

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*Université Mohamed Khider, Biskra*

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Probabilités et statistiques**”

Option : Statistique

**Par**

**Dendouga Selsabil**

**Titre :**

**Les rendements d'actifs**

Devant le Jury :

Dr. RAHMANI Naceur U. Biskra Président

Dr. TOUBA Sonia U. Biskra Encadrant

Dr. BENBRAIKA Ghazlane U. Biskra Examinatrice

**Soutenu Publiquement le 03/06/2025**

## *Dédicace*

À mon père et à ma mère,

battement de mon cœur et piliers de ma vie,  
je vous adresse tout mon amour et ma gratitude.

Sans vos prières, votre patience et la chaleur de vos cœurs, je ne serais jamais  
arrivée jusqu'ici.

À mes sœurs,

vous êtes la tendresse et la douceur qui allègent mes journées. Merci pour vos  
cœurs généreux et votre soutien sincère.

À mes frères,

vous êtes le pilier solide sur lequel je m'appuie. Merci pour votre force qui nourrit  
ma détermination, et pour vos mots qui m'ont donné confiance à chaque étape.

À mes chères amies,

recevez toute ma reconnaissance,  
pour les beaux moments partagés, vos paroles encourageantes et votre soutien  
fidèle tout au long de ce parcours.

Ces pages sont le fruit de votre amour. Je vous les dédie.

# Remerciements

Avant toute chose, je rends grâce à **Dieu**, le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires à l'accomplissement de ce travail. Sans Sa volonté et Sa miséricorde, rien n'aurait été possible.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrante, Mme **TOUBA Sonia**, pour ses orientations scientifiques précieuses, ses conseils éclairés et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire. Son engagement et son accompagnement bienveillant ont été d'une grande importance dans l'aboutissement de ce travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à M. **RAHMANI Naceur**, président du jury, pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour ses remarques constructives qui ont largement contribué à son enrichissement.

Mes remerciements s'adressent aussi à Mme **BENBRAIKA Ghazlane**, examinatrice, pour sa lecture attentive et ses observations pertinentes, qui ont ajouté une réelle valeur à ce travail.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à l'ensemble **des enseignants** qui m'ont accompagnée, soutenue ou encouragée, de près ou de loin, tout au long de ce parcours. À vous tous, j'adresse mon profond respect et ma sincère reconnaissance.

## Notations et symbols

Symbole	Signification
$exp$	exponentiel
QQ-plot	Graphique quantile-quantile
$\phi(t)$	Fonction caractéristique
$F$	fonction de répartition
$F_n$	fonction de répartition empirique
<i>i.e.</i>	en d'autre terme
$\mathbb{R}^+$	ensemble réel positif
$\mathbb{R}$	ensemble réel
$\stackrel{d}{=}$	égale en distribution
<i>i.i.d</i>	indépendantes identiquement distribuées
$\sim$	$f(x) \sim g(x)$ ; quand $x \rightarrow x_0 : f(x)/g(x) \rightarrow 1$ ; quand $x \rightarrow x_0$
$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
v.a	variable aléatoire
v.a.r	variable aléatoire réel

# Table des matières

<b>Ddicace</b>	2
<b>Remerciements</b>	2
<b>Notations et symboles</b>	4
<b>Table des matires</b>	5
<b>Table des figures</b>	8
<b>Liste des tableaux</b>	11
<b>Introduction</b>	1
<b>1 Rendements d'actifs</b>	3
1.1 Quelques définitions . . . . .	3
1.2 Propriétés et faits stylisés des rendements d'actifs . . . . .	5
1.3 Facteurs influençant les rendements . . . . .	11
1.4 Exemples : . . . . .	12
1.4.1 Dow Jones . . . . .	12

1.4.2	Nasdaq	13
1.4.3	CAC40	14
1.4.4	S&P 500	15
1.5	Stationnarité des rendements versus non-stationnarité des prix	16
1.6	Présentation théorique du QQ-plot et analyse des queues	18
<b>2</b>	<b>Un model adequate pour les Rendements d'actifs</b>	<b>20</b>
2.1	les lois $\alpha$ -stable :	21
2.1.1	Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi $\alpha$ -stable	22
2.1.2	Variabes aléatoires $\alpha$ -stables symétriques	25
2.1.3	<b>Propriétés</b>	27
2.2	Algorithme de simulation	36
2.2.1	Première étape	36
2.2.2	Deuxième étape	37
2.2.3	Troisième étape	37
2.2.4	Quelques exemples	38
2.3	<b>Statistiques sur les lois symétriques <math>\alpha</math>-stables</b>	39
2.3.1	<b>Tests sur la variance</b>	39
2.4	Estimation des paramètres des loi $\alpha$ -stable	41
2.4.1	Méthode de McCulloch	42
	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

**Anexe :Logiciel R**

**56**

# Table des figures

1.1	Illustration de la non-stationnarité à travers quatre indices boursiers	6
1.2	Illustration de l'autocorrélation des rendements financiers . . . . .	7
1.3	Illustration de la mémoire longue dans les rendements financiers .	8
1.4	Visualisation de l'asymétrie des rendements financiers . . . . .	9
1.5	Densité des rendements de l'action Cisco Systems sur une période de 5 ans à horizon fin 2022, et densité de la loi normale la plus proche pour trois échelles de temps : en haut les rendements à 1 minute (simulation), au milieu les rendements à 30 minutes (simulation), et en bas les rendements journaliers (réels) . . . . .	10
1.6	Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 2014 au 2022, soit 10586 observations, du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les ns de la semaine (i.e. Dimanche et Lundi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte . . . . .	17
1.7	L'évolution de la série des rendements de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 2014 au 2022. La non stationnarité de la série (des périodes de grande variations positives et négatives) . .	18

1.8	QQ-plot des rendements du Nasdaq (2014–2022) : comparaison avec la loi normale	19
2.1	Courbe de la densité pour $\alpha \in \{2, 1.6, 1.4\}; \beta = 0; \sigma = 1; \mu = 0$	22
2.2	Courbe de la densité pour $\alpha = 1 : 5; \beta \in \{-1, 0, 1\}; \sigma = 1; \mu = 0$	23
2.3	Courbe de la densité pour $\alpha = 1; 5; \sigma \in \{2, 1, 0.8\}; \beta = 0; \mu = 0$	24
2.4	Courbe de la densité pour $\alpha = 1 : 5; \mu \in \{-2, 0, 2\}; \beta = 0; \sigma = 1$	25
2.5	Illustration numérique de la propriété d’additivité des lois $\alpha$ -stables	32
2.6	Effet de l’indice $\alpha$ sur la forme et les queues des lois stables	34
2.7	Simulation de l’inexistence de la variance pour $\alpha = 1.5$	36
2.8	Histogrammes normalisés de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$ calculés sur 5000 réalisations	41
2.9	Test graphique 1 : variance empirique calculée pas pas sur l’échantillon de 5000 réalisations d’une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$	42
2.10	Test graphique 2 calculé sur l’échantillon de 5000 réalisations d’une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$	43
2.11	Table de DuMouchel pour $v_\alpha$	44
2.12	Table de DuMouchel pour $v_\beta$	44
2.13	Table de DuMouchel pour estimer $\alpha$	45
2.14	Table de DuMouchel pour estimer $\beta$	45
2.15	Table de DuMouchel pour $v_\sigma$	46
2.16	Table de DuMouchel pour $v_\eta$	46
2.17	Estimation graphique du paramètre $\alpha$ selon la méthode de McCulloch	48

2.18 Histogramme des rendements quotidiens du NASDAQ et ajustement par une loi $\alpha$ -stable . . . . .	50
2.19 Histogramme des rendements quotidiens du CAC 40 et ajustement par une loi $\alpha$ -stable . . . . .	50
2.20 Histogramme des rendements quotidiens du DOW JONES et ajustement par une loi $\alpha$ -stable . . . . .	51
2.21 Histogramme des rendements quotidiens du S&P 500 et ajustement par une loi $\alpha$ -stable . . . . .	51

# Liste des tableaux

2.1	Moyenne et variance thrique d'une loi stable	35
2.2	Moyenne et variance empirique calcules sur 5000 ralisation	39
2.3	Estimation des paramtres du loi alpha-stable via lapproche de Mc-	
	Culloch pour 5000 ralisations.	47
2.4	Estimations des paramtres des lois a-stables via la mthode de Mc-	
	Culloch	49

# Introduction

L'analyse du comportement des rendements d'actifs financiers constitue un enjeu central en finance quantitative. Ces rendements présentent des caractéristiques statistiques particulières, telles que des fluctuations brusques, des queues épaisses (fat tails) et une mémoire longue (long memory), qui ne peuvent être expliquées adéquatement par le modèle classique basé sur la distribution normale.

Pour mieux modéliser ces phénomènes, des lois de probabilité alternatives ont été introduites, notamment les lois  $\alpha$ -stables de Lévy, développées par Paul Lévy puis mises en avant par Benoît Mandelbrot. Ces lois permettent de mieux représenter les comportements extrêmes observés sur les marchés financiers, en intégrant l'asymétrie et la dépendance temporelle à long terme.

Cependant, malgré leur pertinence théorique, la relation entre les rendements d'actifs et les lois  $\alpha$ -stables reste encore insuffisamment explorée, en particulier en ce qui concerne leur interaction avec la mémoire longue.

Ainsi, cette recherche vise à répondre à la problématique suivante :

Dans quelle mesure les modèles basés sur les lois  $\alpha$ -stables permettent-ils de mieux comprendre le comportement des rendements financiers, notamment en tenant compte de la mémoire longue ?

Pour y répondre, nous adoptons une approche statistique et empirique, reposant

sur l'analyse de séries temporelles financières. Nous évaluerons l'adéquation des rendements aux lois  $\alpha$ -stables à l'aide de méthodes spécifiques (comme la méthode de McCulloch), et nous analyserons l'effet de la mémoire longue à travers des outils tels que l'analyse spectrale et l'analyse en ondelettes.

Ce mémoire est structuré en deux parties :

La première partie est consacrée à l'étude des rendements d'actifs et de leurs propriétés statistiques.

La deuxième partie examine l'ajustement de ces rendements à une loi  $\alpha$ -stable, à travers des tests graphiques et des modèles mathématiques adaptés.

# Chapitre 1

## Rendements d'actifs

Comme tout autre actif financier, **le rendement d'un actif** est une mesure de sa rentabilité pour l'investisseur sur une période donnée. Ce rendement peut être calculé sur une base annuelle ou pour d'autres périodes, permettant ainsi d'évaluer avec précision la performance de l'investissement.

### 1.1 Quelques définitions

**Définition 1.1.1** *Les rendements d'actifs représentent le pourcentage de variation du prix d'un actif financier sur une période donnée, reflétant ainsi la performance de l'investissement. L'objectif principal des investisseurs opérant sur le marché des actions est de générer des profits tout en minimisant les risques. Par conséquent, ils s'intéressent particulièrement à l'évolution des cours des actions et à leurs rendements.*

*Les professionnels et les chercheurs ont analysé les séries des prix ou celles des rendements selon deux axes principaux :*

**Le premier** concerne les facteurs influençant le cours des actions et, par conséquent

, les rendements

**Le second** met en évidence les caractéristiques des séries des rendements, notamment les faits stylisés comme la volatilité, l'asymétrie et les queues épaisses.

L'objectif de ces analyses est de mettre en lumière des faits permettant de mieux prévoir les rendements, ce qui constitue un aspect essentiel dans la prise de décision des investisseurs et dans le développement de modèles mathématiques capables de représenter fidèlement les dynamiques des marchés financiers.

**Dfinition 1.1.2** *Le rendement d'un actif financier mesure la variation relative de son prix entre deux dates .Il est couramment utilisé pour évaluer la performance d'un investissement*

*Dans le cadre de l'analyse quantitative, on utilise souvent le rendement logarithmique, défini par :*

$$R_t = \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

*Cette formulation présente plusieurs avantages statistiques, notamment la stationnarité et l'additivité dans le temps.*

Le rendement logarithmique est préféré dans les modèles économétriques pour ses propriétés : il est sans unité, symétrique, et surtout additif dans le temps.

**Remarque 1.1.1** *Dans cette formule, nous supposons que les dividendes distribués (le cas échéant) sont versés à la fin de la période  $t$  et ne sont pas réinvestis pendant la période de détention de l'action.*

## 1.2 Propriétés et faits stylisés des rendements d'actifs

1. **Stationnarité** : Cette propriété signifie que les caractéristiques statistiques d'une série, telles que la variance, varient au cours du temps. Dans le cadre des séries financières, il est observé que la variance n'est pas constante mais dépend des conditions de marché et des événements économiques.

