République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : EDP

Par

BOUKHRIS Siham

Titre :

Sur les EDP d'ordre deux (formule de kirchoff)

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	LAIADI Abdelkader	UMKB	Président
Dr.	GUIDAD Derradji	UMKB	Encadreur
Dr.	BENBRAIKA Souad	UMKB	Examinatrice

02 Juin 2025

Dédicace

À celle qui a semé en moi l'amour du savoir et veillé des nuits entières pour moi,

À celle qui a toujours été mon soutien et mon appui tout au long de ma vie,

À ma chère mère, mon pilier inébranlable, mon refuge sûr,

Je te dédie le fruit de mes efforts et les années de mes études.

À mon futur mari, compagnon de route tant attendu, partenaire de mes rêves à venir…

Je t'offre cette réussite comme gage de fidélité et d'espoir en un avenir radieux, si Dieu le veut.

À ma sœur, à mes amis qui m'ont encouragée et soutenue,

À tous ceux qui m'ont appris une lettre et ouvert une porte de la connaissance,

Je vous dédie ce modeste travail en signe de ma gratitude et de ma reconnaissance

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu, par Sa grâce les bonnes actions s'accomplissent, et par Son immense faveur, nous avons achevé cette étape de notre parcours éducatif.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire, en particulier à Monsieur **Guidad derradji**, pour ses précieuses orientations, sa patience et son soutien constant tout au long de cette recherche.

Je ne saurais oublier de remercier chaleureusement l'ensemble des professeurs de la faculté qui nous ont généreusement transmis leur savoir en particulier **LAIADI Abdelkader** et **BENBRAIKA Souad**, ainsi que mes camarades avec qui nous avons partagé des années d'efforts et de persévérance.

Je ne peux que témoigner ma profonde reconnaissance à ma chère famille, mon premier soutien, en particulier ma mère et ma tante, sans oublier la souris de la maison, ma sœur, pour leurs encouragements constants, tant sur le plan moral que matériel. À eux, tout mon amour et ma gratitude.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Table des figures **v**

Liste des tables **vi**

Introduction **1**

1 Généralités et rappelles (sur EDP) **2**

1.1 Concepts préliminaires 2

1.1.1 Equations différentielles ordinaires 2

1.1.2 Equations aux Dérivées Partielles 3

1.1.3 Dimension et ordre d'une EDP 4

1.1.4 Linéarité et homogénéité 5

1.2 Equations aux dérivées partielles du premier ordre 6

1.2.1 E.D.P. linéaires du premier ordre 6

2 Quelques Méthodes de résolution d'équation d'ondes, et la formule de kirchoff **14**

2.1 Changement de variables 14

2.2 Rappels de Géometrie 16

2.3 L'équation d'onde en coordonnées sphérique 17

2.4 Formule de kirchoff 23

Bibliographie **26**

Annexe B : Abréviations et Notations **27**

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les équations aux dérivées partielles occupent une place fondamentale dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Parmi elles, l'équation des ondes se distingue comme un modèle central pour décrire la propagation des perturbations dans divers milieux, qu'il s'agisse d'ondes sonores, lumineuses ou mécaniques. L'étude de cette équation dans l'espace tridimensionnel $\mathbf{R}^3$est d'un intérêt particulier, tant sur le plan théorique que pratique.

Dans ce cadre, la formule de Kirchhoff joue un rôle essentiel. Elle fournit une solution explicite à l'équation des ondes homogène dans $\mathbf{R}^3$en termes des conditions initiales, à l'aide d'une représentation intégrale sur une sphère. Cette formule constitue un outil puissant permettant d'analyser le comportement des solutions dans l'espace et le temps, tout en mettant en lumière la manière dont les informations initiales se propagent à travers le milieu.

ce manuscrit est organisé de la façon suivante :

dans le premier chapitre, nous présentons une introduction aux equations dériveés partielles, ou ressemble toutes les notions et le resultats de base que nous utiliserons par suite.

la deuxième chapitre escpose quelques méthodes de résolution l'équation d'ondes, et le théoréme qui donne la formule de kirchoff

Chapitre 1

Généralités et rappelles (sur EDP)

1.1 Concepts préliminaires

1.1.1 Equations différentielles ordinaires

L'exemple le plus simple est lorsque la fonction u dépend d'une seule variable.

