République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité et statistique**

Par

**Boudjelida Ikram**

Titre :

# Un résultat d'approximation du contrôle des l'équations différentielles stochastiques de type McKean - Vlasov

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | Chighoub Farid | UMKB | Président |
| Dr. | MEZERDI Mohamed Amine | UMKB | Encadreur |
| Dr. | Abdelhakim Ninouh | UMKB | Examinateur |

02 Juin 2025

## Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents, avant tout, qui ont toujours été mon soutien,

*À* mes frères et sœurs bien-aimés, source de ma joie et de mon bonheur, ainsi qu'à toute ma famille,

*À* mes professeurs respectés, qui ont éclairé mon chemin par leur savoir,

*À* mes amis et camarades, compagnons de route et de moments partagés.

*À* tous ceux qui ont une place dans mon cœur,

*À* tous ceux qui m'aiment,

Et à tous ceux que j'aime

Ikram Boudjelida

# *REMERCIEMENTS*

Tout d'abord, je rends grâce à Allah, le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour franchir chaque étape de mon parcours universitaire, jusqu'à l'obtention de mon diplôme de Master 2.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements, ma profonde reconnaissance et mon grand respect à mon directeur de recherche, **Dr Mohamed Amine Mezerdi**, pour ses précieux conseils, son encadrement rigoureux et son soutien tout au long de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury, **Dr Farid Chighoub** et **Dr Abdelhakim Ninouh**, pour avoir accepté de lire, d'évaluer et d'enrichir ce mémoire par leurs remarques pertinentes.

Je n'oublie pas d'exprimer toute ma gratitude à mes chers parents et à ma famille, pour leur amour inconditionnel, leur soutien moral et leurs prières qui m'ont accompagné durant cette aventure.

Enfin, je remercie tous mes enseignants du département de mathématiques, mes amis, ainsi que toutes les personnes qui m'ont soutenu, encouragé et accompagné dans les moments difficiles. Que chacun trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus sincère.

# Table des matières

# Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier certaines propriétés d'une classe particulière d'équations différentielles stochastiques (EDS), appelées équations différentielles stochastiques de type McKean–Vlasov (EDSMV) ou équations de type champ moyen. Pour ce type d'équations, la dérive et le coefficient de diffusion dépendent non seulement de la variable d'état $X_t$, mais aussi de sa distribution marginale $P_{X_t}$, ce fait introduit une difficulté supplémentaire non triviale par rapport aux EDS classiques d'Itô. Les solutions de telles équations sont appelées dans la littérature des diffusions non linéaires. Les EDSMV ont d'abord été étudiées en physique statistique par Kac comme contrepartie stochastique de l'équation de Vlasov du plasma. L'étude probabiliste de telles équations a été menée par McKean. Ces équations ont été obtenues comme limite de certains systèmes de particules faiblement interactifs lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. L'équation de McKean–Vlasov représente en quelque sorte le comportement moyen d'un nombre infini de particules. Depuis les premiers travaux, la théorie des jeux à champ moyen et le contrôle à champ moyen ont suscité un vif intérêt, motivé par des applications dans divers domaines tels que la théorie des jeux, la finance mathématique, les réseaux de communication et la gestion des ressources pétrolières.

Dans le cadre du contrôle stochastique de systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de McKean–Vlasov, nous établissons que les problèmes de contrôle strict et relaxé partagent les même fonctions des valeurs. Dans l'absence de la condition de convexité, il n'est généralement pas possible de garantir l'existence d'un contrôle optimal. Pour pallier cette difficulté, l'idée consiste alors à inclure les contrôles stricts habituels dans un ensemble plus large de contrôles à valeurs mesures, appelés contrôles relaxés, qui sont des mesures sur l'espace des actions et possèdent de solides propriétés de compacité. Pour que le contrôle relaxé constitue une véritable extension du problème initial, il faut que les fonctions des valeurs des deux formulations soient identiques. Sous l'hypothèse de Lipschitz sur les coefficients, nous démontrons que cette équivalence est bien vérifiée. Ce résultat a été obtenu dans [1] lorsque les coefficients sont lipschitziens, et dans [6] lorsque les coefficients vérifient une condition d'unicité trajectorielle.

Ce travail est structuré en trois chapitres principaux :

**Premier chapitre :** C'est une introduction aux notions de processus stochastiques, de mouvement Brownien et de martingales, est aussi sur l'intégrale stochastique et l'équation différentielle stochastique.

**Deuxième chapitre :** Dans ce chapitre, on va étudié l'existence et l'unicité de la solution en adoptant deux approches, le théorème du point fixe et le schéma itératif de Picard.

**Troisième chapitre :** Dans ce chapitre, on va formulé le problème de contrôl et la continuité de la dynamique et de la fonction de coût par rapport à la variable de contrôle, pour garantir que les fonctions des valeur dans le contrôle strict et relaxé sont les mêmes.

# Chapitre 1

# Rappel sur le calcul stochastique

C'est une introduction aux notions de processus stochastiques, de mouvement Brownien et de martingales, est aussi sur l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques, en vue de les appliquer dans la suite. ( Voir [4, 5, 7] )

## 1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** *(**Processus stochastique**) Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires* $(X_t; t \in [0,\infty[)$ *défnies sur le méme espace de probabilité.*

**Remarque 1.1.1** *L'application* $t \in T \to X_t(\omega)$ *est appelée la trajectoire du processus stochastique.*

**Définition 1.1.2** *(**Modifcation**) On dit que deux processus* $X$ *et* $Y$ *sont égaux à une modifcation prés si,* $\forall \leq T$ *on a* $P(X_t = Y_t) = 1$ *C'est- à-dire :*

$$\forall \leq T, \qquad X_t(\omega) = Y_t(\omega) \qquad P - p.s$$

**Définition 1.1.3** *(**Indistingable**) Deux processus* $X$ *et* $Y$ *sont dits indistingables* *si, $P-p.s$ les trajectoires de $X$ et $Y$ sont les mémes, C'est- à-dire :*

$$P\left(X_t = Y_t, \forall t \in T\right) = 1$$

**Définition 1.1.4** ***(Filtration)*** *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

1. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s'appelle espace filtré.
2. On dit qu'un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ satisfait les conditions habituelles si :

**(i)** Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$ i.e $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

**(ii)** La filtration est continue à droite i.e : $\mathcal{F}_t = \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_t$ , $\forall t$.