Pour illustrer cette propriété, un graphique représentant les rendements de quatre indices boursiers met en évidence la variation de la variance dans le temps. (1.1)

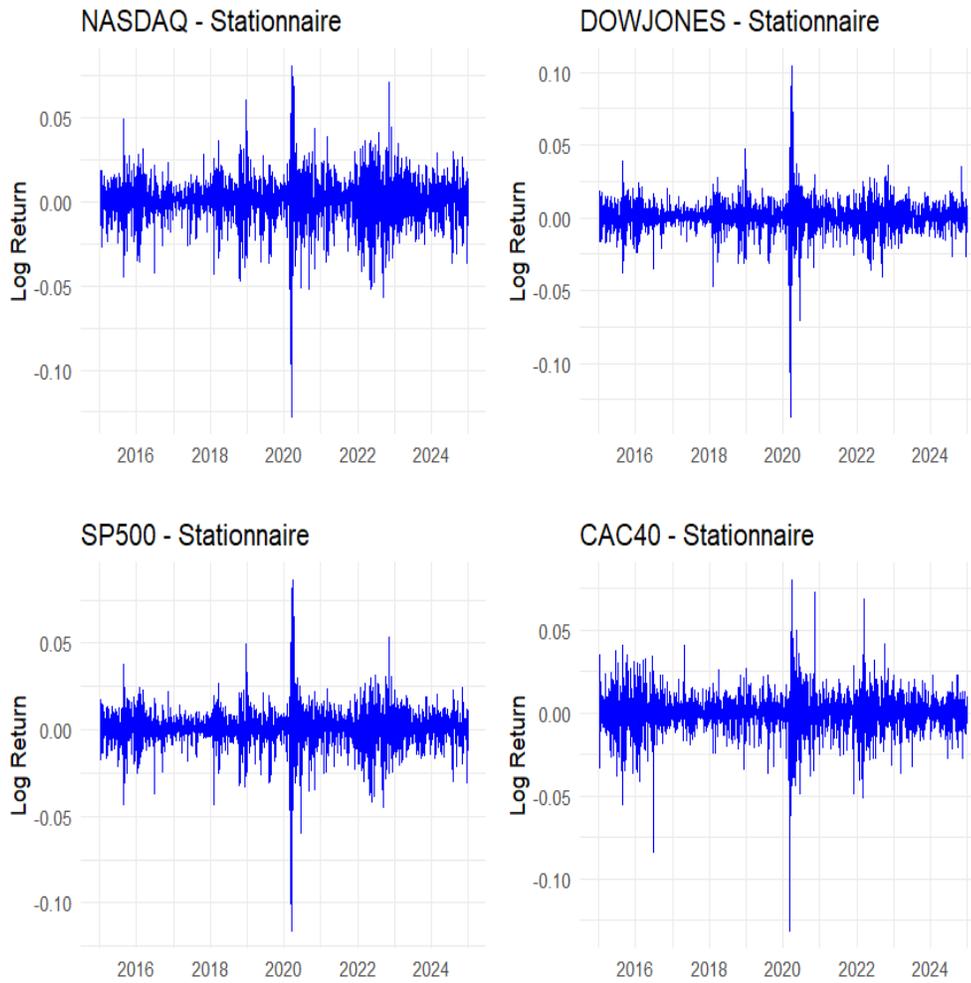


FIG. 1.1 – Illustration de la non-stationnarité à travers quatre indices boursiers

**2. Volatilité :** La volatilité désigne l'ampleur des variations des rendements autour de leur moyenne. Sur les marchés financiers, cette variabilité n'est pas régulière, mais se manifeste par des phases d'instabilité suivies de périodes plus calmes.

**3. Présence de queues épaisses :** Cette propriété reflète le fait que la distribution des rendements financiers présente des queues plus épaisses que celle de la loi normale, impliquant une probabilité plus élevée d'événements extrêmes.

**4. Regroupement de la volatilité :** La volatilité tend à apparaître sous forme de grappes : les périodes de forte variabilité sont suivies d'autres similaires, un phénomène fréquent dans les séries financières.

**5. Autocorrélation :** Il s'agit de la dépendance temporelle entre les observations d'une série. Les rendements financiers ne sont pas indépendants ; des phases de volatilité élevée tendent à se suivre.

Cette propriété est illustrée par un graphique montrant la persistance de certaines dynamiques dans le temps, ce qui indique une autocorrélation. (1.2)

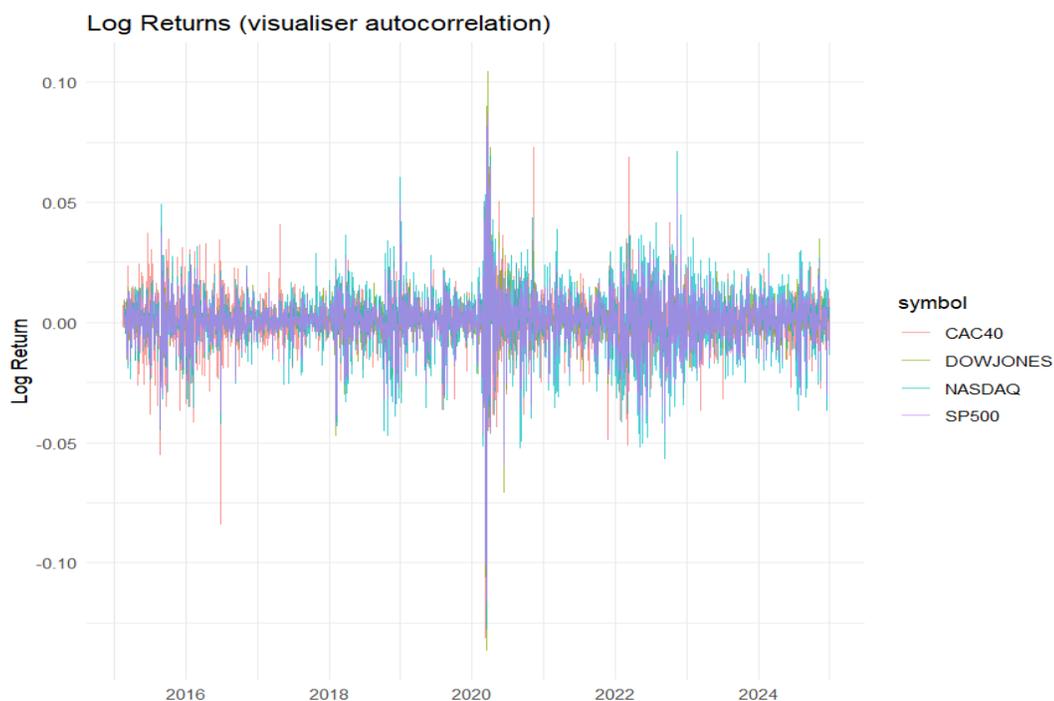


FIG. 1.2 – Illustration de l'autocorrélation des rendements financiers

**6. Mémoire longue :** Cette propriété décrit le fait que les effets d'un choc sur la série peuvent persister longtemps, ce qui signifie que le passé influence durablement le comportement futur du marché.

Un graphique est proposé afin de visualiser des structures de dépendance à long

terme dans les rendements de plusieurs indices. (1.3)

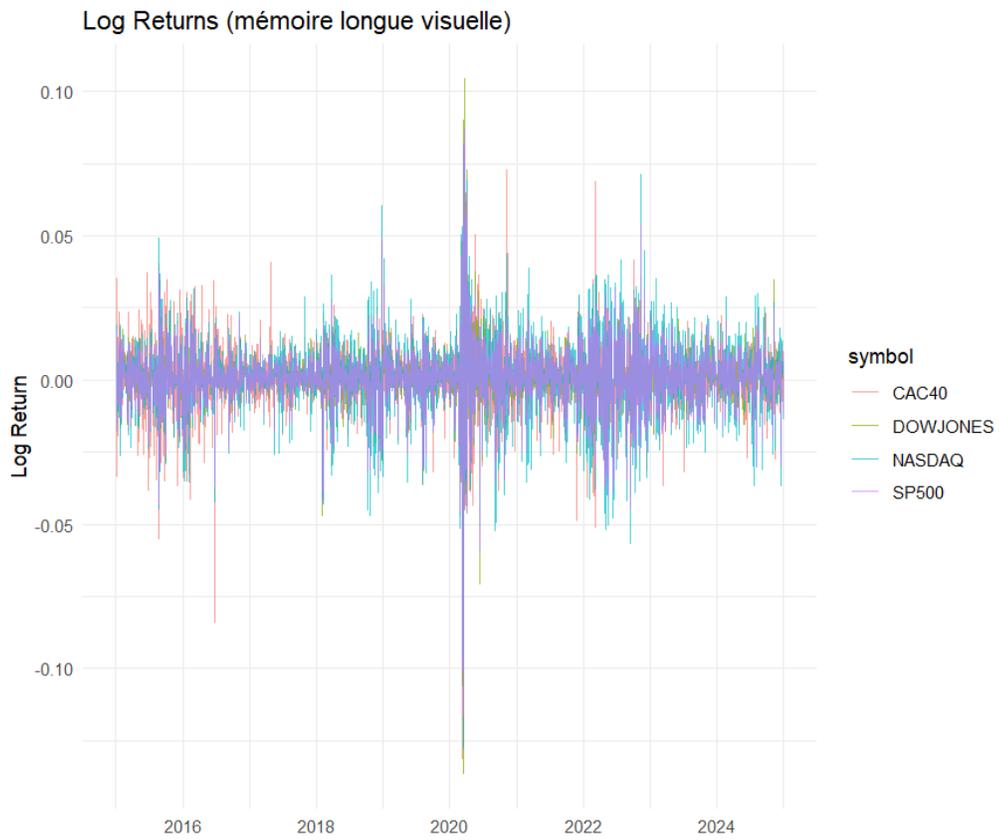


FIG. 1.3 – Illustration de la mémoire longue dans les rendements financiers

**7. Asymétrie :** L'asymétrie désigne une distribution des rendements qui n'est pas symétrique autour de la moyenne : les hausses et les baisses ne sont pas équivalentes en fréquence ou en intensité.

Un graphique comparatif permet de mettre en évidence cette asymétrie dans la distribution des rendements des différents indices. (1.4)

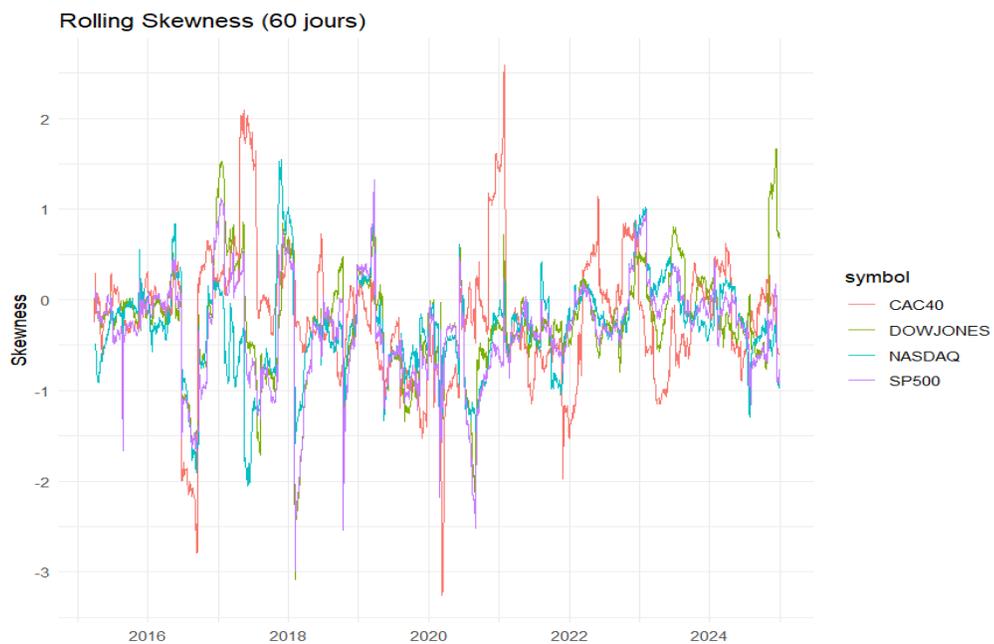


FIG. 1.4 – Visualisation de l'asymétrie des rendements financiers

**8. Dépendance variable dans le temps :** Les relations entre variables financières ne sont pas constantes, mais varient selon l'horizon d'investissement ou la conjoncture du marché.

Ces propriétés sont confirmées par diverses études empiriques.

Notamment, les distributions des rendements présentent des queues épaisses et un pic au centre, s'écartant ainsi de la distribution normale, comme observé par Cont (2001), Mandelbrot (1963) et Fama (1965).

Cette caractéristique est illustrée par la comparaison entre la densité empirique des rendements de l'action Cisco Systems sur une période de 5 ans à horizon fin 2022, et celle d'une loi normale, pour trois échelles de temps : en haut les rendements à 1 minute, au milieu à 30 minutes, et en bas les rendements journaliers (1.5)

Cisco Systems sur une période de 5 ans à horizon fin 2022, et densité de la loi normale la plus proche pour trois échelles de temps : en haut les rendements à 1 minute (simulés), au milieu à 30 minutes (simulés), en bas journaliers (réels).

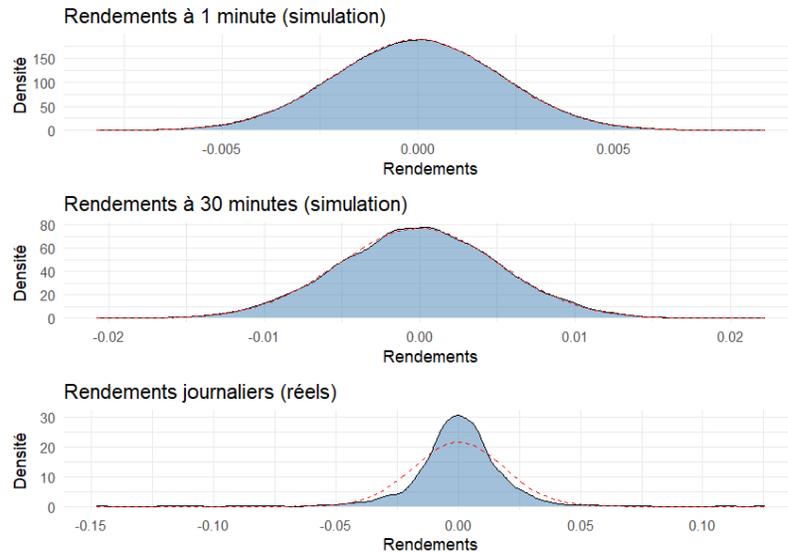


FIG. 1.5 – Densité des rendements de l'action Cisco Systems sur une période de 5 ans à horizon fin 2022, et densité de la loi normale la plus proche pour trois échelles de temps : en haut les rendements à 1 minute (simulation), au milieu les rendements à 30 minutes (simulation), et en bas les rendements journaliers (réels)

tandis que l'autocorrélation des valeurs absolues des rendements décroît lentement, indiquant une mémoire longue dans la volatilité.

Ces comportements sont cruciaux pour la modélisation des rendements et la gestion des risques financiers.

### **1.3 Facteurs influençant les rendements**

Les rendements des actions sont influencés par trois principaux facteurs : les informations, la manipulation et les comportements psychologiques des investisseurs.

