

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Probabilités et statistique**”

Option : Probabilité

Par : **Djaghroui Khadidja**

Titre :

Sur une classe de control stochastique optimal singulier et
application

Devant le Jury :

Mr.	Chala Adel	Dr	U. Biskra	Président
Mr.	Abba Abdelmadjid	Dr	U. Biskra	Encadreur
Mme.	Labed Saloua	Dr	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 02/06/2025

Dédicace

À ceux que j'ai perdus, mais dont la présence reste ancrée en moi,

À mon cher père **Djemel** et à ma grand-mère **Fatma** bien-aimée, que Dieu leur
accorde Sa miséricorde et les accueille dans son vaste paradis.

À mon frère, une part de mon cœur et la prunelle de mes yeux, **Younes**, qu'Allah
lui accorde la guérison et la santé.

À ma mère

À mes sœurs **Mariem**, **Karima** et **Ferial**.

À ma cousine **Amina** et à mon cousin **Hassan**, Merci du fond du cœur pour votre
présence sincère et constante, Pour avoir été mon refuge dans les moments
difficiles, Votre soutien a été une force silencieuse mais puissante .

À vous tous, je dédie humblement ce travail, en témoignage d'amour, de gratitude et
de fidélité

Remerciements

Avant tout, nous remercions **Allah** tout puissant de nous avoir donné la volonté et la courage de mener ce travail.

Je remercie sincèrement monsieur **Dr. Abba Abdelmadjid**, mon encadrant, pour ses conseils, sa disponibilité et son accompagnement tout au long de ce travail. Sa patience et son soutien m'ont beaucoup aidé.

Je remercie également les membres du jury : **Chala Adel** et **Labed Saloua** pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie aussi tous les enseignants du département de mathématiques pour leurs efforts et leurs enseignements tout au long de ma formation.

Un grand merci à mes camarades et amis pour leur aide, leur motivation et les bons moments partagés pendant cette période.

Notations et symbols

$(\Omega, \mathcal{F}) :$	Espace mesurable.
$(\mathcal{F}_t)_{t>0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé.
$L^0(\mathcal{F})$	L'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}$ -mesurables.
$L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$	L'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}$ -mesurables et intégrables par rapport à la probabilité de $\mathbb{P}$
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé filtré.
$dt - p.p$	Presque partout par rapport la mesure dt .
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$B(\mathbb{R}^d)$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$
C^1	Ensemble des fonctions un efois dérivables et la première dérivée est continue
C^2	Ensemble des fonctions deux fois dérivables et la dérivée seconde est continue
EDS	Equations Différentielles Stochastiques.
U	Ensemble de controles admissibles.
$J(.)$	La fonction de coût à minimiser.
u^*	Controle optimal.
$H(t, x_t, u_t, p_t)$	Hamiltonien.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	i
Notations et symbols	iii
Table des matières	iv
1 Généralités et rappels	3
1.1 Rappels fondamentaux sur les probabilités	3
1.1.1 Processus stochastique	4
1.1.2 Espérance conditionnelle	5
1.1.3 Mouvement brownien	6
1.1.4 Martingales	7
1.1.5 Calcul d'Itô	7
2 Equation différentielles stochastiques	10
2.1 Quelques inégalités classiques	10
2.1.1 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy(BDG)	10
2.1.2 lemme de Gronwall	11
2.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz	11

2.1.4	Inégalité de Doob	11
2.2	Définition et formulation des EDS	12
2.3	Existence et unicité des solution des EDS	12
3	Classe de contrôle optimal stochastique	18
3.1	Contrôle	18
3.1.1	Classes de contrôles	18
3.2	Critère de coût ou performance	21
3.3	Méthodes de résolution en contrôle stochastique	22
3.3.1	Principe de programmation dynamique	23
3.3.2	Principe du maximum de Pontryagin	24
3.4	Principe du maximum pour un controle singulier	26
3.4.1	Hypothèses et énoncé du problème de controle	27
	Conclusion	35
	Bibliographie	37

Introduction

*L*e contrôle stochastique optimal constitue un domaine fondamental des mathématiques appliquées, visant à optimiser un critère (coût ou gain) dans des systèmes dynamiques influencés par des perturbations aléatoires. Lorsqu'on considère des interventions non régulières du contrôleur, on entre dans le cadre des problèmes de contrôle singulier, caractérisés par une plus grande complexité analytique et des défis théoriques notables.

Ce mémoire s'inscrit dans une démarche purement théorique, avec objectif d'étudier une classe particulière de ces problèmes : le contrôle stochastique optimal singulier. Nous développons les outils mathématiques nécessaires pour formuler et démontrer les conditions d'optimalité, notamment à travers un principe du maximum stochastique.

Pour structurer cette étude, le travail s'articule en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions fondamentales des probabilités et des processus stochastiques.

Le deuxième chapitre traite des équations différentielles stochastiques (EDS). Après avoir établi les inégalités de base (Gronwall, Burkholder-Davis-Gundy...), nous définissons les EDS, étudions leurs conditions d'existence et d'unicité, et présentons des résultats clés liés à la stabilité des solutions.

Le troisième chapitre constitue le cœur du mémoire. Il est dédié à l'étude du contrôle stochastique optimal, avec un accent particulier sur le cas singulier. On y explore les différentes classes de contrôles, les critères de performance, les méthodes de résolution (programmation dynamique, principe du maximum de Pontryagin), et enfin, on déve-

loppe une formulation complète du principe du maximum dans le cadre singulier, en établissant les hypothèses nécessaires et les équations adjointes associées.

Ce travail a pour vocation de poser un cadre rigoureux pour l'analyse du contrôle singulier, ouvrant la voie à des études ultérieures plus poussées, aussi bien du point de vue théorique qu'éventuellement numérique ou appliqué.