**Définition 1.1.5** ***(Filtration naturelle)*** *Filtration naturelle (propre) d'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est définie par :*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t \quad t \in T)$$

*$\mathcal{F}_t$ est la classe des évènement que l'on peut identifier au temps $t$.*

**Remarque 1.1.2**

1. Une filtration $\{\pounds_t, t \in T\}$ est dite plus grosse que la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \pounds_t, \forall t \in T$.
2. Une filtration est continue à droit si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.
3. Une filtration est continue à gauche si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\cup_{s \geq t} \mathcal{F}_s\right)$.

**Définition 1.1.6** ***(Processus adapté)*** *On dit qu'un processus $X$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si pour tout $t$, $X_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*

**Remarque 1.1.3** *Un processus $X$ est toujours adapté à sa filtration naturelle.*

**Définition 1.1.7** *(**Processus mesurable**) Un processus $X$ est dit mesurable si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

**Définition 1.1.8** *(**Processus continu**) On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu), si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega$.*

**Définition 1.1.9** *(**Processus cadlàg**) Le processus $X$ est dit cadlàg si les trajectoires sont continues à droite, pourvu de limites à gauche.*

**Définition 1.1.10** *(**Processus caglàd**) Le processus $X$ est dit caglàd si les trajectoires sont continues à gouche, pourvu de limites à droite.*

**Définition 1.1.11** *Deux processus sont égaux en loi $X \overset{loi}{=} Y$ si pour tout $(t_1,t_{2,}...,t_n)$ et pour tout $n$ on a $(X_{t_1},X_{t_2},....,X_{t_n)} \overset{loi}{=} (Y_{t_1},Y_{t_2},....,Y_{t_n})$.*

**Définition 1.1.12** *.(**Processus progrressivement mesurable**) On dit que $X$ est un processus progressivement mesurable si pour tout $t \in T$, l'application $(\omega,s) \to X(\omega,s)$ défnie sur $\Omega \times [0,t]$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,t])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*

## 1.2 Mouvement Brownien

**Définition 1.2.1** *Soit $\mathcal{F}$ une filtration.Un $\mathcal{F}$-mouvement brownien (standard) est un processus $B$ vérifiant :*

1. *$B$ est $\mathcal{F}$-adapté*
2. *$B_0 = 0$, $P - p.s.$*

3. *$B$ est continu , i.e. $t \to B_t(\omega)$ est continue pour $P$-presque tout $\omega \in \Omega$*

4. *$B$ est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.*

5. *$B$ est à accroissements stationnaires et gaussiens : $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pour tous $t, s \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.*

Certaines fois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la filtration à considérer ou lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du processus $B$, on parlera de mouvement brownien tout court.

## 1.3 Martingales

**Définition 1.3.1** *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,\infty[)$ est une martingale par rapport à. la fitration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

1. *$X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout $t$.*

2. *$\forall s \leq t$*

$$E\left(X_t / \mathcal{F}_s\right) = X_s$$

**Définition 1.3.2** *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,\infty[)$ est une surmartingale (resp. sousmartingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

1. *$X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout $t$.*

2. *$E\left(X_t / \mathcal{F}_s\right) \leq X_s$ ,$\forall s \leq t$ (resp.$E\left(X_t / \mathcal{F}_s\right) \geq X_s$).*

**Remarque 1.3.1** *$X_t$ est une martingale si il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.*

## 1.4 Intégrale stochastique en général

**Définition 1.4.1** *(Bon processus) On note* $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du mouvement Brownien.du mouvement brownien* $W$*.*

On dit que $\{\theta_t,\, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$-adapté, càglàd et si :

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 d_s\right] < \infty, \qquad \text{pour tout } t > 0$$

**Cas de processus étagés**

On dit qu'un processus $\theta$ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réel $t_j$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = t_n$ et une suite de variables aléatoires $\theta_j$ telles que $\theta_j$ soit $\mathcal{F}_t$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$, pour tout $t \in ]t_j, t_{j+1}]$, soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega)\, 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$$

On définit alors :

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)$$

On a :

$$E\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right) = 0, Var\left(\int_0^\infty \theta_s dW\right) = E\left[\int_0^\infty \theta_s^2 dW_s\right]$$

On obtient :

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)\right)$$

**Cas général**

Si $\theta$ est un "bon processus", on montre d'abord qu'il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$, suite de processus étagés telle que :

$$\left[E \int_0^t (\theta_S - \theta_S^n)^2 \, ds \right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

puis pour tout $t > 0$, il existe une $v.a.$ $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que :

$$E\left[\left|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)^2\right|\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

avec

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dW_s, \qquad \forall t \geq 0.$$

Par indépendence, on remerque que :

$$E\left[I_t(\theta^n)\right] = \sum_{i=0}^{p_n} E\left[\theta_j\right]\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) = 0,$$

de sorte que en passant à la limite que :

$$E\left[I_t(\theta)\right] = 0$$

De même on obtient :

$$\begin{aligned} Var\left[I_t(\theta)\right] &= \lim_{n \to \infty} Var\left[I_t(\theta)^n\right] \\ &= E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] \end{aligned}$$

**Propriétés 1.4.1** *(Propriétés des intégrales stochastiques)*

1. $\theta \to \int_0^t \theta dW_s$ *est linéaire.*
2. $\theta \to \int_0^t \theta_s dW_s$ *est continue p.s.*
3. $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté.*
4. *propriété d'isométrie*