Cette relation est donc simplement décrite parce qu'on appelle une EDO.

Définition 1.1.1 *EDO est une relation de type*

$$F(x, u(x),\ u^{'}(x),\ u^{''}(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0 \quad , \qquad \textbf{\textit{(1.1)}}$$

entre la variable $x \in R$ (parfois $x \in I \subset R$) et la dérivée de la fonction u inconnue au point x telle que

$$R^{n+2} \longrightarrow R$$

$$F : (x; y) \longrightarrow F(x; y)$$

avec $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in R^{n+1}$, n *est le nombre de variables*

Le mouvement d'un objet sur une ligne droite peut être décrit par l'équation $u''(x) = g(u(x)$: La variable x correspond au temps et la fonction u correspond à la position de l'objet. Dans ce cas $x \in I \subset R$ et

$$R^4 \longrightarrow R$$

$$F(x, y) \longrightarrow F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 - g(y_0)$$

1.1.2 Equations aux Dérivées Partielles

La généralisation de la définition précédente à l'aide de fonctions de quelques variables permet de construire le concept d'EDP. Nous commençons par définir l'ordre 1 de l'EDP

Définition 1.1.2 *Une équation aux dérivées partielles du premier ordre avec des variables indépendantes inconnues u et* $n, x_1, ..., x_n$ *est une équation de la forme*

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad \textbf{\textit{(1.2)}}$$

où $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$ *est l'ouverture de* R^n

Pour une fonction de deux variables, la défnition est donnée par

Définition 1.1.3 *La forme générale d'une EDP d'ordre 2 est*

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) = 0; \qquad \textbf{\textit{(1.3)}}$$

pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de R^2

Exemple 1.1.1 *L'équation suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\Omega = R^2$. Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme (1.3) ci-dessus. Il convient de noter que cela équivaut à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial y} - (x^2 + y^2) = 0$$

où

$$I \times R^3 \longrightarrow R$$

$$F : (x, y, u, z) \longrightarrow F(x, y, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_5 - (z_2)^2 - z_1 z_2 - (x^2 + y^2)$$

1.1.3 Dimension et ordre d'une EDP

La taille de l'équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u.

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre le plus élevé de la dérivée présente dans l'équation.

Exemple 1.1.2 *L'EDP suivante*

$$x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = e^{x+y}$$

est de dimension 2 et d'ordre 3.

1.1.4 Linéarité et homogénéité

Le concept de linéarité pour EDP implique des opérateurs différentiels. L'opérateur différentiel est un opérateur construit à partir de dérivées partielles de fonctions différentielles.

Définition 1.1.4 *Un EDP de u inconnu est dit linéaire s'il peut être mis sous la forme*

$$Lu = f \qquad \textbf{(1.4)}$$

où

L est un opérateur différentiel linéaire,

f est une fonction de n variables indépendantes défnie sur un domaine de $\mathbf{R}^n$.

Si $f = 0$, on dit que l'équation est une équation de similarité linéaire. Sinon, ce ne sera pas uniforme.

Exemple 1.1.3 *L'équation*

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

est linéaire non-homogène sur $\mathbf{R}^2$ car elle peut s'écrire sous la forme (1.4)

où

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire différentiel et $f(x;y) = 1$ *: Vérifions la linéarité de L : Soit* $(a,b) \in R^2$ *et soient* u_1, u_2 *deux fonctions suffisamment régulières, on a*

$$L(au_1 + bu_2) = (au_1 + bu_2) + y\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial x^2}$$

$$= a(\ u_1 + y\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}) + b(\ u_2 + y\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2})$$

$$= a(Lu_1) + b(Lu_2)$$

1.2 Equations aux dérivées partielles du premier ordre

1.2.1 E.D.P. linéaires du premier ordre

Définition 1.2.1 *On appelle une E.D.P. linéaire du premier ordre a deux variables réelles une équation fonctionnelle de la forme*

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z), \qquad (E)$$

dont l'inconnue est la fonction $z(x,y)$*, où* f, g *et* h *de classe* C^1

Exemple 1.2.1 *1.* $z\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1 - z^2}$

2. $(x^2 - 1)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 4xz = 0$

Systèmes différentiels-Intégrales premières

La résolution de l'équation aux dérivées partielles (E) fait en général appel aux systémes différentiels.

