République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes. Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en **Mathematiques**

Option : **Probabilités et Statistique**

Par

ATHMANE Sabrina

Titre :

Dérivées partielles par rapport à une mesure de Probabilité et applications

Devant le Jury :

Pr.	**HAFAYED Mokhtar**	U.Biskra	**Président**
Dr.	**KORICHI Fatiha**	U.Biskra	**Encadrant**
Dr.	**BERROUIS Nassima**	U.Biskra	**Examinateur**

Juin 2025

Dédicace

Je dédie ce humble travail À :

....**À mes chers parents**,qui m'ont toujours soutenue avec amour et

bienveillance,et dont les sacrifices et les encouragements

ont été ma plus grande source de motivation.

À mes frères et soeurs bien–aimés,mon pilier dans la vie,ceux avec qui j'ai

partagé joies et épreuves,

et qui ont toujours été là pour me soutenir.

Votre présence et votre affection

me sont inestimables.

À mes professeurs,qui ont su me guider avec sagesse et patience,et qui m'ont

transmis

leur savoir avec générosité.

À mes amis fidèles,compagnons de route inestimables,dont le soutien et

l'amitié ont rendu cette aventure plus enrichissante

et plus belle.

À tous ceux qui ont cru en moi et m'ont apporté leur aide,même

d'une simple parole bienveillante,j'exprime ma profonde

à travers ce travail.

....

.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à

Madame **KORICHI Fatiha**, ma directrice de mémoire,

pour son encadrement bienveillant, sa disponibilité

et la qualité de ses conseils tout au long de ce travail.

Son accompagnement a été d'un grand soutien et m'a permis d'avancer avec confiance.

et remercie sincèrement Monsieur **HAFAYED Mokhtar** et **BERROUIS Nassima**, membres de

jury de soutenance, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie également l'ensemble de mes enseignants

pour les connaissances et les compétences

qu'ils m'ont transmises au cours de ma formation.

Une pensée toute particulière à mes sœurs,

Nessrine et **Wahiba**, pour leur présence constante,

leur soutien moral et leurs encouragements précieux,

qui m'ont beaucoup aidée à garder ma motivation.

et merci à ma **mère** et à mon **père**, qui ont été la raison

de monarrivée à ce stade.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille

et mes amis pour leur appui indéfectible durant ce parcours.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'éclairer d'une façon générale, un principe de maximum stochastique nécessaire pour un modèle stochastique gouvèrné par des équations différentielles stochastiques Itô contrôlées non linéairement à type Mckean–Vlasov. Les coefficients de notre modèle sont non linéaires et dépendent explicitement de la variable de contrôle, du processus d'état ainsi que de sa distribution de probabilité. La région de contrôle est supposée bornée et convexe. Notre résultat est obtenu en appliquant les dérivées partielles de Lions par rapport à des mesures aléatoires dans l'espace de Wasserstein. La formule d'Itô associée et l'approche de variation convexe sont appliquées pour établir le contrôle optimal.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\tau]}, P)$ un espace de probabilités filtré fixé et τ un nombre réel positif fixé. Dans ce travail, nous étudions le problème de contrôle non linéaire optimal stochastique de type Mckean–Vlasov suivant :

Problème A. Minimiser une fonction de coût de type Mckean–Vlasov

$$J(\alpha(.)) = E\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_\alpha(\tau), \mu^{y_\alpha(\tau)})\mu(dy_\alpha),$$

où $y_\alpha(.)$ est une solution de l'équations différentialle stochastique suivante :

$t \in [0, \tau]$

$$\begin{cases} dy_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(t, y_\alpha(t), \mu^{y_\alpha(t)}, \alpha(t)\right) \mu(dy_\alpha) dt \\ \qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(t, y_\alpha(t), \mu^{y_\alpha(t)}, \alpha(t)\right) \mu(dy_\alpha) dW(t) \\ y_\alpha(0) = y_{0,} \end{cases}$$

où $\alpha(.)$ est la variable de contrôle valorisée dans un sous–ensemble convexe bornée $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k$,$y_\alpha(.)$ est la variable d'état contrôlée, $W(.)$ est un movement brownien standard, $\mu^{y_\alpha(t)}$ est la distribution de $y_\alpha(t)$, et Φ, φ et ψ sont des applications données.

La théorie du contrôle de type Mckean–Vlasov a trouvé des applications importantes et devenue un outil puissant dans de nombreux domaines, telles que la finance mathématique, l'économie et les jeux de type Mckean–Vlasov stochastiques, sous information partielle, le principe du maximum nécessaire d'optimalité pour les $EDSs - MV$. Le contrôle optimal stochastique des systèmes de diffusion par sauts de Mckean–Vlasov avec retard. Sous information partielle, les condition nécessaires et suffisantes pour des contrôles optimales continues et singuliers pour les EDS_s de type Mckean–Vlasov avec martingales de Teugels. ont été étudiées par Hafayed et al [4]. Les conditions nécessaires pour les $(EDSR)$ de type Mckean–Vlasov ont été étudiées par Hafayed et al [6]. Le principe général du maximum pour les $EDS_s - MV$ a été établi dans Buckdahn et al [2]. Le principe général du maximum pour le contrôle stochastique optimal a été établi par Peng [14]. Un principe du maximum de type Peng pour les EDS_s de type Mckean–Vlasov a été prouvé par Buckdahn et al [2]. Le principe du maximum nécessaire pour le problème de contrôle optimal continu–singulier pour les $EDS_s - MV$ générales, sous des hypothèses de convexité, a été étudié par Hafayed et al [7]. Le principe du maximum du second-ordre a été démontré par Boukaf et al.[1].

Dans ce travail, nous appliquons les dérivées partielles de Lions par rapport à la mesure de probabilité pour établir notre principe du maximum. Motivés par les travaux récents ci–dessus, nous dérivons dans ce travail le principe du maximum pour notre problème de contrôle optimal de type Mckean–Vlasov. Les dérivées partielles de Lions par rapport à mesure de probabilité dans l′espace de Wasserstein et la formule d'Itô associée avec quelques estimations appropriées sont appliquées pour prouver notre résultat. Cette approche des dérivées sur l'espace de Wasserstein s'est avérée cruciale dans l'étude de notre principe du maximum. Notre modèle de type Mckean–Vlasov apparaît naturellement dans les modèles probabilistes des problèmes d'optimisation financière.

Dans ce qui suit, on donne une brèvé descripition de ce mémoire : Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique(processus stochastique, mouvement brownien, Intégrale stochastique, Intégrale de Wiener, formul d'Itô, EDS,.....), En ce qui concerne le deuxième chapitre, il port sur les dérivées sur l'espace de Wesserstein(distance Kantorovich entre deux mesures de probabilité, Fonction de portance, Dérivées partielles de Lions par rapport aux mesures de probabilité, Classes des contrôles,.....), Dans le troisième chapitre, un principe de maximum stochastique pour un modèle stochastique gouvernées par des équations différentielles stochastiques d'Itô contrôlées non linéaires de type Mckean–Vlasov est démontré. Nous étudions le problème de contrôle optimal stochastique de type Mckean–Vlasov suivant : Minimiser la fonctionnelle de coût de type Mckean–Vlasov de la forme :

$$J(\alpha(.)) = E\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_\alpha(\tau), \mu^{y_\alpha(\tau)})\mu(dy_\alpha),$$

telle que $y_\alpha(.)$ solution de $\forall\ t \in [0,\tau]$

$$\begin{cases} dy_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(t, y_\alpha(t), \mu^{y_\alpha(t)}, \alpha(t)\right)\mu(dy_\alpha)dt \\ \qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(t, y_\alpha(t), \mu^{y_\alpha(t)}, \alpha(t)\right)\mu(dy_\alpha)dW(t) \\ y_\alpha(0) = y_{0,} \end{cases}$$

où $\alpha(.)$ est la variable de contrôle donnée dans un sous-ensemble convexe borné, $y_\alpha(.)$ est la variable d'état contrôlée, $W(.)$ est un mouvement brownien standard, $\mu^{y_\alpha(t)}$ est la distribution de $y_\alpha(t)$.

Chapitre 1

Rappel sur les calculs stochastiques

1.1 Concepts de base des Processus stochastiques

1.1.1 Processus stochastiques

Definition **Processus stochastique :** est une famille de variable aléatoires $X(t), \mathbf{t}$, qui appartient à un ensemble d'indices **Q** définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ il peut être représenté mathématiquement par :

$$X(t, w) = \{X(t), t \in Q\}$$

En d'autre termes, un processus stochastique est une fonction dépendant de deux variables :

1. Le paramètre **t**, qui indexe la famille de variables aléatoires .

2. L'élément aléatoire w , qui introduit l'incertitude et fait varier les réalisation

du processus .

Remarque 1.1.1 *1. si (t fixé, $w \in \Omega$) $\Longrightarrow X_t(w)$ est une variable aléatoire .*

2. si (w fixé, $t \in Q$) $\Longrightarrow X_t(w)$ est une trajectoire du processus

Définition 1.1.1 ***Ensemble d'indices :****L'ensemble Q, qui représente les valeurs possibles du paramètre t dans le processus stochastique $X(t)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{Q}$, est appelé ensemble d'indices.*

Définition 1.1.2 ***Espace des états :*** *L'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables aléatoires $X(t)$ pour $t \in Q$ est appelé espace des états du processus stochastique.il est défini comme l'union des ensembles des valeurs possibles des variables aléatoires $X(t)$,noté S,tel que $S = \bigcup_{t \in Q} S_t$.*

Définition 1.1.3 *Un processus stochastique $X(t, w)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{Q}$ est dit à* ***temps discret*** *si l'ensemble Q est infini dénombrable. Il est dit à* ***temps continu*** *si Q correspond à un ou plusieurs intervalles de temps.*

Définition 1.1.4 *un processus $(X_t)_{t \in Q}$ est dit* ***adapté*** *à une filtration $\mathcal{F}$ si :*

$$X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable , } \forall t \in Q.$$

Définition 1.1.5 *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, définie sur un espace de probabilités (Ω, P) est une famille croissante de sous–tribus $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall 0 \leqslant s \leqslant t, \ t \in Q.$$

Remarque 1.1.2 *L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$ est appelé espace de probabilités filtré.*

Définition 1.1.6 *La filtration naturelle (ou canonique) de processus X est une filtration $\mathcal{F}$ que vérifiant :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leqslant s \leqslant t),\ t \in Q.$$

1.1.2 Martingale et Mouvement Brownien

Martingale à temps continu

Définition 1.1.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, et soit $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté et intégrable ($E|Y_t| < \infty$), on dit Y est une*

• martingale si

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t, \quad E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = Y_s.$$

• sur–martingale si

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t, \quad E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant Y_s.$$

• sous–martingale si

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t, \quad E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) \geqslant Y_s.$$

Proposition 1.1.1 *:Soit X_t est une sous–martingale, alors $(-X_t)$ est une sur–martingale*

Proposition 1.1.2 *soit B un mouvement brownien standard, les processus suivants sont des martingale par rapport à la filtration $\sigma(B_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$:*

1/ Le processus B_t lui–même.

2/ Le processus $B_t^2 - t$.