Chapitre 1

Généralités et rappels

1.1 Rappels fondamentaux sur les probabilités

Définition 1.1.1 Une *tribu* (σ -algebra en Anglais) $\mathcal{F}$ sur Ω , ensemble quelconque non vide, est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ est stable par complémentarité i.e. $(\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{F})$,
3. $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable i.e. $(\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{F}, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F})$.

Définition 1.1.2 Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est dit *espace mesurable* ou *espace probabilisable*, les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les ensembles mesurables.

Définition 1.1.3 Soit $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle *tribu engendrée* par $\mathcal{A}$ l'intersection de tous les tribus contenant $\mathcal{A}$, notée $\sigma(\mathcal{A})$.

Définition 1.1.4 Soit (Ω, τ) un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur Ω , la tribu engendrée par τ , i.e., $\sigma(\tau)$, notée $\mathcal{B}(\Omega)$.

Définition 1.1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle *mesure* sur $\mathcal{F}$ toute fonction d'ensemble μ définie sur $\mathcal{F}$ positive telle que :

1. $\forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \infty$,

2. Si (A_n) sont deux à deux disjoints ($A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) alors :

$$\mu \left(\bigcup_n A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est alors appelé *espace mesuré*.

Notons que si $\mu(\Omega) = 1$, alors μ est dite *mesure de probabilité* et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est dit *espace probabilisé*.

Définition 1.1.6 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et (E, Σ) deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, \Sigma)$ *mesurable* si :

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \Sigma$$

où

$$f^{-1}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in \Omega / f(w) \in A\}.$$

Dans le cas où Σ est une tribu borélienne, on écrira simplement $\mathcal{F}$ -mesurable.

1.1.1 Processus stochastique

soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$

Définition 1.1.7 (La filtration) soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration sur cet espace est une famille croissante $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ de sous tribu de $\mathcal{F}$. On a alors, pour tous $0 \leq s \leq t$:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilité filtré**.

Définition 1.1.8 (*Processus stochastique*) un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variable aléatoires $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ définies sur le même espace de probabilité.

Définition 1.1.9 (*La mesurabilité*) un processus X est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :

$$([0, +\infty[\times \Omega, B([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)) \\ (t, w) \longrightarrow X_t(w)$$

- On dit que le processus est **à trajectoires continues** (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w .
- Un processus est dit **càdlag** (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour **càglad**.

Définition 1.1.10 Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit **adapté** (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout t .

1.1.2 Espérance conditionnelle

Notons $L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}$ -mesurables et intégrables par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Définition 1.1.11 Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ -mesurable sur Ω telle que :

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

1. *Linéarité.* Soit $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

2. *Monotonie.* Soit X et $Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ telles que $X \geq Y$. Alors

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}),$$

en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0.$$

3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$, $\forall X \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$.
4. $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, pour toute $X \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et Y $\mathcal{G}$ -mesurable telles que $XY \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$.
5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

(La démonstration voir [4]).

1.1.3 Mouvement brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.1.12 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :*

1. $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.
3. $\forall n, \forall t_i, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.

1.1.4 Martingales

Définition 1.1.13 Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Un processus stochastique $(X_t, t \geq 0)$, $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que $\mathbb{E}(X_t) < \infty$, est dit :

1. *Martingale* si :

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \quad \forall t, s \in I, s \leq t.$$

2. *Sous martingale* si :

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s, \quad \forall t, s \in I, s \leq t.$$

3. *Sur martingale* si :

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s, \quad \forall t, s \in I, s \leq t.$$

Remarque 1.1.1 Si B est un MB, alors $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ est $\{\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t \geq 0}$ sont des martingales.

Définition 1.1.14 (*Temps d'arrêt*) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ $\mathcal{F}$ -mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ telle que :

$$\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

1.1.5 Calcul d'Itô

Intégrale d'Itô

Définition 1.1.15 L'intégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et $(\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité.

Formule d'Itô

Théorème 1.1.1 (Première formule d'Itô) Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds, \forall t \leq T.$$

La notion infinitésimale de cette relation est :

$$df(B_s) = f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}f''(B_s)ds.$$

Théorème 1.1.2 (Deuxième formule d'Itô) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t de classe C^2 par rapport à x . On a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{x,x}(s, X_s)d\langle X, X \rangle_s.$$

Processus d'Itô

Définition 1.1.16 Un processus d'Itô est un processus de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T |b_s| ds < \infty \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty \text{ p.s.}$$

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus b et σ . Afin de pouvoir présenter ici la démonstration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer les conditions d'intégrabilités suivantes :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |b_t|^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T |\sigma_t|^2 ds \right] < \infty.$$

Chapitre 2

Equation différentielles stochastiques

Ce chapitre traite des équation différentielles stochastique (EDS), essentielles pour modéliser les systèmes dynamiques soumis à des perturbations aléatoires. Nous présentons d'abord les outils théoriques nécessaires, tels que le **lemme de Gronwall** et certaines inégalités fondamentales. Ensuite, nous étudions **l'existence et l'unicité** des solutions des EDS en utilisant **l'itération de Picard**. Enfin, nous analysons le cas des EDS linéaires et leur rôle dans le **contrôle stochastique optimal**, posant ainsi les bases pour le chapitre suivant.

2.1 Quelques inégalités classiques

2.1.1 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy(BDG)

L'inégalité de **(BDG)** est une estimation importante pour les intégrales stochastiques. Elle permet de contrôler la norme L^P du supremum d'une martingale par la norme L^P de sa variation quadratique.

Théorème 2.1.1 *Soit B un mouvement brownien (en dimension d). Il existe une constante*

$C_P \geq 1$, pour tout $p > 0$ tel que pour tout temps d'arrêt T on a :

$$E \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^p \right] \leq C_P E \left[\left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right].$$

2.1.2 lemme de Gronwall

Le **lemme de Gronwall** est un outil essentiel pour montrer l'unicité des solutions des EDS. Il permet d'obtenir une borne exponentielle sur une fonction qui satisfait une inégalité intégrale.

