République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Lehouimel Bariza

Titre :

Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires discrets

Membres du Comité d'Examen :

Laadjal Baya	MCA	UMKB	Président
Bouziane Nadjette	MAA	UMKB	Encadrant
Souker Abdessalem	MAA	UMKB	Examinateur

Juin 2025

Dédicace

C'est avec tout mon amour et ma profonde reconnaissance que je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents, ma mère Hadda.H et mon père Moussa, symboles de sacrifice, de prière et d'amour inconditionnel.

À mes sœurs bien-aimées : Abir, Lamis, Samah, Safia, Khawla, mes compagnes de vie, sources de tendresse et de soutien.

À mes frères chers à mon cœur : Lotfi, Imamar, Ismail.

Et à mes neveux adorés, Amjad et Joud, la joie de notre vie et l'espoir de demain.

À vous tous, j'adresse cet humble travail en témoignage de mon amour, et je prie Dieu de m'accorder la réussite pour être à la hauteur de tout ce que vous m'avez donné.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je ne peux que remercier *ALLAH* le tout -puissant pour m'avoir donné la force et la patience nécessaires pour accomplir ce travail modeste.

Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de recherche *Nadjette Bouziane* pour ses orientations précieuses et son soutien constant tout au long de la préparation de cette étude.

Je remercie également chaleureusement les membres du jury qui ont manifesté un grand intérêt pour ma recherche en acceptant de l'examiner et en y apportant leurs contributions enrichissantes.

Je tiens aussi à adresser mes remercient à tout mes enseignants qui m'ont guidé tout au long de mes années d'études, ainsi qu'à ma famille et mes amis, qui par leurs prières et encouragements, ont été d'un soutien inestimable et m'ont permis de surmonter toutes les difficultés.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les systèmes dynamiques constituent un outil fondamental pour comprendre et modéliser le comportement de nombreux phénomènes naturels et technologiques dans des domaines variés tels que la physique, l'ingénierie, la biologie et encore l'économie. Avec l'essor du numérique, les modèles à temps discrets ont pris une place prépondérante, en raison de l'utilisation croissante des systèmes à traitement numérique où les signaux et les décisions sont manipulés à des instants de temps discrets.

Dans ce contexte, les systèmes non linéaires à temps discret se présentent comme une classe de modèles particulièrement complexe et riche. Ils échappent aux simplifications des modèles linéaires classiques et présentent un comportement souvent imprévisible.

L'analyse de leur stabilité devient alors une tâche cruciale, non seulement pour comportement dynamique, mais aussi pour garantir leur bon fonctionnement face aux perturbations ou aux conditions initiales défavorables. En effet, la stabilité ne signifie pas seulement que le système reste en équilibre, mais aussi qu'il est capable de revenir à un état souhaité prés avoir subi une pe La plupart des systèmes physiques non linéaires peuvent être décrits comme une interconnexion entre un système dynamique linéaire et un autre qui est non linéaires. Le problème de la stabilité absolue cherche à conditions suffisantes liées aux systèmes linéaires pour garantir que l'origine soit globalement uniformément asymptotique stable pour une catégorie spécifique de non linéaires.

L'ure a été le premier à formuler ce problème en 1994. À l'heur actuel, les systèmes non linéaires dynamiques illustrent un vaste éventail de phénomènes scientifiques : la physique scientifiques, la médecine, la chimie, la médecine, et bien plus encore. Hormis la question de la représentation, il n'existe aucun outil pour analyse les systèmes dynamiques non linéaires. On sait maintenant que de nombreux sont peuvent être caractérisés dans l'espace d'état à travers des équations différentielles non linéaires. Les automaticiens utilisent ce genre d'instrument mathématique pour s'occuper des problèmes associés à ces systèmes.

La présente mémoire est divisée en trois parties :

Le premier chapitre : la présentation des concepts de base liés aux systèmes discrets linéaires et non linéaires, ainsi qu'à la définition de la stabilité à trouver la fonction de Lyapunov.

le deuxième chapitre : traite de la problématique de la stabilisation, de ses conditions et de certaines méthodes utilisées pour garantir la stabilité du système via des loi de commande appropriées.

Le troisième chapitre : est une application aux systèmes en cascade illustrée par des exemples et des systèmes périodiques.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes à temps discrets

1.1 Introduction

Le comportement dynamique des systèmes physique peut-être décrit par des équations différentielles non linéaires très souvent difficiles à résoudre de façon analytique. Afin de contourner ce problème, les chercheurs ont développés des outils numériques pouvant nous renseigner sur l'évolution temporelle de ces systèmes mais également prédire leurs comportements à un horizon donné. Ces outils numériques, devenus très sophistiqués et performants, consiste à transformer les modèles mathématiques en des équations à temps discret afin de les simuler sur ordinateur. Malgré une littérature abondante sur l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques à temps continu, peu de résultats concernent les systèmes à temps discret.

Cette partie s'intéresse aux descriptions mathématiques des systèmes qui nous intéressent, à savoir les systèmes linéaires et non linéaires à temps discret. Les origines des systèmes linéaires sont souvent des systèmes non linéaires puisque de tels systèmes sont habituellement le résultat d'un processus de linéarisation de systèmes non linéaires, ou le résultat du processus de modélisation de systèmes dans lesquels les effets non linéaires ont été supprimés ou négligés.

1.2 Systèmes dynamiques à temps discrets

Un système discret est un système dans lequel les variables évoluent par étapes, généralement à des intervalles de temps réguliers· Contrairement aux systèmes continus, où l'évolution est représentée par des équations différentielles continues, les systèmes discrets sont souvent modélisés par des équations aux différences·[9]

1.2.1 Systèmes discrets linéaires

Les systèmes sont des systèmes dynamiques qui évoluent dans le temps selon une relation linéaire entre l'état actuel et les entrées, ce qui signifie que le changement d'état futur dépend directement de l'état présent et des entrées de manière constante.

Définition 1.2.1 *Un système dynamique discret linéaire est définie par une équation aux différences suivante :*

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + b \\ x_0 \; donne \end{cases} ; \; k \in \mathbb{N}$$

où :

· $a, b \in \mathbb{R}$: sont des constantes.

· $x_k \in \mathbb{R}$: variable d'état.

· x_0 : valeur initiale.

Point d'équilibre

La notion de point d'équilibre est fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques, car elle permet de comprendre le comportement à long terme du système et d'analyser sa stabilité.

Définition 1.2.2 *Le point d'équilibre d'un système dynamique* $x(k+1) = f(x(k))$ *est* $x_e \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$f(x_e) = x_e$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction dérivable. C'est à dire x_e est invariant sous f.

Parfois, ce point est appelé aussi point *stationnaire* ou point *fixe*.

Existence et unicité du point fixe

On suppose que le système est a l'état d'équilibre : $x_e = ax_e + b$

• pour $a \neq 1$ on a : $x_e = \dfrac{b}{1-a}$ donc il existe un unique point fixe.

• pour $a = 1$ et $b = 0$, on a : $\forall t \in \mathbb{N}$, $x(k+1) = x(k)$. C-à-d toute condition initiale est un point fixe.

• pour $a = 1$ et $b \neq 0$, le point fixe n'existe pas .

Finalement, on déduit que :

$$x_e = \begin{cases} \dfrac{b}{1-a}\,;\ si\ a \neq 1 \\ x_0\,;\ si\ a = 1\ et\ b = 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2.1 *Le point fixe d'un système dynamique* $x(k+1) = ax(k)+b$ *existe si et seulement si* $a \neq 1$ *ou (*$a = 1$ *et* $b = 0$*).*

Proposition 1.2.2 *Le point fixe d'un système dynamique* $x(k+1) = ax(k) + b$ *est unique si et seulement si* $a \neq 1$.

1.2.2 Systèmes discrets non linéaires

Les systèmes sont des systèmes dynamiques où le comportement dépend d'une fonction non linéaire $f(x(k))$ à chaque instant discret, ce qui signifie que le changement d'état futur dépend de manière non linéaire de l'état actuel.

Définition 1.2.3 *Un système dynamique discret non linèaire est définie par l'équation aux différences suivante :*

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \ , \ k \in \mathbb{N} \\ x_0 \ donné \end{cases} , \tag{1}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire de classe C^1 et $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état, telle que le système discret admettent au moins une solution.