Définition 1.2.2 *Le systéme différentiel*

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = f(x,y,z); \\ \frac{\partial y}{\partial t} = g(x,y,z); \\ \frac{\partial z}{\partial t} = h(x,y,z); \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

qui s'écrit plus symétriquement

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \qquad \textbf{(S)}$$

s'appelle système caractéristique de ***(E)***

Définition 1.2.3 ***1.*** *La solution à Système (S) est appelée la courbe γ Ceci est la tangente des points(x,y,z) ou $\overrightarrow{V}$ n'est pas zéro.*

$\overrightarrow{V}$ Vector variable du composant $(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ la recherche d'une solution est donc la recherche de trois fonction (ϕ, ψ, η) telles qu'il esciste une fonction k(t) telle que

$$\frac{d\phi}{dt} = k(t) f[\phi(t), \psi(t), \eta(t)]$$
$$\frac{d\psi}{dt} = k(t) g[\phi(t), \psi(t), \eta(t)], \frac{d\eta}{dt} = k(t) h[\phi(t), \psi(t), \eta(t)]$$

$t \in [a,b]$ et $a, b \in \mathbf{R}$, (ϕ, ψ, η) est le paramètre de γ

2. *La premièr intégrale de Systéme (S) est appelée fonction u de classe $\boldsymbol{C}^1$ de trois variables x, y et z.*

Les fonctions $(\phi(t), \psi(t), \eta(t))$ sont constantes. En regardant le système de $\mathbf{R}^2$, la ligne Intégral est fonction de deux variables, donc $u[\phi(t), \psi(t)]$ est constante.

Théorème 1.2.1 *Les deux fonctions u et v sont fonctionnellement indépendantes dans un ouvert G de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si :*

le rang du déterminent

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$$

*est 2 dans **G**.*

Théorème 1.2.2 ***1****. Soit u et v deux intégrales premiéres indépendantes du système (S). Toute les intgrale premiére w de ce système s'exprimés alors en fonction de u et v, c-a-d qu'il existe F de classe $\boldsymbol{C}^1$, tels que $w = f(u, v)$.*

2.*Soit u une intégrale premiére du systéme $\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}$ toute untégrale premiére V de ce systéme s'exprime en fonction de u : il existe une fonction H telle que $v = H(u)$*

Théorème 1.2.3 *.**1**.Soient u et v deux intégrales premiéres indépendantes du système (S), alors pour tous les réels a et b , les courbe $\delta_{a;b}$ intersection des surface $u(x, y, z) = a$ et $v(x, y, z) = b$*

sont les solution à (S).

*2. Pour un systèmes dans $\boldsymbol{R}^2$, les solutions sont $u(x, y) = a$ où a varie dans **R.***

Théorème 1.2.4 ***1****. Pour trouver une intégrale premiére u de*

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}$$

on utilise cette égalité pour trouver A et B telle que : il existe u vérifiant :

$$du = A(x,y)dx + B(x,y)dy \text{ et } 0 = A(x,y)f(x,y) + B(x,y)g(x,y).$$

2. On procéde de façon analogue pour résoudre :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}$$

on cherche u et v indépendantes telles que :

$$du = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

(respectivement pour dv) et

$$0 = A(x,y,z)f(x,y,z) + B(x,y,z)g(x,y,z) + C(x,y,z)h(x,y,z).$$

Solution générale d'une E.D.P. linéaire du premier ordre

Soit l'$E.D.P$

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z) \qquad \textbf{(E)}$$

Théorème 1.2.5 *Pour résoudre l'équation (E) (ou h est non identiquement nulle) :*

1*. On examine si $h(x,y,z) = 0$ définit une solution.*

2*. Dans le domaine $h(x,y,z) \neq 0$, on cherche 2 intégrales premiéres u et v du systéme caractéristique*

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h} \qquad (S)$$

Toute solution est alors définie par

$$F[u(x,y,z), v(x,y,z)] = 0$$

F étant une fonction arbitraire.

Ou encore $v(x,y,z) = \varphi(u(x,y,z))$,$\varphi$ étant une fonction arbitraire.