Lemme 2.1.1 Soient f et ϕ deux fonctions continues sur $[0, T]$ non négatives, c_0 une constante positive,

Si :

$$\phi(t) \leq c_0 + \int_0^t f(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors :

$$\phi(t) \leq c_0 \exp \int_0^t f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

2.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f, g deux fonctions carré intégrables on a :

$$E(fg) \leq [E(f^2)E(g^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.4 Inégalité de Doob

Théorème 2.1.2 Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable :

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [M_n^2].$$

En particulier,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [M_n^2].$$

2.2 Définition et formulation des EDS

Définition 2.2.1 Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, \quad (2.1)$$

ou sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X . Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (2.1) est un processus X continu $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$ ont un sens et l'égalité (2.1) est satisfaite pour tout t , $\mathbb{P}$ p.s.

Le coefficient b s'appelle la dérive et σ est appelé diffusion.

2.3 Existence et unicité des solutions des EDS

Théorème 2.3.1 (Existence et unicité) Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $k > 0$, avec

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k|x - y|$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k(1 + |x|)$.

$$3. \mathbb{E}(|x|^2) < \infty.$$

alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation (2.1) possède une unique solution dans l'intervalle $[0, T]$. De plus cette solution vérifie :

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < +\infty.$$

Preuve. Notons par H^2 l'espace de Banach constitué des processus X_t progressivement mesurables tel que :

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < +\infty.$$

H_c^2 est le sous-espace de H^2 formé par des processus continus.

– Existence

Nous utilisons la **méthode itérative de Picard** pour construire la solution. Nous définissons une suite de processus X_t^n par récurrence comme suit :

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x. \\ X_t^1 &= x + \int_0^t b(s, x) ds + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s \\ X_t^n &= x + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s. \end{aligned}$$

Par récurrence, nous prouvons que chaque X_t^n est **continu et adapté**, ce qui garantit que les intégrales stochastiques sont bien définies.

Nous montrons qu'il existe une constante C_n telle que, pour tout $t \in [0, T]$, l'espérance de $(X_t^n)^2$ est bornée :

$$E((X_t^n)^2) \leq C_n. \quad (2.2)$$

Pour garantir la convergence de la suite (X_t^n) , nous utilisons une estimation de la fonction σ :

$$|\sigma(s, y)| \leq k' + k|y|, \forall s \in [0, T], y \in \mathbb{R}.$$

En appliquant cette majoration, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 E[(X_t^n)^2] &\leq 3 \left(|x|^2 + E \left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \right)^2 \right] + E \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s \right)^2 \right] \right) \\
 &\leq 3 \left(|x|^2 + t E \left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds \right) \right] + E \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right) \right] \right) \\
 &\leq 3 \left(|x|^2 + 4(1+T) E \left[\int_0^t (K'^2 + K^2 (X_s^{n-1})^2) ds \right] \right) \\
 &\leq C_n \text{ avec } C_n = 3 \left(|x|^2 + 4T(1+T)(K'^2 + K^2 C_{n-1}) \right).
 \end{aligned}$$

Pour justifier le calcul du **moment d'ordre deux** de l'intégrale stochastique, nous utilisons l'hypothèse :

$$E \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right) \right] \leq \infty.$$

Cette condition est obtenue grâce aux hypothèses sur σ et à l'argumentation précédente.

Par ailleurs, la majoration :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k|x - y|,$$

et l'hypothèse sur σ impliquent que le processus

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s,$$

est une **martingale locale bornée** dans L^2 sur l'intervalle $[0, T]$.

Nous utilisons cette propriété pour estimer :

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right].$$

Nous avons :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})) dB_s.$$

En appliquant l'inégalité de **Doob**, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \\ & \leq 2E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1})) dr \right|^2 \right] + 2E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1})) dB_r \right|^2 \right] \\ & \leq 2 \left(4E \left[\left(\int_0^t (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1})) dr \right)^2 \right] + 4E \left[\left(\int_0^t (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1})) dB_r \right)^2 \right] \right) \\ & \leq 2 \left(4C E \left[\int_0^t (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1}))^2 dr \right] + 4T E \left[\int_0^t (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1}))^2 dr \right] \right) \\ & \leq 8(C+T)k^2 E \left[\int_0^t |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 du \right] \\ & \leq C_T E \left[\int_0^t \sup_{0 \leq u \leq r} |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 dr \right]. \end{aligned}$$

Nous notons :

$$C_T = 8(C+T)K^2.$$

Si nous définissons :

$$w_n(u) = E \left[\sup_{0 \leq s \leq u} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2 \right], \text{ alors nous obtenons : } w_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t w_n(u) du.$$

D'autre part, en utilisant l'équation [2.2](#) et les estimateurs précédentes, on montre que la suite des fonctions w_n est **bornée** sur $[0, T]$.

En particulier, il existe une constante C'_t telle que :

$$w_0(t) \leq C'_t, \forall t \in [0, T].$$

Par récurrence et en appliquant l'inégalité (2.2), on montre que pour tout $n \geq 0, t \in [0, T]$, on a :

$$w_n(t) \leq C'_T (C_T)^n \frac{T^n}{n!}.$$

D'après cette dernière inégalité, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\| \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| \right\|_{L^1} &\leq \sum_{n \geq 0} \left\| \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{C'_T} \sum_{n \geq 0} \frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sup_t |X_t^{n+1} - X_t^n|$ converge p-p.s, et donc X^n converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus X continu.

De plus, comme la convergence se produit dans H^2 , nous avons : $X \in H^2$.

on peut alors vérifier que X est bien solution de l'équation (2.1).