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s W_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

5. 

$$E\left[\int_s^t \theta_u W_u \,|\mathcal{F}_s\right] = 0 \quad et \qquad E\left[\left(\int_s^t \theta_v W_v\right)^2 /\mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_v^2 d_v/\mathcal{F}_s\right]$$

6. $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale.*
7. *Le processus* $\left(\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale.*

## 1.5 Equations différentielles stochastiques

**Définition 1.5.1** *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \tag{1.1}$$

*ou sous la form :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

*Où $X$ est $n-$dimentionnel, $x \in L^0(\mathcal{F}_0,\mathbb{R}^n)$, et les fonctions :*

$$b : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \sigma : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

*sont $F$-mesurables par rapport à $(t,\omega,x)$. Le coeffcient $b$ s'appelle le drift et $\sigma$ s'appelle le coefficients de diffusion. L'inconnu est le processus $X_t$. Le problème est de montrer que sous certaines conditions sur les coeffcients, l'équation différentielle a une unique solution.*

**Définition 1.5.2** *On dit que $X \in L^0(\ F,\mathbb{R}^n)$ est une solution de l'EDS 1.1 si*

**(i)** *P.p.s*, $\int_0^t \left[|b(s,X_s)|\,ds + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2\right] ds$

**(ii)** *$X$ vérifie c'est-à-dire :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s,\ \forall 0 \le t \le T,\ P.p.s$$

*.On note*

$$S^2(F) := \left\{ X \in L^0(F) : X \text{ est continue ,p.s et } \|X\|^2_{\infty,2} := E\left[\underset{0\le t\le T}{sup}|X_t|^2\right] < \infty \right\},$$

**Définition 1.5.3** *(Existence et unicité) Si $b$ et $\sigma$ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $L < +\infty$ , avec :*

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le L\,|x-y|$, *pour tout* $x,y \in \mathbb{R}^n$.
2. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le L\,(1 + |x|)$.
3. $E\left(|x|^2\right) < \infty$.

Alors, pour tout $T \ge 0$, l'équation 1.1 possède une unique solution dans l'intervalle $[0,T]$. De plus cette solution $X = (X_t)_{0\le t\le T} \in S^2(F,\mathbb{R}^n)$.

## 1.6 Quelque Résultats importants

**Lemme de Granwall :** Soit $T \geq 0$ et $f$ une fonction positive, mesurable et bornée telle que :

$$f(t) \leq \alpha + b \int_0^t f(s)ds \qquad \alpha \geq 0$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$f(t) \leq \alpha \exp(bt)$$

**Inégalité Burkhoder-davis-Gundy "BDG"** :

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue réelle locale, avec $M_0 = 0$, et soit $\langle M \rangle_t$sa variation quadratique. Pour tout $p \in [1, \infty)$, il existe des constantes positives $c_p$ et $C_p$dépendant uniquement de $p$, telles que :

$$c_p E\left[\langle M, M \rangle^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^P\right] \leq C_p E\left[\langle M, M \rangle^{\frac{p}{2}}\right]$$

**Inégalité de Hölder :** Soit $p$ et $q \in [1,\infty[$ tel que $q$ est l'exposant conjugué de $p$. Si $f$,$g \in C([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$$\int_a^b |f.g| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**Inégalité de Cauchy-Schwarz ( cas particulier de Hölder ) :** Si $f$ , $g \in C([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$\int_a^b |f.g| \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Théorème de convergence dominée de Lebesgue** : Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions mesurables définies sur un espace mesurable $(X, A, \mu)$,et supposons que :

**(i)** Convergence pointwise : $f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in X$, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $E \subset X$ de mesure nulle tel que pour tout $x \in X \setminus E$, on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

**(ii)** Fonction dominée : Il existe une fonction mesurable $g : X \to [0, \infty)$ telle que $\mid f_n(x) \mid \leq g(x)$ pour tout n et presque tout $x \in X$.

Alors,la suite $(f_n)_{n\in N}$ converge vers $f$ dans le sens de l'itégrale, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

# Chapitre 2

# Equations différentielles stochastiques de type McKean-Vlasov

Ce chapitre est dédié à l'étude approfondie des équations différentielles stochastiques de McKean-Vlasov (EDSMV). Ces équations représentent une classe particulière d'équations différentielles stochastiques où la dérive et le coefficients de diffusion dépendent non seulement de la solution, mais aussi de la distribustion marginale de la solution. Nous explorerons la structure fondamentale de ces équations et les défis spécifiques qu'elles posent en raison de leur nature non-linéaire et de leur dépendance à la distribution de la solution.

Un aspect crucial de notre analyse sera la question d'existence et unicité de la solution pour les EDSMV. Pour aborder ce problème fondamental, nous nous concentrerons sur deux méthodes puissantes et complémentaires, la méthode des approximations successives de Picard, qui construit itérativement une suite de fonctions convergeant vers l'unique solution, et le théorème du point fixe. Ces approches nous permettront de comprendre les conditions sous lesquelles les EDSMV possèdent des solutions bien définies, ouvrant la voie à leur application dans divers domaines scientifiques et techniques.

## 2.1 Distances de Wasserstein

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, pour tout $p > 1$, dénote par $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de probabilité à moment fini d'ordre $p$, et $\mu$,$\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, on définit la distance de Wasserstein :

$$W_p(\mu, \nu) = \underset{\pi \in \Pi(\mu,\nu)}{inf} \left[ \int_{E \times E} |x - y|^p d\pi(x, y) \right]^{1/p}$$

où $\Pi(\mu, \nu)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont la première et la deuxième marginales sont respectivement $\mu$ et $\nu$.

