ϕ à $(t,x) \in [0,T) \times D$

comme

$$D^{1,2}\phi(t,x) := \Big\{(q,p,P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S^d : \\ \lim_{\substack{s\to t, s\in[0,T)\\ y\to x, y\in D}} \sup \frac{\phi(s,y)-\phi(t,x)-q(s-t)-p\cdot(y-x)-\frac{1}{2}tr((y-x)(y-x)'P}{|s-t|+|y-x|^2} \leq 0\Big\}$$

Où S^d désigne l'ensemble des matrices symétriques $d \times d$. La sous-différentielle du second ordre de ϕ en (t,x) est définie par $D_-^{1,2}\phi(t,x) = -D_+^{1,2}(-\phi)(t,x)$. On note également par $\overline{D}_+^{1,2}\phi(t,x)$ and $\overline{D}_-^{1,2}\phi(t,x)$ les fermetures de $-D_+^{1,2}\phi(t,x)$ et $D_-^{1,2}\phi(t,x)$, respectivement.

Définition 2.3.2 *Une fonction continue $W(s,x,i)$ est dite sous-solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29) si $W(s,x,i) \leq g(s,x,i)$ pour tout $(s,x,i) \in D_T \times S$, et pour tout $(s,x,i) \in [0,T) \times D \times S$ et tout $(q,p,P) \in D_+^{1,2}w(s,x,i)$,*

$$q + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s,x,i,u,v,w,p,P) \geq 0,$$

et une fonction continue $W(s,x,i)$ est dite sursolution de viscosité de (2.29) si $W(s,x,i) \geq g(s,x,i)$ pour tout $(s,x,i) \in D_T \times S$, et pour tout $(s,x,i) \in [0,T) \times D \times S$ et tout $(q,p,P) \in D_-^{1,2}w(s,x,i)$,

$$q + \inf_{v\in V} \sup_{u\in U} H(s,x,i,u,v,w,p,P) \leq 0.$$

Une fonction continue $W(s,x,i)$ est appelée solution de viscosité de (2.30),si elle est à la fois une sous et sursolution de viscosité de (2.30)
Pour illustrer les propriétés d'unicité des solutions de viscosité des équations HJBI, nous commencerons par donner quelques lemmes.

Lemme 2.3.1 *Soient $W_1^-(s,x,i)$ une sous-solution de viscosité et $W_2^-(s,x,i)$ une sur-solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29). Alors la fonction $w(s,x)$*

$= \max_{i\in S}(W_1^-(s,x,i) - W_2^-(s,x,i))$ *est une sous-solution de viscosité de l'EDP non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} \partial_s w(s,x) + \sup_{u,i}\left\{\frac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma'(s,x,i,u)D^2w(s,x)\right] + Dw(s,x)\cdot b(s,x,i,u)\right\} = 0 \\ (s,x) \in [0,T) \times D, \\ w(s,x) = 0, \quad (s,x) \in D_T \end{cases} \tag{2.34}$$

Preuve. Soit $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D})$ et supposons que $W^-(s,x,i) - \phi(s,x)$ atteint un maximum local en $(s_0,x_0) \in [0,T) \times D$, soit $O \subset [0,T] \times \overline{D}$ un voisinage fermé tel que (s_0,x_0) soit le maximum global en O, et i_0 tel que $w(s_0,x_0) = W_1^-(s,x,i) - W_2^-(s,x,i)$. Définissons la fonction

$$\begin{aligned} \psi(s_1,x_1,s_2,x_2,i) &= W^-(s_1,x_1,i) - W^-(s_2,x_2,i) \\ &-\tfrac{|x_1-x_2|}{\varepsilon^2} - \tfrac{|s_1-s_2|}{\delta^2} - \phi(s_1-x_1) \end{aligned}$$

où ε,$\delta \in (0,1)$. Par la continuité, il existe un point maximum global (s_1,x_1,s_2,x_2,i) de ψ dans $O \times O \times S$. En particulier

$$\psi(s_1^0,x_1^0,s_1^0,x_1^0,i) + \psi(s_2^0,x_2^0,s_2^0,x_2^0,i) \leq 2\psi(s_1^0,x_1^0,s_1^0,x_1^0,i)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &-\tfrac{|x_1-x_2|}{\varepsilon^2} - \tfrac{|s_1-s_2|}{\delta^2} - \phi(s_1-x_1) \\ &\leq W_1^-(s_1^0,x_1^0,i) - W_1^-(s_2^0,x_2^0,i) + W_1^+(s_1^0,x_1^0,i) \\ &-W_2^-(s_2^0,x_2^0,i) - \phi(s_1^0,x_1^0) + \phi(s_2^0,x_2^0) \leq C \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que $(s_1^0, x_1^0, i), (s_2^0, x_2^0, i) \to (s_0, x_0, i_0)$ et $\frac{\left|x_1^0 - x_2^0\right|^2}{\varepsilon^2}, \frac{\left|x_1^0 - x_2^0\right|^2}{\delta^2} \to 0$ quand $\varepsilon,\delta \to 0$. De plus, selon Crandall et al. (1992), il existe X, Y satisfaisant