3/ Le processus exponentiel $W_t^x = \exp(\alpha B_t - \frac{x^2}{2}t)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.8 *Soit $\mathcal{F}$est une filtration donnée et X une variable aléatoire intégrable, X_t est une martingale telle que :*

$$X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t].$$

Proposition 1.1.3 ***(l'inégalité de Jensen)***

Soit X une variable aléatoire réelle, et soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Si $E\left[|X|\right] < \infty$ et $E\left[|\phi(X)|\right] < \infty$, alors :

$$\phi(E\left[X\right]) \leq E\left[\phi(X)\right].$$

Proposition 1.1.4 *Si X_t est une martingale, alors (d'aprés l'inégalité de Jensen) $|X_t|^p$ est une sous–martingale pour $p \geqslant 1$ à condition que :$E[|X_t|^p] < \infty$ $\forall t$.*

Définition 1.1.9 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, et soit $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires, on dit que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$est une uniformément intégrable si :*

1) $\sup\limits_i E\left[|Y_i|\right] < \infty$,

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ telle que

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } P(A) < \alpha \Longrightarrow \sup_i E\left[I_A \cdot |Y_i|\right] < \varepsilon.$$

Définition 1.1.10 *Soit $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ un processus stochastique bornée dans*

$L^p, (p > 0)$, alors Y est uniformément intégrable.

Proposition 1.1.5 *Soit $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ et $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ deux processus croissants adaptés, on appelle X et Y sont associés si et seulement si*

$$M = X - Y \textit{ est une martingale.}$$

Où, viréfiant les deux conditions suivants :

a) $\forall 0 < s \leqslant t$ on a

$$E\left[(X_t - Y_t) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(X_s - Y_s) \mid \mathcal{F}_s\right] \text{ p.s.}$$

b) pour tout temps d'arrêt T, on a

$$E\left[X_T\right] = E\left[Y_T\right].$$

Théorème 1.1.1 ***(martingale arrêtée)***

Soit $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt, alors

$$W^T = (W_t^T)_{t \geqslant 0} = (W_{T \wedge t})_{t \geqslant 0}$$

est une martingale appelée martingale arrêtée.

Théorème 1.1.2 ***(Inégalité maximale de Doob)***

Si $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale continue à droite, alors :

$$\forall p > 1, \quad \left[E[\left|\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} Y_s\right|^p]\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left[E[|Y_s|]^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.1.6 ***(Décomposition de Doob)*** *: si $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$–sous martingale, alors :*

$$(Y_n)_{n\geqslant 0} = (A_n)_{n\geqslant 0} + (M_n)_{n\geqslant 0},$$

telle que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus croissante prévisible et intégrable,

cet décomposition est unique.

Proposition 1.1.7 *Soient T et S deux temps d'arrêt bornés avec $S \leqslant T$, alors*

$\exists\ M \in \mathbb{R}, \forall w$, telle que :

$$S(w) \leqslant T(w) \leqslant M < \infty.$$

pour tout processus X adapté et intégrable :

$$X_s \leqslant E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \text{ p.s.}$$

L'égalité a lieu si X est une martingale.de plus, X est une martingale pour tout pair de temps d'arrêt, si et seulement si :

$$E[X_S] = E[X_T].$$

1.1.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien a été découvert en 1827 par **Robert Brown** (1773–1858), qui a observé sous microscope le déplacement aléatoire de particules de pollen dans l'eau. Il a ensuite réalisé que ce phénomène s'appliquait à toutes les particules microscopiques.

En mathématiques, il est modélisé par le **processus de Wiener,** noté $(W_t)_{t \geqslant 0}$ ou $(B_t)_{t \geqslant 0}$ en hommage à **Brown.**

Définition 1.1.11 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité, On appelle* $Y_t = (B_t)_{t \geqslant 0}$*-mouvement brownien standard un processus stochastique à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et trajectoires continues que vérifier :*

1. B est à des accroissements indépendantes i.e : si 0 $\leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant .... \leqslant t_n < \infty$, *les variables aléatoires*

$$B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), ..., (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

sont indépendantes.

2. $B_0 = 0$.

3. $\forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, $B_t - B_s \longrightarrow N(0, t-s)$.

4. $\forall w \in \mho$, *les trajectoires* $t \longmapsto B_t(w)$ *sont continues.*

Proposition 1.1.8 *Un processus B est un mouvement brownien ssi :*

1) $E(B_t) = 0$,

2) $cov(B_t, B_s) = s \wedge t = \min(t, s)$.

Si (B_t) est un mouvement brownien, alors les processus suivants est lui même :

1) $Y_t = \frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}$ pour $\alpha \neq 0$.

2) $Y_t = t B_{\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$ et $Y_0 = 0$.

3) $Y_t = B_{t+s} - B_s$.

4) $Y_t = -B_t$.

$Y = (-B_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien car :

1. Soit $(Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}) = (B_{t_{n-1}} - B_{t_n})$et que $\forall\ 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant .... \leqslant t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$(B_{t_0} - B_{t_1}), (B_{t_1} - B_{t_2}), ..., (B_{t_{n-1}} - B_{t_n})$$

sont indépendantes.

2. $\forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, $Y_t - Y_s = -(B_t - B_s) = (B_s - B_t) \longrightarrow N(0, s-t)$;

3. La trajectoire $B_t(w)$ est continue alors : La trajectoire $Y_t(w) = -B_t(w)$ est continue.

4. $(Y_0) = 0$ car $(B_0) = 0$

Proposition 1.1.9 *: Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien alors B_t est une martingale .*

Proposition 1.1.10 *: Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien alors*

$$(\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t))_{t\geqslant 0}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R},$$

est une martingale .

Proposition 1.1.11 *:Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien alors $(B_t^2 - t)$ est une martingale*

1/ (B_t) est $\mathcal{F}_t$–mesurable alors $(B_t^2 - t)$ est $\mathcal{F}_t$–mesurable (est une fonction continue).

2/ $E\left[|B_t^2 - t|\right] \leqslant E\left[|B_t^2|\right] + t = t + t = 2t < \infty$,car $(E\left[|B_t^2|\right] = var\left[B_t\right] = t)$.

3/ $\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$:

$$\begin{aligned} E\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[((B_t - B_s + B_s)^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[((B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s E\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B_t^2 - t. \end{aligned}$$

on a :

$E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s,$ et $E\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = E(B_t - B_s) = 0$

$\Longrightarrow E\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s \Longrightarrow (B_t^2 - t)_{t \geqslant 0}$est une martingale.

1.2 Intégrale stochastique

1.2.1 L'intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener qui est l'intégrale d'une fonction f par rapport à un mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geqslant 0}$, avec $f \in L^2[a, b]$. Cette intégrale de **Riemann–Stieltjes**, puisque les trajectoires browniennes ont une **p–variation** bornée pour $p > 2$ et non bornée pour $p \leqslant 2$. On peut définir l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t) dB_t(w),$$

avec f est de variation bornée avec $p < 2$.

Définition 1.2.1 ***(L'intégrale de Wiener)***

On commence par les fonctions en escalier, où l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dB_t(w),$$

est d'abord définie pour ces fonctions, puis généralisée à toutes les fonctions appartenant à l'espace $L^2[a,b]$. Cet espace est constitué des fonctions qui sont intégrables au carré, c'est–à–dire qui vérifient la condition suivante :

$$\int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Définition 1.2.2 ***(L'intégrale de Wiener d'une fonction étagée)***

Soit f une fonction en escalier qui peut être représentée sous la forme :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) I_{[t_i, t_{i+1}]}(t), \forall i \equiv \overline{1,n},$$

où β_i sont des constantes réelles et $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ constitue une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.

L'intégrale de Wiener de la fonction f est alors définie comme suit :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dB_t = \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) \left[B(t_i) - B(t_{i+1})\right],$$

où $B(t)$ désigne un processus de Wiener.

Théorème 1.2.1 *Si f est une fonction en escalier, alors l'intégrale stochastique $I(f)$ suit une loi normale. Plus précisément, $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne dont $E(I(f)) = 0$, et $var(I(f)) = \int_0^\infty f^2(t)dt$.*

Puisque f est une fonction en escalier, son intégrale de Wiener s'écrit comme :

$$I(f) = \left[\int_a^b f(t)dB_t\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)\left[B(t_i) - B(t_{i+1})\right]\right],$$

1.**Gaussianité de I(f)**

Les accroissements $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ du mouvement brownien sont gaussiens et indépendants. Comme I(f) est une combinaison linéaire de ces termes, il suit également une loi normale.

2.**Calcul de l'espérance E(I(f))**

par linéarité de l'espérance et sachant que

$$E\left[B(t_{i+1}) - B(t_i)\right] = 0,\ \forall\ i \equiv \overline{1, n}$$

on obtient :

$$E[I(f)] = 0.$$

3.**Calcul de la variance var(I(f))**

$$\begin{aligned} var(I(f)) &= var\left[\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)(B(t_i) - B(t_{i-1}))\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(\beta_i))^2 var(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(\beta_i))^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b f^2(t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi, $I(f)$ suit une loi normale $N(0, \int_a^b f^2(t)dt)$.

Proposition 1.2.1 *Soit $f, g \in L^2([a, b])$ et $I(f)$, $I(g)$ leurs intégrales de Wiener respectives. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

1. **Linéarité** :

$$I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g).$$

2. **Espérance du produit** :

$$E\left[I(f)I(g)\right]=\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

3. **Isométrie** :

$$\int_a^b f(t)dB(t)=\int_a^c f(t)dB(t)+\int_c^b f(t)dB(t).$$

4. **Intégration par parties (pour f de variation bornée) :**

$$\int_a^b f(t)dB(t,w)=\left[f(t)B(t,w)\right]_a^b-\int_a^b B(t,w)df(t),\ \forall\ w\in\Omega.$$

Théorème 1.2.2 *Soit $f\in L^2([a,b])$. On définit le processus stochastique $X_t=\int_a^t f(s)dB(s,w),\ \forall\ t\in[a,b]$.*

Alors, (X_t) est une martingale continue par rapport à la filtration naturelle du mouvement brownien donnée par $\mathcal{F}_t=\sigma(B_s,s\leqslant t)$.

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Proposition 1.2.2 *on a*

$$M_t=\int_0^t \sigma_s dB_s$$

telle que :$E\left[\int_0^t \sigma_s^2 ds\right]<\infty$, on a :

1. $E[M_t]=0$ et $E[M_t^2]=E\left[\int_0^t \sigma_s^2 ds\right]$.

2. Le processus M_t est une martingale.

3. Si $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté, on a :

$$E\left[(\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \sigma_s dB_s)^2\right] \leqslant 4E\left[(\int_0^t \sigma_s dB_s)^2\right] = 4\int_0^t E(\sigma_s^2)ds.$$

4. Isométrie :

$$E\left[(\int_0^t M_s dB_s)^2\right] = E\left[\int_0^t M_s^2 ds\right].$$

5. soit $W_t = M_t^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds$, Le processus $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale.