Point d'équilibre

Un point x_e est un point fixe du système(1) (ou de l'application f) si :

$$f(x_e) = x_e$$

Exemple 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 3x(1-x)$. Les points fixes de f vérifie :*

$$\begin{aligned} f(x) = x \Longrightarrow 3x(1-x) = x \Longrightarrow 3x - 3x^2 = x \\ \Longrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \\ \Longrightarrow x(-3x+2) = 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Les point fixe sont :$\left\{\frac{2}{3}, 0\right\}$

Graphiquement est comme le montre la figure suivant :

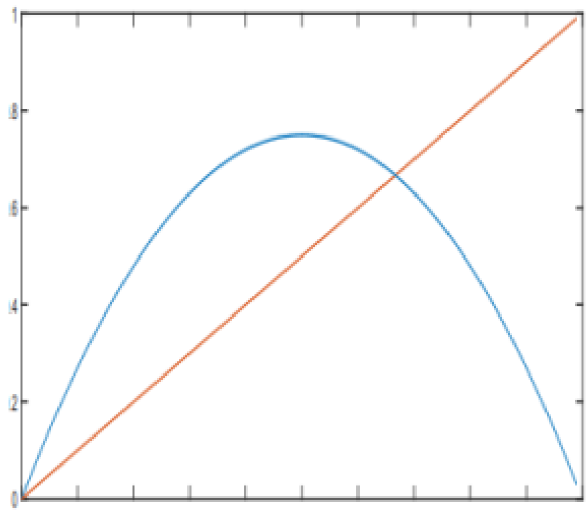

FIG. 1.1 – Points d'équilibe de l'application $f(x) = 3x(1-x)$

1.3 Systèmes contrôlés

Le système contrôlé est un système dont le comportement peut être modifié ou ajusté par une intervention externe appelée commande $u(k)$, dans le but d'atteindre un objectif précis ou de suivre un trajet désiré avec précision·

1.3.1 Système contrôlé discret

Soit le système dynamique à temps discret contrôlé suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) \\ y(k) = h(k, x(k), u(k)) \end{cases}, \tag{1.1}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état d'entrée et de sortie. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Pour un k_0 donné, et pour une entrée $u(k), k = k_0, k_0 + 1, ...$, l'équation (*1.1*) admet une unique solution $x(k)$ pour tout $k = k_0, k_0 + 1, ...$.Sous ces condition, $y(k)$ est unique pour $k = k_0, k_0+1, ...$.Le système (1.1) est dit linéaire si $f(k, x(k), u(k))$ et $h(k, x(k), u(k))$ sont deux fonctions linéaires. A partir de cet ensemble d'équations, un système LTV peut être déduit. Sa structure est la suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases},$$

avec $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(k) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D(k) \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Dans le cas où les matrices $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ et $D(k)$ sont constantes, on est en présence d'un système linéaire invariant. Ce système est décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}.$$

Linéarisation

La Linéarisation d'un processus réside dans le remplacement de son modèle non linéaire par sa contre partie linéaire dans une région définie et autour d'un point d'équilibre.

Soit le système non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{1.2}$$

où$f(.)$ est une fonction continue différentiable. Le point d'équilibre (x_e, u_e) pour le système *(1.2)* est défini par :

$$f(x_e, u_e) = x_e$$

Le système (*1.2*) peut s'écrire sous la forme générale de la manière suivante :

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), ..., x_n(k), u_1(k), ..., u_m(k)),\ i = 1, ..., n$$

Soit $u_e = (u_{1e}, u_{2e}, ..., u_{me})$ une entrée constante qui oblige le système à atteindre un état d'équilibre constante $x_e = (x_{1e}, x_{2e}, ..., x_{ne})$ telle que $f(x_e, u_e) = 0$ soit vérifiée.

L'état d'équilibre est maintenant perturbé et les nouveaux vecteurs d'état et d'entrée sont définis comme suit :

$$x = x_e + \triangle x,\ \ u = u_e + \triangle u$$

Le développement de Taylor donne :

$$\begin{aligned}\triangle x(k+1) &= f(x_e(k) + \triangle x(k), u_e(k) + \triangle u(k)) \\ &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x(k) + \frac{\partial f}{\partial u}\triangle u(k) + ...\end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_e,u_e)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_e,u_e)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix},$$

sont les matrices Jacobiennes de f, évaluées au point d'équilibre (x_e, u_e).

Soit $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$. Comme $f(x_e, u_e) = 0$, et en négligeant les termes de haut degrés, une approximation linéaire est obtenue sous la forme suivante :

$$\triangle x(k+1) = A\triangle x(k) + B\triangle u(k). \tag{1.3}$$

De la même manière, si les sorties du système sont de la forme :

$$y_i(k) = h_i(x_1(k), ..., x_n(k), u_1(k), ..., u_m(k)),\ i = 1, ..., p,$$

ou sous forme vectorielle :

$$y(k) = h(x(k), u(k)),$$

alors, le développement en série de Taylor peut être réutilisé pour avoir une approximation linéaire des équations de sortie. Si $y = y_e + \triangle y$ alors une approximation linéaire de l'équation de sortie est de la structure suivante :

$$\triangle y(k) = C\triangle x(k) + D\triangle u(k) \tag{1.4}$$

avec :

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

et

$$C = \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{u1}} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des équations (*1.3*) et (*1.4*) sont les équations du modèle linéarisé autour de x_e.

1.4 Stabilités des systèmes discrets

1.4.1 Notion de la stabilité

Il n'est pas facile de trouver des solutions de systèmes non linéaires. Souvent, ces solutionnes fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système. Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire. L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus efficaces d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Définition 1.4.1 *Soit un système non linéaire à temps descrits par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.5}$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Soit $x(k, k_0, x_0)$ la solution de (*1.5*), $\forall\ k \geq k_0$ initialisée en x_0 à k_0.

Les définitions de la stabilité, la stabilité uniforme, l'attractivité et la stabilité asymptotique sont les même dans le cas temps continu et temps discret. Seule la définition de la stabilité exponentielle change.

Définition 1.4.2 *. (Stabilité). Si* $\forall \epsilon > 0$ *et* $\forall k_0 \geq 0$*, il existe un scalaire* $\alpha(\epsilon, k_0) \geq 0$ *tel que :*

$$\|x_0\| < \alpha(\epsilon, k_0) \Longrightarrow \|x(k, k_0, x_0)\| < \epsilon,\ \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre stable au sens de lyapunov pour (*1.5*). Si non, l'origine est instable.

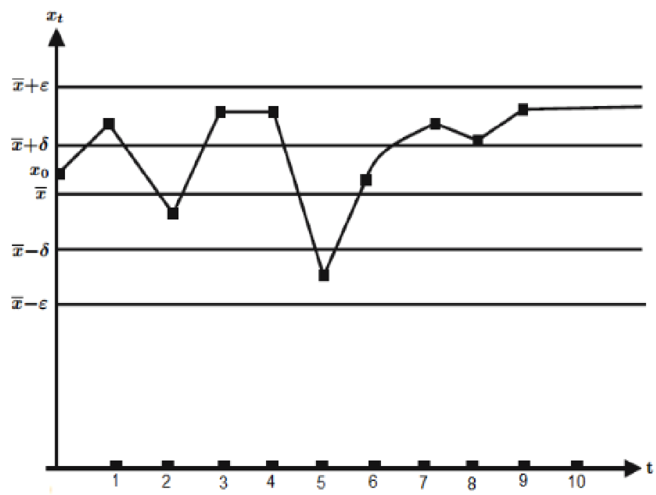

FIG. 1.2 – Point d'équilibre stable

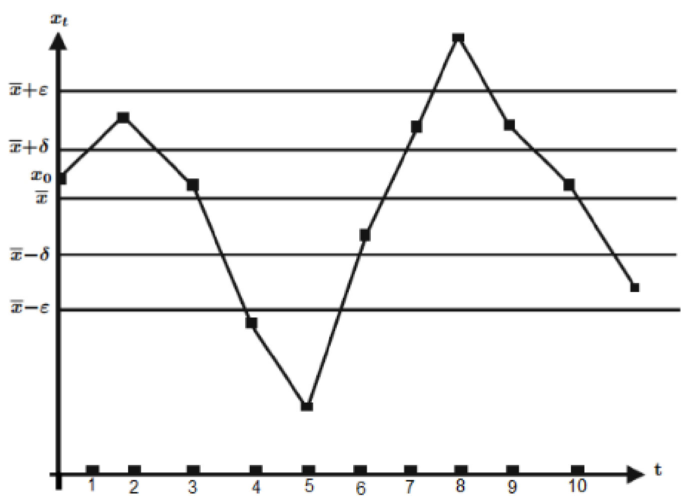

FIG. 1.3 – Point d'équilibre instable

Définition 1.4.3 *(Stabilité uniforme). Si* $\forall \epsilon > 0$ *, il existe un scalaire* $\alpha(\epsilon) \geq 0$ *tel que :*

$$\|x_0\| < \alpha(\epsilon) \Longrightarrow \|x(k, k_0, x_0)\| < \epsilon, \ \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour (*1.5*).