Si $\mu = P_X$ et $\nu = P_Y$ sont les lois des variables aléatoires $X$ et $Y$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$ d'ordre $p$, alors :

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu)^p &= \underset{\pi \in \Pi(\mu,\nu)}{inf} \left[ \int_{E \times E} |x - y|^p d\pi(x, y) \right] \\ &\leq \int_{E \times E} |x - y|^p dP_{(X,Y)}(x, y) \\ &\leq E[|X - Y|^p]. \end{aligned}$$

## 2.2 hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$, satisfaisant les conditions usuelles, et $(B_t)$ un mouvement brownien.

Considérons l'EDSMV suivante, appelée aussi EDS du champ moyen :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, P_{X_t}\right) dt + \sigma(t, X_t, P_{X_t}) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Il est à noter que, pour ce type d'équations, la dérive $b$ et le coefficient de diffusion $\sigma$ dépendent non seulement de la solution $X_t$, mais aussi de la distribution marginale de la solution $P_{X_t}$.

Les hypothèses suivantes sera considérée tout au long de ce travail.

Notons $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de probabilité avec un moment de second ordre fini.C'est-à-dire que pour chaque $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, on a $\int |x|^2 \mu\left(dx\right) < +\infty$

$H_1$) **Condition de la croissance linéaire :** Supposons que

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times d},$$

sont des fonctions mesurables de Borel et il existe $C > 0$ tel que pour tout $(t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$

$$|b(t, x, \mu)| + |\sigma(t, x, \mu)| \leq C(1 + |x|)$$

$H_2$) **Condition Lipschitzienne :** Il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in$ [0,$T$], $x$ , $y \in \mathbb{R}^d$ et $\mu$ , $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$|b(t, x, \mu) - b\left(t, y, \nu\right)| \leq L\left[|x - y| + W_2\left(\mu, \nu\right)\right]$$
$$|\sigma(t, x, \mu) - \sigma\left(t, y, \nu\right)| \leq L\left[|x - y| + W_2\left(\mu, \nu\right)\right]$$

où $W_2$ désigne la distance de Wasserstein.

## 2.3 Existence et unicité de la solution

### 2.3.1 Existence et unicité de la solution utilisant le théorème du point fixe :

Dans cette partie du travail, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques de McKean-Vlasov 2.1, notre approche repose sur l'utilisation de théorème du point fixe. Sous des hypothèses de Lipschitz et de la croissance linéaire sur les coefficients $b$ et $\sigma$, nous construisons une application contractante dont le point fixe correspond à la loi de la solution recherchée.

**Théoréme 2.3.1** *Sous les hypothèses* $(H_{\mathbf{1}})$ *et* $(H_{\mathbf{2}})$*, l'équation 2.1 admet une solution unique telle que :*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]\leq +\infty \tag{2.2}$$

**Preuve.** Soit $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ fixé, considérons l'EDS classique d'Itô suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mu\right)dt + \sigma\left(t, X_t, \mu\right)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

cette équation peut s'écrire sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s, \mu\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s, \mu\right)dB_s$$

Nous désignons sa solution par $X^\mu = (X_t^\mu)_{0\leq t\leq T}$. Ce résultat d'existence classique implique également que la loi de $X_t$ est d'ordre 2, de sorte que nous pouvons définir l'application :

$$\Psi ; C\left([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right) \rightarrow C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$$
$$\mu \rightarrow \Psi(\mu) = \left(L\left(X_t^{\mu}\right)\right)_{0\leq t\leq T}$$

où $\left(L\left(X_t^{\mu}\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ est la loi de $X_t^{\mu}$. ■

Puisqu'un processus $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ satisfaisant 2.2 est une solution de l'équation 2.1 si et seulement si sa loi est une point fixe de $\Psi$, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution en montrant que l'application $\Psi$ a un point fixe unique. Nous commençons par choisir $\mu$ et $\nu$dans $C\left([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right)$.

Etant donné que $X^{\mu}$ et $X^{\nu}$ partagent les mêmes conditions initiales, pour tous $t \in [0,T]$ :

$$\begin{aligned}
\left|X_t^{\mu} - X_t^{\nu}\right|^2 &= \left|\int_0^t b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)dB_s - \int_0^t b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)ds - \int_0^t \sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)dB_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)ds + \int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - \sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

on utilisant le fait que $|a+b|^2 \leq 2\,|a|^2 + 2\,|b|^2$ on a pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned}
\left|X_t^{\mu} - X_t^{\nu}\right|^2 \leq\ & 2\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)ds\right|^2 \\
&+ 2\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - \sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

en passant aux ésperances, on obtien :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{\mu} - X_t^{\nu}\right|^2\right] \leq\ & 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)ds\right|^2\right] \\
&+ 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right) - \sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right)dB_s\right|^2\right]
\end{aligned}$$

Une application de l'inégalité de Schwartz et de Burkholder-Davis-Gundy nous donne :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{s\leq t\leq T}\left|X_t^{\mu}-X_t^{\nu}\right|^2\right] &\leq 2TE\left[\sup_{s\leq t\leq T}\int_0^t \left|b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)-b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right|^2 ds\right] \\ &+2C_2E\left[\sup_{s\leq t\leq T}\int_0^t \left|\sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)-\sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right|^2 ds\right] \\ &\leq 2\left(T+C_2\right)E\left[\sup_{s\leq t\leq T}\int_0^t \left|b\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)-b\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right|^2\right. \\ &\left.+\left|\sigma\left(s,X_s^{\mu},\mu\right)-\sigma\left(s,X_s^{\nu},\nu\right)\right|^2 ds\right] \end{aligned}$$

comme les fonctions $b$ et $\sigma$ sont Lipschtizienne, alors :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{s\leq t\leq T}\left|X_t^{\mu}-X_t^{\nu}\right|^2\right] &\leq 2\left(T+C_2\right)L^2E\left[\sup_{s\leq t\leq T}\int_0^t \left|X_s^{\mu}-X_s^{\nu}\right|^2+W_2^2\left(\mu_s,\nu_s\right)ds\right] \\ &\leq m\left(T\right)\left(\int_0^t E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_s^{\mu}-X_s^{\nu}\right|^2\right]ds+\int_0^t W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)^2 ds\right) \end{aligned}$$

avec $m(T)$ dépend de $T$,$L$ et $C_2$, tel que $m(T)$ est croissante en fonction de $T$.