Preuve. on a

$$E\left[W_t \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(\int_0^t \sigma_u dB_u)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = (\int_0^s \sigma_u dB_u)^2 + \int_s^t \sigma_u^2 du,\ \forall\ t \geqslant s,$$

Alors

$$E\left[W_t \mid \mathcal{F}_s\right] = (\int_0^s \sigma_u dB_u)^2 + \int_s^t \sigma_u^2 du - \int_0^t \sigma_u^2 du,\ \forall\ t \geqslant s$$

En simplifiant

$$E\left[W_t \mid \mathcal{F}_s\right] = (\int_0^s \sigma_u dB_u)^2 - \int_0^s \sigma_u^2 du = W_s,\ \forall\ t \geqslant s$$

Cela prouve que W_t est une martingale. ■

1.2.3 Formule d' Itô

Définition 1.2.3 *Un processus (Y_t) est un processus d'Itô si*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \theta_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Ou sous la forme

$$dY_t = \theta_t dt + \sigma_t dB_t$$

· Y_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable

· θ est un processus adapté $(\int_0^t |\theta_s| \, ds < \infty \ p.s)$

· σ est un processus appartenant à H^2 $(\int_0^t |\sigma_s|^2 \, ds < \infty \ p.s)$

Définition 1.2.4 *La variation quadratique d'un processus stochastique* (Y_t) *est donnée par :*

$$d \langle Y, Y \rangle_s = \sigma_s^2 ds$$

Remarque 1.2.1 *Pour calculer* $d \langle Y, Y \rangle_s$, *on peut appliquer la règle suivant :*

$$\langle ds, ds \rangle = \langle ds, dB_s \rangle = \langle dB_s, ds \rangle = 0, \ \ \langle dB_s, dB_s \rangle = ds.$$

1/ Si W est une martingale telle que $W_t = \int_0^t \theta_s ds$ avec (θ_s) un processus à variation bornée alors :

$$W_t = 0 \ p.s \ \forall \ t \in [0, T] \, .$$

2/ La décomposition d'un processus d'Itô est **unique**

3/ Un processus d'Itô est une martingale ssi :

$$\int_0^t \theta_s ds = 0.$$

Théorème 1.2.3 ***(Première forme) :*** *Soit* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,*de classe* C^2, *alors :*

$$\begin{aligned} f(Y) &= f(Y_0) + \int_0^t f^{'}(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Y_s) d \langle Y, Y \rangle_s \\ &= f(Y) = f(Y_0) + \int_0^t f^{'}(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Y_s) \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.4 ***(Deuxième forme) :*** *Soit* $f : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, *de classe*

$$\begin{cases} C^1 par\ rapport\ \grave{a}\ t \\ C^2 par\ rapport\ \grave{a}\ Y \end{cases},$$

alors :

$$\begin{aligned} f(t,Y) &= f(0,Y_0) + \int_0^t f_t^{'}(s,Y_s)ds + \int_0^t f_y^{'}(s,Y_s)dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}^{''}(s,Y_s)d\left\langle Y,Y\right\rangle_s \\ &= f(0,Y_0) + \int_0^t f_t^{'}(s,Y_s)ds + \int_0^t f_y^{'}(s,Y_s)dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}^{''}(s,Y_s)\sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.3 ***(Formule d'intégration par parties) :*** *La formule d'intégration par parties d'Itô s'écrit de manière concise comme suit :*

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t$$

où le terme dX_tdY_t est issu de la formule d'Itô et vaut (b_td_tdt) si les processus sont donnés par:

$$dX_t = a_tdt + b_tdB_{t,}\ dY_t = c_tdt + d_tdB_t$$

1.3 Equations différentielles stochastiques ($\mathbf{EDS}_s$)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique .

1.3.1 Définition des EDS$_s$

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

ou sous forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{2}$$

où :

• b et σ sont deux fonctions mesurables bornnée et definit sur $[0, T] \times \mathbb{R}$

• Y_0 est la condition initiale .

• $\{B; t \geqslant 0\}$ est mouvement Brownien .

• Le coefficient $b(t, Y_t)$ est appelé dérive, $\sigma(t, Y_t)$ est appelé terme de diffusion.

1.3.2 Existence et unicité des solutions

L'étude des équations différentielles stochastiques repose sur la garantie de l'existence et de l'unicité des solutions fortes, ce qui permet d'assurer la cohérence mathématique du modèle sous–jacent. Ces résultats sont établis sous certaines hypothèses, notamment la condition de Lipschitz et une borne de croissance, qui permettent d'éviter les divergences des solutions. Nous présentons ci–dessous le théorème fondamental d'existence et d'unicité.

Théorème 1.3.1 ***d'existence et d'unicité***

1/ ***Mesurabilité :*** *Les fonctions b et σ sont mesurables et adaptées à la filtration* *naturelle du processus de Wiener.*

2/ ***Condition de Lipschitz :*** *Il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout* $t \in [0, T]$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant K\,|x-y|\,,$$

$$|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| \leqslant K\,|x-y|\,.$$

3/ ***Condition de croissance linéaire :*** *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$|b(t,x)|^2 \leqslant M^2(1+|x|^2),$$

$$|\sigma(t,x)|^2 \leqslant M^2(1+|x|^2).$$

Sous ces hypothèses, il existe une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *qui est adaptée à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *et qui satisfait presque sûrement l'équation intégrale (2)*

Cette solution est dite forte, car elle est construite à partir d'un processus de Wiener donné.

Remarque 1.3.1 *Le processus stochastique* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *est appelé une solution forte de L'EDS−(1).*

Chapitre 2

Dérivées sur l'espace de Wesserstein

2.1 Distance de Kantorovich entre de mesures de probabilité

La distance de Monge-Kantorovich est une métrique entre deux mesures de probabilité sur un espace métrique. La distance de Monge-Kantorovich trouve son origine dans la théorie mathématique des transports de masse. En 1781, Monge a proposé pour la première fois le problème mathématique de l'optimisation du coût du déplacement d'un tas de terre d'une configuration de départ donnée à une configuration d'arrivée donnée. Dans sa formulation originale, le problème était hautement non linéaire, donc extrêmement difficile. En 1942, Kantorovich a introduit une autre version simple et relâchée de ce problème.

La métrique de Kantorovich apparaît dans des contextes très différents et sous des noms différents. Dans les applications statistiques, elle était connue sous le nom de distance de Wasserstein et plus récemment, elle est apparue avec le développement de la géométrie fractale et ses applications à l'infographie sous le nom de distance de Hutchinson.

Pour être plus précis, nous supposons que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ est suffisamment riche en le sens où pour tout $\mu \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$, il existe une variable aléatoire $\mathfrak{v} \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = P_{\mathfrak{v}}$.

2.2 Dérivées partielles de Lions par rapport aux mesures de Probabilité

Rappelons maintenant brièvement la notion innovante de dérivées de Lions par rapport à la distribution de probabilité sur les espaces de Wasserstein, qui a été étudiée par Lions[11].

L'idée principale est d'identifier une distribution $\mu \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$ avec une variable aléatoire $\mathfrak{v} \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = P_{\mathfrak{v}}$.

Soit $\mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$ l'espace de toutes les mesures de probabilité μ on $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ de second moment fini, c'est-à-dire, $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(dx) < \infty$, muni de la métrique de Wasserstein $\mathbb{D}_2(.,.)$; pour $\mu, v \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{D}_2(\mu, v) = \inf_{\delta(.,.) \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^{2d})} \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^2 \, \delta(dx, dy) \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

Où $\delta(.,.) \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^{2d})$, $\delta(A, \mathbb{R}^d) = \mu(A)$, $\delta(\mathbb{R}^d, B) = v(B)$.

Cette distance est simplement la distance de Monge-Kankorovich lorsque $p = 2$. De plus, il a été montré que $(\mathbb{X}_2(\mathbb{R}^n), \mathbb{D}(.,.))$ est un espace métrique complet.

Exemple : Par exemple, si $\mu_1 = \delta_{x_1}$ et $\mu_2 = \delta_{x_2}$ sont deux mesures de Dirac dégénérées situées aux points x_1 et x_2 (respectivement) dans $\mathbb{R}$, alors nous avons

$$\mathbb{D}_2(\mu_1, \mu_2) = |x_1 - x_2|\,.$$

2.3 Fonction de portance (Lift function)

Définition 2.3.1 ***(Fonction de portance)*** *Soit Φ une fonction donnée telle que $\Phi : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction de portance :*

$\widetilde{\Phi} : L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\widetilde{\Phi}(Z) = \Phi(P_Z),\ Z \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d).$$

Clairement, la fonction de portance $\widetilde{\Phi}$ de Φ, dépend que de la loi de la variable aléatoire $Z \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$ et est indépendante du choix du représentant Z.

Une fonction $f : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable en $\mu_0 \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$ s'il existe $Z_0 \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$ avec $\mu_0 = P_{Z_0} \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^{2d})$, telle que $\widetilde{f}$ fonction de portance soit différentiable en Z_0. Plus précisément, il existe une fonctionnelle linéaire continue $D\widetilde{f}(.) : L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(Z_0 + \tau) - \widetilde{f}(Z_0) &= \left\langle D\widetilde{f}(Z_0), \tau \right\rangle + \circ(\|\tau\|_2) \qquad (2.1) \\ &= D_\tau f(\mu_0) + \circ(\|\tau\|_2), \end{aligned}$$

Où $\langle ., . \rangle$ est le produit dual sur $L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$, et nous appellerons $D_\tau f(\mu_0)$ la dérivée de Fréchet de f en μ_0 dans la direction τ.

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} D_\tau f(\mu_0) &= \left\langle D\widetilde{f}(Z_0), \tau \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\widetilde{f}(Z_0 + t\tau)|_{t=0}, \text{ telle que } \mu_0 = P_{Z_0}. \end{aligned}$$

Donc

$$D_\tau f(P_{Z_0}) = \frac{d}{dt}\left[\widetilde{f}(Z_0 + t\tau)\right]|_{t=0}. \tag{2.2}$$

De 2.1, on obtient alors la forme suivante du développement de Taylor

$$f(P_Z) - f(P_{Z_0}) = D_\alpha f(P_Z) + \varepsilon(\tau), \tag{2.3}$$

Où $\varepsilon(\tau)$ est d'ordre $\circ(\|\tau\|_2)$ avec $\circ(||\tau||_2) \to 0$ pour $\tau(.) \in L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$.

2.3.1 Théorème de représentation de Riesz

Soit H un espace de Hilbert Soit f une fonctionnelle linéaire continue $f \in H^*$, alors il existe un unique $y \in H$ telle que

$$f(x) = \langle y, x \rangle ,$$

pour tout $x \in H$, De plus, $||y|| = ||f||$.

En utilisant le *théorème de représentation de Riesz*, il existe une variable aléatoire unique Z_0 dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\left\langle D\widetilde{f}(Z), \tau \right\rangle = (Z_0, \tau)2 = E[(Z_0, \tau)_2],$$

Où $\tau(.) \in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$.

Il a été montré, qu'il existe une fonction Borale $[\mu_0] : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, dépendant uniquement de la loi $\mu_0 = P_Z$ mais pas du choix particulier du représentant Z telle que

$$Z_0 = [\mu_0](Z).$$

Ainsi, nous pouvons écrire comme $\forall \mathfrak{v} \in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$.

$$f(P_{\mathfrak{v}}) - f(P_Z) = ([\mu_0](Z), \mathfrak{v} - Z)_2 + \circ(\|\mathfrak{v} - Z\|_2).$$

On note $\partial_\mu f(P_Z, y) = [\mu_0]\,(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

On note que pour tout $\mu \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$, $\partial_\mu f(P_Z, .) = [P_Z]\,(.)$ n'est défini que dans un sens $P_Z(dx) - p.p$, où $\mu = P_Z$.