#### **1. Les informations :**

- Internes : annonces des entreprises (dividendes, contrats, résultats financiers).
- Externes : recommandations des analystes, annonces gouvernementales.

L'annonce d'une hausse des dividendes est souvent perçue comme un signal de confiance des dirigeants dans la rentabilité future de l'entreprise, bien que cette hypothèse soit débattue. Les recommandations d'analystes influencent les prix à court terme, mais leur effet à long terme est incertain.

#### **2 Les manipulations de marché**

jouent aussi un rôle important. L'humeur des investisseurs, influencée par des éléments comme la météo, peut impacter les rendements boursiers, bien que l'exploitation de ce phénomène soit limitée par les coûts de transaction.

Ainsi, les rendements ne sont pas seulement déterminés par des éléments économiques fondamentaux, mais aussi par des facteurs informationnels, stratégiques et psychologiques.

- Manipulation d'informations : diffusion de fausses nouvelles pour influencer les prix.
- Manipulation par action : décisions internes modifiant la valeur des actions (ex. fermeture temporaire d'usines).
- Manipulation par échanges : achats massifs d'actions pour induire en erreur les autres investisseurs.

### 3. Les facteurs psychologiques :

jouent aussi un rôle important. L'humeur des investisseurs, influencée par des éléments comme la météo, peut impacter les rendements boursiers, bien que l'exploitation de ce phénomène soit limitée par les coûts de transaction.

Ainsi, les rendements ne sont pas seulement déterminés par des éléments économiques fondamentaux, mais aussi par des facteurs informationnels, stratégiques et psychologiques.

## 1.4 Exemples :

### 1.4.1 Dow Jones

**Dfinition 1.4.1** *En 1884, le journaliste Charles DOW a créé le premier indice boursier en calculant la moyenne des prix de cloture de 12 actions de compagnies ferroviaires, appelé l'indice Dow Jones Transportation Average. Plus tard, il a fondé la société Dow Jones, qui a lancé l'indice Dow Jones Industrial Average, composé à l'origine de 12 grandes entreprises industrielles. Au fil du temps, cet indice a évolué et le nombre d'actions incluses est passé à 30 en 1928, un nombre qui reste inchangé aujourd'hui. L'un des principaux indicateurs financiers,*

*représentants les plus grandes entreprises des différents secteurs clés du marché boursier.*

**Propriété 1.4.1** *Le calcul de l'indice Dow Jones repose sur la somme des prix des actions des entreprises qui le composent, puis sur la division de ce total par le nombre d'actions pour obtenir la moyenne quotidienne .. L'indice Dow Jones est utilisé comme un outil pour évaluer la performance du marché, aidant à identifier la tendance générale des prix, qu'elle soit haussière, baissière ou stable .. Au fil du temps, l'indice est passé d'un système de pondération égale à un système basé sur des pondérations relatives, ce qui signifie que les actions ayant une capitalisation boursière plus élevée influencent davantage l'indice que celles ayant une capitalisation plus faible .*

. La performance du Dow Jones est annoncée quotidiennement dans les médias, ce qui en fait l'un des indices les plus suivis par les investisseurs.

.Étant donné qu'une grande partie de la population investit en bourse, les fluctuations quotidiennes de l'indice suscitent un large intérêt.

.Même si le marché connaît une baisse lors d'une journée donnée, certaines actions de l'indice peuvent être en hausse, et inversement .

## 1.4.2 Nasdaq

Le Nasdaq (National Association of securities Dealers Automated Quotation System) est un marché financier électronique créé en 1971. Il s'agit de la première bourse à fonctionner entièrement via un réseau informatique, ce qui la distingue des bourses traditionnelles comme le New York Stock Exchange (NYSE)

**Propriété 1.4.2** *.bourse entièrement électronique : Contrairement aux bourses physiques*

*toutes les transactions sont effectuées en ligne.*

*.Forte concentration sur le secteur technologique : Il regroupe de nombreuses entreprises leaders dans la technologie, telles qu'Intel et Cisco Systems.*

*.Inclut le marché hors cote (OTC) : Certaines entreprises plus petites, ne répondant pas aux critères des grandes bourses, sont négociées via le Nasdaq.*

*.Indice Nasdaq Composite :Cet indice suit la performance de milliers d'entrises cotées sur Nasdaq.*

*.Fusion avec l'AMEX : Afin d'accroître sa compétitivité face au NYSE, le Nasdaq a fusionné avec l'American Stock Exchange (AMEX), bien que les deux continuent d'opérer séparément .*

*.Un des indices les plus surveillés au monde : Il est souvent affiché aux cotés du Dow Jones dans les rapports financiers.*

### 1.4.3 CAC40

#### **Dfinition 1.4.2**

Le CAC40 est l'indice de référence du marché boursier français. Il est calculé à partir d'un échantillon de 40 entreprises cotées sur le premier marché, sélectionnées parmi les 100 plus grandes capitalisations boursières . Il sert d'indicateur principal de la performance de la Bourse de Paris, reflétant les variations globales du marché. De plus, il est utilisé pour la négociation des contrats à terme et des options sur la plateforme MONEP, ce qui en fait un indice clé dans la gestion des fonds d'investissement (OPCVM).

**Propriet 1.4.3** *.Basé sur la performance de 40 grandes entreprises du premier marché.*

*.Constitue l'indice de référence principal de la Bourse de Paris.*

*.Évolue en corrélation avec la dynamique du marché français.*

*.Largement utilisé pour évaluer les portefeuilles d'investissement .*

*.Sert de support aux contrats à terme et aux options financières .*

#### **1.4.4 S&P 500**

**Dfinition 1.4.3** *L'indice Standard & Poor's 500 (S&P 500) est un indice boursier qui reflète la performance de 500 des plus grandes entreprises cotées aux États-Unis. Il est largement utilisé comme une référence principale pour mesurer la performance du marché boursier américain, représentant environ 75 % de la capitalisation boursière totale des actions négociées. Les entreprises qui le composent sont sélectionnées en fonction de leur capitalisation boursière, liquidité et secteur d'activité, ce qui en fait l'un des indices les plus représentatifs de l'économie américaine*

**Propriet 1.4.4** *.Représentation large du marché : Couvrant environ 75 % de la capitalisation boursière des actions américaines, sa performance est un indicateur fiable de la santé économique et financière*

*.Pondération par capitalisation boursière : L'indice est calculé sur la base de la capitalisation boursière ajustée au flottant, ce qui signifie que les grandes entreprises comme Apple et Microsoft ont un impact plus significatif sur les variations de l'indice par rapport aux plus petites entreprises*

*.Performance à long terme : Les études montrent que le S&P 500 surperforme la plupart des fonds d'investissement actifs, générant des rendements supérieurs sur plusieurs décennies, ce qui en fait un choix populaire pour l'investissement passif*

*.Mises à jour régulières de la composition : La liste des entreprises composant l'indice est mise à jour régulièrement selon des critères spécifiques, garantissant que l'indice reflète les évolutions économiques récentes. Il a été observé que lorsqu'une entreprise est ajoutée à l'indice, son cours peut augmenter temporairement d'environ 5 % en raison de la demande des fonds indiciels*

*.Comparaison avec d'autres indices : Contrairement au Dow Jones Industrial Average (DJIA), qui ne contient que 30 entreprises, le S&P 500 est plus représentatif du marché américain. En comparaison, l'indice Wilshire 5000 est plus large puisqu'il inclut presque toutes les actions américaines cotées, mais il est moins couramment utilisé par les investisseurs*

## 1.5 Stationnarité des rendements versus non-stationnarité des prix

Contrairement aux séries de prix, qui présentent généralement une structure non stationnaire, les séries de rendements tendent à offrir une stabilité statistique plus marquée.

Cette propriété justifie leur utilisation fréquente dans les analyses empiriques et les modèles économétriques.

Afin d'illustrer visuellement cette différence, nous présentons ci-dessous deux graphiques construits à partir de données réelles de l'indice boursier Nasdaq, couvrant la période de 2014 à 2022.

Le premier graphique montre l'évolution des prix de clôture quotidiens (1.6), tandis que le second représente les rendements logarithmiques correspondants. (1.7)

Cette représentation permet de mettre en évidence la non-stationnarité des prix

par rapport à la relative stabilité des rendements.

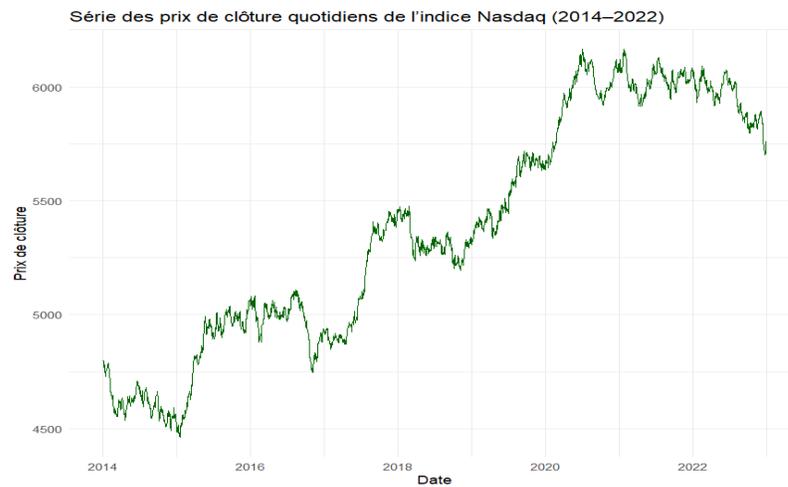


FIG. 1.6 – Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 2014 au 2022, soit 10586 observations, du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les ns de la semaine (i.e. Dimanche et Lundi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte

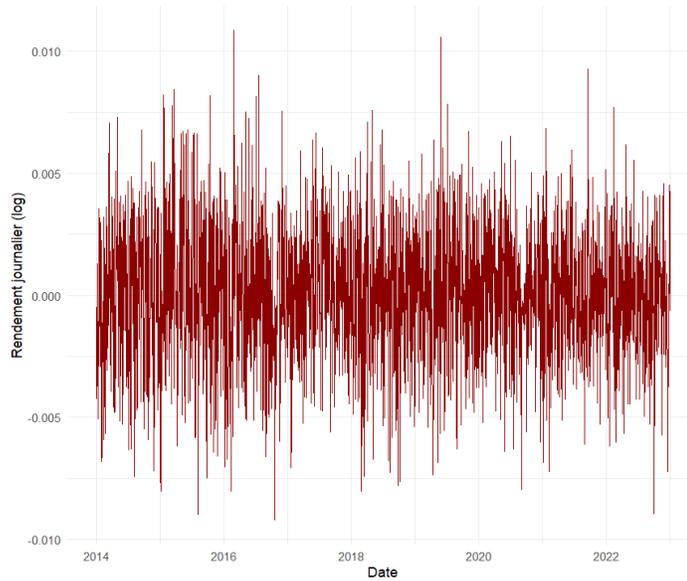


FIG. 1.7 – Lévolution de la série des rendements de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 2014 au 2022. La non stationnarité de la série (des périodes de grande variations positives et négatives)

## 1.6 Présentation théorique du QQ-plot et analyse des queues

Pour évaluer si les rendements suivent une loi normale, on utilise souvent des outils graphiques comme le QQ-plot (Quantile-Quantile Plot). Ce graphique permet théoriquement de comparer la distribution empirique d'un échantillon de données à une distribution théorique donnée, souvent la loi normale.

Théoriquement, si les données suivent la loi considérée, les points s'alignent approximativement sur une ligne droite. Dans le cas contraire, une courbure vers le haut ou le bas traduit un écart aux hypothèses de normalité. Ce comportement est typique des séries financières, ce que nous allons illustrer à l'aide du graphique suivant.

Dans notre cas, on remarque que les points s'écartent nettement de la droite aux

extrémités, ce qui révèle la présence de valeurs extrêmes plus fréquentes que prévu par la loi normale, un signe clair de queues épaisses. (1.8)

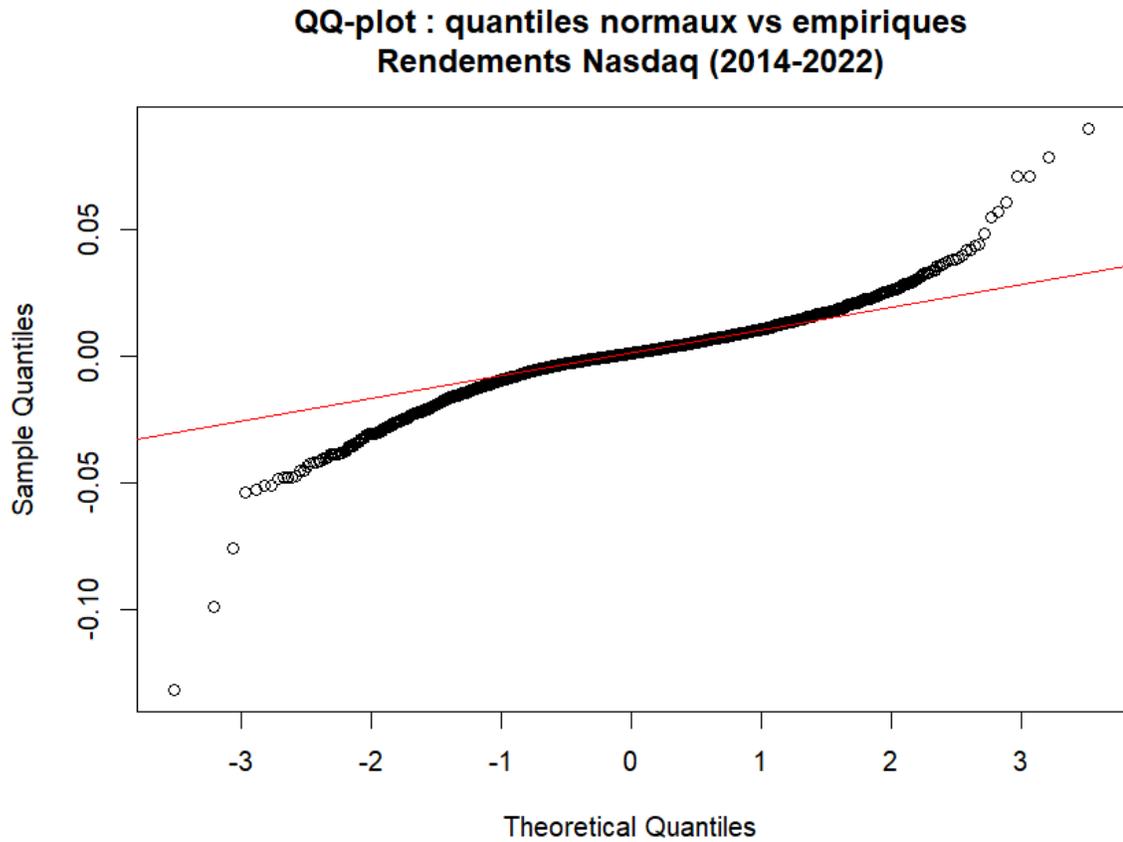


FIG. 1.8 – QQ-plot des rendements du Nasdaq (2014–2022) : comparaison avec la loi normale

## Chapitre 2

# Un model adequate pour les Rendements d'actifs

Historiquement, la modélisation des rendements financiers reposait principalement sur la loi normale, en raison de sa simplicité et de ses propriétés analytiques avantageuses. Cette approche suppose que les rendements suivent une distribution symétrique et que les variations extrêmes sont rares. Cependant, les études empiriques ont montré que cette hypothèse est souvent inadéquate : les distributions des rendements présentent généralement une kurtosis élevée, des queues épaisses, et une asymétrie marquée, ce qui entraîne une sous-estimation des risques extrêmes.