– **Unicité de la solution :**

Supposons qu'il existe deux solutions X et X' vérifiant l'équation (2.1). Pour tout $t \in [0, T]$, nous avons :

$$X(t) - X'(t) = \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) - b(s, X'_s) ds.$$

En utilisant l'inégalité classique :

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \text{ nous obtenons l'estimation suivante :}$$

$$\begin{aligned} E(|X(t) - X'(t)|^2) &\leq 2E \left[\left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s \right|^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[\left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds \right|^2 \right] \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse de Lipschitz sur b , nous avons :

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds \right|^2 \right] &\leq T E \left[\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, X'_s)|^2 ds \right] \\ &\leq L^2 T \int_0^t E [|X_s - X'_s|^2] ds. \end{aligned}$$

De même, pour le second terme par l'hypothèse de Lipschitz sur σ , nous utilisons

l'isométrie d'Ito :

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s \right|^2 \right] &= E \left[\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)|^2 ds \right] \\ &\leq L^2 \int_0^t E [|X_s - X'_s|^2] ds.. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités, nous obtenons :

$$E(|X(t) - X'(t)|^2) \leq (L^2 T + L^2) \int_0^t E [|X_s - X'_s|^2] ds.$$

Par le **lemme de Gronwall**, il en résulte que :

$$E(|X(t) - X'(t)|^2) = 0, \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique que $X(t) = X'(t)$ presque sûrement, prouvant l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique 2.1.

■

Chapitre 3

Classe de contrôle optimal stochastique

*D*ans ce chapitre, nous présentons les principales classes de contrôles stochastiques et les méthodes utilisées pour leur résolution, notamment le principe de programmation dynamique et le principe du maximum.

3.1 Contrôle

Un contrôle est un processus $(u_t)_t$ adapté par rapport à une filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A .

3.1.1 Classes de contrôles

Contrôle optimal

On dit que le contrôle u est optimal si :

$$J(u^*) \leq J(u), \quad \forall u \in U. \quad (3.1)$$

Contrôle presque optimal

u^ε est un contrôle presque optimal (ou ε -optimal) si pour tout contrôle $u \in U$ on a :

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon, \quad \forall u \in U, \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mesurable et $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans une borélienne A de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles :

$$U = \{u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow A, \text{ tel que } u \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}. \quad (3.2)$$

Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0, T] \times A$ dont la projection sur $[0, T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt munie de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borélienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \rightarrow \int f(s, a)q(ds, da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurée, limitée et continue en a .

Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(w, dt, da)$ à valeur dans V telle que pour chaque t , $\mathbf{1}_{[0, t]}$ q est $\mathcal{F}_t$ -mesurable ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$). Tout contrôle relaxé peut être intégré en $q(w, dt, da) = dtq(w, t, da)$ où $q(t, da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

Contrôle feed-back

Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t$ -adapté, et soit $\{\mathcal{F}_t^X\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X . Si u_t est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$ on dit que u_t est feed-back contrôle. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si u dépend de X .

Arrêt optimal

Généralement, dans les modèles de contrôles en finance, l'horizon du problème est fixé, soit fini soit infini. Il existe de nombreuses applications où le contrôleur a aussi la possibilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation est appelé problème d'arrêt optimal. Dans la formulation générale de tels problèmes, le contrôle est mixte, constitué du couple contrôle-temps d'arrêt (u, τ) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau f(t, X_t, u_t) dt + g(X_\tau) \right].$$

Ces problèmes interviennent dans la finance typiquement dans la valorisation des options américaines où, en plus des options européennes, le détenteur de l'option peut exercer son droit et donc recevoir le prix associé à tout moment avant l'échéance.

Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent présenter sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne de l'état du système sur le long terme. Un problème de contrôle ergonomique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère en tenant compte de cette mesure invariante.

Formulation standard résultant des critères étudiés précédemment consiste à optimiser sur les contrôles u_t une fonctionnelle de la forme :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, x_t, u_t) dt \right],$$

ou encore

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[\exp \int_0^T f(t, x_t, u_t) dt \right].$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle risque-sensible dans la littérature et a récemment été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financières comme un critère pour la gestion de portefeuille à long terme.

Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système : $\mathbb{P}[X_T |_{T \geq c}] \simeq \exp(-I(c)T)$ quand T tend vers l'infini, consiste à maximiser sur les contrôles u une fonctionnelle de la forme :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \ln \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \geq c \right].$$

Ce problème de contrôle des grandes déviations est interprété en finance comme la version asymptotique (ergodique) du critère consistant à maximiser la probabilité que la valeur terminale X_T du portefeuille soit au-dessus d'un certain indice.

Contrôle singulier

Un contrôle singulier est un couple $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ de processus mesurables $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2, \mathcal{F}_t$ -adaptés, de sorte que :

1. $\eta(\cdot)$ est de variation bornée, continue à gauche limite à droite et $\eta(0) = 0$.

2. $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2 \right] < \infty$.

Nous désignons $\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$, l'ensemble des contrôles admissibles. Nous notons que puisque $d\eta(t)$ peut être singulier par rapport à la mesure de Lebesgue dt , nous appelons $\eta(\cdot)$ la partie singulière du contrôle et le processus $u(\cdot)$ sa partie absolument continue.

On désigne par $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R}) = \{\Phi(\cdot) = \Phi(t, \omega)\}$ est un $\mathcal{F}_t$ -adapté $\mathbb{R}$ processus mesurable sur $[0, T]$ tel que $\mathbb{E} \left(\int_0^T |\Phi(t)|^2 dt \right) < \infty$.