Remarque 1.2.1 *Il faut qu'au moins une des fonctions u et v dépende de z.*

Exemple 1.2.2 *Soit (**E**) :* $z\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1 - z^2}$

Cas particulier : *(**E**) :*

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$z = k$ *est solution de (**E**) pour toute constante* k*, qu'on aurait obtenue par la méthode générale en cherchant des intégrales premiéres de*

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{0}$$

on retrouve que toute solution est de la forme

$$G(z, H(x, y)) = 0 \text{ ou } z = F(H(x, y)).$$

Probléme de Cauchy

On appelle courbe caractéristique de l'équation (**E**) les solutions de son systéme caractéristique (**S**).

Théorème 1.2.6 *Par chaque courbe* γ *caractéristique il passe une infinité de surfaces solutions.*

*– Par toute courbe caractéristique en aucun point passe une solution unique de (**E**), on l'appelle la solution au probléme de Cauchy relatif a* γ *.*

Théorème 1.2.7 ***(Résolution du probléme de Cauchy)***

soit

$$f(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y, z), \qquad (\boldsymbol{E})$$

et

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \qquad (\boldsymbol{S})$$

son systéme caractéristique. Pour trouver la solution de (E) qui contient une courbe γ *non caractéristique d'équation* $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \eta(t),$ *on élimine* t *entre les équations*

$$u(\phi(t), \psi(t), \eta(t) = a \ \text{ et } v(\phi(t), \psi(t), \eta(t) = b$$

obtenues au moyen de deux intégrales premiéres u *et* v *de (**S**). Ceci définit une fonction* $H(a,b) = 0.$

L'équation de la solution est

$$H[u(x,y,z), v(x,y,z)] = 0$$

Si $h = 0,$ *on noubliera pas que* z *est une intégrale premiére.*

E.D.P. non linéaires du premier ordre

Résolution de l'équation $\mathbf{A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0}$ ***Facteur intégrant***

Définition 1.2.4 *Soient* A *et* B *deux fonctions de classe* $\boldsymbol{C}^1$ *dans un ouvert* Ω *de* $\boldsymbol{R}^2$. *On appelle facteur intégrant de l'équation*

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0 \qquad (\boldsymbol{M})$$

une fonction μ *telle que :* $\frac{\partial}{\partial y}(uA) = \frac{\partial}{\partial x}(uB)$

Cas particulier : $\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$

Lorsque $\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$ *toutes les constantes sont des facteurs intégrants.*

$H(x, y) = \int_{x_0}^{x} A(u, y)du + \int_{y_0}^{y} B(x_0, v)dv$, $H(x, y) = 0$ *définit une solution de l'´equation* ***(M)***

passant par le point Ω *de coordonnées* (x_0, y_0).

Cas général :

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

si $\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$ *il faut trouver un facteur intégrant.*

Théorème 1.2.8 *Soient A et B deux fonctions de classe* C^1 *dans un ouvert* Ω *de* $\boldsymbol{R}^2$

1. *Toute solution* μ *de l'équation linéaire* $\frac{\partial}{\partial y}(uA) = \frac{\partial}{\partial x}(uB)$ *qui s'écrit aussi* $B(x, y)(\frac{\partial u}{\partial x}) - A(x, y)(\frac{\partial u}{\partial y}) = \mu(x, y)(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})$. *est un facteur intégrant*

2. *Si* μ_0 *est un facteur intégrant, a tout autre facteur intégrant* μ *est associée une fonction H qui définit implicitement une solution de l'équation (M) telle que* $\mu(x, y) = \mu_0(x, y)H(x, y)$.

Soit μ *un facteur intégrant, alors* $H(x, y) = \int_{x_0}^{x} u(u, y)A(u, y)du + \int_{y_0}^{y} u(x_0, v)B(x_0, v)dv$ *définit la solution de* ***(M)*** *qui passe par le point*(x_0, y_0).

Soit $B(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} - A(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x, y)(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})$ *l'équation des facteurs intégrants, soit u une intégrale premiére dépendant de* μ *du systéme caractéristique*

$$\frac{dx}{B} = \frac{-dy}{A} = \frac{du}{u(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})} \qquad \textbf{\textit{(H)}}$$

$u(x, y, \mu) = k$ *définit pour chaque valeur de la constante* k *un facteur intégrant.*