Définition 1.4.4 *(Attractivité). Si* $\forall \epsilon > 0$ *, il existe un scalaire* $\alpha(\epsilon) \geq 0$ *tel que :*

$$\|x_0\| < \alpha(k_0) \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} x(k, k_0, x_0) = 0, \ \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.5).

L'origine est un point d'équilibre globalement attractif si $\alpha(k_0) = +\infty$.

Définition 1.4.5 *(Stabilité exponentielle). S'il existe deux constantes* $\beta > 0$ *et* $0 < \gamma < 1$ *telles que :*

$$\|x(k, k_0, x_0)\| \leq \beta \|x_0\| \gamma^{(k-k_0)}, \ \forall k \geq k_0 \geq 0, \ \forall x_0 \in B_r,$$

alors l'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (*1.5*). L'origine est dite globalement exponentiellement stable si $B_r = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.6 *(Stabilité asymptotique).*

x_0 est asymptotiquement s'il est stable et attractif.

x_0 est asymptotiquement stable s'il stable et globalement attractif.

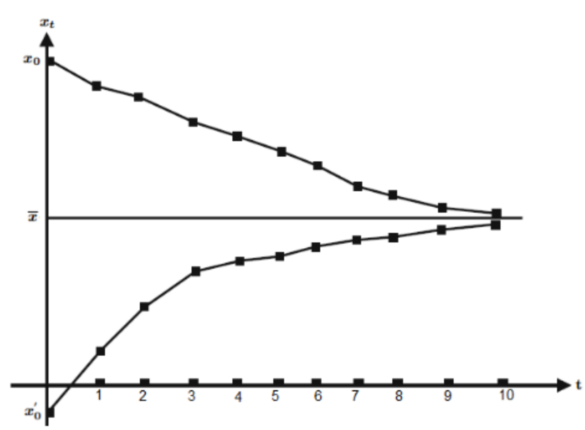

FIG. 1.4 – Point d'équilibre globalement asymptotiquement stable

Définition 1.4.7 *(L'ensemble $\omega-$limite). Un point $q \in M$ est dit point $\omega-$limite pour la trajectoire $X_k(x_1)$, s'il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $k_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ telle que $X_{k_n}(x_1)$ tend vers q.*

1.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Méthode indirecte de Lyapunov

Soit le système non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1.6}$$

En développant en série de Taylor autour d'un point d'équilibre x_e, et en négligeant les termes de haut degrés, le système non linéaire (*1.6*) est approximé par le modèle linéaire suivant :

$$\triangle x(k+1) = A\triangle x(k) \tag{1.7}$$

avec :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}_{|x_e}$$

$$\triangle x = x - x_e.$$

Le système non linéaire (*1.6*) est asymptotiquement stable autour de x_e si et seulement si le système (*1.7*) est asymptotiquement stable, c'est à dire toutes les valeurs propres de A sont à l'intérieur du cercle unité. Cette méthode est populaire vu la simplicité de son application. Cependant, si les valeurs propres de A ne sont pas toutes à l'intérieur du cercle unité, on ne peut pas conclure sur la stabilité, ce qui présente un désavantage. En effet, l'équilibre peut être stable ou instable. De plus, cette méthode est appliquée aux situations où les conditions initiales sont proches de l'équilibre. Mais elle ne fournit aucune indication quant à la proximité du point d'équilibre, ce qui peut être important dans des applications pratiques.

Méthode directe de Lyapunov

L'étude classique de la stabilité des systèmes non linéaire repose sur la linéarisation et les valeurs propres du système linéaires. Lyapunov a proposé une autre méthode inspirée du principe de stabilité des systèmes mécaniques, qui consiste à trouve une fonction scalaire dont la dérivée est négative, ce qui indique que le système converge vers l'origine.

Théorème 1.4.1 *S'il existe une fontion $V : U \to \mathbb{R}$, continue sur un voisinage U de x_0 et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :*

- $V(x_0) = 0$ *et* $V(x) > 0$ *si* $x \neq x_0$,
- $\triangle V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0, \forall x \in U$ *alors x_0 est un point d'équilibre stable pour* (1.5)*. Si de plus la fonction V est telle que :*
- $\triangle V(x) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}$ *alors x_0 est asymptotiquement stable.*

Définition 1.4.8 *(Fonction de Lyapunov)*

Une fonction V qui satisfait ***(a)*** est appelée fonction de Lypounov pour (*1.5*) en x_0. V sera dite fonction large (ou faible de lypounov si elle vérifie en plus ***(b)***). Si ***(c)*** est vérifié alors V est appelée fonction de Lypounov stricte pour (*1.5*) en x_0. V est dite propre si l'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^+$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ ou encore $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$.

Exemple 1.4.1 *: Considérons le système :*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{x_2(k)}{1+x_2(k)^2} \\ x_2(k+1) = \dfrac{x_1(k)}{1+x_2(k)^2} \end{cases},$$

qui admet $(0,0)$ pour point d'équilibre. On définit la fonction : $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ on a la fonction V est continue et admet $(0,0)$ comme minimum. De plus :

$$V(x(k+1)) = \frac{x_2(k)^2}{(1+x_2(k)^2)^2} + \frac{x_1(k)^2}{(1+x_2(k)^2)^2} = \frac{V(x(k))}{(1+x_2(k)^2)^2} < V(x(k)).$$

D'où V est une fonction de Lyapunov pour ce système et donc ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 1.4.2 *(Version globale). S'il existe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive et propre telle que $\triangle V(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}$, alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

Théorème 1.4.3 *(instabilité). S'il existe $V : B(x_0,\epsilon) \to \mathbb{R}$ continue, et une constante c telle que : $\triangle V(x) \geq cV(x)$,$\forall x \in B(x_0,\epsilon)$ et donc $x_0 \in \overline{\{x\,/V(x) > 0\}}$, alors x_0 est un point d'équilibre instable pour le système.*
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On désigne par $L^+(x)$ l'ensemle des point y, $\omega-$limite de x, i.e. tels qu'il existe une suite extaite $f^{\phi(k)}(x)$ de la solution $f^k(x)$ telle que $\lim_{k\to+\infty} f^{\phi(k)}(x) = y$.

Principe d'invariance de LaSalle

Pour établir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre, il suffit, comme indiqué précédemment, de trouve une fonction de Lyapunov stricte. Cependant, aucune méthode constructive ne permet de garantir cette recherche. En revanche, il est plus facile d'identifier une fonction de lyapunov large, ce qui permet alors d'appliquer le résultat suivant pour conclure.

Théorème 1.4.4 *(Principe d'invariance de LaSalle)*
Si V est une fonction de Lyapunov pour le système (1.5) *sur U, et si $f^k(x)$ est une solution bornée, et dans U pour tout entier k, alors iI existe un nombre c tel que :*

$$f^k(x) \to G^* \cap V^{-1}(c).$$

Remarque 1.4.1 *Soit le système linéaire à temps discret suivant :*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{1.8}$$

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V(k) = x^T(k)Px(k),$$

avec $P = P^T > 0,$ alors :

$$\triangle V(k) = V(k+1) - V(k) = x^T(k)(A^T PA - P)x(k)$$

*Dans ce cas, le système (*1.8*) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si et seulement s'il existe une matrice $P > 0$, telle que :*

$$\triangle V(k) < 0 \Longrightarrow A^T PA - P < 0.$$

Théorème 1.4.5 *S'il existe un voisinage de l'origine $B \subset U$ et une fonction $V \in C^0(B, \mathbb{R})$ tel que :*

- *$V(x) \geq 0$ pour tout $x \in A$ et $V(0) = 0$.*

• $\triangle V(x) = V(f(x)) - V(x)) \leq 0$ *pour tout* $x \in A$.