3.2 Critère de coût ou performance

L'objectif but du contrôle optimal est de minimiser un coût (ou de maximiser un gain selon le cas). on définit une fonction qu'on appelle $J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ell(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right]$

sur l'ensemble de tout les contrôle admissibles

La fonction ℓ est la fonction coût intégrale, g est le coût final ou terminal à l'instant T . On définit une fonction de valeur qui donne le coût minimal possible :

$$V(t, x) = \inf_{u \in U} J(t, x, u). \quad (3.3)$$

en générale, le coût peut aussi être donné par :

$$J(u) = \mathbb{E}(g(X_T)). \quad (3.4)$$

Dans le cadre d'un problème de contrôle stochastique, la fonction valeur devient :

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $\forall u \in U$:

$$V(t, x) = \inf_{u \in U} J(t, x, u). \quad (3.5)$$

Mais si au lieu de minimiser un coût, on veut maximiser un gain, alors on écrira :

$$V(t, x) = \sup_{u \in U} J(t, x, u) = - \inf_{u \in U} J(-(t, x, u)). \quad (3.6)$$

Un contrôle admissible $u^* \in U$ est dit optimal si :

$$V(t, x) = J(t, x, u^*). \quad (3.7)$$

3.3 Méthodes de résolution en contrôle stochastique

Il existe deux grandes méthodes pour résoudre les problèmes de contrôle stochastique : **la programmation dynamique de Bellman**, qui utilise l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman**, et **le principe du maximum de Pontryagin**, qui donne des conditions pour trouver un contrôle optimal.

3.3.1 Principe de programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique a été initié dans les années 50 par **R. Bellman** qui est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique. Dans le contexte de processus de diffusion et même plus généralement pour des contrôles de processus de Markov. L'idée basique de ce principe est de considérer une famille de problèmes de contrôle à différents états initiaux et établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique fortement non linéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jacobi-Bellman.

L'équation d'**HJB** est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique. Supposant que la fonction valeur V est de classe C^2 .

la forme dérivée de l'équation HJB est donnée par :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \inf_{u \in U} \{L_u V(t, x) + f(t, x, u)\} = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n. \quad (3.8)$$

où L_u est l'opérateur associé à l'EDS (2.1) contrôlée, défini comme suit :

$$L_u V = b(x, u) D_x(V) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma(x, u) \bar{\sigma}(x, u) D_x^2(V) \right]. \quad (3.9)$$

Cependant, lorsqu'on cherche à maximiser un gain au lieu de minimiser un coût, l'EDP (3.8) devient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \sup_{u \in U} \{L_u V(t, x) + f(t, x, u)\} = 0, \quad (3.10)$$

on réécrit souvent cette EDP (3.8) en utilisant une fonction appelée Hamiltonien, ce qui donne :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - H(t, x, D_x v(t, x), D_x^2(V)) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.11)$$

avec :

$$H(x, t, p, M) = \sup_{u \in U} \left\{ b(x, u) p_t + \frac{1}{2} \text{tr} \sigma \sigma^*(t, x, u) M + f(t, x, u) \right\}, \quad (3.12)$$

où $(t, x, p, M) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S_n$ (où S_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques).

Cette équation (3.11) est ce qu'on appelle l'équation de la programmation dynamique, ou simplement l'équation HJB.

La fonction H est appelée l'hamiltonien associé au problème de contrôle.

A l'EDP (3.8), on ajoute une condition terminale pour compléter la formulation :

$$V(T, x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Généralement, l'EDP n'est pas facile à résoudre donc il faut supposer que la solution soit de classe C^2 , ce qui n'est pas nécessairement le cas même pour des fonctions simples.

Enfin, comme cette équation est difficile à résoudre directement, **Crandall** et **Lions** ont introduit dans les années 80 la notion de **solution de viscosité**, qui permet de donner un sens à l'équation même si V n'est pas régulière.

3.3.2 Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé dans la théorie du contrôle optimal.

Il fournit les conditions nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle coût $J(u)$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations. La dérivée de la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être positive.

Ceci entraîne que $\frac{dJ(u_\theta)}{d\theta} \big|_{\theta=0} \geq 0$.

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Cas du contrôle déterministe

Le principe du maximum dans le cas du contrôle déterministe ($\sigma = 0$), a été formulé par le mathématicien soviétique Lev Semionovitch Pontryaguin [6] en 1950. Des résultats récents pour l'étude du contrôle optimal dans le cas déterministe ont été traités par Fleming [3], où l'auteur présente des résultats fondamentaux dans la théorie du contrôle. La problématique générale du contrôle optimal est considérée comme un système différentiel gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt, t \in [0, T] \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Pour tout contrôle $u \in U$ avec U est l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles telles que les trajectoires associées soient bien définies sur $[0, T]$.

On définit donc le coût de la trajectoire associée par :

$$J(u) = \int_0^T \ell(s, X_s, u_s)ds + g(X_T).$$

L'objectif est de minimiser la fonction $J(u)$ sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles. Alors un contrôle u^* est optimal si :

$$J(u^*) = \min \{J(u), u \in U\},$$

sous les hypothèses suivantes :

- $b, \ell : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d :$

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| \leq K |x - y|, \quad (3.13)$$

$$|b(t, x, u)| + |\ell(t, x, u)| \leq c(1 + |x|), \quad (3.14)$$

telles que $b(t, x, \cdot), \ell(t, x, \cdot)$ de $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont continues en u et uniformément en (t, x) .

• b, ℓ et g sont de classe C^1 en x .

Le Hamiltonien de ce système est donné par :

$$H(t, X_t, u_t, p_t) \triangleq p_t b(t, X_t, u_t) - \ell(t, X_t, u_t). \quad (3.15)$$

on a donc le théorème suivante :

soit (X^*, u^*) la solution optimale de (3.3) et (3.4), alors il existe un processus $p(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté, solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, x_t, u_t, p_t)dt, \\ p(T) = g_x(X_T), \end{cases}$$

telle que :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, p_t) = \max_{u \in U} H(t, X_t^*, u, p_t). \mathbb{P}\text{-p.s. et } dt\text{-p.p.}$$

3.4 Principe du maximum pour un contrôle singulier

Dans cette partie, nous étudions un problème de contrôle optimal stochastique singulier pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques contrôlées non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} dx^{u,\eta}(t) = f(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dt + \sigma(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dW(t) + g(t)d\eta(t) \\ x^{u,\eta}(0) = \zeta, \end{cases} \quad (3.16)$$

L'objectif est de minimiser la fonction de coût définie par :

$$J^{0,\zeta}(u(\cdot), \eta(\cdot)) = \mathbb{E} \left[h(x^{u,\eta}(T)) + \int_0^T \ell(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dt + \int_{[0,T]} k(t)d\eta(t) \right] \quad (3.17)$$

Le contrôle admissible $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ est optimal s'il minimise cette fonction, soit :

$$J^{0,\zeta}(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) = \min_{(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2} J^{0,\zeta}(u(\cdot), \eta(\cdot)), \quad (3.18)$$

Le processus d'état associé, solution de l'équation (3.16), est indiqué par $x^*(\cdot) = x^{u^*, \eta^*}(\cdot)$.