$$\left(\tfrac{2(s_1^0 - s_2^0)}{\delta^2} + \partial_s \phi(s_1^0, x_1^0), \tfrac{2(x_1^0 - x_2^0)}{\varepsilon^2} + D\phi(s_1, x_1), X\right) \in \overline{D}_+^{-1,2} W_1^-(s_1^0, x_1^0, i),$$
$$\left(\tfrac{2(s_1^0 - s_2^0)}{\delta^2}, \tfrac{2(x_1^0 - x_2^0)}{\varepsilon^2}, Y\right) \in \overline{D}_-^{1,2} W_2^-(s_1^0, x_1^0, i),$$

et

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^2\phi(s_1^0, x_1^0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la définition du solution de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29), nous avons :

$$\partial_s \phi(s_1^0, x_1^0) + \tfrac{2(s_1^0 - s_2^0)}{\delta^2} + \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s_1^0, x_1^0, i, u, v, W_1^-, \tfrac{2(x_1^0 - x_2^0)}{\varepsilon^2} + D\phi(s_1^0, x_1^0), X) \geq 0$$
$$\tfrac{2(s_1^0 - s_2^0)}{\delta^2} + \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s_2^0, x_2^0, i, u, v, W_2^-, \tfrac{2(x_1^0 - x_2^0)}{\varepsilon^2} + D\phi(s_1^0, x_1^0), Y) \leq 0$$

Ils s'ensuit que

$$\begin{aligned} \partial_s \phi(s_1^0, x_1^0) &\leq \sup_{u,v} \{ f(s_1^0, x_1^0, i, u, v) - f(s_1^0, x_1^0, i, u, v) \\ &+ \textstyle\sum_{j \neq i} q_{ij}(x_1^0, v)(W_1^-(s_1^0, x_1^0, j) - W_1^-(s_1^0, x_1^0, i)) \\ &- \textstyle\sum_{j \neq i} q_{ij(}x_2^0, v)(W_2^-(s_2^0, x_2^0, j) - W_1^-(s_2^0, x_2^0, i)) \\ &+ (D\phi(s_1^0, x_1^0) + \tfrac{2(x_1^0 - x_2^0)}{\varepsilon^2}) \cdot b(s_1^0, x_1^0, i, u) \\ &+ \tfrac{1}{2} tr\left[\sigma\sigma'(s_1^0, x_1^0, i, u) X\right] + tr\left[\sigma\sigma'(s_2^0, x_2^0, i, u) Y\right]) \} \end{aligned}$$

De plus, (pour $\xi = f, b, \sigma$)

$$\left|\xi(s_1^0, x_1^0, i, u, v) - \xi(s_2^0, x_2^0, i, u, v)\right| \leq C \left|x_1^0 - x_2^0\right| + \varpi(s_1^0 - s_2^0)$$

où $\varpi(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$. Dans la limite de $\delta \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$, on a

$$\begin{aligned}-\partial_s\phi(s_0,x_0) \quad &\leq \sup_{u,v}\Big\{\textstyle\sum_{j\neq i_0} q_{i_0j}(x_0,v)(W_1^-(s_0,x_0,j) - W_1^-(s_0,x_0,i_0)) \\ &- \textstyle\sum_{j\neq i_0} q_{i_0j(}x_0,v)(W_2^-(s_0,x_0,j) - W_1^-(s_0,x_0,i_0)) \\ &+ D\phi(s_0,x_0)\cdot b(s_0,x_0,i_0,u) + \tfrac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma'(s_0,x_0,i_0,u)D^2\phi(s_0,x_0)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{2.35}$$

De la définition de $w(s,x)$, nous avons pour tout $j \in S$

$$W_1^-(s_0,x_0,j) - W_2^-(s_0,x_0,j) \leq W_1^-(s_0,x_0,i_0) - W_2^-(s_0,x_0,i_0).$$

Par conséquent, (2.35) s'avère être

$$\partial_s\phi(s_0,x_0)+\sup_u\left\{D\phi(s_0,x_0).b(s_0,x_0,i_0,u) + \frac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma^{'}(s_0,x_0,i_0,u)D^2\phi(s_0,x_0)\right]\right\} \geq 0$$

c'est-à-dire

$$\partial_s\phi(s_0,x_0) + \sup_{u,i}\left\{D\phi(s_0,x_0).b(s_0,x_0,i,u) + \frac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma^{'}(s_0,x_0,i,u)D^2\phi(s_0,x_0)\right]\right\} \geq 0$$