Face à ces limites, les lois  $\alpha$ -stables (lois de Lévy-Pareto) ont émergé comme une alternative plus adaptée. Contrairement à la loi normale, elles permettent de capturer les événements extrêmes et les comportements atypiques des marchés financiers. En particulier, lorsque l'exposant de stabilité est inférieur à 2, ces lois offrent une meilleure représentation des rendements observés. Toutefois, cette transition n'est pas sans défis, notamment en raison de la complexité accrue des modèles

et des exigences computationnelles associées à l'estimation des paramètres.

Dans ce contexte, cette étude explore les raisons du passage de la loi normale à la loi  $\alpha$ -stable dans la modélisation des rendements d'actifs, en mettant en évidence les avantages et les défis liés à cette transition.

## 2.1 les lois $\alpha$ -stable :

**Dfinition 2.1.1** (*fonction caractéristique*) : on dit que d'une variable aléatoire réelle  $X$  que'elle suit une **loi stable** de paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  et  $\mu$ , si sa **fonction caractéristique** est de la forme :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \exp [i\mu.t - \sigma^\alpha |t|^\alpha . (1 - i\beta.\text{sign}(t). \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp [i\mu.t - \sigma |t| . (1 + \frac{2}{\pi}i\beta.\text{sign}(t). \ln |t|)] & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

où  $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \sigma \geq 0, \mu \in \mathbb{R}$

$$\text{où} \quad \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \succ 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t \prec 0 \end{cases}$$

**Remarque 2.1.1** une variable aléatoire  $X$  quelle suit une loi stable de paramètres  $\alpha, \beta, \sigma$  et  $\mu$ , sera notée  $X \sim S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$ .

### 2.1.1 Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi $\alpha$ -stable

Une loi stable est définie par quatre paramètres, ce qui en fait une loi paramétrique. Il est essentiel de comprendre la signification de chacun de ces paramètres et leur impact sur la forme de la courbe de densité.

1)  $\alpha$  : **L'exposant caractéristique**, ou indice de stabilité ( $0 < \alpha \leq 2$ ), détermine la vitesse de décroissance de la queue de distribution. donnée dans la figure (2.1)

· Plus  $\alpha$  est petit, plus les queues de la distribution sont épaisses. Autrement dit, une faible valeur de  $\alpha$  accentue l'existence de fluctuations importantes. Une distribution gaussienne correspond à la valeur maximale de  $\alpha$ , soit  $\alpha = 2$ .

· Lorsque  $\alpha$  est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs extrêmes de la variable aléatoire s'amenuise.

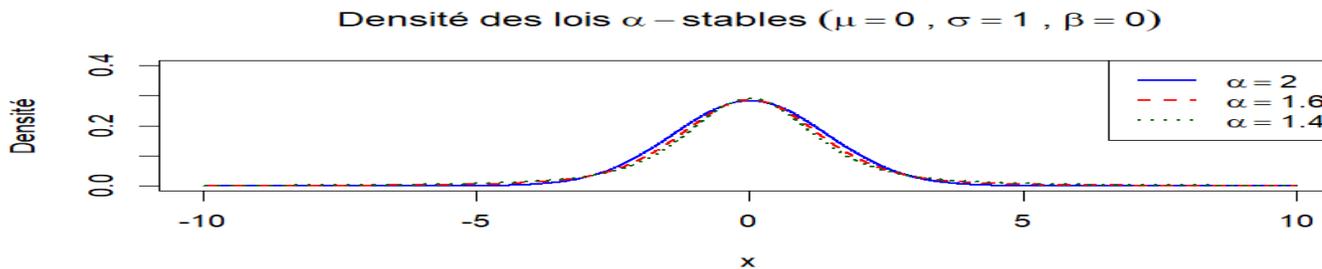


FIG. 2.1 – Courbe de la densité pour  $\alpha \in \{2, 1.6, 1.4\}; \beta = 0; \sigma = 1; \mu = 0$

-On remarque que plus le paramètre  $\alpha$  est petit, plus la courbe de densité est pointue et possède des queues épaisses.

2) $\beta$  :**Paramètre d'asymétrie** Le paramètre  $\beta$ , ou paramètre de biais, ( $-1 < \beta < 1$ ), mesure la tendanc centrale de la distribution donné

dans la figure [2.2](#)

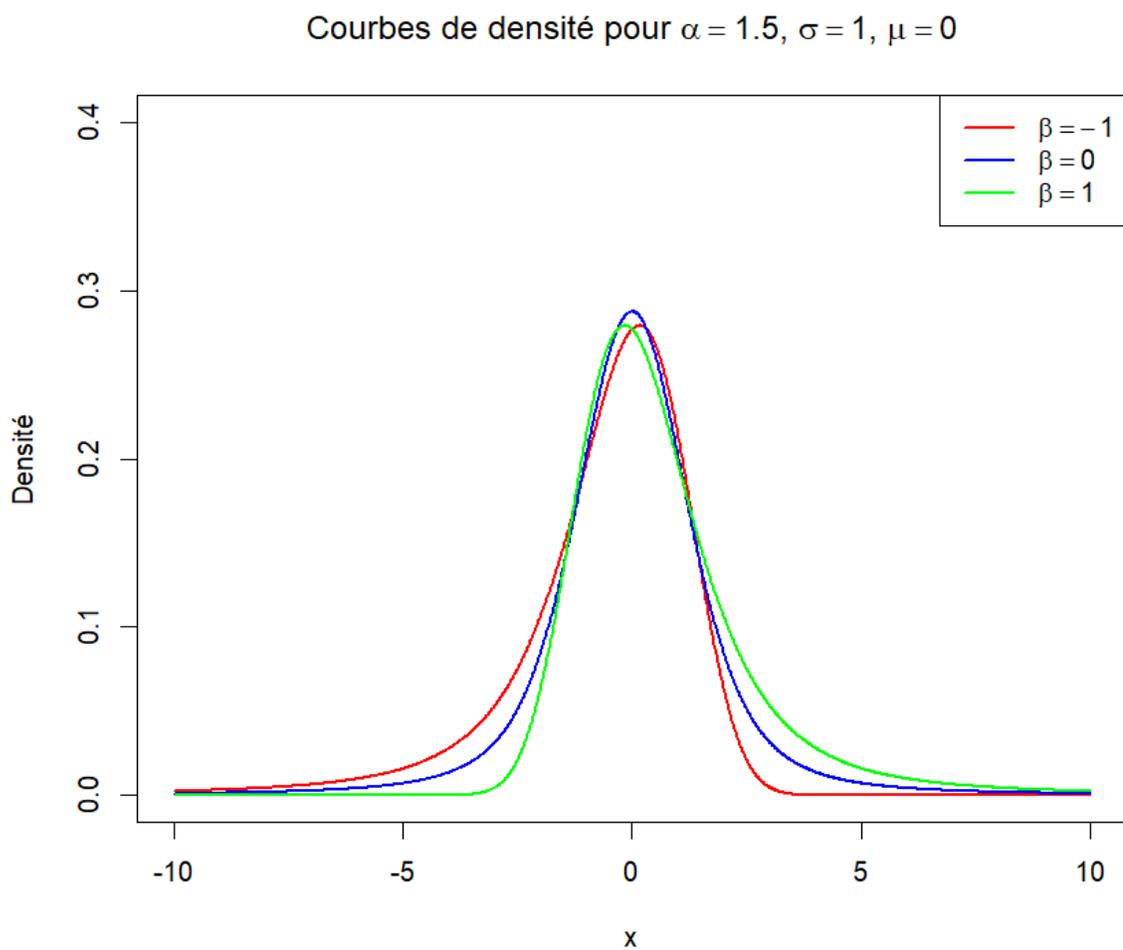


FIG. 2.2 – Courbe de la densité pour  $\alpha = 1 : 5; \beta \in \{-1, 0, 1\}; \sigma = 1; \mu = 0$

-Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), le mode est décalé vers la gauche (resp.droite) de la moyenne. De plus, lorsque  $\beta$  est positif (resp.négatif), la queue de la

distribution est plus épaisse à droite (resp à gauche).

-Si  $\beta$  est égal à -1(resp 1 ), la distribution est totalement asymétrique vers la gauche (resp vers la droite).

-Lorsque  $\beta$  vaut zéro alors la distribution est symétrique.

3)  $\sigma$  : **Paramètre d'échelle**, ou paramètre de dispersion,  $\sigma > 0$

donnée dans la figure (2.3)

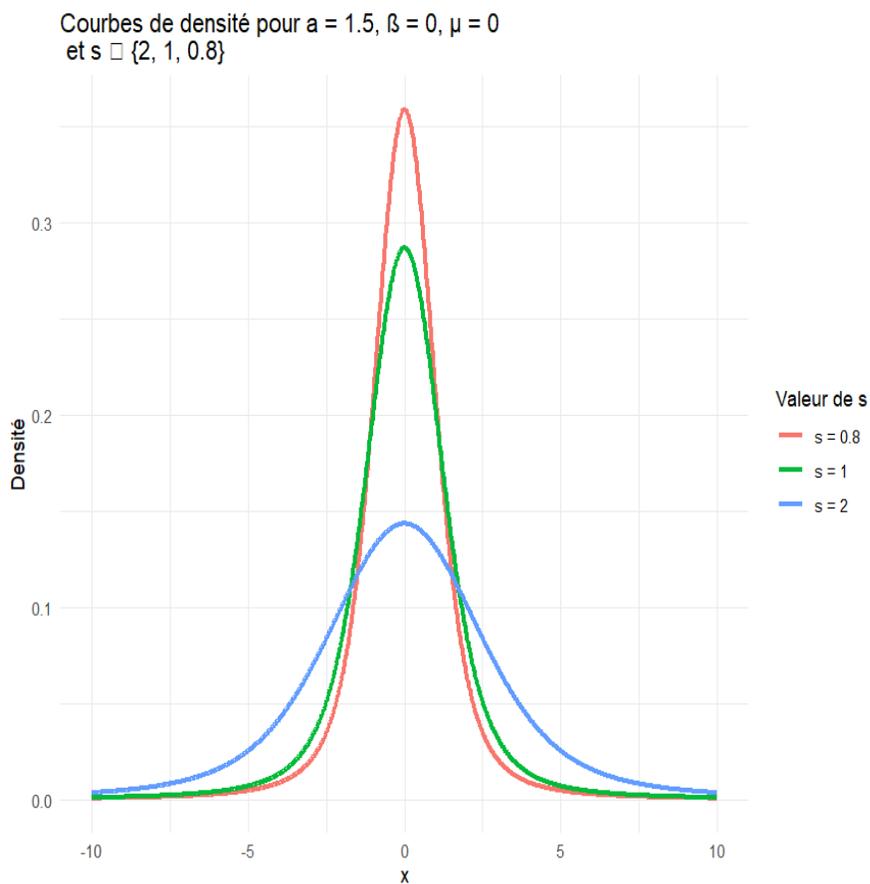


FIG. 2.3 – Courbe de la densité pour  $\alpha = 1; 5; \sigma \{2, 1, 0.8\}; \beta = 0; \mu = 0$

-Plus  $\sigma$  est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre  $\sigma$  de cintrer plus ou moins le corps de la distribution

4)  $\mu$  : **Paramètre de localisation**, ou paramètre de position ( $\mu \in R$ ), mesure la

tendance centrale de la distribution.