• 0 *et* G^*-*asymptotiquement stable, où* G^* *est le plus grand sous ensemble positivement invariante contenu dans :*

$$G = \{x \in B : V(f(x)) - V(x) = 0\},$$

alors l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 1.4.6 *S'il existe une fonction* $V \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ *satisfaisant :*

• $V(x) > 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $V(0) = 0$.

• $\triangle V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

• 0 *est* G^*-*globalement asymptotiquement stable, où* G^* *est le plus grand sous ensemble positivement invariant contenu dans :*

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : V(f(x)) - V(x) = 0\}.$$

• *Toutes les solutions du système sont bornées , alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

Chapitre 2

Stabilisation des systèmes discrets

2.1 Stabilisation

Stabilisation d'un système consiste à concevoir une commande qui permet de rendre le système stable, C'est à dire que ses états convergent vers zéro au cours du temps. Plus précisément, il s'agit d'un processus de conception d'une loi de commande visant à ce que tous les êtas du système dynamique converge vers le point d'équilibre (généralement l'origine), et ce quelles que soient les conditions initiales.

2.1.1 Stabilisation d'un système linéaire discret

Stabilisation d'un système linéaire discret est une technique de contrôle des systèmes dynamiques discrets (représentés par des équations aux différences) qui vise à rendre le système stable en utilisant un retour d'état linéaire.

Considérons un système dynamique discret linéaire invariant dans le temps, décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

où : $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant k. $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande (entrée de contrôle) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des matrices constantes.

Un contrôleur par stabilisation linéaire discrète prend la forme :

$$u(k) = -Kx(k),$$

où $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice de gain du contrôleur.

Le système en boucle fermée devient alors :

$$x(k+1) = (A - BK)x(k).$$

• Le système est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de $(A - BK)$ sont à l'intérieur du cercle unité ($|\lambda_i| < 1$ pour tout i).

• Un système est dit stabilisable s'il existe une matrice K telle que les valeurs propres de $(A - BK)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

2.1.2 Stabilisation d'un système non linéaire discret

Condition nécessaire de stabilisation

Soit le système :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)),\ \ f(0,0) = 0,\ \ k = 0, 1, ... \tag{1.10}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$ et f est une fonction continue sur voisinage $A \times U$ de $(0,0)$. On a le système (*1.10*) est C^0-stabilisation s'il existe une loi de commande $u(x), u(0) = 0$, continue au voisinage de l'origine telle que pour le système bouclé $x(k+1) = f(x(k), u(x(k)))$ l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Théorème 2.1.1 *La condition nécessaire pour que le système :*

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)),\ \ f(0,0) = 0,\ \ k = 0, 1, ...$$

soit C^0-stabilisable est si l'application :

$$\gamma : A \times U \longmapsto \mathbb{R}^n$$
$$(x, u) \longmapsto f(x, u) - x$$

soit surjective sur voisinage de l'origine.

Preuve. Posons $a(x) = f(x, u(x))$, si l'origine est un point asymptotiquement stable pour $x(k+1) = a(x(k))$, il existe sur A une fonction de Lyapunov de C^1 ; $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$,$V(0) = 0$, telle que pour x au voisinage de l'origine :

$$\forall x \neq 0, V(a(x)) - V(x) < 0.$$

■

Pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, l'ensemble : $V^\alpha = \{x \in A\,/V(x) \leq \alpha\}$ étant compact, on a $\sup\{V(a(x))/x \in V^\alpha\} = \beta < \alpha$ et il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in V^\alpha$ et $\varepsilon \in B_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n\,/\|x\| \leq \eta\}$:

$$|V(a(x) - \varepsilon) - V(a(x))| \leq K\,|\varepsilon|\,,$$
$$K = \sup\nolimits_{y \in V^\alpha + B_\eta} |\nabla V\ (y)|\,,$$

il s'en suit que pour $|\varepsilon| \leq \delta = \min\left\{\eta, \frac{\alpha - \beta}{K}\right\}$ on a :

$$V(a(x) - \varepsilon) \leq \alpha.$$

Ainsi $x \to a(x) - \varepsilon$ est une application continue de V^α dans lui-même. Par ailleurs, en considérant l'homotopie :

$$\phi : V^\alpha \times [0,1] \to V^\alpha$$

Donnée par :

$$\begin{cases} \phi(x,t) = \psi(x, \dfrac{t}{t-1}), t \neq 1 \\ \phi(x,1) = 0 \end{cases},$$

où ψ est défini par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla V(\psi) \\ \psi(x,0) = x \end{cases},$$

on constate que V^α est contractile et donc que V^α a une homologie triviale. On peut alors conclure par application du théorème du point fixe de lefschetz.

Exemple 2.1.1 *Comme en temps continu, un système non linéaire en temps discret peut être complètement contrôlable sans être C^0-stabilisation. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant :*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \upsilon_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \upsilon_2(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + x_2(k)\upsilon_1(k) - x_1(k)\upsilon_2(k) \end{cases}.$$

L'image de l'application $\gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\gamma(x,\upsilon) = (\upsilon_1, \upsilon_2, x_2\upsilon_1 - x_1\upsilon_2)^T$ ne contient aucun point de la forme $(0,0,\varepsilon)^T$, $\varepsilon \neq 0$. Ainsi, le système n'est pas C^0-stabilisation. On peut, cependant, établir aisément, grâce à des techniques d'algèbre de lie, que c'est un système complètement contrôlable. Notons que le linéairisé à l'origine ne possède aucun mode incontrôlable et instable.

Condition suffisante de stabilisation

Soit le système :

$$x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k), f(0) = 0,\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R}^m \tag{1.11}$$

où f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et g : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ et où l'on suppose que :

i) Le système en régime libre $x(k+1) = f(x(k))$ est stable et l'on connait une fonction de Lyapunov $V(x)$, de classe C^2, telle que $V(f(x)) \leq V(x)$, $\forall x \neq 0$.

ii) Les ensembles :

$$W_1 = \{x \in |\mathbb{R}^n V(f^{k+1}(x)) - V(f^k(x)) = 0, k = 0, 1, ...\},$$

et :

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | \frac{\partial V}{\partial x}(f^{k+1}(x))g(f^k(x)) = 0, k = 0, 1, ...\},$$

satisfont $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\varphi(x, u) = -\int_0^1 (\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + tg(x))udt.$$

Proposition 2.1.1 *Si, pour tout x la fonction $\varphi(x, .)$ admet un point fixe $u(x) = \varphi(x, u(x))$ dépendant continûement de x tel que $u(0) = 0$, le système (1.11) est globalement stabilisable par la loi de commande $x \to u(x)$. En effet, la variation de V le long des trajectoires du système en boucle fermée est donnée par :*

$$\triangle V(x) = V(f(x) + g(x)u(x)) - V(x).$$

Or, en utilisant les propriétés de V, on obtient :

$$\triangle V(x) = V(f(x)) - V(x) - u^T(x)u(x) \leq 0,$$

ce qui implique la stabilité du système.

Par application du principe d'invariance de LaSalle, pour assurer la stabilité asymptotique globale, il suffit de montrer que le plus grand ensemble invariant Ω contenu dans l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^n | V(f(x)) - V(x) = 0 \text{ et } u(x) = 0\}$$

est réduit à l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Notons que $u(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) = 0$.

Considérons alors une solution $x(k)$ telle que $x(0) = x \in \Omega$. Comme $u(x)$ s'annule identiquement sur Ω, on a :

$$x(k) = f^k(x), \forall k.$$

Il en résulte que $x \in W_1 \cap W_2$ et par conséquent, $x = 0$.