On va utiliser la même notation $m(T)$ bien que la valeur de cette constante puisse changer d'une ligne à l'autre.

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{\mu}-X_t^{\nu}\right|^2\right]\leq m\left(T\right)\left(\int_0^t E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_s^{\mu}-X_s^{\nu}\right|^2\right]ds\right)+m\left(T\right)\left(\int_0^t \left(W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)\right)^2 ds\right)$$

L'utilisantion de l'inégalité de Granwall, nous permettons de concluons que :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{\mu}-X_t^{\nu}\right|^2\right]\leq m\left(T\right)\left(\int_0^t \left(W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)\right)^2 ds\right)\quad \text{pour } t\in[0,T]$$

En utilisant les propriétés de la distance de Wasserstein :

$$\sup_{0\leq t\leq T}W_2\left(\Psi\left(\mu\right)_s,\Psi\left(\nu\right)_s\right)^2\leq m\left(T\right)\left(\int_0^t \left(W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)\right)^2 ds\right)$$

En itérant cette inégalité et en notant $\Psi^k$ le $k$-ième composition de l'application $\Psi$ avec elle-même, on obtient que, pour tout entier $k > 1$ :

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\left(W_2\left(\Psi^k\left(\mu\right)_s,\Psi^k\left(\nu\right)_s\right)\right)^2 &\leq m\left(T\right)^k\int_0^T\frac{\left(T-s\right)^{k-1}}{(k-1)!}W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)^2 ds\\ &\leq m\left(T\right)^k\frac{T^k}{k!}\left(\sup_{0\leq t\leq T}W_2\left(\mu_s,\nu_s\right)^2\right)\end{aligned}$$

Pour un grand $k$, $\Psi^k$ est une contraction, cela implique que l'application $\Psi$ admet un point fixe unique dans l'espace $C\left([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right)$.

### 2.3.2 Convergence des approximations successives de Picard

Nous allons démontrer la convergence du schéma d'itération de Picard. Ce schéma est utile pour les calculs numériques de la solution unique de l'équation 2.1. Nous définissons $(X_t^0) = x$ pour tous $t \in [0,T]$, puis, on définit $(X_t^{n+1})$ comme la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t^{n+1} = b\left(t, X_t^n, P_{X_t^n}\right)dt + \sigma\left(t, X_t^n, P_{X_t^n}\right)dB_t \\ X_0^{n+1} = x \end{cases}$$

**Théoréme 2.3.2** *Sous les hypothèses* $(H_1)$ , $(H_2)$, *la suite* $(X^n)$ *converge vers l'unique solution de 2.1.*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^n - X_t\right|^2\right] = 0$$

***Preuve.*** *Soit* $n \geq 0$, *en appliquant des arguments usuels tels que l'inégalité de Schwarz et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour la partie martingale, on ob-*

*tient :*

$$\begin{aligned}
\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2 &= \left[\int_0^t \left(b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-b\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right) ds\right. \\
&\quad \left.+\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-\sigma\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right) dB_s\right]^2 \\
&\leq 2\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-b\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right| ds\right)^2 \\
&\quad +2\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-\sigma\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right| dB_s\right)^2
\end{aligned}$$

*En passant aux ésperances, on obtien :*

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &\leq 2TE\left[\int_0^T \left|b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-b\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right|^2 ds\right] \\
&\quad +2C_2E\left[\int_0^T \left|\sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right)-\sigma\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right|^2 ds\right]
\end{aligned}$$

*Les coeffcients $b$ et $\sigma$ étant Lipschitziens, on obtient :*

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &\leq 2\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right] + W_2\left(P_{X_s^n}, P_{X_s^{n-1}}\right) ds \\
&\leq 4\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right] ds \\
&\leq 4\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right] ds
\end{aligned}$$

*Pour tout $n\geq 1$ et $t\leq T$, on a la premiére itération :*

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right] &\leq 2T\int_0^T \left|b\left(s,x,\mu\right)\right|^2 ds + C_2\int_0^T \left|\sigma\left(s,x,\mu\right)\right|^2 ds \\
&\leq 2\left(C_2+T\right)M\left(1+E\left[|x|^2\right]\right)T \\
&\leq A_1T
\end{aligned}$$

*où la constante $A_1$ dépend de $C_2, M, T$ et $E[|x|^2]$.*

*Par induction sur $n$, on obtient donc :*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{A_2^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Ceci implique en particulier que $(X_t^n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, C([0,T],\mathbb{R}^d))$, qui est complet. Par conséquent, $(X_t^n)$ converge vers une limite $(X_t)$ qui est l'unique solution de 2.1.* ■

# Chapitre 3

# Approximation des problèmes de contrôle relaxé

Ce chapitre est consacré à l'étude de contrôle relaxé. Il est bien connu que, dans les problèmes de contrôle, qu'ils soient déterministes ou stochastiques, un contrôle optimal n'existe pas nécessairement dans l'espace des contrôles stricts, en l'absence de conditions de convexité. La méthode classique consiste alors à introduire des contrôles à valeurs mesures, qui décrivent l'introduction d'un paramètre stochastique (voir [3] ). Ces contrôles à valeurs mesures, appelés contrôles relaxés, généralisent les contrôles stricts dans le sens où l'ensemble des contrôles stricts peut être identifié comme un sous-ensemble dense de l'ensemble des contrôles relaxés. Le problème de contrôle relaxé constitue une véritable extension du problème de contrôle strict si les deux possèdent la même fonction de valeur, c'est-à-dire si l'infimum sur les contrôles stricts est égal à l'infimum sur les contrôles relaxés. Cette dernière propriété repose sur la continuité de la dynamique et de la fonction de coût par rapport à la variable de contrôle, laquelle constitue l'objectif de notre étude dans ce chapitre.