La principale caractéristique de ces lois est leur indice de stabilité  $\alpha$ , qui contrôle la vitesse de décroissance des queues de distribution, comme illustré dans la figure

(2.4)

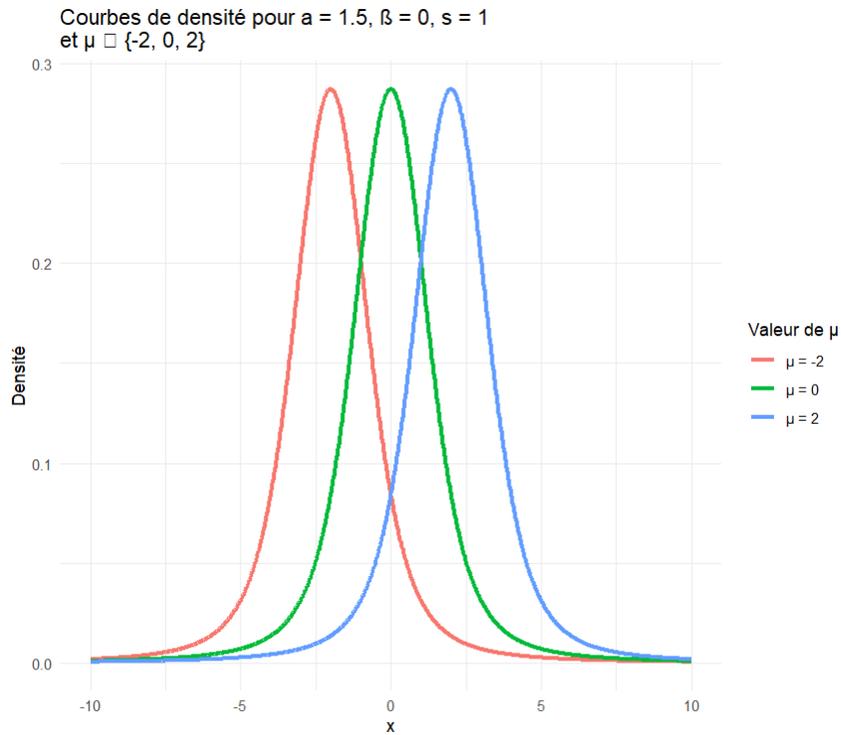


FIG. 2.4 – Courbe de la densité pour  $\alpha = 1.5$ ;  $\mu \in \{-2, 0, 2\}$ ;  $\beta = 0$ ;  $\sigma = 1$

- Lorsque  $\mu$  est positif (resp. négatif), la courbe décal vers la droite (resp. vers la gauche).

- Si  $\beta = 0$  alors est la médiane.

### 2.1.2 Variables aléatoires $\alpha$ -stables symétriques

Les distributions  $\alpha$ -stables symétriques représentent une classe de distributions de probabilité caractérisées par la stabilité et la symétrie, ce qui les rend utiles

pour modéliser des phénomènes à fluctuations élevées.

**Proposition 2.1.1** *Si  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique par rapport au paramètre  $\mu$ . Lorsque  $\mu = 0$ , on parle d'une loi  $\alpha$ -stable symétrique, notée  $X \rightsquigarrow S_\alpha(0, \sigma, 0)$*

**Corollaire 2.1.1** *Une variable aléatoire  $X$  est dite  $\alpha$ -stable symétrique, notée  $S_\alpha S$ , si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme :*

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) \quad t \in \mathbb{R}, \alpha \in ]0, 2]$$

Dans le cas  $\sigma = 1$  alors la variable aléatoire est dite  $S_\alpha S$  standard.

**Exemple 2.1.1** *Plusieurs lois connues font partie de cette classe :*

- *La loi de Cauchy généralisée, dont la densité est donnée par :  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-m)^2}$  est une loi  $S_1(0, \sigma, 0)$*
- *la loi normale  $N(m, \sigma^2)$  est un cas particulier de loi stable, notée  $S_2(\beta, \frac{\sigma^2}{2}, m)$ , et inversement, toute loi  $S_2(\beta, \sigma, \mu)$  est une loi normale.*
- *la loi de poisson  $p(\lambda)$  ne fait pas partie des lois stable des lois stables.*

**Preuve.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson. Supposons qu'elles soient stables, ce qui implique l'existence de  $\alpha > 0$  et  $b$  tels que :

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} aX_1 + b$$

■

Par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

ce qui entraîne une contradiction car  $X_1 + X_2$  a ses valeurs uniquement dans  $\mathbb{N}$  alors que  $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$  n'a pas que des valeurs dans  $\mathbb{N}$

### 2.1.3 Propriétés

Cette section aborde certaines propriétés des lois  $\alpha$ -stables, en mettant l'accent sur le calcul des moments ainsi que sur les méthodes de simulation,...

#### Densité

Pour de nombreuses lois de probabilité bien connues, comme les lois normale, de Cauchy ou gamma, il existe une expression explicite de la densité. En revanche, pour la loi  $\alpha$ -stable, seule la fonction caractéristique est connue sous une forme explicite. Grâce à la transformée inverse de cette fonction caractéristique, donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) \varphi_X(t) dt$$

nous pouvons obtenir  $f$  sous la forme d'une intégrale

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-t^a) \cos [xt + \beta t^a \omega(t, a)] dt$$

où

$$\omega(t, a) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha) & a \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & a = 1 \end{cases}$$

**Proposition 2.1.2 (Propriété de réflexion) :** Pour toute  $\alpha$  et  $\beta$  nous avons

$$S_\alpha(1, -\beta, 0) \stackrel{d}{=} -S_\alpha(1, \beta, 0)$$

C'est que

$$f_X(-x/\alpha, \beta) = f_X(x/\alpha, -\beta) \text{ et } F_X(-x/\alpha, \beta) = 1 - F_X(x/\alpha, -\beta)$$

où  $f_X$  et  $F_X$  sont la fonction de densité et la fonction de répartition respectivement d'une variable aléatoire  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

Zolotarev [15] a démontré que  $F_X$  et  $f_X$  peuvent s'écrire respectivement pour  $\alpha = 1$  et  $x > 0$ , comme suivant :

$$F_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} \alpha(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1, \\ -\frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} \alpha(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

où

$$\alpha(\theta) := \left( \frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos((\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta},$$

et

$$V_\alpha = x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta).$$

qui peut s'écrire plus simplement  $\forall \alpha \neq 1$ , en rappelant que  $\omega = -\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}$

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\pi|1-\alpha|} x^{1/(1-\alpha)} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} \alpha(\theta)) d\theta, \alpha > 1,$$

Les seules trois distributions stables qui ont des formes explicites de la fonction de densité

sont :

1. La distribution gaussienne  $S_2(0, \sigma, \mu)$  où

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp - \left( \frac{x - \mu}{2\sigma} \right)^2$$

2. La distribution de Cauchy  $S_1(0; \sigma; \mu)$  où

$$f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\sigma^2)}$$

3. La distribution de Lévy  $S_{\frac{1}{2}}(1; \sigma; \mu)$  où

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}\right) 1_{] \mu, +\infty[}(x)$$

L'absence des formules de forme explicites des fonctions de densité pour la plus parts des lois  $\alpha$ -stables et les fonctions de distributions ont des conséquences négatives. Généralement, il ya deux approches ce problème, la transformé de Fourier (fft, "fast Fourier transform") doit être appliqué la fonction caractéristique voir, Mittnik, Doganoglu et Chenyao, [8] ou bien lintégration directe numérique qui a été utilisé par Nolan, [10],[9].

**Proposition 2.1.3 (propriétés de la densité)**

1. La densité de probabilité dune distribution  $\alpha$ -stable est une fonction bornée.
2. La densité de probabilité dune distribution  $\alpha$ -stable est la classe  $C^\infty$

**Stabilité**

**Proprit 2.1.1** Pour  $\alpha = 1$ , nous avons l'équivalence suivante

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, \sigma, \mu) \iff Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, 1, 0)$$

**Preuve.** tout d'abord,remarquons que ■

$$\varphi_{mX+p}(t) = E[e^{it(mX+p)}] = e^{itp} \varphi_X(mt)$$

**condition nécessaire** : prenons  $m = \frac{1}{\sigma}$  et  $p = -\frac{\mu}{\sigma}$  alors :

$$\varphi_y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\sigma}\right) \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$\varphi_y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\sigma}\right) \exp\left\{\frac{i\mu t}{\sigma} - \sigma^\alpha \left|\frac{t}{\sigma}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}$$

Où  $\text{sign}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \text{sign}(t)$  car  $\sigma^\alpha > t$

Donc

$$\varphi_y(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi  $S_\alpha(\beta; 1; 0)$ .

**condition suésante** : la démonstration est similaire la condition nécessaire en prenant  $m = \sigma$  et  $p = \mu$ .

· Remarque que Pour la simulation, il suffit de générer des lois  $S_\alpha(\beta; 1; 0)$  et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois  $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$

## Propriétés arithmétiques

**Proposition 2.1.4** *Les variables aléatoires suivant une loi  $\alpha$ -stable possèdent les propriétés suivantes :*

1) Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois stables  $S_\alpha(b_1, s_1, m_1)$  et  $S_\alpha(b_2, s_2, m_2)$ . Alors, la somme  $X_1 + X_2$  suit une loi stable  $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$ , avec les paramètres définis comme suit :

$$\cdot s = (s_1^\alpha + s_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\cdot b = \frac{b_1 s_1^\alpha + b_2 s_2^\alpha}{s_1^\alpha + s_2^\alpha}$$

$$\cdot m = m_1 + m_2$$

Notons que si  $\beta_1 = \beta_2$  alors  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ .

Cette propriété d'additivité est particulièrement pertinente en finance, car elle permet de considérer deux actifs ayant le même paramètre  $\alpha$  comme une seule entité. Ainsi, bien que les autres paramètres soient modifiés, la valeur de reste inchangée. Cette caractéristique est souvent exploitée pour l'analyse et la gestion des portefeuilles d'investissement.

Nous allons mettre en lumière cette propriété par le biais d'une simulation numérique où deux variables  $X_1$  et  $X_2$ , qui suivent une loi  $\alpha$ -stable, sont additionnées. Le comportement de leur somme fera l'objet d'une analyse graphique ci-après.

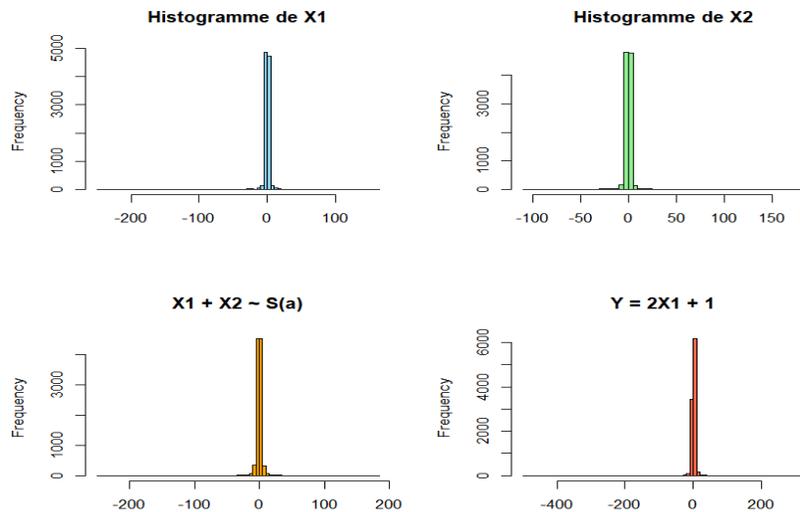


FIG. 2.5 – Illustration numérique de la propriété d'additivité des lois  $\alpha$ -stables

2) Si  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi stable  $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$ ,  $A \in \mathbb{R}^+$ ,  $B \in \mathbb{R}^+$  et  $C \in \mathbb{R}$  alors

$$AX_1 + BX_2 + C \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}; \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} + C).$$

3) si  $X \sim S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors :

$$X + a \sim S_\alpha(\beta; \sigma; \mu + a)$$

4) Si  $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  et  $a$  un constant réel non nul

$$\text{alors } \begin{cases} aX \sim S_\alpha(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu) & \text{si } a \neq 0 \\ aX S_\alpha(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} a (\ln |a| \beta \sigma)) & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

5) Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  avec  $\alpha \in ]1; 2]$  alors  $E(X) = \mu$ .

6) pour  $0 < \alpha < 2$   $X \sim S_\alpha(\beta; \sigma; 0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\beta; \sigma; 0)$

### Queues lourdes

soit  $X$  une variable aléatoire suit une loi  $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$  on a deux résultats suivants :

$$\begin{cases} t^\alpha p(X > t) \rightarrow \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \text{ quand } t \rightarrow \infty \\ t^\alpha p(X < -t) \rightarrow \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Où  $C_\alpha$  est une constante donnée par

$$C_\alpha = \left( \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-\infty} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \text{ si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

la démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 16-18).

**Remarque 2.1.2** *L'égalité précédente nous fait penser la caractérisation des lois pareto.*

En effet, une V.A.R. suit une loi du type pareto si :

$$p(X \geq x) = x^{-\alpha}h(x)$$

ou  $h(x)$  est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout  $t > 0$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$

Mandelbrot (1962) a montré que pour les lois  $\alpha$ -stable, nous avons

$$p(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha)x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})]$$

par passage la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on s'aperoit que les lois stable sont asymptotiquement parétiennes.

Dans le but d'afficher visuellement cette propriété, nous comparons trois lois  $\alpha$ -stables générées pour différentes valeurs de  $\alpha$

Cela permet d'observer comment la décroissance des queues devient plus lente à mesure que  $\alpha$  diminue, ce qui est caractéristique des distributions à queues épaisses.

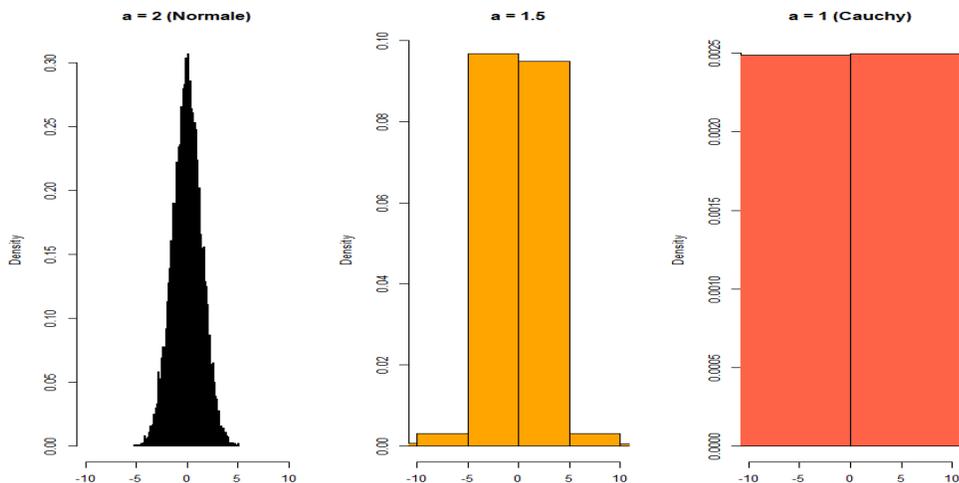


FIG. 2.6 – Effet de l'indice  $\alpha$  sur la forme et les queues des lois stables

### Calcul des moments

**Proposition 2.1.5** *si  $X \sim S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$  alors*

1) Si  $\alpha = 2$ ,  $\forall p, E |X|^p < +\infty$

2) Si  $0 < \alpha < 2$ ,  $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, E |X|^p < +\infty \\ \forall p \geq \alpha, E |X|^p = +\infty \end{cases}$

1) Lorsque  $\alpha$  est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi  $\alpha$ -stable est infinie.