2.3.2 Espace des fonctions différentiables

Espace des fonctions différentiables dans $\mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.3.2 *On dit que la fonction $f \in C_b^{1,1}(\mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d))$ si pour tout de $\mathfrak{v} \in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$, il existe une $P_{\mathfrak{v}}$-modification de*

$\partial_\mu f(P_{\mathfrak{v}}, .)$ telle que $\partial_\mu f : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est bornée et continue de Lipchitz. C'est-à-dire que pour un certain $C > 0$, on a que

(i) $|\partial_\mu f(\mu, x)| \leq C, \forall \mu \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^d$;

(ii) $|\partial_\mu f(\mu_1, x) - \partial_\mu f(\mu_2, y)| \leq C(\mathbb{D}_2(\mu_1, \mu_2) + |x - y|)$, $\forall\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^d)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^d$.

Dérivées du second ordre par rapport à la loi de probabilité : Nous présentons une dérivée du second ordre par rapport à la mesure de probabilité

Soit $g \in C_b^{1,1}(\Gamma_2(\mathbb{R}^n))$ et considérons l'application

$$(\partial_\mu g(.,.)_1, \partial_\mu g(.,.)_2, ..., \partial_\mu g(.,.)_n)^T : \Gamma_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Définition 2.3.3 *On dit que la fonction $g \in C_b^{2,1}(X_2(\mathbb{R}^n))$ si $g \in C_b^{1,1}(X_2(\mathbb{R}^n))$ telle que $\partial_\mu g(., x) : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$*

(1) $\partial_\mu g(., y)_i \in C_b^{1,1}(X_2(\mathbb{R}^d)), \forall y \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

(2) $\partial_\mu g(\mu, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(3) Les applications

$$\partial_x \partial_\mu g(.,.) : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

et

$$\partial_\mu^2 g(P_{x_0}, y, z) : \mathbb{X}_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

sont bornées et continues en Lipshitz, où

$$\partial_\mu^2 g(P_{x_0}, y, z) = \partial_\mu \left[\partial_\mu g(., y)\right] (P_{x_0}, z).$$

2.4 Classes de contrôle

1. **Contrôle admissible** Un contrôle admissible est un processus $u(t)$ $\mathcal{F}_t-$adapté avec des valeurs dans un $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien

$$\mathcal{U} := \{u(.) : [0,T] \times \Omega \to A : u(t) est \mathcal{F}_t - adapt\acute{e}\}. \tag{2.4}$$

2. Contrôle optimal Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonctionnelle de coût

$J(u)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$. On dit que le contrôle $u^*(.)$ est un contrôle optimal si

$$J(u^*(t)) \leq J(u(t)), \text{pour tout } u(.) \in \mathcal{U}.$$

3. Contrôle prèsque-optimal Soit $\varepsilon > 0$, un contole $u^\varepsilon(.)$ est un controle prèsque-optimal (ou ε-optimal) si pour toute $u(.) \in \mathcal{U}$ on a

$$J(u^\varepsilon(t)) \leq J(u(t)) + \varepsilon. \tag{2.5}$$

Voir [3] pour quelques applications.

4. Controle singulièr. Un controle singulier est une paire $(u(.), \xi(.))$ de processus mesurables à valeurs $A_1 \times A_2$, $\mathcal{F}_t$-adaptés, telles que $\xi(.)$ soit à variation bornée, continue non décroissante à gauche avec des limites à droite et $\xi(0) = 0$. Puisque $d\xi(t)$ peut être singulier par rapport à la mesure de Lebesgue dt, nous appelons $\xi(\cdot)$ la partie singulière de la contrôle et le processus $u(.)$ sa partie absolument continue.

5. Contrôle feed-back (Contrôle par rétroaction) : Nous disons que $u(.)$ est un controle rétroaction si $u(.)$ dépend de la variable d'état $X(.)$.

Si $\mathcal{F}_t^X$ est la filtration naturelle générée par le processus X, alors $u(.)$ est un controle rétroaction si $u(.)$ est $\mathcal{F}_t^X$-adapté.

6. Contrôle robuste. Dans les problèmes formulés ci-dessus, la dynamique du système de contrôle est supposée connue et fixe. La théorie du contrôle robuste est une méthode permettant de mesurer les variations de performance d'un système de contrôle lorsque ses paramètres changent .

Bien sûr, cette méthode est importante dans les systèmes d'ingénierie, et elle a récemment été utilisée en finance en relation avec la théorie de la mesure du risque.

En effet, il est prouvé qu'une mesure de risque cohérente pour un gain incertain $x(T)$ à l'instant T est représentée par :

$$\sigma(-X(t)) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} E^Q(X(T)),$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble de mesures de probabilité absolument continues par rapport à la probabilité initiale P.

7. Problème de contrôle par observation partielle. On suppose jusqu'à présent que le contrôle observée complètement le système d'état. Dans de nombreuses applications réelles, il n'est capable d'observer que partiellement l'état via d'autres variables (appelées variables observées) et il y a du bruit dans le système d'observation. Par exemple, dans les modèles financiers, on peut observer le prix de l'actif, mais pas complètement son taux de rendement et/ou sa volatilité, et l'investissement du portefeuille est basé uniquement sur les informations sur le prix de l'actif. Ceci peut être formulé sous une forme générale comme suit : nous avons un processus contrôlé (non observé) gouvèrné par l'EDS suivante :

$$dx(t) = f(t, x(t), y(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), y(t), u(t))dW(t),$$

et $y(t)$ un processus d'observation défini par

$$dy(t) = h(t, x(t), u(t))dW(t),$$

où $B(t)$ un autre mouvement brownien, éventuellement corrélé à $W(t)$. Le contrôle $u(t)$ est adapté par rapport à la filtration générée par l'observation F_t^Y et la fonctionnelle de coût à optimiser est :

$$J(u(.)) = E\left[h(x(T), y(T)) + \int_0^T g(t, x(t), y(t), u(t))dt\right].$$

8. Contrôle ergodique Certains systèmes stochastiques peuvent présenter sur une longue période un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure, si elle existe, est obtenue par la moyenne des états sur une longue période. Un problème de contrôle ergodique consiste à optimiser sur le long terme un critère prenant en compte cette mesure invariante. La fonctionnelle de coût est donnée par

$$lim \sup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} E \int_0^T f(x(t), u(t))dt.$$

9. Horizon aléatoire. Dans un problème classique, l'horizon temporel est fixé jusqu'à un temps terminal déterministe T. Dans certaines applications réelles, l'horizon temporel peut être aléatoire, la fonctionnelle de coût est donnée par ce qui suit :

$$J(u(.)) = E\left[h(x(\tau)) + \int_0^T g(t, x(t), y(t), u(t))dt\right],$$

où τ est un temps aléatoire fini.

10. Contrôle relâxé. L'idée est de compactifier l'espace des contrôles $\mathcal{U}$ en étendant la définition des contrôles pour inclure l'espace des mesures de probabilité sur U. L'ensemble des contrôles relâchés $\mu_t(du)dt$, où μ_t est une mesure de probabilité, est la clôture sous topologie faible des mesures $\delta_{u(t)}(du)dt$ correspondant aux contrôles usuels, ou stricts. Cette notion de contrôle relâché est introduite pour les problèmes de contrôle optimal déterministe

11. Contrôle impulsif. (Contrôle impulsionnel). Ici, on est tout à fait obligé de réinitialiser la trajectoire aux instants d'arrêt τ_i de X_{τ_i}-(la valeur immédiatement avant i) à une nouvelle valeur (non anticipative) X_{τ_i}, respectivement, avec un coût associé $M(X_{\tau_{i-}}, X_{\tau_i})$. Le but du contrôle est de minimiser la fonctionnelle de coût :

$$\begin{aligned} J(u(.)) = E\int_0^T \exp\left[-\int_0^t C(X(s),u(s))ds\right] K(X(t),\\ u(t)) + \sum_{\tau_i<T} \exp\left[-C\int_0^{\tau_i}(X(s),u(s))ds\right] M(X_\tau, X_{\tau_{i-}})\\ + \exp\left[-\int_0^{\tau_i} C(X(s),u(s))ds\right] h(X(T)). \end{aligned}$$

Dans ce modèle, nous devons supposer que $M(X_{\tau_{i_-}}, X_{\tau_i}) > \delta$ pour un certain $\delta > 0$ afin d'éviter une infinité de sauts dans un intervalle de temps fini.

Chapitre 3

Principe de maximum et dérivée par rapport à mesure de probabilités

3.1 Dérivée partielle par rapport à mesure de probabilités

Nous rappelons maintenant brièvement une notion importante dans les problèmes de contrôle type Mckean–Vlasov : les dérivées partielles de Lions par rapport aux mesures de probabilité sur $l'espace\ de\ Wasserstein$.

Dans ce travail, nous considérons $K_2(\mathbb{R}^n)$ comme $l'espace\ de\ Wasserstein$ *des mesures de probabilité* sur $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ avec un second moment fini, c'est–dire : $\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \mu(dy) < \infty$, muni de *la métrique de* $Wasserstein$ suivante :

pour $\mu_1, \mu_2 \in K_2(\mathbb{R}^n)$,

$$T(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\rho(.,.) \in K_2(\mathbb{R}^{2n})} \left[\int_{\mathbb{R}^{2n}} |x-y|^2 \rho(dx, dy) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

ou $\rho(., \mathbb{R}^n) = \mu_1$, et $\rho(\mathbb{R}^n, .) = \mu_2$.

Cette métrique est simplement la métrique de Monge–Kankorovich (avec $p = 2$). De plus, il a été montré que $(K_2(\mathbb{R}^n), T(.,.))$ est un espace métrique complet. Par exemple, si $\mu_1 = \sigma_{x_1}$ et $\mu_2 = \sigma_{x_2}$ sont deux mesures de Dirac dégénérées situées aux points x_1 et x_2 (respectivement.,) dans $\mathbb{R}$, alors on a

$$T(\mu_1, \mu_2) = |x_1 - x_2| \,. \qquad 2$$

L'idée principale des dérivées partielles de Lions est d'indentifier une distribution (mesure de probabilité) $\mu \in K_2(\mathbb{R}^n)$ avec une variable aléatoire

$y(.) \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ de telle sorte que $\mu = P_y$ soit la loi de $y(.)$. Nous supposons que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est suffisamment riche dans le sens ou pour tout $\mu \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$, il existe une variable aléatoire $y(.) \in L^2(\mathcal{F}, P)$ telle que $\mu = P_y$. Nous supposons qu'il existe $\varphi_0 \subset \mathcal{F}$ telle que un sous–corps so suffissamment alors :

$$\Bbbk_2(\mathbb{R}^n) := \left\{ \mu^y = P_y : y(.) \in L^2(\varphi_0, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Par $\mathcal{F} = (\mathcal{F})_{t \in [0,\tau]}$, on note la filtration engendrée par $W(.)$, complétée et augmentée par φ_0. Ensuite, pour toute fonction

$f : \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ on définit une fonction $\widetilde{f} : L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\widetilde{f}(y) = f(\mu^y) = f(P_y), \; y(.) \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Clairement, la fonction $\widetilde{f}$, appelée fonction de relèvement de f, ne dépend que de la loi de $y \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ et est indépendant du choix du représentant y.