Soit $\mathbb{A}$ un espace métrique compact, appelé espace des actions. Un contrôle strict est un processus $(u_t)$ mesurable et adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{A}$, l'ensemble de ces contrôles admissibles est noté $\mathcal{U}_{ad}$.

Le processus d'état associé à un contrôle strict est l'unique solution de l'équation de McKean-Vlasov suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, P_{X_t}, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, P_{X_t}, u_t\right) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.1}$$

et la fonction de coût correspondante est donnée par :

$$J(u) = E\left[\int_0^T h\left(t, X_t, P_{X_t}, u_t\right) dt + g\left(X_T, P_{X_T}\right)\right]$$

Le problème général de contrôle est consiste à minimiser $J(u)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ des contrôles stricts et de trouver le contrôle optimal $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$tel que $J(u^*) = \inf\{J(u), u \in \mathcal{U}_{ad}\}$.

## 3.1 hypothèses

Supposons que les hypothèses suivantes valable tout au long de ce chapitre :

$(H_3)$ $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}^d$ , $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ , sont des fonctions continues et bornées.

$(H_4)$ $b(t,\cdot,\cdot,a)$ et $\sigma(t,\cdot,\cdot,a)$ sont continuellement Lipschitz uniformément en $(t,a) \in [0,T] \times \mathbb{A}$.

$(H_5)$ $h : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sont des fonctions continues et bornées, telles que $h(t,\cdot,\cdot,a)$ est Lipschitzienne en $(x,\mu)$.

Sous les hypothèses $(H_3)$ et $(H_4)$, et d'après le Théorème 2.2 , pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$, l'équation 3.1 admet une solution unique, telle que pour tout $p > 0$, on ait $E(|X_t|^p) < +\infty$.

## 3.2 Mesures de martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré et $(E, \pounds)$ un espace métrique. $\{M_t(A), t \geq 0, A \in \pounds\}$ est appelé une mesure de martingale $\mathcal{F}_t-$adaptée si et seulement si :

1. $\{M_t(A), t \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, $\forall A \in \pounds$.
2. $\forall t > 0$, $M_t(.)$ est une mesure $\sigma-$finie à valeurs dans $L^2$ au sens suivant : il existe une suite croissante $(E_n)$ de $E$ avec $\cup_n E_n = E$ telle que :

   **(i)** pour tout $t > 0$, $\sup\limits_{A \in \pounds_n} E[M\,(A,t)^2] < \infty$, $\pounds_n = \mathcal{B}(\varepsilon_n)$.

   **(ii)** pour tout $t > 0$, $E[M(A_j,t)^2] \to 0$, pour toute suite $A_j$ de $\pounds_n$ décroissante vers $\theta$.

Pour $A, B \in E$, il existe un processus prévisible unique $\langle M(A), M(B)\rangle_t$, tel que $M(A,t)M(B,t)$-$\langle M(A), M(B)\rangle_t$ est une martingale.

## 3.3 Le problème de contrôle relaxé

Soit $\mathbb{V}$ l'ensemble des mesures produit $\mu$ sur $[0,T] \times \mathbb{A}$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $dt$. L'ensemble $\mathbb{V}$, en tant que sous-espace fermé de l'espace des mesures de Radon positives $\mathbb{M}_+([0,T] \times \mathbb{A})$ est compact pour la topologie de la convergence faible.

**Définition 3.3.1** *Un contrôle relaxé sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *est une variable aléatoire* $\mu = dt.\mu_t(da)$ *à valeurs dans* $\mathbb{V}$*, telle que* $\mu_t(da)$ *soit progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *et telle que, pour tout* $t$*,* $1_{(0,t]}.\mu$ *soit* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

**Remarque 3.3.1** *L'ensemble* $\mathcal{U}_{ad}$ *des contrôles stricts est inclus dans l'ensemble des contrôles relaxés en identifiant* $u_t$ *par* $dt\,\delta_{u_t}(da)$*.*

Il a été démontré dans [2], que le processus d'état associé à un contrôle relaxé doit satisfaire une équation dirigée par une mesure martingale au lieu d'un mouvement brownien. Ainsi, le processus d'état associé au contrôle relaxé vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \int_{\mathbb{A}} b\left(t, X_t, P_{X_t}, a\right) \mu_t(da)dt + \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(t, X_t, P_{X_t}, a\right) M(da, dt), \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.2}$$

où $M$ est une mesure de martingale continue et orthogonale d'intensité $dt\ \mu_t(da)$. En utilisant les mêmes outils que dans le Théorème 2.2, il n'est pas difficile de démontrer que l'équation 3.2 admet une solution forte unique.

Le lemme suivant, connue dans la littérature du contrôle sous le nom de **lemme du Chattering**.