2) Lorsque  $\alpha$  est strictement inférieur à 1, c'est l'espérance qui devient infinie.

3) Si  $\alpha$  est supérieur à 1, l'espérance d'une loi  $\alpha$ -stable est  $\mu$ .

soit  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$

Toutes les lois stables non gaussiennes possèdent une variance infinie. Dans le cas particulier de la loi normale, l'existence d'une variance finie est liée à une décroissance plus rapide des queues de distribution par rapport aux autres lois  $\alpha$ -stables

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
$E(X)$	$\infty$	$\mu$	$\mu$
$Var(X)$	$\infty$	$\infty$	$2\sigma^2$

TAB. 2.1 – Moyenne et variance thrique d'une loi stable

En vue de parfaire l'analyse théorique donnée ci-dessus, on propose ci-après une simulation numérique visant à illustrer le comportement de la variance empirique d'une loi  $\alpha$ -stable pour  $\alpha = 1.5$ .

Cette simulation permet de constater visuellement que la variance ne se stabilise pas, ce qui reflète son inexistence théorique.

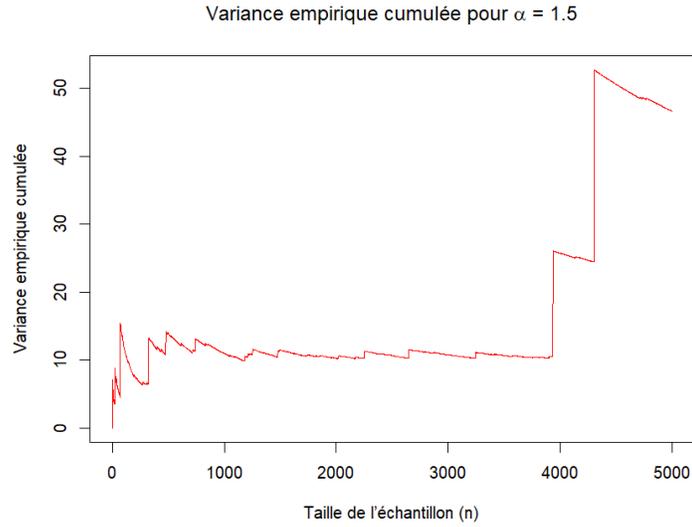


FIG. 2.7 – Simulation de l'inexistence de la variance pour  $\alpha = 1.5$

## 2.2 Algorithme de simulation

La simulation des lois stables peut être réalisée à l'aide d'un algorithme proposé par Chambers et al. (1976). Cet algorithme permet de générer une variable suivant une loi stable  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ . Pour obtenir une loi  $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ , il suffit d'appliquer une transformation adéquate des variables.

### 2.2.1 Première étape

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W = -\log(1 - U_2). \end{array} \right.$$

## 2.2.2 Deuxième étape

Elle consiste calculer différentes quantités (fonction de  $\Phi$  et de  $W$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 - \alpha, \\ \alpha = \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b = \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2}, \\ z = \frac{\cos(\varepsilon\Phi) - \tan(\alpha\phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos(\Phi)}, \\ d = \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\varepsilon}, \\ \tau = -\varepsilon \tan(\alpha\phi_0), \\ B = \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}}. \end{array} \right.$$

## 2.2.3 Troisième étape

Elle consiste générer une loi  $Y$  stable  $S_\alpha(\beta, 1, 0)$  pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante

**Proposition 2.2.1** *soit  $\Phi$  une loi uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $W$  une loi exponentielle de paramètre 1, si on pose*

- pour  $\alpha \neq 1$

$$y = (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \phi\tau B [b(1-a^2)2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} (1 + \varepsilon d) + \tau(d + \frac{1}{\varepsilon}) \right\}$$

$$= \frac{\sin \alpha (\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

ou

$$\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha},$$

- pour  $\alpha = 1$

$$Y = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left( \frac{\frac{1}{2}\pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right),$$

Alors la v.a.r  $Y$  suit une loi  $S_\alpha(\beta, 1, 0)$

**Exemple 2.2.1** Dans le cas d'une loi  $S_\alpha S$  (cest -dire  $\beta = 0$ ), nous avons

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{\cos(\Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

plus particulièrement, dans le cas où est égale à 2, nous avons

$$Y = \frac{\sin(2\Phi)}{\sqrt{\cos \Phi}} \left( \frac{\cos \Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi$$

Enfin, dans le cas où est égale 1 et  $\beta$  égal 0, nous avons

$$Y = \tan \Phi$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

**Remarque 2.2.1** le cas  $\alpha = 1$  se résout de manière similaire.

## 2.2.4 Quelques exemples

Nous avons simulé 5000 réalisation de lois  $S_\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . la table (2.2) présente les histogrammes faits partir de ces simulation. Pour le cas

égale 2, on peut reconnaître l'histogramme de la figure (2.8) d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 2. Le tableau suivant représente la moyenne et la variance empirique des 5000 réalisations. Ces résultats confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque  $\alpha$  décroît vers 1, la variance explose et lorsque  $\alpha$  devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à exploser.

	2	1,7	1,5	1,2	1	0,9
moyenne	0,02	0,02	0,03	0,01	-0,33	27,58
variance	2,02	6,70	36,96	150,97	207,194	321.4201,71

TAB. 2.2 – Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations

## 2.3 Statistiques sur les lois symétriques $\alpha$ -stables

Dans cette partie, nous allons nous attarder sur les différentes manières de tester et d'estimer les paramètres d'une loi symétrique  $\alpha$ -stable ( $S\alpha S$ ) dont je rappelle la forme de la fonction caractéristique

$\varphi_X(t) = \exp\{-\sigma|t|^\alpha\}$ . Que ce soit pour les problèmes de test de variance ou d'estimation des paramètres, nous supposons pour la suite que nous avons la suite d'observations  $(x_1, \dots, x_n)$  de la V.A.R.  $X$  définie juste avant par sa fonction caractéristique.

### 2.3.1 Tests sur la variance

Nous allons explorer deux méthodes permettant de vérifier si une loi présente une variance infinie ou non (Ces deux tests graphiques s'appliquent également à toute loi stable, qu'elle soit symétrique ou non)

#### a) Test graphique 1

Ce premier test est très simple et se décompose en 2 étapes :

-calculer la variance empirique  $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  où  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  pour différentes valeurs de  $n$ ,

- tracer le graphique  $(n, S_n^2)$ .

Intuitivement, lorsque  $n$  augmente et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger.

Au contraire, si on est en présence d'une loi variance infinie, le tracé diverge.

### b) Test graphique 2

Ce deuxième test est basé sur le fait que  $\lim_{x \rightarrow \alpha} t^\alpha P(|X| > t) = \sigma C(\alpha)$ . Donc on  $+\infty, \frac{d \log P(|X| > t)}{d \log t}$

est équivalent à  $\alpha$ . Là aussi, 2 étapes sont nécessaires :

- fixer  $t$  et calculer la quantité  $g(t) = \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{|X_i| > t} \right)$ ,

- tracer le graphique  $(\log, g(t))$  et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de  $t$ .

### c) Quelques exemples

Pour cela, nous avons repris les simulations de la section précédente. Les graphiques de la figure (2.9) représentent le test graphique 1. Ceux de la figure (2.10) représentent le test graphique 2. On peut remarquer que seul le cas  $\alpha$  égal à 2 fait converger la variance. Pour tous les autres cas, il y a divergence

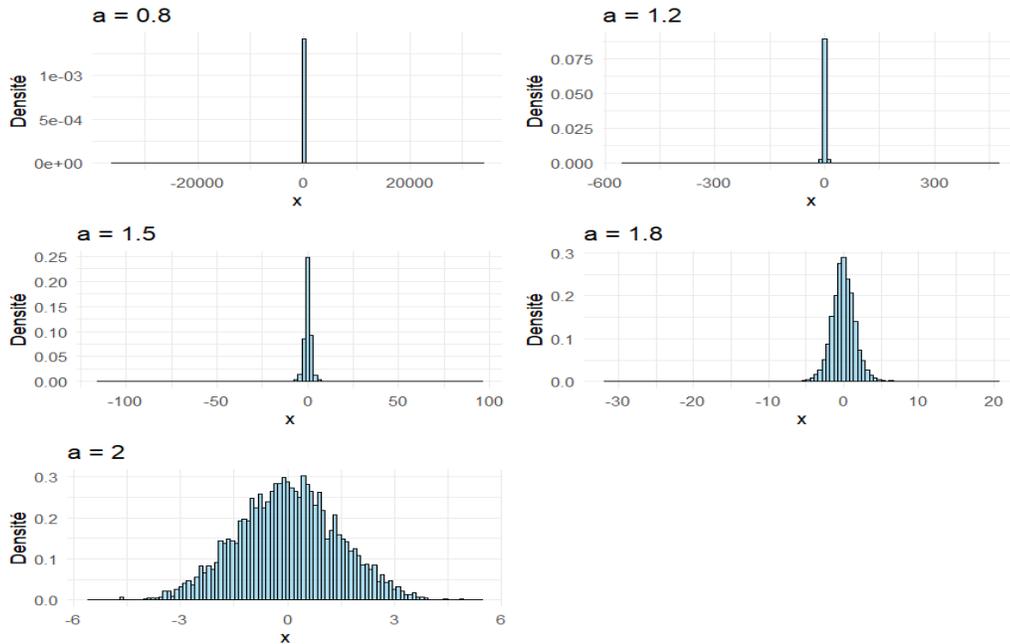


FIG. 2.8 – Histogrammes normalisés de lois S $\alpha$ S pour différentes valeurs de  $\alpha$  calculés sur 5000 réalisations

## 2.4 Estimation des paramètres des loi $\alpha$ -stable

L'estimation des paramètres d'une loi  $\alpha$ -stable représente un défi majeur en raison de l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité de probabilité (PDF). Cependant, de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour estimer ces paramètres, notamment : la **méthode du maximum de vraisemblance**, les **méthodes basées sur la transformée de Fourier** ou la **fonction caractéristique**, et les **méthodes des quantiles** comme celle de **McCulloch**.

Parmi ces méthodes, celle de **McCulloch (1986)** se distingue par son équilibre entre précision et rapidité de calcul. Développée comme une extension de la méthode de **Fama et Roll**, elle permet d'estimer les paramètres dans des cas asymétriques  $\beta \in [-1, 1]$  et pour une plage plus large de valeurs de  $\alpha \in [0.6, 2]$ . Cette méthode est efficace en termes de précision des estimateurs par rapport au

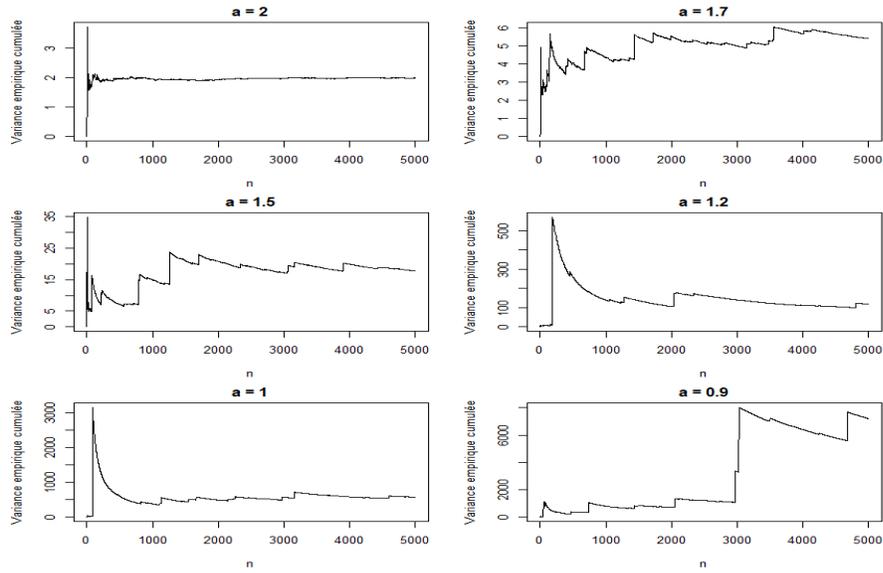


FIG. 2.9 – Test graphique 1 : variance empirique calculée pas pas sur léchantillon de 5000 réalisations dune loi  $S\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

temps de calcul requis, et elle est souvent utilisée pour fournir des valeurs initiales des paramètres avant d'appliquer des méthodes plus complexes.