3.4.1 Hypothèses et énoncé du problème de contrôle

Nous considérons un problème de contrôle stochastiques singulier. Soit T : un nombre réel strictement positif, et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ être un espace de probabilité modifié satisfaisant aux conditions habituelles dans lesquelles un mouvement brownien d dimensionnel $W(t) = \{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ et $W(0) = 0$ est défini.

Soit $\mathbb{A}_1$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{A}_2 = [0; +\infty[$. Que $\mathbf{U}_1$ soit la classe des processus mesurables et $\mathcal{F}_t$ -adaptés $u(\cdot) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{A}_1$ et $\mathbf{U}_2$ est la classe des processus mesurables et $\mathcal{F}_t$ -adaptés $\eta(\cdot) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{A}_2$.

L'objectif de ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le contrôle étudié est singulier. Nous donnons ici la définition précise de la partie singulière d'un contrôle admissible.

Condition

Nous supposons ce qui suit :

(H1) Les fonctions $f, \sigma, \ell : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continument différentiables en ce qui concerne (x, u) . En outre, f, σ, h et ℓ et tous leurs dérivées par rapport à (x, u) sont continus et bornés.

(H2) La fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $k : [0; T] \rightarrow [0, \infty[$, pour chaque $t \in [0, T]$: g est continue et bornée, k est également continue.

Selon les hypothèses ci-dessus, le EDS- (3.16) a une solution unique forte $x^{u, \eta}(t)$ qui est

donnée par :

$$x^{u,\eta}(t) = \zeta + \int_0^t f(r, x^{u,\eta}(r), u(r))dr + \int_0^t \sigma(r, x^{u,\eta}(r), u(r))dW(r) + \int_{[0,t]} g(r)d\eta(r).$$

En outre, par des arguments standard, il est facile de montrer que pour tout $p > 0$, il maintient que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} |x^{u,\eta}(t)|^p \right] < C_p, \quad (3.19)$$

où C_p est une constante dépendant seulement de p et le $J^{0,\eta}$ fonctionnel, est bien défini.

Nous définissons le Hamiltonien habituel associé au problème de controle stochastique (3.16) et (3.17) comme suit :

$$H(t, x, u, \Psi(t), \varphi(t)) = \Psi(t)f(t, x, u) + \varphi(t)\sigma(t, x, u) + \ell(t, x, u), \quad (3.20)$$

où $(t, x, u) \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A}_1$, x est une variable aléatoire telle que $x \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ et $(\Psi(\cdot), \varphi(\cdot)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donnée par BEDS- (3.21).

Equations adjointes

L'équation adjointe s'avère être un **R-EDS** linéaire. Donc pour tout $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$ et la trajectoire d'état correspondante $x(t) = x^{u,\eta}(t)$, nous considérons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -d\Psi(t) = \{f_x(t, x(t), u(t))\Psi(t) + \sigma_x(t, x(t), u(t))\varphi(t) + \ell_x(t, x(t), u(t))\} dt - \varphi(t)dW(t), \\ \Psi(T) = h_x(x(T)). \end{cases} \quad (3.21)$$

Si nous dénotons par :

$$H(t) = H(t, x(t), u(t), \Psi(t), \varphi(t)),$$

alors l'équation adjointe (3.21) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} -d\Psi(t) = \{H_x(t)\} dt - \varphi(t)dW(t) \\ \Psi(T) = h_x(x(T)). \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme il est bien connu que sous conditions (H1) et (H2) l'équation adjointe (3.21), admet une seule et unique couple de solutions $\mathcal{F}_t$ -adaptées $(\Psi(\cdot), \varphi(\cdot)) \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$.

Nous notons que puisque les dérivées $f_x, \sigma_x, \ell_x, h_x$, sont bornées, par des hypothèses (H1), nous avons les estimations suivantes :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\Psi(t)|^2 + \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt \right] \leq C. \quad (3.23)$$

Théorème 3.4.1 (principe du maximum pour un contrôle singulier). Soit les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées, il existe un couple unique de processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés $(\Psi^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ telle que pour tous $(u, \eta) \in \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), \varphi^*(t))(u(t) - u^*(t)) dt \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\int_{[0, T]} (k(t) + g(t)\Psi^*(t)) d(\eta - \eta^*)(t) \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

Où $(\Psi^*(t), \varphi^*(t))$ est la solution de l'équation adjointe (3.21) correspondant à $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot), x^*(\cdot))$.

Corollaire 3.4.1 (Principe du maximum stochastique pour un contrôle singulier). Dans les conditions du théorème, il existe alors un couple unique de processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés $(\Psi^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ solution de EDS (3.21) telle que pour tous $(u, \eta) \in \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$:

$$\begin{aligned} & H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), \varphi^*(t))(u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \left[\int_{[0, T]} (k(t) + g(t)\Psi^*(t)) d(\eta - \eta^*)(t) \right] \geq 0, \\ & \mathbb{P}.p.s. \ t \in [0, T], \end{aligned}$$

Pour prouver le Théorème et Corollaire nous avons besoin des résultats suivants que

nous devons traduire à notre problème singulier.