Exemple 1.2.3 *Résoudre* $(x + y)dx + dy = 0$

Solution 1.2.1 *On remarque que* $\frac{\partial A}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ *il faut chercher un facteur intégrant* μ *solution de*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x + y)) = \mu + (x + y)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

le systéme caractéristique est

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dx}{x + y} = \frac{d\mu}{u} = \frac{dln|\mu|}{1} = \frac{dx - dln|\mu|}{0}$$

donc

$x - ln|\mu|$ *est une intégrale premiére :* $x - ln|\mu| = 0$ *définit donc un facteur intégrant soit* $\mu = e^x$*.*

Il faut alors résoudre $e^x(x + y)dx + e^x dy = 0$ *;*

la solution qui passe par $x_0 = 0, y_0 = 0$ *est*

$$\int_0^x e^u(u + y)du + \int_0^y dv = (x + y - 1)e^x + 1.$$

Les solutions sont définies par $(x + y - 1)e^x = k$ *ou* $y = 1 - x + ke^{-x}$

On vérifie immédiatement que $dy = -dx - ke^{-x}dx = (y + x)dx$*.*

Chapitre 2

Quelques Méthodes de résolution d'équation d'ondes, et la formule de kirchoff

2.1 Changement de variables

Soit L'équation suivante :

$$a(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=F\left(x;y;u;\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (\varepsilon)$$

ou a,b,c sont des fonction données, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbf{R}^5$

Proposition 2.1.1 *On considère le changement de variables* $(\xi(x;y),\eta(x;y))$ *supposé deux fois continument différentiable, alors il existe des fonctions* a' ; b' ; c' *et* F' *telles que*

$$a'(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b'(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+c'(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})=F'\left(\xi;\eta;u;\frac{\partial u}{\partial \xi};\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \qquad (\varepsilon')$$

L'équation (ε') s'appelle la forme standard ou canonique de l'équation (ε). De plus, on a

$$\Delta'(\xi;\eta) = b'^2(\xi;\eta) - 4a'(\xi;\eta)c'(\xi;\eta) = J^2\Delta(x;y)$$

Preuve. *On pose $u(x;y) = v(\xi(x;y);\eta(x;y))$: On va écrire maintenant les différents dérivées dans l'équation (ε) en fonction des dérivées partielles de la fonction v.*

Pour cela, on utilise la règle de chaines pour exprimer les dérivées premières

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

On base sur les deux équations précédentes et encore une fois sur la règle de chaines, on exprime les dérivées secondes comme suit

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial xy} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}$

En substituant ces expressions dans (ε), l'équation suivante est obtenue

$$a'(x;y)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + b'(x;y)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c'(x;y)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = F'\left(\xi;\eta;u;\frac{\partial u}{\partial \xi};\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \qquad (\varepsilon')$$

où

$a' = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$

$b' = 2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$

$c' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$

$F'\left(\xi;\eta;u;\frac{\partial u}{\partial \xi};\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+a\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}+b\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+b\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}+c\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+$ $c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}+F''\left(\xi;\eta;u;\frac{\partial u}{\partial \xi};\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$

L'équation ε' est une EDP du second ordre dont son type est déterminer à l'aide de la formule suivante

$b'^2(\xi,\eta)-4a'(\xi,\eta)c'(\xi,\eta)=J^2\left(b^2(x;y)-4a(x;y)c(x;y)\right)$

comme $J\neq 0$, les deux équations ε et ε' sont de même type. ■

2.2 Rappels de Géometrie

Soit $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ un point de R^3.

les coordonnées sphérique d'origine P_0 sont définies comme indiqué sur la figure par l'angle polaire φ, l'angle azimutal θ et le module ρ ; $\theta\in[0,\pi]\,,\varphi\in[0,2\pi]$ et $\rho\in R^+$.

soit $P=(x,y,z)$ alors :

$$x-x_0=\rho\sin\theta\cos\varphi$$

$$y-y_0=\rho\sin\theta\sin\varphi$$

$$z-z_0=\rho\cos\theta$$

on notra $B(P_0,r)$ la boule $|P_0P|^2\leq r^2$ de centre P_0 et de rayon r et $S(P_0,r)$ la sphére $|P_0P|^2=r^2$. le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$, normal a la sphére au point P et dirigé vers l'extérieur de celle$-$ci est :

$$\overrightarrow{n}=\begin{cases}\alpha=\sin\theta\cos\varphi\\ \beta=\sin\theta\sin\varphi\\ \gamma=\cos\theta\end{cases}$$

En coordonnées sphérique l'élément de volume est :

$dv=\rho^2\sin\theta d\theta d\rho d\varphi$ et l'élément de surface sur $S(P_0,\rho)$ est : $\mathrm{d}\sigma=\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi$.