**Lemme 3.3.1** **(i)** *Soit* $(\mu_t)$ *un contrôle relaxé, il existe une suite de processus adaptés* $(u_t^n)$ *à valeurs dans* $\mathbb{A}$, *telle que la suite de mesures aléatoires* $(\delta_{u_t^n}(da)\, dt)$ *converge vers* $\mu_t(da)\, dt$ *dans* $\mathbb{V}$, $P-p.s.$

**(ii)** *Pour toute fonction* $g$ *continue sur* $[0,T] \times \mathbb{M}_1(A)$,*telle que* $g(t,\cdot)$ *soit linéaire, pour tout* $t$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t g(s, \delta_{u_s^n})ds = \int_0^t g(s, \mu_s)ds$$

*uniformément en* $t \in [0,T]$, $P-p.s.$

**Preuve.** Voir [3] ■

Soit $X_t^n$ la solution de l'équation 3.1 correspondant au contrôle strict $u^n$, où $u^n$ défini dans le dernier lemme. Si l'on note :

$$M^n(t,F) = \int_0^t \int_F \delta_{u_s^n}(da)dW_s$$

alors $M^n(t,F)$ est une mesure martingale orthogonale, et $X_t^n$peut être exprimé sous une forme relaxés comme suit :

$$\begin{cases} dX_t^n = \int_{\mathbb{A}} b\left(t, X_t^n, P_{X_t^n}, a\right) \delta_{u_t^n}(da)dt + \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(t, X_t, P_{X_t^n}, a\right) M^n\left(dt, da\right) \\ X_0 = x \end{cases}$$

Par conséquent,$X_t^n$peut être considéré comme la solution de l'équation 3.2 correspondant au contrôle relaxés $\mu^n = dt\delta_{u_t^n}(da)$.

Puisque $\delta_{u_t^n}(da)dt$ converge faiblement vers $\mu_t(da)dt$, alors pour tout processus prévisible borné $\varphi : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, tel que $\varphi(\omega, t, \cdot)$ est continue, on a :

$$E\left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{A}} \varphi(\omega,t,a)M^n(dt,da) - \int_0^T \int_{\mathbb{A}} \varphi(\omega,t,a)M(dt,da)\right)^2\right] \to_{n\to+\infty} 0 \quad (3.3)$$

le théorème suivant donne la continuité de 3.2 par rapport à la variable de contrôle.

**Théoréme 3.3.1**

**(i)** Si $X_t$ , $X_t^n$désignent les solutions de l'équation d'état 3.2 correspondant respectivement à $\mu$ et $u^n$, alors pour tout $t \leq T$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\left|X_t^n - X_t\right|^2\right] = 0$$

**(ii)** Soient $J(u^n)$ et $J(\mu)$ les coûts espérés correspondants respectivement à $u^n$ et $\mu$, alors $(J(u^n))$ converge vers $J(\mu)$.

**Preuve.**

1. Soient $X_t$ et $X_t^n$ les solutions de l'équation 3.2 correspondant respectivement aux contrôles $\mu$ et $u^n$.

On a

$$\begin{aligned}|X_t - X_t^n| \le &\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) \mu_s(da)ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds\right| \\ &+ \left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) dM\left(s, a\right) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) dM^n\left(s, a\right)\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|X_t - X_t^n| \le &\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) \mu_s(da)ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds\right| \\ &+ \left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds\right| \\ &+ \left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) dM\left(s, a\right) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) dM^n\left(s, a\right)\right| \\ &+ \left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) dM^n\left(s, a\right) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) dM^n\left(s, a\right)\right|\end{aligned}$$

en passant aux ésperances,on trouve :

$$\begin{aligned}E\left[|X_t - X_t^n|^2\right] \le &E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds\right.\right. \\ &\left.\left.- \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) \delta_{u_s^n}(da)ds\right|^2\right] \\ &+ E\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) dM^n\left(s, a\right)\right. \\ &\left.\left.- \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right) dM^n\left(s, a\right)\right|^2\right] \\ &+ k_n\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy pour la partie martingale

$$E\left[|X_t - X_t^n|^2\right] \leq E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right)\delta_{u_s^n}(da)ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right)\delta_{u_s^n}(da)ds\right|^2\right]$$
$$+ CE\left[\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \left|\sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right) - \sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}, a\right)\right|^2 d\langle M\rangle^n(s,a)\right]$$
$$+ k_n$$

Comme les coeffcients $b$ et $\sigma$ étant Lipschitziens,on obtient :

$$E\left(|X_t - X_t^n|^2\right) \leq C\int_0^T \left(E\left(|X_s - X_s^n|^2\right) + \mathbb{W}_2\left(P_{X_s^n}, P_{X_s}\right)^2\right)dt + k_n, \ \ C \geq 0$$

En se basant sur le fait que :

$$W_2\left(P_{X_s^n}, P_{X_s}\right)^2 \leq E\left(|X_t - X_t^n|^2\right)$$

L'utilisantion de l'inégalité de Granwall, nous permettons de concluons que :

$$E\left(|X_t - X_t^n|^2\right) \leq 2C\int_0^T E\left(|X_s - X_s^n|\right)^2 dt + k_n$$

avec

$$k_n = E\left(\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right)\mu_s(da)ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right)\delta_{u_s^n}(da)ds\right|^2\right)$$
$$+ E\left(\left|\int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right)dM(s,a) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, P_{X_s}, a\right)dM^n(s,a)\right|^2\right)$$
$$= J_n + I_n$$

Etant donné que la suite $\left(\delta_{u_t^n}(da)dt\right)$ converge faiblement vers $\mu_t(da)dt$, et que $b$ est bornée et continue par rapport à la variable de contrôle, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

D'autre part,comme $\sigma$ est bornée et continue par rapport à $a$ , en appliquant 3.3, nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

En utilisant le lemme de Gronwall, on trouve $\lim_{n\to+\infty} E\left[|X_t^n - X_t|^2\right] = 0$.

2. Soient $u^n$ et $\mu$ comme dans **(1)**, alors :

$$
\begin{aligned}
|J(u^n) - J(\mu)| \leq E &\left[\int_0^T \int_{\mathbb{A}} \left|h\left(t, X_t^n, P_{X_t^n}, a\right) - h\left(t, X_t, P_{X_t}, a\right)\right| \delta_{u_t^n}(da)dt\right] \\
&+ E\left[\left|\int_0^T \int_{\mathbb{A}} h\left(t, X_t, P_{X_t}, a\right)\left(\delta_{u_t^n}(da)dt - \mu_t(da)dt\right)\right|\right] \\
&+ E\left[\left|g\left(X_T^n, P_{X_T^n}\right) - g\left(X_T, P_{X_T}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

Etant donné que la suite $(X_t^n)$ converge vers $X_t$, et en s'appuyant sur les hypothèses posées sur les fonctions $h$ et $g$, avec l'utilisation de théorème de la convergence dominée, il est facile de démontrer qur $J(u^n)$ converge vers $J(\mu)$.