Par conséquent, $w(s,x)$ est une sous-solution de viscosité de l'EDP (2.34). ■

Lemme 2.3.2 *Soit*

$$f(x) = \left[\log((|x|^2+1)^{1/2}) + 1\right]^2, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour tout $A > 0$, il existe $C_1 > 0$ tel que la fonction

$$\chi(s,x) = \exp\left\{(C_1(T-s)+A)f(x)\right\}$$

satisfait

$$\partial_s \chi(s,x) + \chi(s,x) + \sup_{u,i} \left\{ D\chi(s,x).b(s,x,i,u) + \frac{1}{2} tr \left[\sigma\sigma^{'}(s,x,i,u) D^2 \chi(s,x) \right] \right\} < 0$$

dans $[t_{1,}T] \times \mathbb{R}^d$*, où* $t_1 = T - \frac{A}{C_1}$.

Théorème 2.3.2 *L'équation de HJBI inférieure (2.29) a au plus une solution de viscosité dans* $[0,T] \times \overline{D} \times S$*.*

Preuve. Soient $W_1^-(s,x,i)$ et $W_2^-(s,x,i)$ deux solutions de viscosité de l'équation HJBI inférieure (2.29) avec la même condition limite. En fait, $W_1^-(s,x,i)$ est également une sous-solution de viscosité et $W_2^-(s,x,i)$ est également une sursolution de viscosité de (2.29). Nous allons démontrer que $W_1^-(s,x,i) \leq W_2^-(s,x,i)$ pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$. Inversement, nous pouvons également démontrer que $W^-(s,x,i) \geq W^-(s,x,i)$ pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$ par la symétrie. Soit $w(s,x) = \max_{i \in S} (W_1^-(s,x,i) - W_2^-(s,x,i))$. Il est clair que pour $t_1 = T - \frac{A}{C_1}$ et $\kappa > 0$,

$$M := \max_{(s,t) \in [t_1,T] \times \overline{D}} (w(s,x) - \kappa\chi(s,x)) \exp(s,T),$$

peut être atteint en un certain point (s_0, x_0), où $\chi(s,x) > 0$ est défini dans le lemme 3. Sans perte de généralité, nous supposons que $w(s_0,x_0) > 0$. Ailleurs, $M \leq 0$ et $w(s,x) \leq \kappa\chi(s,x)$ dans $[t_1,T] \times \bar{D}$ sont trivialement vrais pour tout $\kappa > 0$. Par conséquent, en laissant $\kappa \to 0$, nous obtenons pour tout $(s,x,i) \in [t_1,T] \times \overline{D} \times S$

$$W_1^-(s,x,i) \leq W_2^-(s,x,i).$$

Remarquons que, $W(s_0,x_0) > 0$ implique que $(s_0,x_0) \in [0,T] \times \overline{D}$. D'après la définition de (s_0,x_0), nous savons que pour tout $(s,x) \in [t_1,T] \times \overline{D}$

$$w(s,x) - \kappa\chi(s,x) \leq (w(s_0,x_0) - \kappa\chi(s_0,x_0)) \exp(s_0,s).$$

Alors (s_0, x_0) peut être vu comme un point maximum global pour $w(s,x) - h(s,x)$ dans $[t_1, T] \times \overline{D}$, où

$$h(s,x) = \kappa\chi(s,x) + (w(s_0,x_0) - \kappa\chi(s_0,x_0)) \exp(s_0, s).$$

Puisque $w(s,x)$ est une sous-solution de viscosité de PDE (2.29), alors nous avons

$$\partial_s h(s_0,x_0) + \sup_{u,i}\left\{Dh(s_0,x_0).b(s_0,x_0,i,u) + \frac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma^{'}(s_0,x_0,i,u)D^2h(s_0,x_0)\right]\right\} \geq 0$$

Par la définition de h, on en déduit que

$$\begin{aligned} w(s_{0,}x_0) \quad &\leq \kappa \sup\nolimits_{u,i}\{\partial_s\chi(s_0,x_0) + D\chi(s_0,x_0)\cdot b(s_0,x_0,i,u) \\ &\tfrac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma^{'}(s_0,x_0,i,u)D^2\chi(s_0,x_0)\right] + \chi(s_0,x_0)\big\} \end{aligned}$$