Définition 2.2.1 *Soit Φ une fonction continue dans une boule $B(P_0,\rho)$,soit $r\leq R$ on appelle moyenne de Φ sur $S(P_0,r)$ la quantité :*

$$M_\Phi(P_0,r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{S(P_0,r)}\Phi\left(x,y,z\right)d\sigma$$

on peut l'exprimer de facon simple :

$$M_\Phi(P_0,r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}r^2\sin\theta\Phi\left(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta\right)d\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\Phi\left(x_0+r\alpha,y_0+r\beta,z_0+r\gamma\right)\sin\theta d\theta d\varphi$$

si $\Phi=c$ est une constante $M_c(P_0,r)=\frac{c}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi=c$

2.3 L'équation d'onde en coordonnées sphérique

Soit l'équation d'onde (en trois dimensions)

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2})$$

est égale en coordonnées sphériques : $x=r\sin\left(\phi\right)\cos\left(\theta\right),y=r\sin\left(\phi\right)\sin\left(\theta\right),z=$

$r\cos(\phi)$ à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot an\,(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

Nous avons que

Méthode1 :

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$$

Conséquemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{x^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\
& - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{2x^2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\
& - \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\
& + \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2z(x^2+y^2+z^2) - 2x^2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{y^2 z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &+ \frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{2y^2 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \\ &+ \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(x^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &- \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2 z(x^2+y^2+z^2) - 2y^2 z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\ &+ \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &+ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Parce que $x^2+y^2+z^2 = r^2$ et $x^2+y^2 = r^2\sin^2(\phi)$, nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

Alors l'équation d'ondes en coordonnées sphériques est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)$$

Méthode 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot an(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

$$x = r \sin\phi \cos\theta \;, y = r \sin\phi \sin\theta \;, z = r \cos\phi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (\sin\phi \cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y} (\sin\phi \sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z} (\cos\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ )\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right)\right] \\
&+ \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right] \\
&+ \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right] \\
&= \sin^2\phi\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\phi\sin\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (\sin\phi\cos\theta\ \ \cos\phi)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\
&+ \sin^2\phi\sin\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\phi\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin\phi\cos\theta\ \ \cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \\
&+ \cos\phi\sin\phi\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos\phi\sin\phi\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&= \sin^2\phi\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\
&+ \sin^2\phi\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sin\phi\cos\phi\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\phi\sin\theta) - \frac{\partial u}{\partial z}r\sin\phi$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\phi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\phi\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial z}r\sin\phi\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi\cos\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}r^2\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta \\
&- 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}r^2\cos\phi\cos\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}(-r\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\phi\sin^2\theta \\
&- 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}r^2\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial z}(-r\cos\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}r^2\sin^2\phi
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\sin\phi\cos\theta)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\phi \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \sin\phi\cos\theta\right] \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\phi\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2\phi \sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin^2\phi \sin\theta\cos\theta \\
&- \frac{\partial u}{\partial y} r \sin\phi\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \sin^2\phi\cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\begin{array}{c}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2\phi \cos + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\
+\sin^2\phi\cos^2\theta \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\
+\frac{2}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2\phi\cos^2\theta \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta \\
-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\phi\cos\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{r}\sin\phi\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\phi\sin^2\theta \\
-2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\phi\sin\theta\sin\phi - \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\phi + \frac{1}{r}\frac{\cos^2\phi\cos\theta}{\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial x} \\
\frac{1}{r}\frac{\cos^2\phi\sin\theta}{\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\sin\phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\phi \\
-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\sin\phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\phi
\end{array} \right)
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\begin{array}{c}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\right) \\
+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta + 2\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right) \\
+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\left(2\sin\phi\cos\phi\cos\theta - 2\cos\phi\cos\phi\sin\phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(2\sin\phi\cos\phi\sin\theta - 2\cos\phi\sin\theta\sin \right. \\
+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\sin\phi\cos\theta + \frac{\cos\theta\left(\cos^2\phi - 1\right)}{\sin\phi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\sin\phi\sin\theta + \frac{\sin\theta\left(\cos^2\phi-1\right)}{\sin\phi}\right)
\end{array} \right.
$$

Donc :

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)
$$

2.4 Formule de kirchoff

Théorème 2.4.1 *Soit (E)* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ *l'équation des ondes dans*R^3.