Définition 3.1.1 *Soit $g : \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ La fonction g est différentiable à une distribution $\mu_0 \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$ S'il existe $y_0 \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ avec $\mu^{y_0} = P_{y_0}$ telle que son relèvement $\breve{g}$ soit Fréchet–différentiable en y_0. Plus précisément, il existe une fonctionnelle linéaire continue $\mathcal{D}\breve{g}(y_0) : L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\breve{g}(y_0 + \xi) - \breve{g}(y_0) = \langle \mathcal{D}\breve{g}(y_0).\xi \rangle + o(\|\xi\|_2) = \mathcal{D}_\xi g(\mu^{y_0}) + o(\|\xi\|_2), \tag{4}$$

où $\langle ., . \rangle$ la produit dual sur $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$. On appelle $\mathcal{D}_\xi g(\mu^{y_0})$ la *dérivée de Frèchet* de g en μ_0 dans la direction ξ on a :

$$\mathcal{D}_\xi g(\mu^{y_0}) = \langle \mathcal{D}\breve{g}(y_0).\xi \rangle = \frac{d}{dt}\breve{g}(y_0 + t\xi)|_{t=0}, \text{ avec } \mu^{y_0} = P_{y_0}. \tag{5}$$

Or, d'après le *théorème de représentation de Riesz*, il existe une unique variable aléatoire $\Psi_0 \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\langle \mathcal{D}\breve{g}(y_0).\xi \rangle = (\Psi_0 \Psi_0.\xi)_2 = E\left[(\Psi_0.\xi)_2\right] \ \textit{où} \xi \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$$

.Il a été montré dans [2] qu'il existe une fonction borélienne $\Psi\left[\mu^{y_0}\right](.) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dépendant seulement de la loi $\mu^{y_0} = P_{y_0}$ mais pas du choix du représentant y_0 telle que $\Psi_0 = \Psi\left[\mu^{y_0}\right](y_0)$. Ainsi on peut écrire 4 comme : pour tout $y \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ on a :

$$g(\mu^y) - g(\mu^{y_0}) = (\Psi\left[\mu^{y_0}\right](y_0).y - y_0)_2 + o(\|y - y_0\|_2).$$

on note $\partial_\mu g(\mu^{y_0}, y) = \Psi\left[\mu^{y_0}\right](y), y \in \mathbb{R}^n$. De plus, nous avons les identités suivantes :

$$\mathcal{D}\breve{g}(y_0) = \psi_0 = \Psi\left[\mu^{y_0}\right](y_0) = \partial_\mu g(\mu^{y_0}, y_0),$$

et $\mathcal{D}_{\xi}g(\mu^{y_0}) = \langle \partial_\mu g(\mu^{y_0}, y_0).\xi \rangle$, où $\xi = (y - y_0)$.

(1) Pour chaque avec $\mu \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$, les dérivées partielles $\partial_\mu g(\mu^y, .) = \Psi\left[\mu^y\right](.)$ ne sont définies qu'au sens $\mu(dy)$.

(2) Une fonction f est dite différentiable en $\mu_0 \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$ s'il existe une variable aléatoire y_0 de loi μ_0 telle que la fonction de portance $\widetilde{f}$ soit différentiable en y_0.

Définition 3.1.2 *On dit que la fonction $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\Bbbk_2(\mathbb{R}^n))$ si pour tout $y \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, il existe une P_y–modification de $\partial_\mu g(\mu^y, .)$ (notée $\partial_\mu g$) telle que*

$\partial_\mu g : \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est bornée et lipshitzienne continue. Autrement dit, pour un certain $C > 0$, on a

(1) $|\partial_\mu g(\mu, y)| \leq C$, $\forall\ \mu \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\left|\partial_\mu g(\mu, y) - \partial_\mu g(\mu^{'}, y^{'})\right| \leq C\left[T(\mu, \mu') + |y - y'|\right], \forall\ \mu, \mu' \in \Bbbk_2(\mathbb{R}^n), \forall y, y' \in \mathbb{R}^n$.

Il convient de noter que si la fonction $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\Bbbk_2(\mathbb{R}^n))$, la varsion de $\partial_\mu g(\mu^y, .)$, $y \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, présentée dans la $définition$ 2 est unique. Nous noterons $\partial_\mu g(t, y, \mu_0)$ la dérivée par rapport à μ calculée en μ_0 lorsque toutes les autres variable (t, y) sont fixées, $\partial_\mu g(t, y, \mu_0) = \partial_\mu g(t, y, \mu)|_{\mu=\mu_0}\mu(dy) - p.p$

Tout au long de ce travail, nous utilisons les notations suivantes, pour

$$\begin{aligned} &\psi = f, h : \\ \psi_y(t) = &\frac{\partial \psi}{\partial y}(t, y^\star(t), \mu^\star, \alpha^\star(t)), \psi_\alpha(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(t, y^\star(t), \mu^\star, \alpha^\star(t)), \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\psi}_\mu(t) = \partial_\mu \psi(t, y(t), \mu, \alpha(t); \widehat{y}(t)), \mu(dy) - p.p.$$

3.2 Formulation du problème de contrôle du type Mckean–Vlasov

Soit $\tau > 0$ un nombre réel positif fixée et $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\tau]}, P)$ un espace de probabilités filtré fixé satisfaisant les conditions usuelles pour les quelles le movement brownien unidimensionnel $W(t) = \{W(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$ et $W(0) = 0$ sont définis .Nous étudions les solutions optimales d'un problème de contrôle stochastique piloté par un modèle de type Mckean–Vlasov contrôlé :

$$\begin{cases} dy(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy)dt \\ \qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy)dW(t), t \in [0, \tau] \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Où $\mu^{y(t)} = P_{y(t)}$ est la distribution de probabilité de $y(t)$. L'objectif de notre problème de contrôle optimal de type Mckean–Vlasov est de minimiser la fonctionnelle de coût suivant :

$$J(\alpha(.)) = E \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y(\tau), \mu^{y(\tau)})\mu(dy), \tag{7}$$

où

$$\varphi : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\psi : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont des fonctions déterministes.

$\alpha(.)$ est un processus prédictible dont les valeurs appartiennent à un sous–ensemble convexe non vide U de $\mathbb{R}^k$ telle que $E\int_0^\tau |\alpha(t)|^2\,dt < \infty$. On appelle U le domaine de contrôle et on le note $\mathcal{U}([0,\tau])$

L'ensemble de toutes les contrôles admissibles. On suppose qu'une contrôle optimale existe. Tout contrôle admissible $\alpha^\star(.) \in \mathcal{U}([0,\tau])$ satisfaisant

$$J(\alpha^\star(.)) = \inf_{\alpha(.)\in\mathcal{U}([0,\tau])} J(\alpha(.)), \tag{8}$$

est appelé contrôle optimal. Les applications

$$\begin{aligned} f(t,\mu,\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dx), \\ \sigma(t,\mu,\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dx), \\ h(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y(\tau), \mu^{y(\tau)})\mu(dx), \end{aligned}$$

sont données des fonctions déterministes telles que

$$f : [0,\tau] \times \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,\tau] \times \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$h : \Bbbk_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Pour éviter une complexité excessive dans les notations, nous ferons l'hypothèse simplificatrice que tous les processus sont unidimensionnels ($c - \grave{a} - d$, $n = m = 1$) dans les sections suivantes.

Nous définissons une métrique $d(.,.)$ sur l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{U}([0,\tau])$ telle que $(\mathcal{U}([0,\tau]),d)$ devienne un espace métrique complet. Pour tout $\alpha(.)$ et $\alpha'(.) \in \mathcal{U}([0,\tau])$, nous posons

$$d(\alpha(.),\alpha'(.)) = \left[E\int_0^\tau |\alpha(t)-\alpha'(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Les hypothèses suivantes seront en vigueur tout au long de cet travail, où y désigne la variable d'état et α la variable de contrôle.

- **Hypothèse(H1)** La région de contrôle est supposée délimitée et convexe.
- **Hypothèse(H2)** Pour une mesure fixée $\mu \in \mathbb{k}_2(\mathbb{R})$, pour tout $(y,\alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$, les fonctions φ,ψsont mesurables dans toutes les variables et continûment différentiables par rapport à y,α, et leurs dérivées partielles sont uniformément bornées.

La fonction Φ est continûment différentiable par rapport à y. De plus $|\Phi(y)| \leq C(1+|y|^2)$, et par $|\Phi_y(y)| \leq C(1+|y|)$, où $C>0$ est une constante positive générique, qui peut varier d'une droite a droite.

- **Hypothèse(H3)** (1) Pour un y fixée,

pour tout $\alpha(t) \in \mathbb{U} : \varphi,\psi \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{k}_2(\mathbb{R}^d);\mathbb{R})$ et $\Phi \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{k}_2(\mathbb{R});\mathbb{R})$.

(2) Toutes les dérivées par rapport à la mesure φ_μ,ψ_μ sont bornées et continues de Lipshitz, avec des constantes de Lipshitz indépendantes de α.

Sous les hypothèses (H2) et (H3), pour chaque $\alpha \in \mathcal{U}([0,\tau])$, l'équation 6 a une solution forte unique $y(.)$ donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = y_0 &+ \int_0^t \int_{R^d} \varphi\left(s,y(s),\mu^{y(s)},\alpha(s)\right)\mu(dy)ds \\ &+ \int_0^t \int_{R^d} \psi(s,y(s),\mu^{y(s)},\alpha(s))\mu(dy)dW(s), \end{aligned}$$

telle que $E\left[\sup_{t\in[0,\tau]}|y(t)|^2\right]<\infty$, et la fonction $J(.)$ est bien définie.

Soit $\alpha^\star(.)\in\mathcal{U}([0,\tau])$ un contrôle optimal pour le **problème A**, et $y^\star(.)=y^{\alpha^\star}(.)$ le processus d'état optimal corespondant.