D'après le lemme 3 et pour tout $\kappa > 0$, on a

$$\begin{aligned} w(s_{0,}x_0) \quad &\leq \kappa \sup\nolimits_{u,i}\{\partial_s\chi(s_0,x_0) + D\chi(s_0,x_0)\cdot b(s_0,x_0,i,u) \\ &\tfrac{1}{2}tr\left[\sigma\sigma^{'}(s_0,x_0,i,u)D^2\chi(s_0,x_0)\right] + \chi(s_0,x_0)\big\} < 0 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction puisque $w(s_{0,}x_0) > 0$. Finalement, en appliquant successivement le même argument sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, avec $t_1 = (t_1 - \frac{A}{C_1})$, puis, si $t_2 > 0$, sur $[t_3, t_2]$, etc., on obtient $W_1^-(s,x,i) \leq W_2^-(s,x,i)$, pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D}$ $\times$ S. D'une manière analoque, nous pouvons prouver que $W_1^-(s,x,i) \geq W_2^-(s,x,i)$, pour tout $(s,x,i) \in [0,T] \times \overline{D} \times S$. Ainsi, la preuve est complétée ■

Dans les théorèmes 4 et 5, nous avons démontré que les fonctions de valeur inférieure et supérieure (2.6) et (2.7) sont des solutions de viscosité uniques des équations HJBI inférieure et supérieure (2.29) et (2.30), respectivement. De plus, si la condition d'Isaacs est respectée

$$\inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s, x, i, u, v, w, p, P) = \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} H(s_0, x_0, i, u, v, w, p, P)$$

est vrai, alors les fonctions de valeur inférieure et supérieure coïncident, ce qui signifie que le jeu admet une valeur.

Bibliographie

[1] Biswas I (2012) On zero-sum stochastic differential games with jump-diffusion driven state : a viscosity solution framework. SIAM J Control Optim 50(4) :1823–1858.

[2] Fleming W, Souganidis P (1989) On the existence of value functions of two-player, zero-sum stochastic differential games. Indiana Univ Math J 38(2) :293–314.

[3] Hamadene S, Lepeltier J (1995) Zero-sum stochastic differential games and backward equations. Syst Control Lett 24(4) :259–263.

[4] Jeanblanc, M. (2010). Cours de calcul stochastique (Master 2 IF). Université d'Évry-Val-d'Essonne.

[5] Li J, Tang M (2021) A BSDE approach to stochastic differential games with regime switching. Math Probl Eng 2021 :9930142.

[6] Lv S (2020) Two-player zero-sum stochastic differential games with regime switching. Automatica 114 :108819.

[7] MA, Chenglin et ZHAO, Huaizhong. Stochastic differential games with controlled regime-switching. Computational and Applied Mathematics, 2024, vol. 43, no 4, p. 264.

[8] Menoukeu-Pamen O, Momeya RH, Momeya R (2017) A maximum principle for Markov regime-switching forward-backward stochastic differential games and applications. Math Methods Oper Res 85 :349–388.

[9] Savku E (2023) A stochastic control approach for constrained stochastic differential games with jumps and regimes. Mathematics 11(14) :3043.

[10] Song Q, Yin G, Zhang Z (2008) Numerical solutions for stochastic differential games with regime switching. IEEE Trans Autom Control 53(2) :509–521.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions un jeu différentiel stochastique à somme nulle à deux joueurs avec changement de régime. Plus précisément, nous considérons un jeu entre une chaîne de Markov et un processus d’état, qui sont deux processus stochastiques entièrement couplés.
Nous commençons par étudier la continuité des fonctions de valeur inférieure et supérieure sous certaines conditions, sur la base desquelles nous établissons le principe de programmation dynamique. Ensuite, nous démontrons que les fonctions de valeur inférieure et supérieure sont des solutions de viscosité uniques des équations de Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs associées, respectivement inférieure et supérieure, avec changement de régime.Ces deux fonctions de valeur coïncident sous la condition d'Isaacs, ce qui implique que le jeu admet une valeur.

Abstract

In this memory, we study a two-player zero-sum stochastic differential game with regime switching. More precisely, we consider a game involving a Markov chain and a state process, which are two fully coupled stochastic processes.

We first examine the continuity of the lower and upper value functions under certain conditions, which allows us to establish the dynamic programming principle. We then show that these value functions are the unique viscosity solutions to the associated Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for the lower and upper cases, respectively, in the context of regime switching. When Isaacs' condition holds, the two value function scoincide, implying that the game has a well-defined value.

الملخص

في هذه المذكرة، ندرس لعبة تفاضلية عشوائية ذات مجموع صفري بين لاعبين مع تبديل في النظام. نتناول تحديدًا لعبةً بين سلسلة ماركوف وحالة نظام ما، وهما عمليتان عشوائيتان مترابطتان تمامًا. نبدأ بدراسة استمرارية دوال القيمة الدنيا والعليا في ظل ظروف معينة، والتي بناءً عليها نُرسي مبدأ البرمجة الديناميكية. ثم نُثبت أن دوال القيمة الدنيا والعليا تُمثل حلولًا ضعيفة وفريدةلمعادلات هاملتون-جاكوبي-بيلمان-إسحاق الدنيا والعليا المرتبطة بها، وعلىالتوالي. تتطابق هاتان الدالتان في ظل شرط إسحاق، مما يعني أن للعبة قيمة.