Comme première illustration de ce résultat, notons que lorsque $V(f(x)+g(x)u)$ est un polynôme de degré 2 :

$$\varphi(x,u) = -(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x))^T - \frac{1}{2}g(x)^T\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x))g(x)u.$$

Si, on suppose que :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x)) \geq 0.$$

On aboutit à :

$$u(x) = -M^1(x)(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x))^T,$$

$$M(x) = -I + \frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x))g(x).$$

En fait, on n'a pas besoin de l'hypothèse $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x)) \geq 0$ car si on désigne par $\rho(x)$ le rayon spectral de la matrice $\frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x))g(x)$, le changement de contrôle $\tilde{u} = (1+\rho(x))u$ transforme $\varphi(x,u)$ en :

$$\tilde{\varphi}(x,\tilde{u}) = -(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x))^T - \frac{1}{2} + 2\rho(x)g^T(x)2\rho(x)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x))g(x)\tilde{u},$$

qui admet le point fixe :

$$\tilde{u}(x) = -\tilde{M}^1(x)(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x))^T,$$

$$M(x) = \frac{1}{2+2\rho(x)} + g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(f(x))g(x).$$

Il s'ensuit que la commande $u(x) = \frac{1}{1+\rho(x)}\tilde{u}(x)$ vérifiant $u(0) = 0$, stabilise globalement le système (1.11). Le résultat suivant montre que tout système de la forme (1.11) vérifiant *(i)* et *(ii)* est globalement C^0-stabilisable par une commande bornée.

Théorème 2.1.2 *Si les conditions* (i) *et* (ii) *sont satisfaites, alors pour touts* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, *le système* (1.11) *est globalement* C^0*-stabilisable par une commande* $u(x)$ *vérifiant* $\|u(x)\| \leq \eta$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la fonction définie par :

$$\alpha(x,u) = \frac{\eta}{1+K_1(x)+2\eta K_2(x)}\varphi(x,u),$$

$$K_1(x) = \sup_{\|u\|\leq\eta} \|\varphi(x,u)\|\,,\ K_2(x) = \sup_{\|u\|\leq\eta} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,u)\right\|,$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|u\| \leq \eta$, on a :

$$\|\alpha(x,u)\| \leq \eta, \quad \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x,u) \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Par application du théorème du point fixe, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $\alpha(x,.)$ admet un point fixe unique $u(x) = \alpha(x, u(x))$

dépendant continuement de x et vérifiant $\|u(x)\| \leq \eta$, $u(0) = 0$. Il vient alors :

$$\triangle V(x) = V(f(x)) - V(x) - \frac{1}{\eta}(1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x))u^T(x)u(x) \leq 0$$

Le théorème découle, comme précédemment, du principe d'inveriance de LaSalle.[1]

Exemple 2.1.2 *La condition de Brockett est nécessaire, mais loin d'être suffisante pour qu'un système soit stabilisation. En effet, soit :*

$$\begin{cases} x(k+1) = -y(k) + ux(k)^2 \\ y(k+1) = x(k) + ux(k)y(k) \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}.$$

Quelque soit $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} -x - y + ux^2 = \epsilon_1 \\ -x - y + uxy = \epsilon_2 \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases},$$

admet une solution (par exemple $u = 0, x = \dfrac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2}$ et $y = \dfrac{-(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2}$).

L'application $f(x,y,u) - (x,y)$ est donc surjective sur tout voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

Soit maintenant, $V(x,y) = x^2 + y^2$. On a :

$$\triangle V(x,y) = u^2 x^2 V(x,y) \geq 0.$$

Donc l'origine n'est pas stabilisable quelque soit le choix de la commande u. Remarquons que le linéarisé est critique.

2.2 Méthodes de Stabilisation des systèmes non linéaires discrets

2.2.1 Méthode de Lyapunov discrète

La méthode de Lyapunov discrète constitue un outil fondamental et puissant pour l'analyse de la stabilité et la conception de lois de commande stabilisantes pour les systèmes non linéaires à temps discret. Pour un système :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ u \in \mathbb{R}^m,$$

on cherche une fonction de Lyapunov $V(x)$ vérifiant :

1. $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, $V(0) = 0$.
2. $\triangle V(x(k)) = V(f(x(k), u(k))) - V(x(k)) < 0$, $\forall x(k) \neq 0$

Choix de V(x) :

Formes quadratiques : $V(x) = x^T P x$ avec $P > 0$.

Formes non linéaire : adaptées à la dynamique de système, ex : $V(x) = \|x\|^4$.

Condition de décroissance :

Pour un choix quadratique $V(x) = x^T P x$, on a :

$$\triangle V = x(k)^T (A^T P A - P) x(k) < 0 \Longrightarrow A^T P A - P < 0,$$

où A est la matrice Jacobienne linéarisée.

Synthèse de la commande :

Considérons le système discret suivant :

$$x(k+1) = \sin(x(k)) + u(k)$$

Étapes de conception :

1. Choix de $V(x)$: On choisit une fonction de Lyapunov candidate simple :

   $$V(x) = x^2$$

   cette fonction est positive définie et satisfait $V(0) = 0$.

2. Calcul de la variation de Lyapunov : La variation de la fonction de Lyapunov est donnée par :

   $$\triangle V = V(x(k+1)) - V(x(k)) = (\sin(x(k)) + u(k))^2 - x(k)^2.$$

3. Détermination de la loi de commande stabilisante : Pour assurer la décroissance de $V(x)$, on choisit une loi de commande :

   $$u(k) = -\sin(x(k)) - \alpha x(k)$$

   et $\alpha > 0$,est un paramètre à déterminer. Substituons cette loi dans l'expression de $\triangle V$:

$$\begin{aligned}\triangle V &= (\sin(x(k)) + u(k))^2 - x(k)^2 \\ &= (\sin(x(k)) - \sin(x(k)) - \alpha x(k))^2 - x(k)^2 \\ &= (-\alpha x(k))^2 - x(k)^2 \\ &= (\alpha^2 - 1)x(k)^2\end{aligned}$$

Pour que $\triangle V < 0$ pour tout $x(k) \neq 0$, il faut que $\alpha^2 - 1 < 0$, soit $\alpha < 1$. Par exemple, en choisissant $\alpha = 0.5$, on obtient :

$$u(k) = -\sin(x(k)) - 0.5x(k) \Longrightarrow \triangle V = (\alpha^2 - 1)x(k)^2 = -0,75x(k)^2 < 0.$$

Ce qui garantit la stabilité asymptotique du système.

Cette méthode illustre comment la sélection judicieuse d'une fonction de Lyapunov et la conception d'une loi de commande appropriée permettent d'assurer la stabilité d'un système non linéaire à temps discret.

2.2.2 Feedback linéarisant pour systèmes non linéaires discrets

Le Feedback linéarisant (ou linéarisation entrée- sortie)(ou linéarisation par retour d'état) transforme un système non linéaire en un système linéaire équivalent via un changement de variables et une loi de commande appropriée.

Considérons un système discret de la forme :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)).$$

L'objectif est de déterminer une commande $u(k) = g(x(k), v(k))$ telle que la sortie du système suive une dynamique linéaire souhaitée, c'est-à-dire :

$$y(k+1) = v(k),$$

où $v(k)$ est la nouvelle entrée de contrôle.

Procédure de mise en œuvre :

1. Détermination du degré relatif r : Il s'agit du nombre minimal d'itérations nécessaires pour que la sortie $y(k)$ dépende explicitement de l'entrée $u(k)$.

2. Construction d'un difféomorphisme $z(k) = \Phi(x(k))$: Cette transformation d'état permet de reformuler le système dans une nouvelle base où la dynamique devient plus simple à contrôler.

3. Calcul de la loi de commande linéarisante :

$$u(k) = \alpha(x(k)) + \beta(x(k))v(k).$$

4. Concevoir un contrôleur linéaire pour $v(k)$: Une fois le système linéarisé, on peut appliquer des techniques de commande linéaire classiques pour concevoir $v(k)$.

Exemple 2.2.1 *(Système de pendule discret)*

Soit le modèle :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + T\omega(k) \\ \omega(k+1) = \omega(k) + T(\frac{g}{l}\sin(\theta(k)) - \frac{b}{ml^2}\omega(k) + \frac{u(k)}{ml^2} \end{cases}$$

où $\theta\,(k)$: angle du pendule,T : pas d'échantillonnage, $\omega(k)$: vitesse angulaire, g : accélération due à la gravité, b : coefficient de frottement, l : longueur du pendule, m : masse du pendule, $u(k)$: torque appliqué.