Hamiltonien. Définissons l'hamiltonien associé à notre problème de contrôle. Pour tout $(t,y,\mu,\alpha,p,q)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\Bbbk_2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&H(t,y,\mu,\alpha,p(t),q(t))\\&=p(t)\int_{R^d}\varphi\left(t,y,\mu^{y(t)},\alpha\right)\mu(dy)+q(t)\int_{R^d}\psi\left(t,y,\mu^{y(t)},\alpha\right)\mu(dy),\end{aligned}\tag{10}$$

où $(p(.),q(.))$ est une paire de processus adaptés. Les dérivées de H par rapport à la variable de contrôle $\alpha(.)$ ont la forme

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial\alpha}(t,y^\star(t),\mu^{y(t)},\alpha^\star(t),p(t),q(t))\\&=\int_{R^d}\varphi_\alpha\left(t,y,\mu^{y(t)},\alpha\right)p(t)\mu(dy)+\int_{R^d}\psi_\alpha\left(t,y,\mu^{y(t)},\alpha\right)q(t)\mu(dy).\end{aligned}\tag{11}$$

équation adjointe : On considère la nouvelle équation adjointe, qui est la

$EDSR-MV$:

$$\begin{cases}dp(t)=-\widehat{E}(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{p}(t)+\int_{R^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}\left(t,y,\mu,\alpha\right)\widehat{p}(t)\mu(dy)\\+\partial_y\widehat{\psi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{q}(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\psi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{q}(t)\mu(dy))dt+q(t)dW(t),\\p(\tau)=-\widehat{E}\left[\partial_y\widehat{\Phi}(y,\mu,\alpha)+\int_{R^d}\partial_\mu\widehat{\Phi}\left(y,\mu,\alpha\right)\mu(dy)\right].\end{cases}\tag{12}$$

pour $t \in [0, \tau]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{E}(\widehat{\varphi}_{\mu}(t)) &= \widehat{E}\left[\partial_{\mu}\widehat{\varphi}(t, \widehat{y}^{\star}(t), \mu^{y^{\star}(t)}, \widehat{\alpha}^{\star}(t); z)\right]|_{z=y^{\star}(t)} \qquad (13)\\
&= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_{\mu}\varphi(t, \widehat{y}^{\star}(t, \widehat{w}), P_{y^{\star}(t,w)}, \widehat{\alpha}^{\star}(t, \widehat{w}); y^{\star}(t, w))d\widehat{P}(\widehat{w}),\\
\widehat{E}(\widehat{\psi}_{\mu}(t)) &= E_{\widehat{p}}(\widehat{\psi}_{\mu}(t)) = E_{\widehat{p}}\left[\partial_{\mu}\widehat{\psi}(t, \widehat{y}^{\star}(t), \mu^{y^{\star}(t)}, \widehat{\alpha}^{\star}(t); z)\right]|_{z=y^{\star}(t)} \qquad (14)\\
&= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_{\mu}\psi(t, \widehat{y}^{\star}(t, \widehat{w}), P_{y^{\star}(t,w)}, \widehat{\alpha}^{\star}(t, \widehat{w}); y^{\star}(t, w))d\widehat{P}(\widehat{w}).
\end{aligned}$$

De même, nous

$$\begin{aligned}
\widehat{E}(\widehat{\Phi}_{\mu}(\tau)) &= E_{\widehat{p}}(\widehat{\Phi}_{\mu}(\tau)) = E_{\widehat{p}}\left[\partial_{\mu}\Phi(\widehat{y}^{\star}(\tau), P_{y^{\star}(\tau)}; z)\right]|_{z=y^{\star}(t)} \qquad (15)\\
&= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_{\mu}\Phi(\widehat{y}^{\star}(\tau, \widehat{w}), P_{y(\tau,w)}; y^{\star}(\tau, w))d\widehat{P}(\widehat{w}).
\end{aligned}$$

Sous les hypothèses (H2) et (H3), l'$EDSR$ type Mckean–Vlasov 12 admet une solution forte $\mathcal{F}_t-$adaptée et unique $(p(.), q(.))$ telle que

$$E(\sup_{t\in[0,\tau]} |p(t)|^2 + \int_0^{\tau} |q(t)|^2 \, dt) < \infty.$$

3.3 Principaux résultats

3.3.1 Principe du maximum

Dans ce travail, notre objectif est de dériver le principe du maximum nécessaire de type Mckean–Vlasov pour la contrôle optimale, où la dynamique est pilotée par le modéle de Mckean–Vlasov contrôlé 6. Pour établir nos conditions d'optimalité nécessaires, nous appliquons la méthode de perturbation convexe de la contrôle optimale. Cette méthode de perturbation est décrite comme suit : soit $\alpha^{\star}(.)$ une contrôle optimale et $\alpha(.)$ un élément arbitraire de variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable dont les valeurs sont dans l'ensemble borné convexe $\mathbb{U}$ que nous considérons désormais comme fixe. Nous définissons une contrôle perturbée $\alpha^{\theta}(.)$ comme suit :

$$\alpha^{\theta}(t) = \alpha^{\star}(t) + \theta(\alpha(t) - \alpha^{\star}(t)), \tag{16}$$

Où $\theta > 0$ est suffisamment petit. Puisque la région de contrôle $\mathbb{U}$ est convexe, $\alpha^{\theta}(.) \in \mathcal{U}([0,\tau])$. On note $y^{\theta}(.)$ la solution de l'équation 6 associée $\alpha^{\theta}(.)$.

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), nous introduisons la nouvelle équation variationnelle suivants pour notre problème de contrôle.

équation variationnelle : Soit $t \in [0,\tau]$,et $v(t) = \alpha(t) - \alpha^{\star}(t)$. Ensuite, nous définissons l'équation variationnelle comme :

$$\begin{cases} dZ(t) = [\widehat{E}\left(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t) + \int_{R^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}\left(t,y,\mu,\alpha\right)\widehat{Z}(t)\mu(dy)\right) \\ +\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t) + \int_{R^d}\varphi_\alpha\left(t,y,\mu,\alpha\right)v(t)\mu(dy)]dt \\ +[\widehat{E}\left(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t) + \int_{R^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}\left(t,y,\mu,\alpha\right)\widehat{Z}(t)\mu(dy)\right) \\ +\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t) + \int_{R^d}\psi_\alpha\left(t,y,\mu,\alpha\right)v(t)\mu(dy)]dW(t), \\ Z(0) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Ici, le processus $Z(.)$ est appelé le processus variationnel du premier ordre associé à $\alpha(.)$. Comme les dérivées dans 17 sont bornées, il s'ensuit qu'il existe une solution unique $Z(.)$ telle que

$$E\left[\sup_{t\in[0,\tau]}|Z(t)|^k\right] < C_k, \text{ pour } k \geq 2. \tag{18}$$

où $C_k > 0$ est une constante positive générique dépendant uniquement de k, qui peut varier d'une droite à l'autre. Nous établirons quelques estimations fondamentales qui joueront un rôle crucial dans la preuve de notre principe de maximum stochastique.

Notre objectif dans cette section est d'établir un principe de maximum stochastique pour un contrôle optimal des systèmes pilotés par des EDS_s non linéaires. Le domaine de contrôle étant supposé convexe, la preuve de notre résultat repose sur la méthode des perturbations convexes. Le principal résultat de cet travail est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 ***(Principe du maximum sous forme intégrale via la dérivée de Lions).*** *Soient les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Alors, il existe une unique paire de processus* $\mathcal{F}_t-$*adaptés* $(p(.), q(.))$ *solutions de l'équation de distribution de type Mckean–Vlasov 12 telle que pour* $\alpha \in \mathbb{U}$

$$E \int_0^\tau \frac{\partial H}{\partial \alpha}(t, y^\star(t), \mu^{y^\star(t)}, \alpha^\star(t), p(t), q(t))(\alpha(t) - \alpha^\star(t))dt \geq 0. \tag{19}$$

Corollaire 3.3.1 *Sous les hypothèses du théorème 4.1, il existe une paire unique de processus* $\mathcal{F}_t-$*adaptés* $(p(.), q(.))$ *solution de* $EDSR$*–12 de type Mckean–Vlasov telle que pour tout* $\alpha \in \mathbb{U}$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha}(t, y^\star(t), \mu^{y(t)}, \alpha^\star(t), p(t), q(t))(\alpha(t) - \alpha^\star(t))dt \geq 0.$$

$$P - p.p \ , p.s.t \in [0, \tau] .$$

le Théorème 4.1, nous avons besoin des résultats suivants.

3.3.2 Preuve du résultat principal

Soit $(\alpha^\star(.), y^\star(.))$ la solution optimale du problème de contrôle 6–7.On déduit l'intégalité variationnelle de :

$$J\left(\alpha^\theta(.)\right) \geq J(\alpha^\star(.)), \tag{20}$$

où $\alpha^\theta(.)$ est la perturbation dite convexe de $\alpha^\star(.)$ définie comme suit : $\forall\ s \in [0, \tau]$

$$\alpha^\theta(s) = \alpha^\star(s) + \theta(\alpha(s) - \alpha^\star(s)), \tag{21}$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit et $\alpha(s) \in \mathbb{U}$ est un élément de $\mathcal{U}([0, \tau])$.

Proposition 3.3.1 *Soient $y^\theta(.)$ et $y^\star(.)$ les états de 22 corespondant respectivement $\alpha^\theta(.)$ et $\alpha^\star(.)$. Soit également $Z(.)$ la solution de 17.On a alors*

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{s\in[0,\tau]} \left|y^\theta(s) - y^\star(s)\right|^{2k}\right] = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{s\leq t} \left|\theta^{-1}\left[y^\theta(s) - y^\star(s)\right] - Z(s)\right|^2\right] = 0. \tag{23}$$

Preuve. utilisant la proposition 3.3.1, nous avons

$$E\left[\sup_{s\in[0,\tau]} \left|y^\theta(s) - y^\star(s)\right|^{2k}\right] \leq C_k\theta^k,$$

La preuve de l'estimation 22 suit immédiatement en posant $\theta \to 0$. Passons maintenant à la preuve de l'estimation 23. Nous considérons

$$\gamma^\theta(s) = \theta^{-1}\left[y^\theta(s) - y^\star(s)\right] - Z(s),\ \ s \in [0, \tau]\,. \tag{24}$$

Depuis

$$D_\xi f(\mu^{Z_0(t)}) = \left\langle D\widetilde{f}(Z_0).\xi \right\rangle = \frac{d}{dt}\widetilde{f}(Z_0 + t\xi)|_{t=0},$$

nous avons la forme simple suivante du développement de Taylor du premier ordre

$$f(\mu^{Z_0(t)+\xi}) - f(\mu^{Z_0(t)}) = D_\xi f(\mu^{Z_0(t)}) + \varepsilon(\xi),$$

où $\varepsilon(\xi)$ est d'ordre $O(\|\xi\|_2)$ avec $O(\|\xi\|_2) \to 0$ pour $\xi \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$. D'abrés l'equation 24, nous avons

$$\begin{aligned}
&\gamma^\theta(t) \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi(s, y^\theta(s), \mu^{y^\theta(s)}, \alpha^\theta(s)) - \varphi(s, y^\star(s), \mu^{y^\star(s)}, \alpha^\star(s))\right] \mu(dy)ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left[\psi(s, y^\theta(s), \mu^{y^\theta(s)}, \alpha^\theta(s)) - \psi(s, y^\star(s), \mu^{y^\star(s)}, \alpha^\star(s))\right] \mu(dy)dW(s) \\
&- Z(t).
\end{aligned} \tag{25}$$

Nous mettons

$$\begin{aligned}
f(t, \mu, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy), \\
\sigma(t, \mu, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy), \\
h(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y(\tau), \mu^{y(\tau)})\mu(dy),
\end{aligned} \tag{26}$$

En appliquant 25, on obtient

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\theta}(t) \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))\right] ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\sigma(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - \sigma(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))\right] dW(s) \\
&- \int_0^t \left\{\widehat{E}\left[f_{\mu}(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\widehat{Z}(s)\right] + f_{\alpha}(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))v(s)\right\} ds \\
&- \int_0^t \left\{\widehat{E}\left[\sigma_{\mu}(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\widehat{Z}(s)\right] + \sigma_{\alpha}(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))v(s)\right\} dW(s).
\end{aligned}$$

Par des calculs simple, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))\right] ds \\
&= \int_0^t (f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\theta}(s)))ds \\
&+ \int_0^t (f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s)))ds.
\end{aligned}$$

En appliquant le développement de Taylor du premier ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\theta}(s)))ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \widehat{E}\left[\partial_{\mu} f(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\gamma(s)+Z(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))\right] d\lambda ds.
\end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires développés ci–dessus, nous pouvons facilement prouver que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s)) - f(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\star}(s)))ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left[f_{\alpha}(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\alpha(s)-\alpha^{\star}(s))v(s)\right] d\lambda ds.
\end{aligned}$$