Soit $\alpha = \sin\theta\cos\varphi$, $\beta = \sin\theta\sin\varphi$ *et* $\gamma = \cos\theta$.

A. pour toute fonction g de classe C^2 *dans* R^3 *il existe une seule solution de (E) telle que :*

$$u(x,y,z) = 0 \ et\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = g(x,y,z);$$

cette solution est $u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\int_{S(P_0,ct)} g(x,y,z)d\sigma$.

$u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} g(x_0+ct\sin\theta\cos\varphi, y_0+ct\sin\theta\sin\varphi, z_0+ct\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi$

, ce qu'on peut aussi écrire :

$u\left(P_0,t\right) = tM_g\left(P_0,ct\right)$ *: la valeur de u en* P_0 *a l'instant t est égale a t fois la moyenne de g sur la sphére de centre* P_0 *et de rayon ct . (Il s'agit de la sphére et non de la boule !)*

B. pour toute fonction g de classe c^2 *et toute fonction f de classe* c^3 *il existe une seule solution u de (E) telle que :*

$u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = g(x,y,z);$

cette solution est donnée par la formule de KIRCHOFF :

$u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\int_{S(P_0,ct)} g(x,y,z)d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\int_{S(P_0,ct)} f(x,y,z)d\sigma\right]$

$u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int\int_{S(P_0,ct)}\left[tg(x,y,z) - f(x,y,z) + ct\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)\right]d\sigma,$

ce qui peut aussi s'écrire :

$u(x_0,y_0,z_0,t) = tM_g\left(P_0,ct\right) + \frac{d}{dt}\left[tM_f\left(P_0,ct\right)\right]$ *, et en posant* $h = tg - f + \left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

et on obtient la formule :

$u(x_0,y_0,z_0,t) = M_h\left(P_0,ct\right)$ *(ou h dépend de t).*

Preuve. *Soit u une fonction de classe* c^2*, nous allons calculer*

$\int\int\int_{B(P_0,r)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x,y,z\right)dxdydz$ *et* $\int\int\int_{B(P_0,r)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz.$

a. $\int\int\int_{B(P_0,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z)\,dxdydz =$

$=\int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho^2\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0+\alpha\rho, y_0+\beta\rho, z_0+\gamma\rho)\,d\rho d\theta d\varphi$

$=\int_{\rho=0}^{r}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}u(x_0+\alpha\rho, y_0+\beta\rho, z_0+\gamma\rho)\,d\theta d\varphi\right]d\rho$

$=\int_{\rho=0}^{r}\rho^2 4\pi\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(\rho,t)\,d\rho$ *ou* $M_{u(\rho,t)}$ *désigne* $M_{u(t,x,y,z)}(p_0,\rho)$.

b. Soit $\overrightarrow{v}$ *le vecteur de coordonnées* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ $(\overrightarrow{v} = \operatorname{grad} u)$

$\int\int\int_{B(P_0,r)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz = \int\int_{S(P_0,r)}\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{v}\,d\sigma$

$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right)(x_0+\alpha r, y_0+\beta r, z_0+\gamma r)\,r^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$=r^2\frac{\partial}{\partial r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}u(x_0+\alpha r, y_0+\beta r, z_0+\gamma r)\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2\frac{\partial M_u}{\partial r}(r,t)$.

c. Si u est solution de (E) $\int\int\int\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]dxdydz = 0$

donc $c^2 r^2\frac{\partial M_u}{\partial r}(r,t) = \int_0^r \rho^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(\rho,t)\,d\rho$ *et*

$r^2c^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2}(r,t)+2rc^2\frac{\partial M_u}{\partial r}(r,t) = r^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(r,t)$

soit$N_u(r,t) = rM_u(r,t)$ *,si u est solution de (E) :*

$c^2\frac{\partial^2 N_u}{\partial r^2}(r,t) = \frac{\partial^2 N_u}{\partial t^2}(r,t)$ *de plus* N_u *vérifie les conditions :*

$$(F_1)\begin{cases} N_u(r,0) = rM_u(r,0) = 0 \\ N_u(0,t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}[N_u(r,0)] = r\frac{\partial M_u}{\partial t}(r,0) = rM_g(r) \end{cases}$$

supposons $r \le ct$ *alors* $N_u(r,t) = \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r}\rho M_g(\rho)\,d\sigma$.