### 2.4.1 Méthode de McCulloch

McCulloch [7] a proposé un algorithme dérivé de l'estimateur de Fama-Roll. Il a l'avantage de travailler dans le cas non -symétrique mais présente la contrainte  $\alpha \in [0.6, 2]$ . McCulloch définit :

$$v_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

et

$$v_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

On peu pose

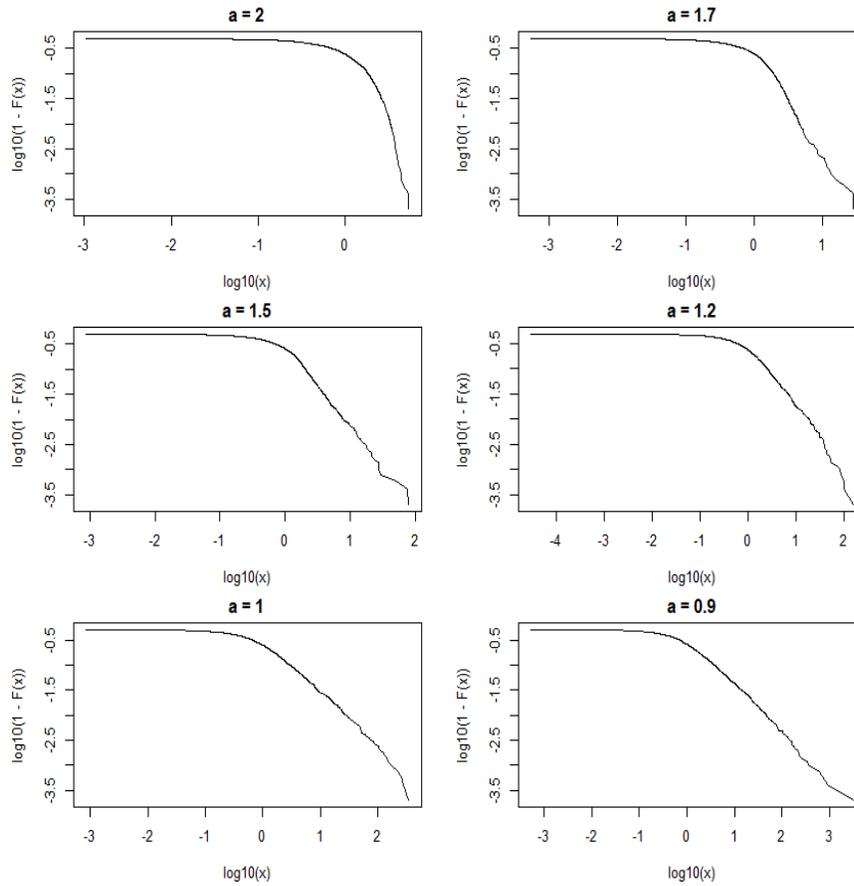


FIG. 2.10 – Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi  $S\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

$$v_\alpha = \varphi_1(\alpha, \beta)$$

et

$$v_\beta = \varphi_2(\alpha, \beta)$$

Ces fonctions ont été tabulées par DuMouchel (2.11)(2.12)

À partir de ces valeurs, il est possible d'estimer  $\alpha$  et  $\beta$  par :

$$\hat{\alpha} = \phi_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)$$

$v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta)$ .

$\alpha$	$\beta$				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
1.00	2.439	2.439	2.439	2.439	2.439
1.90	2.512	2.512	2.513	2.513	2.515
1.80	2.608	2.609	2.610	2.613	2.617
1.70	2.737	2.738	2.739	2.742	2.746
1.60	2.912	2.909	2.904	2.900	2.902
1.50	3.148	3.136	3.112	3.092	3.089
1.40	3.464	3.436	3.378	3.331	3.316
1.30	3.882	3.834	3.720	3.626	3.600
1.20	4.447	4.365	4.171	4.005	3.963
1.10	5.217	5.084	4.778	4.512	4.451
1.00	6.314	6.098	5.624	5.220	5.126
0.90	7.910	7.590	6.861	6.260	6.124
0.80	10.448	9.934	8.779	7.900	7.687
0.70	14.838	13.954	12.042	10.722	10.370
0.60	23.483	21.768	18.332	16.216	15.584
0.50	44.281	40.137	33.002	29.140	27.782

Note that  $\phi_1(\alpha, -\beta) = \phi_1(\alpha, \beta)$ .

FIG. 2.11 – Table de DuMouchel pour  $v_\alpha$

$v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta)$ .

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	0.018	0.036	0.053	0.071
1.80	0.0	0.039	0.077	0.113	0.148
1.70	0.0	0.063	0.123	0.178	0.228
1.60	0.0	0.089	0.174	0.248	0.309
1.50	0.0	0.118	0.228	0.320	0.390
1.40	0.0	0.148	0.285	0.394	0.469
1.30	0.0	0.177	0.342	0.470	0.546
1.20	0.0	0.206	0.399	0.547	0.621
1.10	0.0	0.236	0.456	0.624	0.693
1.00	0.0	0.268	0.513	0.699	0.762
0.90	0.0	0.303	0.573	0.770	0.825
0.80	0.0	0.341	0.634	0.834	0.881
0.70	0.0	0.387	0.699	0.890	0.927
0.60	0.0	0.441	0.768	0.936	0.962
0.50	0.0	0.510	0.838	0.970	0.985

Note that  $\phi_2(\alpha, -\beta) = -\phi_2(\alpha, \beta)$ .

FIG. 2.12 – Table de DuMouchel pour  $v_\beta$

et

$$\hat{\beta} = \phi_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)$$

En effet, pour chaque  $\beta$ , McCulloch a remarqué que la fonction  $v_\alpha$  est une fonction strictement décroissante de  $\alpha$ ; ce qui permet une estimation de  $\alpha$ . De même, pour chaque  $\alpha$ , la fonction  $v_\beta$  est une fonction strictement décroissante de  $\beta$ ; ce qui permet d'estimer  $\beta$ .

Ensuite, on définit la fonction  $v_\sigma$  par :

$$v_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma}$$

$\alpha = \psi_1(v_\alpha, v_\beta)$

$v_\alpha$	$v_\beta$						
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
2.5	1.916	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924
2.6	1.808	1.813	1.829	1.829	1.829	1.829	1.829
2.7	1.729	1.730	1.737	1.745	1.745	1.745	1.745
2.8	1.664	1.663	1.663	1.668	1.676	1.676	1.676
3.0	1.563	1.560	1.553	1.548	1.547	1.547	1.547
3.2	1.484	1.480	1.471	1.460	1.448	1.438	1.438
3.5	1.391	1.386	1.378	1.364	1.337	1.318	1.318
4.0	1.279	1.273	1.266	1.250	1.210	1.184	1.150
5.0	1.128	1.121	1.114	1.101	1.067	1.027	0.973
6.0	1.029	1.021	1.014	1.004	0.974	0.935	0.874
8.0	0.896	0.892	0.887	0.883	0.855	0.823	0.769
10.0	0.818	0.812	0.806	0.801	0.780	0.756	0.691
15.0	0.698	0.695	0.692	0.689	0.676	0.656	0.595
25.0	0.593	0.590	0.588	0.586	0.579	0.563	0.513

Note that  $\psi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \psi_1(v_\alpha, v_\beta)$ .

FIG. 2.13 – Table de DuMouchel pour estimer  $\alpha$

$v_\alpha$	$v_\beta$						
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	0.0	2.160	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.5	0.0	1.592	3.390	1.0	1.0	1.0	1.0
2.6	0.0	0.759	1.800	1.0	1.0	1.0	1.0
2.7	0.0	0.482	1.048	1.694	1.0	1.0	1.0
2.8	0.0	0.360	0.760	1.232	2.229	1.0	1.0
3.0	0.0	0.253	0.513	0.823	1.575	1.0	1.0
3.2	0.0	0.203	0.410	0.632	1.244	1.906	1.0
3.5	0.0	0.165	0.332	0.499	0.943	1.560	1.0
4.0	0.0	0.136	0.271	0.404	0.689	1.230	2.195
5.0	0.0	0.109	0.216	0.323	0.539	0.827	1.917
6.0	0.0	0.096	0.190	0.284	0.472	0.693	1.759
8.0	0.0	0.082	0.163	0.243	0.412	0.601	1.596
10.0	0.0	0.074	0.147	0.220	0.377	0.546	1.482
15.0	0.0	0.064	0.123	0.191	0.330	0.478	1.362
25.0	0.0	0.056	0.112	0.167	0.285	0.428	1.274

FIG. 2.14 – Table de DuMouchel pour estimer  $\beta$

Il est possible de connatre les variation de  $v$  en fonction de  $\varphi_3(\alpha, \beta)$ . On obtient alors :

$$v_\sigma = \varphi_3(\alpha, \beta); \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\varphi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Pour paramètre de localisation McCulloch est définie  $v_\eta$  comme

$$v_\eta = \frac{\mu - x_{0.5}}{\sigma}$$

où

$$\eta = \begin{cases} \mu + \sigma \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \mu & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	1.908	1.908	1.908	1.908	1.908
1.90	1.914	1.915	1.916	1.918	1.921
1.80	1.921	1.922	1.927	1.936	1.947
1.70	1.927	1.930	1.943	1.961	1.987
1.60	1.933	1.940	1.962	1.997	2.043
1.50	1.939	1.952	1.988	2.045	2.116
1.40	1.946	1.967	2.022	2.106	2.211
1.30	1.955	1.984	2.067	2.188	2.333
1.20	1.965	2.007	2.125	2.294	2.491
1.10	1.980	2.040	2.205	2.435	2.696
1.00	2.000	2.085	2.311	2.624	2.973
0.90	2.040	2.149	2.461	2.886	3.356
0.80	2.098	2.244	2.676	3.265	3.912
0.70	2.189	2.392	3.004	3.844	4.775
0.60	2.337	2.635	3.542	4.808	6.247
0.50	2.588	3.073	4.534	6.636	9.144

FIG. 2.15 – Table de DuMouchel pour  $v_\sigma$

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	-0.017	-0.032	-0.049	-0.064
1.80	0.0	-0.030	-0.061	-0.092	-0.123
1.70	0.0	-0.043	-0.088	-0.132	-0.179
1.60	0.0	-0.056	-0.111	-0.170	-0.232
1.50	0.0	-0.066	-0.134	-0.206	-0.283
1.40	0.0	-0.075	-0.154	-0.241	-0.335
1.30	0.0	-0.084	-0.173	-0.276	-0.390
1.20	0.0	-0.092	-0.192	-0.310	-0.447
1.10	0.0	-0.099	-0.208	-0.346	-0.508
1.00	0.0	-0.098	-0.223	-0.383	-0.576
0.90	0.0	-0.099	-0.237	-0.424	-0.652
0.80	0.0	-0.094	-0.250	-0.469	-0.742
0.70	0.0	-0.089	-0.262	-0.520	-0.853
0.60	0.0	-0.078	-0.272	-0.581	-0.997
0.50	0.0	-0.061	-0.279	-0.659	-1.198

FIG. 2.16 – Table de DuMouchel pour  $v_\eta$

on pose

$$v_\eta = \varphi_4(\alpha, \beta)$$

L'estimateur de  $\eta$  est donné par :

$$\hat{\eta} = \hat{x}_{0.5} + \sigma \varphi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

L'estimateur de paramètre  $\mu$  est donné par :

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \hat{\eta} - \beta \sigma \tan(\frac{\pi \hat{\alpha}}{2}) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \hat{\eta} & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Exemple 2.4.1** On va simuler 5000 réalisation des  $v$  a qui suivent la loi  $\alpha$ -stable

pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve les résultats suivants :

$\alpha$	2	175	15	125	1
$\beta$	0	05	05	08	1
$v_\alpha$	2.46	267	316	380	5
$v_\beta$	001	012	023	051	0
$\hat{\alpha}$	2	173	147	121	11
$\hat{\beta}$	0	048	041	068	099

TAB. 2.3 – Estimation des paramtres du loi alpha-stable via l'approche de McCulloch pour 5000 realisations.

comme  $\hat{x}_p$  est estimateur de  $x_p$  est un estimateur consistant de  $x_p$ , et que les fonction  $\varphi_i$  sont continues alors les estimateur des paramètre sont consistant.

Afin de tester la validité de la méthode de McCulloch, nous appliquons celle-ci à un échantillon de 5000 réalisations simulées de rendements financiers suivant une loi  $\alpha$ -stable symétrique.

L'objectif est d'estimer visuellement et numériquement le paramètre de stabilité  $\alpha$ , ainsi que les autres paramètres caractéristiques.

La méthode repose sur la comparaison de certains quantiles empiriques avec les valeurs théoriques tabulées par DuMouchel. Après avoir calculé les quantiles de notre échantillon, nous déduisons une première estimation du paramètre  $\alpha$ .

Le graphique suivant illustre cette estimation (2.17) :

Ainsi, l'ensemble de ces outils graphiques conforte l'estimation du paramètre de stabilité  $\alpha$  obtenue par la méthode de McCulloch, renforçant la validité de notre approche numérique.

Le tableau suivant présente les estimations des paramètres ( $\alpha, \beta, \sigma, \mu$ )es lois  $\alpha$ -stables pour différents indices boursiers (NASDAQ, CAC40, DOW JONES, S&P500) à différentes fréquences (quotidienne, hebdomadaire, mensuelle), obtenues à l'aide de la méthode de McCulloch.

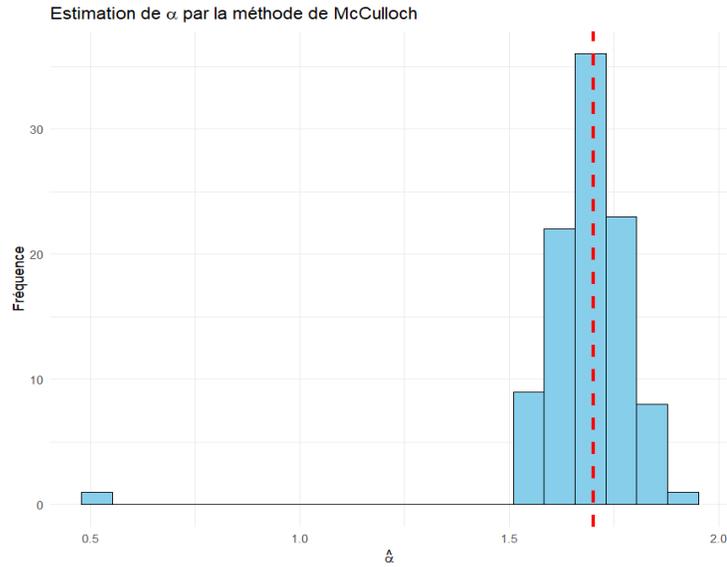


FIG. 2.17 – Estimation graphique du paramètre  $\alpha$  selon la méthode de McCulloch.