Les arguments analogiques sont valables pour σ, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\sigma(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\theta}(s))-\sigma(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s))\right]ds\\
&=\int_0^t\int_0^1 \widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\gamma(s)+Z(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))\right]d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \left[\sigma_\alpha(s,\mu^{y^{\theta}(s)},\alpha^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\alpha(s)-\alpha^{\star}(s))v(s)\right]d\lambda ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^2\right]\\
&\leq C_t[E\int_0^t\int_0^1 \widehat{E}\left|f_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\widehat{\gamma}^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+E\int_0^t\int_0^1 \widehat{E}\left|\sigma_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\widehat{\gamma}^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|A^{\theta}(s)\right|^2\right]],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&A^{\theta}(t)\\
&=\int_0^t\int_0^1 \widehat{E}\left[f_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))-f_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\right]\\
&\times\widehat{Z}(s)d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \left[f_\alpha(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s)+\lambda\varepsilon v(t))-f_\alpha(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s)\right]v(t)d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \widehat{E}\left[\sigma_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)+\lambda\varepsilon(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{Z}(s))},\alpha^{\theta}(s);\widehat{y}^{\star}(s))-\sigma_\mu(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s);\widehat{y}^{\star}(s))\right]\\
&\times\widehat{Z}(s)d\lambda dW(s)\\
&+\int_0^t\int_0^1 \left[\sigma_\alpha(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s)+\lambda\varepsilon v(t))-\sigma_\alpha(s,\mu^{y^{\star}(s)},\alpha^{\star}(s)\right]v(t)d\lambda dW(s).
\end{aligned}$$

Or, puisque les dérivées partielles de f et σ par rapport aux variables μ,α sont continues lipschitziennes en μ, α, alors on obtient

$$\lim_{\theta \to 0} E\left[\sup_{s\in[0,\tau]} \left|A^{\theta}(s)\right|^2\right] = 0.$$

De plus, comme les dérivées partielles de f et σ par rapport aux variables μ et α sont bornées, on obtient $\forall t \in [0, \tau]$:

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\gamma^{\theta}(s)\right|^2\right] \leq C(t)\left\{E\int_0^t \left|\gamma^{\theta}(s)\right|^2 ds + E\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|A^{\theta}(s)\right|^2\right]\right\}.$$

En utilisant le théorème de Gronwall, on obtient

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\gamma^{\theta}(s)\right|^2\right] \leq C_s E\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|A^{\theta}(s)\right|^2\right] \exp\left(\int_0^t C_s ds\right).$$

Enfin, en posant $t = \tau$ la preuve de la proposition 3.3.1 est satisfaite en mettant θ à zéro. ■

Proposition 3.3.2 *Pour tout* $\alpha(.) \in \mathcal{U}([0, \tau])$, *nous avons*

$$0 \leq E\left(\partial_y \Phi\left(y^{\star}(\tau), \mu^{y^{\star}(\tau)}\right) + \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{E}(\partial_{\mu}\Phi(y^{\star}(\tau), \mu^{y^{\star}(\tau)}; \widehat{y}^{\star}(\tau))\mu(dy)\right) Z(\tau). \quad (27)$$

Preuve. D'après 7 et 20, on a

$$0 \leq J\left(\alpha^{\theta}(.)\right) - J(\alpha^{\star}(.)) = E\left[h(y^{\theta}(\tau), \mu^{y^{\theta}(\tau)}) - h(y^{\star}, \mu^{y^{\star}(\tau)})\right].$$

En appliquant le développement du premier ordre, on obtient

$$
\begin{aligned}
& h(y^\theta(\tau), \mu^{y^\theta(\tau)}) - h(y^\star, \mu^{y^\star(\tau)}) \\
& = \int_0^1 \left[h_y(y^\star(\tau) + \rho \Delta x^\theta(\tau)), \mu^{y^\star(\tau)+\rho\Delta x^\theta}) \Delta x^\theta(\tau) \right] d\rho \\
& + \int_0^1 \widehat{E} \left[h_y(y^\star(\tau) + \rho \Delta x^\theta(\tau), \mu^{y^\star(\tau)+\rho\Delta x^\theta(\tau)}; \widehat{y}^\star(\tau)) \Delta \widehat{y}^\theta(\tau) \right] d\rho \\
& = \int_0^1 \left(\partial_y \Phi \left(y^\star(\tau) + \rho \Delta x^\theta(\tau), \mu^{y^\star(\tau)+\rho\Delta x^\theta(\tau)}; \widehat{y}^\star(\tau) \right) \right) \Delta \widehat{y}^\theta(\tau) d\rho \\
& + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{E} (\partial_\mu \Phi \left(y^\star(\tau) + \rho \Delta x^\theta(\tau), \mu^{y^\star(\tau)+\rho\Delta x^\theta(\tau)}; \widehat{y}^\star(\tau) \right) \mu(dy) \Delta \widehat{y}^\theta(\tau) d\rho,
\end{aligned}
$$

Où $\Delta x^\theta(t) = y^\theta(t) - y^\star(t)$.Enfin, en utilisant la proposition 1, le résultat souhaité 27 est satisfait. Ceci complète la preuve de la proposition 3.3.2. ■

Preuve. du théorème 3.3.1. La formule d'Itô est l'un des éléments de base les plus fondamentaux du calcul stochastique et du principe du maximum. En appliquant la formule d'Itô au processus stochastique $p(t)Z(t)$ et en prenant l'espérance,où $Z(0) = 0$, alors un simple calculs montre que

$$
\begin{aligned}
& E\left(p(\tau)Z(\tau)\right) - E(p(0)Z(0)) \\
& = E \int_0^\tau p(t) dZ(t) + E \int_0^\tau Z(t) dp(t) \\
& + E \int_0^\tau q(t) [\widehat{E} \left(\partial_y \widehat{\varphi}(t, y, \mu, \alpha) \widehat{Z}(t) + \int_{\mathbb{R}^d} \partial_\mu \widehat{\varphi}(t, y, \mu, \alpha) \widehat{Z}(t) \mu(dy) \right) \\
& + \psi_\alpha(t, y, \mu, \alpha) v(t) + \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\alpha(t, y, \mu, \alpha) v(t) \mu(dy)] dt \\
& = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &= E\int_0^\tau p(t)dZ(t) \\
&= E\int_0^\tau p(t)\left[\widehat{E}\left(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t)\mu(dy)\right)\right]dt \qquad (29)\\
&+ E\int_0^\tau p(t)[\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t)\mu(dy)]dt.
\end{aligned}
$$

Passons maintenant à l'estimation du deuxième terme I_2. De 12,nous avons

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_0^\tau Z(t)dp(t) \\
&= -E\int_0^\tau Z(t)\widehat{E}\left(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{p}(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{p}(t)\mu(dy)\right)dt \qquad (30)\\
&- E\int_0^\tau Z(t)\widehat{E}\left(\partial_y\psi\hat{}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{q}(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\psi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{q}(t)\mu(dy)\right)dt.
\end{aligned}
$$

De 17,nous avons

$$
\begin{aligned}
I_3 = E\int_0^\tau q(t)[\widehat{E}&\left(\partial_y\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\varphi}(t,y,\mu,\alpha)\widehat{Z}(t)\mu(dy)\right) \qquad (31)\\
&+\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t)+\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)v(t)\mu(dy)]dt.
\end{aligned}
$$

En remplacant 29, 30 et 31 dans 28, avec le fait que

$$
p(\tau)=\widehat{E}\left[\partial_y\widehat{\Phi}\left(y(\tau),\mu^{y(\tau)}\right)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\Phi}\left(y(\tau),\mu^{y(\tau)}\right)\mu(dy)\right],
$$

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&E\left(\widehat{E}\left[\partial_y\widehat{\Phi}\left(y(\tau),\mu^{y(\tau)}\right)+\int_{\mathbb{R}^d}\partial_\mu\widehat{\Phi}\left(y(\tau),\mu^{y(\tau)}\right)\mu(dy)\right]Z(\tau)\right)\\
&=E\int_0^\tau p(t)\left[\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt\\
&+E\int_0^\tau q(t)\left[\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt.
\end{aligned}
$$

En appliquant la proposition 1, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0\leq\ &E\int_0^\tau p(t)\left[\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt\\
&+E\int_0^\tau q(t)\left[\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt.
\end{aligned}
$$

Finalement, par des calculs simples, à l'aide de 11, en obtient

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^\tau p(t)\left[\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt\\
&+E\int_0^\tau q(t)\left[\Psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\Psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))\mu(dy)\right]dt\\
&=E\int_0^\tau [p(t)\left(\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)\mu(dy)\right)\\
&+q(t)\left(\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)(\alpha(t)-\alpha^\star(t))+\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\alpha(t,y,\mu,\alpha)\mu(dy)\right)](\alpha(t)-\alpha^\star(t))dt\\
&=E\int_0^\tau\frac{\partial H}{\partial\alpha}(t,y^\star(t),\mu^{y^\star(t)},\alpha^\star(t),p(t),q(t))(\alpha(t)-\alpha^\star(t))dt.
\end{aligned}
$$

Alors 19 est satisfait, ce qui complète la preuve du théorème 3.3.1. ■

3.4 Exemples :processus gamma via la mesure de Lévy

Le processus Gamma est un processus de Lévy (à variation bornée) $(G(t))_{t\geq 0}$, avec mesure de Lévy donnée par

$$\mu(dy) = \frac{e^{-y}}{y} I_{\{y>0\}} dy. \tag{32}$$

On l'appelle processus Gamma car la loi de probabilité de $G(.)$ est une distribution Gamma avec une moyenne t et un paramètre d'échelle égal à un.

3.4.1 Exemples (Dérivées par rapport à la mesure)

Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un processus gamma de mesure de Lévy $\mu(.)$ donné par 32. Voici quelques exemples.

1) Si $\Phi(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\mu(dy)$,alors les dérivées de Lions de $\Phi(\mu)$ par rapport à la mesure à z sont données par

$$\partial_\mu \Phi(\mu)(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z).$$

2) Si $\Phi(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, \mu)\mu(dy)$,alors les dérivées de Lions de $\Phi(\mu)$ par rapport à la mesure à z sont données par

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi(\mu)(z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z, \mu) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \mu)(z)\mu(dy) \\ &= h\frac{\partial \varphi}{\partial y}(z, \mu) + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y}}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(y, \mu)(z) I_{\{y>0\}} dy. \end{aligned}$$

3.4.2 Principe du maximum

Concider $\varphi(t, y(t), \mu, \alpha(t)) = y(t)\alpha(t), \Psi(t, y(t), \mu, \alpha(t)) = y(t)\alpha(t)$. Notre objectif est de minimiser $Var(y(\tau)) - \mu^{y(\tau)}$.