• **Objectif :** Linéariser le système autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

• **Solution :**

1. Degré relatif : Le degré relatif est $r = 2$, car il faut deux itérations pour que la sortie dépende explicitement de l'entrée.

2.Nouveaux états : $z_1(k) = \theta(k)$, $z_2(k) = \omega(k)$.

3. Commande linéarisante :

$$u(k) = ml^2(v(k) - \frac{g}{l}\sin\theta(k) + \frac{b}{ml^2}\omega(k))$$

4. Système linéarisé :

$$\begin{cases} z_1(k+1) = z_1(k) + Tz_2(k) \\ z_2(k+1) = z_2(k) + TV(k) \end{cases}$$

Cette approche de linéarisation par retour d'état est particulièrement efficace pour les systèmes non linéaires où une transformation adéquate peut rendre le système linéaire et contrôlable, permettant ainsi l'application directe des techniques de commande linéaire classiques.

2.2.3 Stabilisation via des Modèle Flous Incertains de type Takagi- Sugeno (TS)

Soit le modèle **TS** discret en boucle fermée suivant :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \tag{1.12}$$

La loi de commande **PDC** globale est obtenue en combinant les lois de commande locales associées à chaque règle du modèle flou TS, pondérées par les fonctions d'appartenance correspondantes. Elle s'exprime généralement sous la forme :

$$u(k) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))K_i x(k) \tag{1.13}$$

Où $u(k)$ est le vecteur de commande global, $x\,(k)$ est le vecteur d'état du système, $h_i(z(k))$ est la fonction d'appartenance associée à la i-ème règle, dépendant des variables prémisses $z\,(k)$, K_i est le gain de retour d'état pour la i-ème règle, r est le nombre total de règles dans le modèle flou.

On remplace l'équation (*1.13*) dans l'équation (*1.12*), la représentation du modèle global en boucle fermée avec une loi de commande **PDC** est donnée par :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(k))h_j(z(k))(A_i - B_iK_j)x(k) \tag{1.14}$$

Théorème 2.2.1 *Le modèle flou discret* (1.12) *et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande* **PCD** (1.3)*, s'il existe une matrice commune définie positive* $P = P^T > 0$ *qui satisfait les inégalités matricielles suivants :*

$$(A_i - B_iK_j)^T P(A_i - B_iK_j) - P < 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, r$$

On peut écrire (1.14) *comme suit :*

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))h_i(z(k))G_{ii}x(k) + 2\sum_{i<j}^{r} h_i(z(k))h_j(z(k))\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)x(k)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

Théorème 2.2.2 *Le modèle flou discret* (1.12) *et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande* **PCD** *(*1.13*), s'il existe une matrice commune définie positive P qui satisfait les conditions suivants :*

$$\begin{cases} G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, \, \forall i = 1, ..., r \\ \left(\dfrac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\dfrac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - P \leq 0, \;\; i < j < r \end{cases}$$

On utilise le même changement de variable que dans le cas des modèles continue. Les conditions de stabilité des modèles **TS** *discrets dans le théorème (2.2.2) peuvent être réécrites sous forme de* **LMI***s en utilisant le complément de Schur :*

$$\begin{cases} X > 0 \\ \begin{bmatrix} X & (A_i - BM_i)^T \\ (A_i - BM_i) & X \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X & ((A_i + A_j)X - N_{ij})^T \\ (A_i + A_j)X - N_{ij} & X \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

Telle que N_{ij} est donnée par :

$$N_{ij} = B_i M_j + B_j M_i,$$

et les gains de retour d'état peuvent être déterminés par :

$$K_i = M_i X^{-1} \quad i = 1..., r.$$

Le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type **PDC** est celui du conservation des condition sur les gains de retour.

Conditions de stabilité relàchées

Les conditions classiques de stabilité pour les modèles discrets **TS** sont souvent trop conservatrices, car elles négligent certaines propriétés des fonctions d'interpolation non linéaires. Pour y remédier, des conditions relâchées on été proposées. Elles permettent que certains termes positifs apparaissent dans la fonction $\triangle V(x(k))$, tant que la somme reste négative, ce qui réduit le conservatisme. Des approches comme l'utilisation de fonction de Lyapunov multiples ou la prise en compte du nombre de règles actives ont montré leur efficacité dans ce cadre.

Cas des modèles TS discrets

Théorème 2.2.3

Le modèle flou discret est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC, s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et une matrice semi positive $Q = Q^T > 0$, qui vérifient les inégalités ssuivantes :

$$\begin{cases} G_{ii}^T P G_{ii} + (s-1)Q < 0, \; \forall i = 1, ..., r \\ \left(\dfrac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\dfrac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right) - P - Q \leq 0, \; i < j \leq r \end{cases}$$

Le modèle discret est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC, s'il existe une matrice défine positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, ..., r$$

$$G_{ij}^T P G_{ij} - P + Q_{ij} < 0 \quad i < j \leq r$$

et :

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & & \cdots & Q_{2r} \\ & & & \\ Q_{r1} & & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0$$

• Les conditions du théorème2.2.3 se rapprohent des conditions données dans le cas où $Q = 0$.[7]

Chapitre 3

Applications aux problèmes de stabilisation

Ce chapitre présente des applications liées à la stabilisation de systèmes non linéaires discrets. Nous étudions d'abord les systèmes en cascade, dont la structure permet une analyse hiérarchique de la stabilité à l'aide de fonction de Lyapunov. Ensuite, nous abordons la stabilisation des systèmes périodiques, en adaptant les outils de stabilité aux dynamiques répétitives. Ces exemples illustrent concrètement l'application des méthodes de stabilisation à différents types de systèmes.

3.1 Systèmes en cascade

Les systèmes en cascade sont des systèmes dynamiques formés de sous-systèmes connectés en série, où la sortie d'un sous-système devient l'entrée du suivant. Ces systèmes sont très fréquents dans les systèmes non linéaires et peuvent être continus ou discrets. Leur analyse repose souvent sur des techniques de linéarisation partielle. Dans ce qui suit, nous établissons, à l'aide du théorème (3.1.1), des résultats relatifs à la stabilisation locale des systèmes en cascade en temps discret.

Considérons un système non linéaire discret :

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & f_1(x_1(k), u_1) \\ & \vdots & \\ x_i(k+1) & = & f_i(x_1(k), ..., x_i(k), u_1, ..., u_i) \\ & \vdots & \\ x_m(k+1) & = & f_m(x_1(k), ..., x_m(k), u_1, ..., u_m) \end{cases} , \tag{1.15}$$

où :

$$\begin{cases} x(k) = (x_1(k), ..., x_m(k)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m} \\ u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_m} \end{cases}$$

et $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions continues telles que $f_i(0, ..., 0) = 0$. A (1.15) on associe les systèmes $\sum_i$ pour $i, ..., m$:

$$\sum_i \begin{cases} x_i(k+1) = f_i(0, ..., 0, x_i(k), 0, ..., 0, u_i, 0, \ldots, 0) \\ x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i} \ , \ u_i \in \mathbb{R}^{p_i} \end{cases} \tag{1.16}$$

Pour $1 \leq i \leq m$, on dira que (*1.16*) est stabilisable en $x_i = 0$, s'il existe une loi de commande $x_i \to u_i(x_i)$ continue vérifiant $u_i(0) = 0$, telle que l'origine de $\mathbb{R}^{n_i}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système :

$$x_i(k+1) = f_i(0, ..., 0, x_i(k), 0, ..., 0, u_i\,(k)\,, 0, \ldots, 0)$$

Le théorème suivant s'obtient par application directs du théorème (1.4.5) aux systèmes *(1.15)* et *(1.16)* respectivement bouclés par $u(x) = (u_1(x_1), ..., u_m(x_m))$ et $u_i(x_i)$.

Théorème 3.1.1 *Le système* (1.15) *est asymptotiquement stable si et seulement si* *les sous systèmes* (1.16) *sont asymptotiquement stables.*

Preuve. L'implication directe est immédiate (il suffit de voir que les ensembles $(\{0..., x_n; ..., 0\})$ sont invariant par Ie système (1.15). On montre Ia réciproque par récurrence sur Ie nombre rn d'équations du système (1.15). En effet, supposons que la propriété est vraie à I'ordre $m-1$, et que les sous systèmes de type (1.16) et d'ordre m sont asymptotiquement stables. Alors, la stabilité asymptotique des $m-1$ premiers systèmes entraine, par hypothèse de récurrence, que le système de type (1.15) d'ordre $m-1$ est asymptotiquement stable. Il existe alors une fonction de Lyapunov $V(x_1, ..., x_{m-1})$ qui satisfait :

1. $V(x_1, ..., x_{m-1}) > 0$, $V(0) = 0$.
2. $V(f(x_1, ..., x_{m-1})) - V(x_1, ..., x_{m-1}) < 0$, $\forall (x_1, ..., x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{n-n_m}$.