Que $(u^*(.), \eta^*(.), x^*(.))$ soit la solution optimale du problème de contrôle (3.16), (3.17).

Nous déduisons l'inégalité variationnelle (3.24) en plusieurs étapes, du fait que

$$J^{0,\zeta}(u^\varepsilon(.), \eta^\varepsilon(.)) - J^{0,\zeta}(u^*(.), \eta^*(.)) \geq 0, \quad (3.25)$$

Où $(u^\varepsilon(.), \eta^\varepsilon(.))$ est ce qu'on appelle la perturbation convexe de $(u^*(.), \eta^*(.))$, définie comme suit : $t \in [0, T]$

$$(u^\varepsilon(.), \eta^\varepsilon(.)) = (u^*(t), \eta^*(t)) + \varepsilon [(u(t), \eta(t)) - (u^*(t), \eta^*(t))], \quad (3.26)$$

Où $\varepsilon \in [0, 1]$ est suffisamment petit et $(u(.), \eta(.))$ est un élément arbitraire de $\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$,

Nous soulignons que la convexité de $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ a pour conséquence $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$.

Que $x^\varepsilon(.) = x^{(u^\varepsilon, \eta^\varepsilon)}(.)$ soit les solutions de EDS- (3.16) correspondant au contrôle admissible $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t))$.

Lemme 3.4.1 soit (H1) et (H2) sont vérifiés alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - x^*(t)|^2 \right) = 0.$$

Preuve. Des estimations standard et de l'inégalité **Burkholder-Davis-Gundy** nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{0 \leq r \leq t} |x^\varepsilon(r) - x^*(r)|^2 \right) \\ & \leq \int_0^t |f(r, x^\varepsilon(r), u^\varepsilon(r)) - f(r, x^*(r), u^*(r))|^2 dr \\ & + \int_0^t |\sigma(r, x^\varepsilon(r), u^\varepsilon(r)) - \sigma(r, x^*(r), u^*(r))|^2 dr \\ & + \left| \int_{[0,t]} g(r) d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(r) \right|^2, \end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse (H2) et les conditions de Lipschitz sur les coefficients f, σ

par rapport à x, u nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - x^*(t)|^2 \right) \\ & \leq C_T \mathbb{E} \int_0^t |x^\varepsilon(r) - x^*(r)|^2 dr + C_T \varepsilon^2 \mathbb{E} \int_0^t |u^\varepsilon(r) - u^*(r)|^2 dr \\ & \quad + C_T \varepsilon^2 \mathbb{E} |\eta^\varepsilon(T) - \eta^*(T)|^2, \end{aligned}$$

D'après la définition de contrôle singulier et lemme de Gronwall, le résultat obtenu. ■

Lemme 3.4.2 *Soit $z(t)$ être la solution du EDS linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} dz(t) &= \{f_x(t, x^*(t), u^*(t))z(t) \\ & \quad + f_u(t, x^*(t), u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dt \\ & \quad + \{\sigma_x(t, x^*(t), u^*(t))z(t) \\ & \quad + \sigma_u(t, x^*(t), u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dw(t) \\ & \quad + g(t)d(\eta - \eta^*)(t), \\ z(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Alors l'estimation suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - z(t) \right|^2 \right] = 0.$$

Preuve. Notant que dans les conditions **(H1)** et **(H2)** alors EDS-3.27 linéaire a une solution unique.

on pose :

$$\gamma^\varepsilon = \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - z(t), t \in [0, T]. \tag{3.28}$$

Nous montrons que :

$$\begin{aligned}
 \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} &= \int_0^t \int_0^1 f_x(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)), u^\varepsilon(r))(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)) d\mu dr \\
 &+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_x(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)), u^\varepsilon(r))(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)) d\mu dr \\
 &+ \int_0^t \int_0^1 f_u(r, x^*(r), u^*(r) + \mu\varepsilon(u(r) - u^*(r)))(u(r) - u^*(r)) d\mu dr \\
 &+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_u(r, x^*(r), u^*(r) + \mu\varepsilon(u(r) - u^*(r)))(u(r) - u^*(r)) d\mu dr \\
 &+ \int_{[0,t]} g(r) d(\eta - \eta^*)(r),
 \end{aligned}$$

Puis de l'équation ci-dessus et (3.28) nous concluons que $\gamma^\varepsilon(t)$ est indépendant de la partie singulière, alors nous pouvons utiliser la méthode similaire développée dans Bensoussan pour le reste de la preuve. ■

Lemme 3.4.3 pour tout $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathbb{E}[h_x(x^*(T))]z(t) \\
 &+ \int_0^T [\ell_x(t, x^*(t), u^*(t))z(t) + (u(t) - u^*(t))\ell_u(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\
 &+ \mathbb{E} \int_{0,t} k(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned}$$

Preuve. De (3.17) et (3.25), nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq J^{0,\zeta}(u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J^{0,\zeta}(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \\
 &= \mathbb{E}[h(x^\varepsilon(T)) - h(x^*(T))] \\
 &+ \mathbb{E} \int_0^T [\ell(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - \ell(t, x^*(t), u^\varepsilon(t))] dt \\
 &+ \mathbb{E} \int_0^T [\ell(t, x^*(t), u^\varepsilon(t)) - \ell(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\
 &+ \mathbb{E} \int k(t) d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J^{0,\zeta}(u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J^{0,\zeta}(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))}{\varepsilon} \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^1 h_x(r, x^*(T) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(T) + z(T))) (\gamma^\varepsilon(r) + z(r)) d\mu \right. \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^1 \ell_x(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)), u^\varepsilon(r)) (\gamma^\varepsilon(r) + z(r)) d\mu dr \\
 &\quad + \left. \int_0^t \int_0^1 \ell_u(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + z(r)), u^\varepsilon(r)) (u(r) - u^*(r)) d\mu dr \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\int_{[0,T]} k(t) d(\eta - \eta^*)(t) \right].
 \end{aligned}$$