pour trouver $u(x_0, y_0, z_0, t)$ *nous utilisons la relation :*

$u(x_0, y_0, z_0, t) = \lim_{r\to 0} M_u(r,t)$.

or $\lim_{r\to 0} M_u(r,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[N_u(r,t)] = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[N_u(r,t)-N_u(0,t)] = \frac{\partial N_u}{\partial r}(0,t)$,

or $\frac{\partial N_u}{\partial r}(r,t) = \frac{1}{2c}[(ct+r)M_g(ct+r)+(ct-r)M_g(ct-r)]$; *donc* $\frac{\partial N_u}{\partial r}(0,t) = tM_g(ct)$

ce qui est le résultat annoncé.

on établit le second résultat d'une façon analogue : on cherche u qui vérifie $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 0$. N_u *vérifie alors les conditions suivantes :*

$$(F_2)\begin{cases} N_u\left(r,0\right)=rM_u\left(r,0\right)=rM_f(r) \\ N_u\left(0,t\right)=0 \\ \frac{\partial}{\partial t}N_u\left(r,0\right)=0 \end{cases}$$

alors $N_u\left(r,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(r+ct\right)M_f\left(r+ct\right)-\left(ct-r\right)M_f\left(ct-r\right)\right]$ *pour* $ct\geq r$;

$\frac{\partial N_u}{\partial r}\left(r,t\right)=\frac{1}{2}\left[M_f\left(r+ct\right)-M_f\left(ct-r\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(r+ct\right)M_f'(r+ct)+(ct-r)M_f'(ct-r)\right]$

et $u(x_0,y_0,z_0,t)=M_f\left(ct\right)+ctM_f'\left(ct\right)=\frac{d}{dt}\left[tM_f\left(ct\right)\right].$

La solution qui vérifie à la fois $\begin{cases} u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=g(x,y,z) \end{cases}$

ne peut ètre que $tM_g(ct)+\frac{d}{dt}\left[tM_f\left(ct\right)\right].$

Les formules ainsi obtenues expriment la forme nécessaire d'une solution de (E) vérifiant les conditions imposéés.

Il faudrait vérifier qu'une telle expression est bien une solution de (E) vérifient les conditions .

C'est un calcul long et un peu délicat que nous ne ferons pas. ∎

Bibliographie

[1] KELLECHE, A. (2020).Équations de la physique mathématique. Université DjilaliBounâama, Khemis Miliana, Ain defla, Algérie..

[2] GUIDAD, D. (2022) ,cour Équations de la physique mathématique. Université Biskra, Algérie.

[3] Saleh, Z., & Khaled, Z. (2012). Équations aux dérivées partielles de nature physique. Édition universitaires européennes.

[4] Hervé, R. (2001). Équations aux dérivées partielles. Édition Dunod.

[5] Baddari, K., & Abbassov, A. Equations de la physique mathématique appliquées. Edition OPU(2009).

[6] Bezard, M. (1996). Equations aux dérivées partielles. Ecole nationale supérieure des techniques avancées.

[7] R. Bédard, Notes pour le cours Calcul I (Sigle : MAT 4112), offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec a Montréal, 2007.

[8] C. David, P. Gossflet, Equations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2015.

[9] A. Martin, Exercices résolus Equations aux dérivées partielles . Dunod, Paris 1991.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDP	:	Équation aux dérivées partielles
t	:	temps a dimensionnel
$\frac{\partial}{\partial t}$	:	Dérivées partielle

Δ : Le discriminant

Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est de trouver des solutions à l'équation d'onde dans R^3 qui est la formule de kirchoff

Mots clés :

l'équation d'onde-- la formule de kirchoff

Abstract :

The main objective of this memory is to find solutions to the wave equation in R^3 which is kirchoff's formula

Key words :

the wave equation-- kirchoff's formula

الملخص :

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو إيجاد حلول معادلة الموجات في البعد الثالث والذي هو عبارة عن صيغة كيرشوف

الكلمات المفتاحية :

معادلة الموجات-- صيغة كيرشوف