   Pour le système (1.15) d'ordre m, la fonction définie par :

$$\tilde{V}(x_1, ..., x_m) = V(x_1, ..., x_{m-1}),$$

   est une fonction semi-définie positive décroissante le long des trajectoires, et on a :

$$\begin{aligned} G_0 = G = G^* &= \left\{(x_1, ..., x_m) : \tilde{V}(x_1, ..., x_m) = 0\right\} \\ &= \{(0, ..., 0, x_m),\ x_m \in \mathbb{R}^{n_m}\}. \end{aligned}$$

   L'origine est G^*-asymptotiquement stable par hypothèse de récurrence donc toutes les hypothèses du Théorème (1.4.5) sont satisfaites, ce qui implique que I'origine est asymptotiquement stable pour le système (1.15) d'ordre m.

■

Théorème 3.1.2 *Le système* (1.15) *est stabilisable si et seulement si les sous systèmes* (1.16) *sont stabilisables.*

Exemple 3.1.1 *Considérons les systèmes :*

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = g(y(k), u) \\ (x(k), y(k)) \in U \times \mathbb{R}^m, \ u \in \mathbb{R}^p \end{cases}, \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), 0) \\ x(k) \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} y(k+1) = g(y(k), u) \\ y(k)) \in \mathbb{R}^m, \ u \in \mathbb{R}^p \end{cases}, \tag{1.19}$$

où f et g sont des fonctions continues telles que $f(0,0) = 0$ et $g(0,0) = 0$. On suppose que *(1.18)* est asymptotiquement stable et qu'il existe une loi de commande $y \mapsto u(y)$ stabilisant *(1.19)*. Alors Ie système *(1.17)* est stabilisable. En effet, d'après le théorème inverse, il existe une fonction de Lyapunov V pour :

$$y(k+1) = g(y(k), u(y(k))).$$

La fonction $W(x, y) = V(y)$ est semi définie positive et décroissante le long des trajectoires du système *(1.17)* bouclé par $u(y)$ car :

$$\triangle W = V(g(y, u(y))) - V(y) \leq 0.$$

De plus :

$$\{W = 0\} = \{(x, 0)\} = \{\triangle V = 0\},$$

et donc $G_0 = G^* = G$. Or G^* est invariant par *(1.17)* et le système sur G^* est réduit à *(1.18)* qui est asymptotiquement stable. Le système *(1.17)* bouclé par $u(y)$ est donc asymptotiquement stable.

Exemple 3.1.2 *Les systèmes partiellement linéaire en temps continu qui sont analogues à* (2)*. Ici on donne l'équivalent discret de leur résultats. La preuve, basée sur l'utilisation des fonctions semi définies, est simple mais les résultats sont locaux. Soit :*

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = Ay(k) + Bu \\ (x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2},\ u \in \mathbb{R}^p \end{cases}, \tag{2}$$

où $A \in M_{n_2,n_2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n_2,p}(\mathbb{R})$ sont deux matrices, et $f(0,0) = 0$. On suppose que la paire (A, B) est stabilisable, et que le système :

$$x(k+1) = f(x(k), 0)$$

est asymptotiquement stable. Alors, d'après le théorème *(*3.1.2*)*, le système *(2)* est stabilisable par un feedback linéaire.

En effet, la paire (A, B) étant stabilisable, il existe une matrice $K \in M_{p,n_2}$ tel que le spectre de la matrice $A + BK$ soit dans le disque unité ouvert. Il existe alors une matrice symétrique définie positive $Q \in M_{n_2,n_2}(\mathbb{R})$ telle que :

$$(A + BK)^T Q(A + BK) - Q = -I_{n_2}$$

où I_n est la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Soit $V(x, y) = (y)^T Q(y)$. C'est une fonction de Lyapunov semi définie pour le système *(2)* bouclé par $u = Ky$.

La différence de V le long des trajectoires de *(2)* est :

$$\triangle V = ((A+BK)y)^T Q(A+BK)y - y^T Qy$$

et l'ensemble $\{\triangle V(x,y)=0\} = \{(x,0)\}$ est positivement invariant par le système *(2)*. De plus on a $G^* = G_0$ et comme le système $x(k+1) = f(x(k),0)$ est asymptotiquement stable, l'origine est donc G^*-asymptotiquement stable. Par conséquent, à partir du théorème *(1.4.5)* la solution nulle de *(2)* est asymptotiquement stable.

Proposition 3.1.1 *Si* $x(k+1) = f(x(k),0)$ *est globalement asymptotiquement stable et la paire* (A,B) *est contrôlable alors le système* (2) *est globalement asymptotiquement stable par un feedback linéaire.*

Preuve. Comme la paire (A,B) est contrôlable, il existe une matrice F telle que $\tilde{A} = A+BF$ soit une matrice nilpotente, $\tilde{A}^{n_2} = 0$. Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et (x_k,y_k) la solution de système bouclé,(avec $u(x) = Fx$), issue de (x_0,y_0). On montre que (x_k,y_k) est bornée. En effet, la matrice est nilpotente $\tilde{A} = A+BF$ donc, $y(k)=0$ $\forall k \geq n_2$, on a alors :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k),0) \\ y(k+1) = 0 \end{cases}$$

Comme l'origine est supposé être est globalement asymptotiquement stable pour $x(k+1) = f(x(k),0)$, il s'ensuit que la suite $(x_k)_{k\geq n_2}$ est bornée. Et donc $(x_k)_{k\geq 0}$ est la réunion d'un ensemble fini $\{x_0,x_1,...,x_{n_2}\}$ et d'une suite bornée $(x_k)_{k\geq n_2}$. D'autre part la composante y_k de la solution vérifie $(y_k)_{k\geq 0} \subset \{0,y_0,y_1,...,y_{n_2}\}$, donc elle est bornée. En résumé, la solution (x_k,y_k) est bornée et le système est G^*-globalement asymptotiquement stable. On conclut alors application du le théorème *(1.4.6)*. ■

3.2 Stabilisation des systèmes périodiques

Considérons un système de commande non linéaire en temps discret :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \;\; f(0,0,k) = 0, \; k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état au temps k et $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle. On suppose que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ est continue en (x, u) et périodique par rapport au temps k, de période $T \geq 2$.

Le problème étudié ici est le suivant : existe-t-il une loi de commande périodique par retour d'état $u(x, k)$, avec $u(0, k) = 0$, telle que l'origine soit un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée :

$$x(k+1) = f(x(k), u(x(k)), k),$$

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une telle loi de commande existe.

Pour cela, nous introduisons les notations suivantes. Soit $V(x, k)$ une fonction de Lyapunov, de classe C^2 par rapport à x et $T-$périodique par rapport à k.