On remarque que les valeurs de  $\alpha$  sont généralement inférieures à 2, ce qui confirme la présence de queues épaisses dans les séries de rendements. Par ailleurs, les paramètres de dissymétrie  $\beta$  varient selon les indices et les fréquences, ce qui suggère une asymétrie des distributions.

Afin de compléter la validation de la méthode de McCulloch, nous avons appliqué l'approche sur des données réelles issues des principaux indices boursiers : NASDAQ, DOW JONES, S&P 500 et CAC40, sur la période 2014–2022.

Pour chaque série, nous avons estimé les paramètres de la loi  $\alpha$ -stable à trois fréquences (quotidienne, hebdomadaire, mensuelle), puis superposé les densités estimées aux histogrammes des rendements.

Les graphiques suivants confirment visuellement l'adéquation du modèle  $\alpha$ -stable avec les rendements observés (2.18, 2.19, 2.20, 2.21) :

Les quatre séries de rendements montrent des queues épaisses et des distributions asymétriques. Les densités ajustées à l'aide des paramètres estimés par la méthode

Indice	Fréquence	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
NASDAQ	Quotidien	1.401	-0.204	0.006193786	0.0014136908
NASDAQ	Hebdomadaire	1.722	-0.648	0.015513450	0.0054931687
NASDAQ	Mensuel	1.476	-0.325	0.029698669	0.0142091023
CAC40	Quotidien	1.482	-0.114	0.005865468	0.0008569430
CAC40	Hebdomadaire	1.499	-0.280	0.013234627	0.0039675916
CAC40	Mensuel	0.500	0.000	1.000000000	0.0000000000
DOW JONES	Quotidien	1.392	-0.139	0.004723707	0.0007645846
DOW JONES	Hebdomadaire	1.501	-0.215	0.011134422	0.0030372656
DOW JONES	Mensuel	1.606	-0.333	0.024675159	0.0097935010
S&P500	Quotidien	1.369	-0.166	0.004742110	0.0008183165
S&P500	Hebdomadaire	1.588	-0.395	0.011867754	0.0041426171
S&P500	Mensuel	1.467	-0.433	0.025731810	0.0146280817

TAB. 2.4 – Estimations des paramtres des lois a-stables via la mthode de McCulloch

de McCulloch s'alignent bien avec les histogrammes empiriques, confirmant la validité du modèle  $\alpha$ -stable sur des données réelles

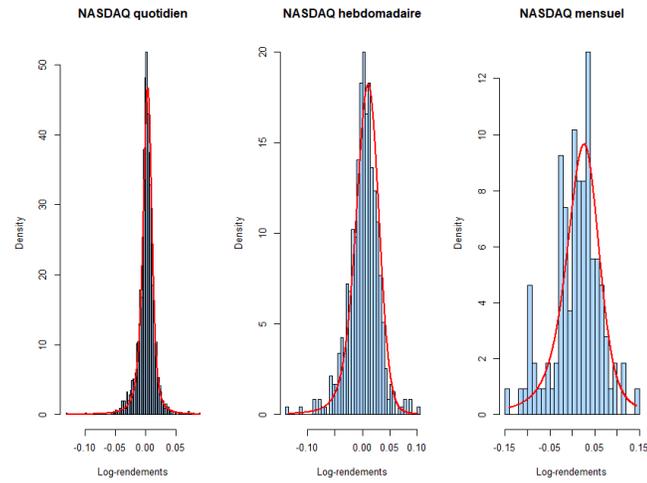


FIG. 2.18 – Histogramme des rendements quotidiens du NASDAQ et ajustement par une loi  $\alpha$ -stable

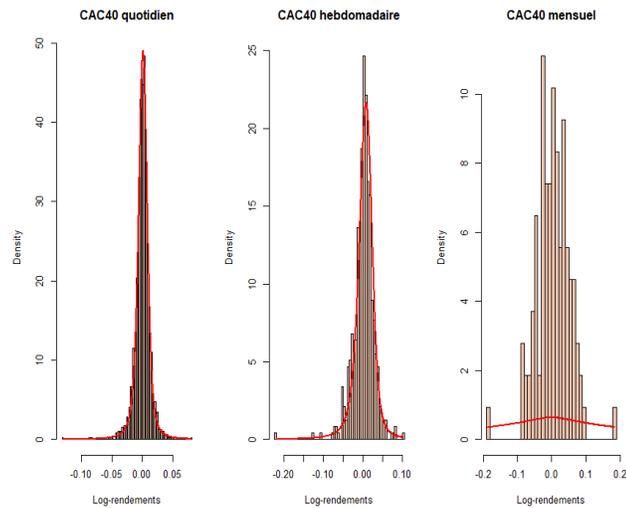


FIG. 2.19 – Histogramme des rendements quotidiens du CAC 40 et ajustement par une loi  $\alpha$ -stable

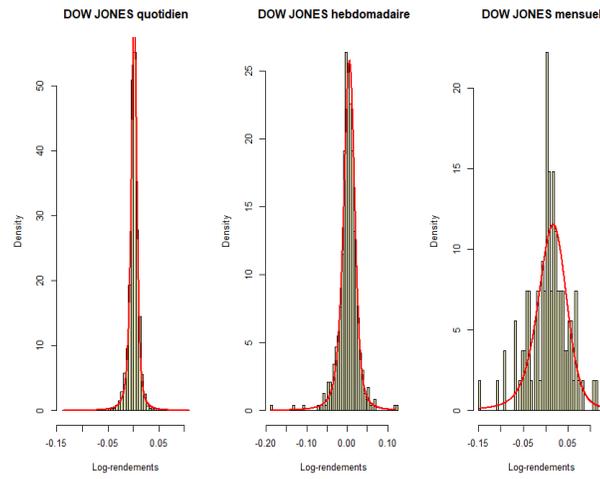


FIG. 2.20 – Histogramme des rendements quotidiens du DOW JONES et ajustement par une loi  $\alpha$ -stable

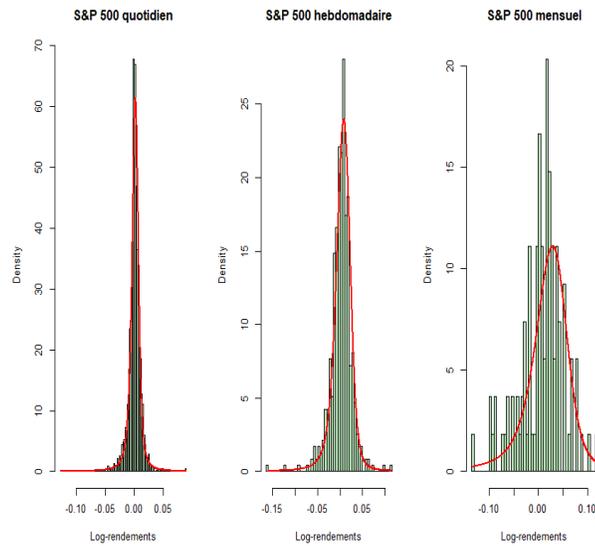


FIG. 2.21 – Histogramme des rendements quotidiens du S&P 500 et ajustement par une loi  $\alpha$ -stable

# Conclusion

Tout au long de ce mémoire, nous avons tenté de mieux comprendre comment modéliser les rendements financiers, qui sont souvent instables, extrêmes et asymétriques.

Notre question de départ était simple :

Les lois  $\alpha$ -stables sont-elles capables de représenter plus fidèlement ces rendements que les modèles classiques ?

Pour y répondre, nous avons d'abord mis en évidence les limites de la loi normale, qui ne permet pas de modéliser correctement les événements extrêmes ni la forte volatilité. Nous avons ensuite étudié les lois  $\alpha$ -stables : leurs propriétés, leur souplesse, ainsi que des méthodes pour les simuler et les estimer.

Grâce aux simulations, nous avons vu que les résultats obtenus confirment bien la théorie : lorsque  $\alpha < 2$ , la variance devient infinie, et pour  $\alpha \leq 1$ , même la moyenne est instable.

L'application aux données réelles du NASDAQ a également montré que ce modèle colle bien à la réalité : les rendements ont des queues épaisses, sont asymétriques et très volatils.

Bien sûr, notre travail n'est pas sans limites.

Le fait que la densité de ces lois ne soit pas toujours connue rend l'analyse parfois difficile. De plus, l'estimation des paramètres peut dépendre fortement de la

qualité des données utilisées.

Mais malgré ces contraintes, les lois  $\alpha$ -stables restent un outil puissant, bien plus flexible que la loi normale, pour modéliser les rendements financiers.

En résumé, ce modèle apporte une vraie valeur ajoutée, surtout dans le contexte de la gestion du risque et des marchés turbulents.

Pour aller plus loin, plusieurs pistes pourraient être explorées :

Combiner le modèle  $\alpha$ -stable avec des techniques qui prennent en compte la mémoire longue (comme GARCH  $\alpha$ -stable ou processus fractionnaires).

Appliquer ce modèle à d'autres types de marchés, notamment les marchés émergents.

Étudier son comportement sur d'autres actifs, comme les matières premières ou les cryptomonnaies.

Finalement, ce travail nous aide à mieux comprendre le comportement parfois chaotique des marchés, et nous invite à repenser les outils qu'on utilise pour les analyses

# Bibliographie

- [1] Adam, E. (2001). Analyse fractale des marchés financiers. Mémoire de DEA, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie.
- [2] Brooks, C. (2019). Introductory Econometrics for Finance (4th ed.). Cambridge : Cambridge University Press.
- [3] Coulon, J. (2009). Mémoire longue, volatilité et gestion de portefeuille [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1]. HAL archives ouvertes.
- [4] Garel, B. (2018). Modèles mathématiques du hasard : cours et exercices résolus. Paris : Éditions Ellipses
- [5] Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, 11(2) :pp. 431-441, June 1963.
- [6] Malkiel, B. G. (1999). A random walk down Wall Street : Including a life-cycle guide to personal investing (7th ed.). New York : W. W. Norton & Company.
- [7] McCulloch, J.H. : Simple consistent estimators of stable distribution parameters. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 15(4) :pp. 1109-1136, 1986.
- [8] Mittnik Stefan, Doganoglu T. et Chenyao D.,1999.Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian

- Distribution. Mathematical and Computer Modelling, 29, N 10-12, p. 235-240.
- [9] Nolan J.P., Communications in Statistics-Stochastic Models 13 (1997) 759. The computer program STABLE can be downloaded from : <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>
- [10] Nolan J.P., 1999. An Algorithm for Evaluating Stable Densities in Zolotarevs (M) Parameterization. Mathematical and Computer Modelling, 29, N 10-12, p. 229-233.
- [11] Samorodnitsky G. et Taqqu M. S (1994). Stable non-Gaussian random processes. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London.
- [12] Sincere, M. (2004). Understanding stocks : Your first guide to finding out what the stock market is all about. New York : McGraw-Hill.
- [13] Touba, S. (s.d.). Modélisation des rendements financiers par les lois  $\alpha$ -stables [Thèse de doctorat, Université non spécifiée]. Document interne.
- [14] Zolotarev, V.M., 1986. One-dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- [15] Zolotarev, V.M. (1986). One-dimensional stable distributions, Trans. of Math. Monographs, AMS Vol. 65.

## Anexe :Logiciel R

R est un langage de programmation, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. R a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données, ... Plusieurs paquets, tels *ade4*, *FactoMineR*, *MASS*, *multivariate*, *scatterplot3d* et *rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.



Il a été initialement créé, en 1996, par Robert Gentleman et Ross Ihaka du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "R Core Team" qui développe R. Il est connu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation Unix, Linux, Windows et MacOS. Un élément clé dans la mission de développement de R est le Comprehensive R Archive Network (*CRAN*) qui est un ensemble de sites qui fournissent tout ce qui est nécessaire à la distribution de R, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site mère du CRAN est situé en Autriche Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du *CRAN*, appelés sites miroirs, sont répartis partout dans le monde.

*R* est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>". Il est souvent présenté comme un clone de S qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T* Bell Laboratories et plus particulièrement par Rick Becker, John Chambers et Allan Wilks. S est utilisable à travers le logiciel S-Plus qui est commercialisé par la société Insightful (<http://www.splus.com/>).

## Résumé :

Ce mémoire analyse le comportement des rendements financiers à l'aide des lois  $\alpha$ -stables, mieux adaptées aux événements extrêmes que la loi normale. Il présente d'abord les caractéristiques empiriques comme la volatilité, l'asymétrie et les queues épaisses. Les propriétés mathématiques et économiques des lois  $\alpha$ -stables sont ensuite étudiées à travers des simulations. Enfin, les paramètres sont estimés via la méthode de McCulloch, en tenant compte de la mémoire longue dans la volatilité

**Mots clés :** Rendement d'actif , lois  $\alpha$ -stables , queus lourde, série financières

## ملخص

تتناول هذه المذكرة تحليل سلوك العوائد المالية باستخدام قوانين ألفا المستقرة، التي تُعد أكثر ملاءمة من التوزيع الطبيعي في تمثيل الأحداث القصوى. يتم أولاً عرض الخصائص التجريبية مثل التقلب، عدم التماثل، وسمك الذيل. ثم يتم دراسة الخصائص الرياضية والاقتصادية لهذه القوانين من خلال المحاكاة. وأخيراً، يتم تقدير المعلمات باستخدام طريقة McCulloch ، مع أخذ الذاكرة بعين الاعتبار

**كلمات البحث :** عوائد الأصول ، قوانين ألفا المستقرة، الذيل الثقيل، السلاسل المالية

## Abstract :

This thesis analyzes the behavior of financial returns using  $\alpha$ -stable laws, which are better suited than the normal distribution for modeling extreme events. It first presents empirical characteristics such as volatility, asymmetry, and heavy tails. The mathematical and economic properties of  $\alpha$ -stable laws are then studied through simulations. Finally, the parameters are estimated using McCulloch's method, taking into account long memory in volatility.

**Key word :** Return on assets,  $\alpha$ -stable laws, heavy tails, financial series