■

**Remarque 3.3.2** *D'après la dernière proposition, il est clair que l'infimum parmi les contrôles relaxés est égal à l'infimum parmi les contrôles stricts, ce qui implique que les fonctions des valeurs pour les modèles relaxés et strict sont les mêmes.*

# Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude des équations différentielles stochastiques de type McKean-Vlasov (MVSDEs), ainsi qu'à l'analyse des problèmes de contrôle optimal. Dans un premier temps, nous avons abordé le problème fondamental de l'existence et de l'unicité des solutions de ces équations. Deux approches classiques ont été mises en œuvre pour établir ce résultat : la méthode du point fixe, qui consiste à reformuler l'équation étudiée comme une application contractante, et la méthode des approximations successives de Picard, permettant une construction explicite de la solution sous des hypothèses de Lipschitz et de croissance linéaire.

Dans un second temps, l'attention a été portée sur les problèmes de contrôle relaxé. Cette approche se révèle particulièrement utile lorsque l'existence d'un contrôle optimal n'est pas garantie. Pour assurer l'existence d'un tel contrôle, il suffit de démontrer que les fonctions des valeurs des modèles relaxé et strict coïncident.

# Bibliographie


[1] Bahlali, K., Mezerdi, M. A., Mezerdi, B. (2020). Stability of mckean–vlasov stochastic differential equations and applications. Stoch. Dyn. 20(01) :2050007.

[2] N. El Karoui and S. Méléard, Martingale measures and stochastic calculus, Probab. Theory and Related Fields 84 (1990) 83–101.

[3] N. El Karoui, D. H. Nguyen and M. Jeanblanc-Picqué, Compactification methods in the control of degenerate diffusions : Existence of an optimal control, Stochastics 20 (1987), 169–219.

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Evry. Available at http ://www. maths. univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc.

[5] Labed,B.(2021-2022).Cours de Mouvement Brownien et Calcul Stochastique.http ://elearning.univ-biskra.dz/moodle/login/index.php ?

[6] Mezerdi MA. Compactification in optimal control of McKean-Vlasov stochastic differential equations. Optim Control Appl Meth. 2021 ; 42 : 1161–1177. https ://doi.org/10.1002/oca.2721

[7] Romuald,E.L.I.E.,&KHARROUBI,I.(2006).Calcul Stochastique Appli-quéàla Finance.polycopié disponible sur http ://www.ceremade.dauphine.fr/elie/elie

# Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $EDS$ | : | Equation Différentielle Stochastique. |
| $EDSMV$ | : | Equation différentielle stochastique de McKean-Vlasov |
| $MFSDE$ | : | Mean Field Stochastic Differential Equation ($EDS$ du champ moyen) |
| $BDG$ | : | Inégalité de Burtholder-Davis-Gundy. |
| $E(.)$ | : | Espérance mathématiquede . |
| $P-p.s$ | : | Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité |
| $\mathcal{B}(.)$ | : | Tribu Borélienne. |
| $\mathcal{F}_t$ | : | Filtration. |
| $B_t$ | : | Mouvement Brownien. |
| $P_X$ | : | Loi (distribution de probabilité) de la variable aléatoire $X$ |
| $\mathbb{R}^d$ | : | Espace euclidien de dimension $d$ |
| $W_p(\mu,\nu)$ | : | Distance de Wasserstein d'ordre 2 entre les mesures $\mu$ et $\nu$ |
| $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ | : | Ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$avec moment d'ordre 2 fini |
| $C\left([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right)$ | : | Espace des trajectoires continues à valeurs dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ |
| $C\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ | : | Espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$ |
| $\delta_a$ | : | Mesure de Dirac en $a\in A$ |
| $\|.\|$ou$\lvert.\rvert$ | : | Norme euclidienne |

# Résumé

Ce mémoire étudie les équations différentielles stochastiques de McKean–Vlasov, dont les coefficients dépendent de la solution et de sa distribution marginale. Après une introduction aux processus stochastiques, nous montrons l'existence et l'unicité des solutions via le théorème du point fixe et le schéma itératif de Picard. Nous analysons ensuite les problèmes de contrôle relaxés, en prouvant l'équivalence des fonctions des valeurs pour les contrôles stricts et relaxés.

**Mots-clés :** Équation différentielle stochastique de McKean-Vlasov, Lipschitz, point fixe, approximations successives de Picard, contrôle optimal, contrôle relaxé.

# Abstract

This thesis studies McKean–Vlasov stochastic differential equations, whose coefficients depend on the solution and its marginal distribution. After an introduction to stochastic processes, we demonstrate the existence and uniqueness of solutions via the fixed-point theorem and Picard's iterative scheme. We then analyze relaxed control problems, proving the equivalence of value functions for strict and relaxed controls.

**Keywords :** McKean–Vlasov stochastic differential equations, Lipschitz, fixed point, Picard successive approximations, optimal control, relaxed control.

# ملخص

وتوزيعه الهامشي. بعد تقديم لمحة عن العمليات العشوائية، نبرهن على وجود وحيدة الحلول باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة والمخطط التكراري لبيكار. ثم نحلل مسائل التحكم المُرَخَّصة، مُثبتين تساوي دوال القيمة في حالتي التحكم الصارم والمُرَخَّص.

**كلمات مفتاحية :** المعادلات التفاضلية العشوائية من نوع ماكين–فلاسوف، شرط ليبشيتز، النقطة الثابتة، تقريبات بيكار المتتالية، التحكم الأمثل، التحكم المُرَخَّص.

.