On définit alors $\tilde{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{V}(x, u, k) = V(f(x, u, k), k+1) \tag{2.2}$$

$$\varphi(x, u, v, k) = \int_0^1 (1-t) v^T \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial u^2}(x, tu, k) v dt$$

Soit $f_0(x, k) = f(x, 0, k)$. Pour une constante fixée $\eta > 0$, soient $K_1(x, k)$ et $K_2(x, k)$ deux fonctions réelles, continues et $T-$périodiques satisfaisant, pour tout

$(x,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$, $K_1(x,k) + K_2(x,k) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} K_1(x,k) &\geq \sup_{\|u\|\leq\eta, \|v\|=1} |\varphi(x,u,v,k)|, \\ K_2(x,k) &\geq \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(f_0(x,k), k+1) \frac{\partial f}{\partial u}(x,0,k) \right\|. \end{aligned}$$

On définit :

$$K(x,k) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \tag{2.3}$$

On peut remarquer que K est $T-$périodique par rapport à k. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 3.2.1 *Supposons que le système $x(k+1) = f_0(x(k),k)$ soit stable et qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(x,k)$ de classe C^2, $T-$périodique par rapport à k. Si pour tout $k \in \{0,...,T\}$ l'ensemble :*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} V(\hat{f}_{0k}^{p+1}(x), p+1) = V(\hat{f}_{0k}^{p}(x), p), \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{f}_{0k}^{p+1}(x), p+1)\dfrac{\partial f}{\partial u}(\hat{f}_{0k}^{p}(x), p) = 0, \end{array} \quad p \geq k \right\}.$$

On suppose que le système est réduit à l'origine, alors pour toute constante positive η, le système (2.1) est globalement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'une loi de commande continue définie par :

$$u = -K(x,k) \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f_0(x,k), k+1) \frac{\partial f}{\partial u}(x,0,k) \right)^T$$

Cette loi satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|u(x,k)\| \leq \eta,\ \forall (x,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \\ u(0,k) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N} \\ u(x,k+T) = u(x,k),\ \forall (x,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \end{cases} .,$$

Nous appliquons à présent le théorème précédent au système de commande non linéaire suivant :

$$x(k+1) = x(k) + \Phi(x(k), u(k)) \tag{2.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^2 vérifiant $\Phi(x,0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Il est bien connu que si l'application Φ n'est pas localement surjective, alors le système (2.4) ne peut pas être stabilisé à l'aide d'un retour d'état continu de la forme $u(k) = u(x(k))$. Dans ce qui suit, nous présentons une condition suffisante garantissant la stabilisabilité du système (2.4) à l'aide d'une commande dépendant du temps de la forme $u(k) = u(x(k), k)$.

Théorème 3.2.2 *On suppose que pour tout* $1 \leq i, j \leq m$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial u_1 \partial u_j}(x,u) = 0,\ \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{2.5}$$

et qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(x,k)$ *de classe* C^2*, ainsi qu'une fonction réelle continue* $\alpha(x,k)$*, toutes les deux* $T-$*périodique par rapport au temps* k*, la fonction* f_0 *définie par :*

$$f_0(x,k) = \alpha(x,k) g_1(x) + x,$$

satisfont les conditions du théorème 3.2.1. Alors pour toute constante positive η*, le* *système* (2.4) *est globalement asymptotiquement stabilisable au moyen d'une loi de retour d'état continue de la forme :*

$$u(x,k) = v(x,k) + \tilde{u}(x,k), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} v(x,k) &= [\alpha(x,k), 0, ..., 0]^T, \\ \tilde{u}(x,k) &= -K(x,k)\left[\frac{\partial V}{\partial x}(f_0(x,k), k+1)\frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, v(x,k))\right]^T. \end{aligned}$$

Où $K(x,k)$ est obtenu à partir des équations (2.2) et (2.3) en considérant :

$$\tilde{V}(x,u,k) = V(x + \Phi(x, v(x,k) + u), k+1).$$

Puisque les conditions et la conception des lois de commande dans le théorème 3.2.2 font intervenir les fonctions V et α, il est naturel de chercher des systèmes particuliers de la forme (2.4) pour lesquels V et α peuvent être explicitement déterminés en posant :

$$g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, 0), \tag{2.7}$$

il s'avère, comme en temps continu, que si :

$$g_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{2.8}$$

il est alors effectivement possible de concevoir explicitement les fonctions V et α et par conséquent les loi de commande. Par la suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$\bar{x} = (x_2, ..., x_n)^T$ et pour un entier fixé $T \geq 2$ on pose :

$$V(x,k) = \frac{1}{2}([x_1 + h(\bar{x},k)]^2 + \|\bar{x}\|^2)$$
$$\alpha(x,k) = -\frac{1}{2}([x_1 - h(\bar{x},k)] - h(\bar{x},k+1)$$

où h est une fonction de classe C^2 vérifiant $h(\bar{x},k+T) = h(\bar{x},k)$, $\forall(\bar{x},k) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{N}$ et $h(0,k) = 0, k \in \mathbb{N}$. Un choix possible pour h est $h(\bar{x},k) = \Psi(\bar{x})H(k)$ où Ψ est une fonction définie positive par rapport à x, et $H(k)$ est une fonction T-périodique dans le temps.

Ainsi, V et α sont $T-$périodique par rapport au temps k, la fonction V s'annule si seulement si $x = 0$.

Proposition 3.2.1 *Supposons que les conditions* (2.5) *et* (2.8) *sont satisfaites. S'il existe une fonction h comme spécifiée ci dessus telle que pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$,*

$$\text{rang}\,\{\tilde{g}_i(h(\bar{x},k),\bar{x}),\ 2 \leq i \leq m,\ 0 \leq k \leq T-1\} = n-1$$

où $\tilde{g}_i(x) = (0, \tilde{g}_i^2(x), ..., \tilde{g}_i^n(x))$, alors pour toute constante positive η, le système (2.4) *est globalement asymptotiquement stabilisable au moyen de la commande par retour* (2.6). *[2]*

Conclusion

Au terme de ce travail, nous avons pu constater que l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires discrets est cruciale pour comprendre et maîtriser leur comportement, notamment en présence de dynamiques complexes. À travers l'utilisation de la fonction de Lyapunov, nous avons établi des outils efficaces pour vérifier la stabilité d'un système. Par ailleurs, la stabilisation nécessite non seulement

une analyse approfondie de la stabilité, mais aussi la conception de stratégies de commande adéquates permettant de guider le système vers l'état souhaité.

Ce mémoire a permis de présenter certaines conditions et méthodes de stabilisation, ouvrant ainsi la voie à des études plus approfondies, notamment dans des contextes d'applications pratiques ou sur des systèmes plus complexes. Nous espérons que ce travail contribuera à enrichir la recherche dans le domaine du contrôle des systèmes discrets.

Bibliographie

[1] Bensoubaya, M. (2018). Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires discrets, Thèse de doctorat, université de Metz.niversité de Metz.

[2] Bensoubaya,M., Fofana,A., Iggidr,A. (1997). Stabilization of periodic discrete-time nonlinear systems. ln 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California, United States.

[3] Bensoubaya,M., Fofana,A., Iggidr,A. (1995). stabilisation des systèmes non linéaires discrets. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I. Mathématique, 321(3), pp. 371-374.

[4] Dib, S. (2022). Étude des systèmes dynamiques à temps discrets, Mémoire de Master, Université Abdelhafide Boussouf, Mila.

[5] Gasmi, N. (2018). Observation et commande d'un classe de systèmes non linéaires temps discret, Thèse de doctorat, Université de Lorraine, France.

[6] Guedira, S. (2022). Systèmes dynamiques discrets sous point fixe, Mémoire de Magister, Université Mohamed Khaider, Biskra

[7] Khalil, H.k. (2002). Nonlinear systems. Prentice Hall.

[8] Ougueni, F. (2012). Stabilisation des systèmes non linéaires via des modèles flous incertains de type Takagi-Sugeno, Mémoire de Magister, Université Mohamed Khaider, Biskra.

[9] Outbib, R. (2018). Sur la stabilisation globale de systèmes non linéaires par secteurs d'état réguilier, Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine, Metz, 1994.

Résumé

Ce mémoire traite du thème de la stabilité et de la stabilisation des systèmes non linéaires discrets. Nous avons d'abord présenté les concepts de base liés à ces systèmes discrets, à la fois linéaires et non linéaires. Nous avons ensuite abordé la question de la stabilisation dans ces systèmes, en présentant leurs conditions et quelques méthodes courantes à cet effet. Enfin, nous avons pris un exemple pratique.

Abstract

This thesis addresses the topic of stability and stabilization of discrete nonlinear systems. We first present the basic concepts related to these discrete systems, both linear and nonlinear. We then address the issue of stabilization in these systems, presenting their conditions and some common methods for this purpose. Finally, we consider a practical example.

الملخص

تعالج هذه المذكرة موضوع الاستقرار و تثبيت الانظمة المنفصلة الغير خطية حيث في البداية قمنا بعرض المفاهيم الأساسية التي تخص هذه الأنظمة المنفصلة بنوعيها الخطية و الغير الخطية ثم تطرقنا إلى مسالة التثبت في هذه الانظمة مع عرض شروطها و بعض الطرق الشائعة لهذا الغرض. أما أخيرا فأخذنا مثالا تطبيقيا.