D'après les lemmes (3.4.1), (3.4.2) : h_x , ℓ_x et ℓ_u sont continus et bornés :

$$h_x(x_T^u + \theta(x_T^{\bar{u}} - x_T^u)) \rightarrow h_x(x_T^u), \quad \ell_x(x_t^u + \theta(x_t^{\bar{u}} - x_t^u)) \rightarrow \ell_x(x_t^u)$$

Enfin, nous concluons, qui complète la preuve de Lemme (3.4.3). ■

Preuve. En appliquant la formule d'Itô à $\Psi^*(t)z(t)$ et en prenant l'attente, où $z(0) = 0$, alors un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\Psi^*(T)z(T)) &= \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) dz(t) + \mathbb{E} \int_0^T z(t) d\Psi^*(t) \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) [\sigma_x(t)z(t) + \sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &= \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2 + \mathbb{J}_3,
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_1 &= \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) dz(t) \\
 &= \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) [f_x(t)z(t) + f_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) g(t) d(\eta - \eta^*)(t) \\
 &= \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) f_x(t) z(t) \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_{[0,T]} \Psi^*(t) g(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_2 &= \mathbb{E} \int_0^T z(t) d\Psi^*(t) \\
 &= -\mathbb{E} \int_0^T z(t) \{f_x(t)\Psi^*(t) + \sigma_x(t)\varphi^*(t) + \mathbb{E}(\sigma_x(t)\varphi^*(t)) + \ell_x(t)\} dt \\
 &= -\mathbb{E} \int_0^T z(t) f_x(t) \Psi^*(t) dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_0^T z(t) \sigma_x(t) \varphi^*(t) dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_0^T z(t) \ell_x(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_3 &= \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) [\sigma_x(t)z(t) + \sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &= \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) \sigma_x(t) z(t) dt + \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt,
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

où $b_p(t) = \frac{\partial b}{\partial p}(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))$ pour $b = f, \sigma, \ell$ et $p = x, u$.

combinaison (3.29) (3.32) et le fait que $\Psi^*(T) = h_x(x^*(T))$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{ [h_x(x(T))] z(T) \} \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\ & - \mathbb{E} \int_0^T z(t) \ell_x(t) dt + \mathbb{E} \int_{[0,T]} \Psi^*(t) g(t) d(\eta - \eta^*)(t). \end{aligned}$$

Enfin, appliquer le lemme (3.4.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \int_0^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_0^T \varphi^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\ & - \mathbb{E} \int_0^T \ell_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\ & + \mathbb{E} \int_{[0,T]} k(t) d(\eta - \eta^*)(t) + \mathbb{E} \int_{[0,T]} \Psi^*(t) g(t) d(\eta - \eta^*)(t) \\ &= \mathbb{E} \int_0^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), \varphi^*(t) (u(t) - u^*(t))) dt \\ & + \mathbb{E} \int_{[0,T]} (k(t) + \Psi^*(t) g(t) d(\eta - \eta^*)(t)). \end{aligned}$$

Cela complète la preuve du théorème précédente. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème de contrôle stochastique singulier dans un cadre purement théorique. L'objectif principal était de formuler rigoureusement le modèle mathématique et d'établir les conditions nécessaires à l'optimalité.

En nous appuyant sur les équations différentielles stochastiques et les outils classiques tels que la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin, nous avons pu démontrer une version du principe du maximum stochastique adaptée au cas singulier.

Ce travail reste une base théorique, pouvant servir de point de départ à des recherches futures, notamment dans des contextes plus appliqués ou numériques.

Bibliographie

- [1] Bensoussan, A.(1983). Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972, Springer-Varlag, pp. 1 – 62 .
- [2] Bensoussan, A.(1983). Stochastic maximum principle for distributed parametre system,J Franklin Inst., 315, pp. 387 – 406 .
- [3] Fleming, w.H, Soner, H. M.(1992). Controlled Markov processes and viscosity solution.Springer Verlag.New York
- [4] Jeanblanc, M.(2006). Lecture Notes. Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY.
- [5] Pham,H.(2005). Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol.61, Springer Verlage .
- [6] Pontryagin, L. S, Boltanski,V. G, Gamkrelidze,R. V. (1962).The mathematical theory of optimal processes. Intersciene N.Y.
- [7] Øksendal, B, Sulem,A.(2004). Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin.

Résumé :

Ce mémoire présente une étude théorique d'un problème de contrôle stochastique optimal singulier. Le système est modélisé par des équations différentielles stochastiques. L'analyse porte sur le principe du maximum en cas singulier et les conditions d'optimalité, à l'aide d'outils comme la programmation dynamique et les équations adjointes. Ce travail théorique constitue une base pour des recherches futures appliquées.

Mots-clés : contrôle singulier, contrôle stochastique, équations différentielles stochastiques, principe du maximum, Pontryagin.

Abstract:

This thesis presents a theoretical study of a singular optimal stochastic control problem. The system is modeled using stochastic differential equations. The focus is on the singular maximum principle and optimality conditions, using tools like dynamic programming and adjoint equations. This theoretical work lays the foundation for future applied research.

Keywords: singular control, stochastic control, stochastic differential equations, maximum principle, Pontryagin.

المخلص:

تتناول هذه المذكرة دراسة نظرية لمشكلة في التحكم العشوائي الأمثل ذات طابع مفرد. يُنمذج النظام بواسطة معادلات تفاضلية عشوائية، مع التركيز على مبدأ الحد الأقصى في الحالة المفردة وشروط المثالية، باستخدام أدوات مثل البرمجة الديناميكية والمعادلات المرافقة. يشكل هذا العمل قاعدة لأبحاث تطبيقية لاحقة.

الكلمات المفتاحية : التحكم المفرد، التحكم العشوائي، المعادلات التفاضلية العشوائية، مبدأ الحد الأقصى، بونترياجين.