à partir de 26, un calcul simple montre

$$f(t, \mu, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy) = \alpha(t), \tag{33}$$

$$\sigma(t, \mu, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t, y(t), \mu^{y(t)}, \alpha(t))\mu(dy) = \alpha(t). \tag{34}$$

De 10 nous obtenons

$$H(t, y, \mu, \alpha, p(t), q(t)) = \alpha(t)p(t) + \alpha(t)q(t). \tag{35}$$

étant donné que l'hamiltonien H est linéaire dans la variable de contrôle $\alpha(.)$, en considérant la condition du premier ordre pour minimiser l'hamiltonien, on obtient

$$H_\alpha(t, y, \mu, \alpha, p(t), q(t)) = p(t) + q(t) = 0. \tag{36}$$

À partir de 12 et 32, par des calculs simples, nous avons

$$\begin{cases} dp(t) = q(t)dW(t), \\ p(\tau) = 2\left[y(t) - \mu^{y(\tau)}\right] - 1. \end{cases} \tag{37}$$

Conjecture du processus adjoint. En considérant la condition terminale $p(\tau)$, il est raisonnable de tenter une solution de la forme

$$p(t) = U_1(t)\left[y(t) - \mu^{y(\tau)}\right] + U_2(t), \tag{38}$$

où $U_1(.)$, et $U_2(.)$ sont des fonctions dérivables déterministes,

et $U_1(\tau) = 2$, et $U_2(\tau) = -1$. D'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $U_1(t)(y(t) - \mu^{y(t)})$ dans 38, on obtient

$$\begin{aligned} dp(t) &= d(U_1(t)(y(t) - \mu^{y(t)})) + dU_2(t) \\ &= U_1(t)d(y(t) - \mu) + (y(t) - \mu)U_1^{'}(t)dt + U_2^{'}(t)dt \\ &= U_1(t)\alpha(t)dt - U_1(t)d\mu + (y(t) - \mu)U_1^{'}(t)dt + U_2^{'}(t)dt + U_1(t)\alpha(t)dW(t). \end{aligned} \tag{39}$$

De 38 et 36, nous concluons

$$(y(t) - \mu)U_1^{'}(t) + U_1(t)\alpha(t) + U_1(t)\mu + U_2^{'}(t) = 0, \tag{40}$$

et

$$q(t) = U_1(t)\alpha(t). \tag{41}$$

En substituant 41 dans 36, nous obtenons un contrôle optimal candidat sous forme de rétroaction

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{q(t)}{U_1(t)} = \frac{-p(t)}{U_1(t)} = \frac{-U_1(t)(y(t) - \mu) + U_2(t)}{U_1(t)} \\ &= -y(t) + \mu - \frac{U_2(t)}{U_1(t)}. \end{aligned} \tag{42}$$

comparant le coefficient de $y(t)$ et μ, dans 40, nous obtenons

$$U_1(t) - U_1'(t) = 0, U_1(\tau) = 2, \tag{43}$$

et

$$U_2'(t) = 0, U_2(\tau) = -1. \tag{44}$$

En résolvant les équations différentielles ordinaires 43–44, on obtient pour $t \in [0, \tau]$

$$\begin{aligned} U_1(t) &= 2\exp\left[t - \tau\right], \\ U_2(t) &= -1. \end{aligned} \tag{45}$$

Enfin, en substituant 42 dans 45, le contrôle optimal est donné sous forme de rétroaction par

$$\alpha^\star(t, y^\star(t), \mu^{y^\star(t)}) = -y^\star(t) + \mu^{y^\star(t)} + \frac{1}{2}\exp\left[\tau - t\right]. \tag{46}$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un problème de contrôle optimal pour un système gouvèrné par une équation différentielle stochastique de type McKean-Vlasov. Ce modèle se distingue par le fait que ses coefficients dépendent à la fois de la variable de contrôle, de l'état du système, ainsi que de sa loi de probabilité. Ce qui introduit une dimension non locale au problème. Nous avons établi des conditions nécessaires d'optimalité sous la forme du principe du maximum de Pontryagin. Pour cela, nous avons utilisé des outils issus du calcul stochastique, notamment les dérivées partielles par rapport à une mesure de probabilité, connues sous le nom de dérivées de Lions, ainsi qu'une version adaptée de la formule d'Itô. Cette approche nous a permis de formuler rigoureusement le principe du maximum de type Mckean–Vlasov.

Bibliographie

[1] Boukaf, S., Korichi, F., Hafayed, M.,. Muthukumar P. (2024) On pointwise second-order maximum principle for optimal stochastic controls of general mean-field type. Asian Journal of Control, Doi : 10.1002/asjc.3271, pp. 790-802 , Vol.

[2] Buckdahn, R., Chen, Y., & Li, J. (2021). Partial derivative with respect to the measure and its application to general controlled mean-field systems. Stochastic Processes and their Applications, 134, 265-307.

[3] Hafayed, M Meherrem S, (2020) On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures, International journal of control, DOI :10.1080/00207179.2018.1489148, Vol 93 (5), pp 1053-1062.

[4] Hafayed, M., Abba, A., Abbas, S. (2016). On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven byTeugels martingales measures, ID : 1079648 DOI :10.1080/00207179.2015.1079648 Internat. J. Control , 89, no. 2, 397–410.

[5] Hafayed M , Abbas S , Abba, (2015) A : On Mean-field Partial Information Maximum Principle of Optimal Control for Stochastic Systems with Lévy

Processes, Journal of Optimizations Theory and Applications. Springer , J Optim Theory Appl (2015) 167 :1051-1069.

[6] Hafayed, M., Boukaf, S., Shi, Y., Meherrem, S. (2016). A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes, (2016) Neurocomputing. Doi 10.1016/j.neucom.2015.11.082, Volume 182, 19, pages 133-144.

[7] Hafayed, M., Meherrem, S., Eren, Ş., & Guçoglu, DH (2017). Variational principle for stochastic singular control of mean-field Lévy-forward-backward system driven by orthogonal Teugels martingales with application International Journal of Modelling, Identification and Control, DOI : 10.1504/IJMIC.2017.10006366, Vol 28, Issue 2, pp 97–113.

[8] Korichi F, Hafayed M.,(2024) Lions's partial derivatives with respect to probability measures for general mean-field stochastic control problem. Doi 10.22124/jmm.2024.27136.2390. Journal on Mathematical Modeling., Vol. 12, No. 3, 2024, pp. 517–532.

[9] Korichi, F. (2024). Contributions to the stochastic optimal control of Mckean-Vlasov stochastic différential systems via the derivatives with respect to measures with some applications (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider (Biskra-Algérie)).

[10] Korichi, F Boukaf, S, Hafayed M, : (2024) Stochastic intervention control of mean-field Poisson-jump-system with noisy observation via L-derivatives with respect to probability law . Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática Vol 42 pp 1-25.

[11] Lions P.L, 2013 Cours au Collège de France. Théorie des jeux à champ moyens. http ://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/ audio-

video.jsp.

[12] Meherrem S. Hafayed M. Deniz H. Gucoglu & S Eren, (2018) A general characterization of the stochastic optimal combined control of mean field stochastic systems with application, International journal of dynamics and Control, Doi Int. J. Dynam. Control, Springer, DOI 10.1007/s40435-017-0323-9. Volume 6, Issue 2, pp 873–880 .

[13] Meherrem S. Hafayed M, (2024). A stochastic maximum priciple for general mean-field system with constraints. Numerical Algebra, Control and Optimization AIMS, Doi :10.3934/naco.2024006 .

[14] Peng, S. (1990). Un principe général du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle optimal. Revue SIAM sur le contrôle et l'optimisation , 28 (4), 966-979

[15] Wang, G., Zhang, C., & Zhang, W. (2013). Stochastic maximum principle for mean-field type optimal control under partial information. IEEE Transactions on automatic control, 59(2) :522-528.

Annexe : Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathcal{F}_0$	:	Tribu trivial.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	:	Filtration.
MB	:	un mouvement Brownien.
$L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$	:	L'espace des fonctions quadratiquement intégrable.
$\Bbbk_2(\mathbb{R}^n)$	:	L'espace de Wasserstein des mesures de probabilité.
I_A	:	Indicatrice de A,définie par : $I_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$
càdlàg	:	Continue à droite,admet limite à gauche.
$P - p.p.$	:	Prêsque partout pour la mesure de probabilité.
EDS_s	:	Équations différentielles stochastiques.
$EDS_s - MV$	:	Équations différentielles stochastiques de type Mckean–Vlasov.
$EDSR$	:	Équations différentielles stochastiques Rétrograde.

EDP	:	Équations aux dérivées partielles.
Ω	:	L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.
f, σ, h	:	Fonctions déterministes.
$\langle X \rangle_t$	:	Crochet stochastique de X.
$C_b^{1,1}(\mathbb{k}^2(\mathbb{R}^n))$	:	L'espace des fonctions bornées, continûment dérivables avec une dérivée Lipschitzienne,définies sur un sous–ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
$C_b^{1,2}(\mathbb{k}^2(\mathbb{R}^n))$	:	L'espace des fonctions bornées et continues,qui sont une fois dérivables par rapport à la variable $x,$ deux fois dérivables par rapport à la mesure de probab
$(u(.), \xi(.))$	:	Contrôle continu–singulier.
$\mathcal{D}_\zeta g(\mu_0)$	:	La dérivée de Fréchet de g a $\mu_0$dans la direction ζ.
$\partial_\mu g$	:	Les dérivée par rapport aux mesures.

Résumé

Dans cette mémoire, nous étudions un principe de maximum stochastique nécessaire pour un modèle stochastique régi par des équations différentielles stochastiques Itô contrôlées non linéairement à champ moyen est démontré. Les coefficients de notre modèle sont non linéaires et dépendent explicitement de la variable de contrôle, du processus d'état ainsi que de sa distribution de probabilité. La région de contrôle est supposée bornée et convexe. Notre principal résultat est obtenu en appliquant les dérivées partielles de Lions par rapport à des mesures aléatoires dans l'espace de Wasserstein. La formule d'Itô associée et l'approche de variation convexe sont appliquées pour établir le contrôle optimal.

Mots-clés : Modèles stochastiques de type McKean-Vlasov, contrôle stochastique, dérivées partielles de Lions par rapport à des mesures, principe du maximum, mesure de probabilité.

Abstract

In this memory, we study a necessary stochastic maximum principle for stochastic model governed by mean-field nonlinear controlled Itô-stochastic differential equations is proved. The coefficients of our model are nonlinear and depend explicitly on the control variable, the state process as well as of its probability distribution. The control region is assumed to be bounded and convex. Our main result is derived by applying the Lions's partial-derivatives with respect to random measures in Wasserstein space. The associated Itô-formula and convex-variation approach are applied to establish the optimal control.

Keywords: Stochastic McKean-vlasov models, stochastic control, Lions's partial-derivatives with respect to measures, maximum principle, probability measure.

الملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مبدأ الحد الأقصى العشوائي الضروري لنموذج عشوائي يحكمه مجال متوسط غير خطي يتم التحكم فيه، وتم توضيح معادلات Itô التفاضلية العشوائية. معاملات نموذجنا غير خطية وتعتمد صراحة على متغير التحكم وعملية الحالة وتوزيع الاحتمالات الخاص بها. من المفترض أن تكون منطقة التحكم محدودة ومحدبة. تم الحصول على النتيجة الرئيسية لدينا من خلال تطبيق المشتقات الجزئية لليون فيما يتعلق بالقياسات العشوائية في فضاء واسرشتاين. يتم تطبيق صيغة Itô المرتبطة ونهج التباين المحدب لإنشاء التحكم الأمثل.

الكلمات المفتاحية: نماذج عشوائية ذات مجال متوسط، التحكم العشوائي، مشتقات ليونز الجزئية بالنسبة للمقاييس، مبدأ الحد الأقصى، مقياس الاحتمال.