

République Démocratique et Populaire d'Algérie

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des Sciences Exactes

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **EDP**

Présenté par
AMRI Nada Erayhane

Titre :

Étude d'un système chaotique : stabilité et bifurcation

Devant le jury composé de

ADOUANE Saida	UMKB	Encadrant
KABOUL Hanane	UMKB	Président
GUIDAD Derradji	UMKB	Examineur

Soutenue le : **Juin 2025**

Dédicace

♡ Je dédie ce modeste travail : ♡

♡ A ma mère et mon père qui Dieu les protège, ♡

♡ Source de force et de courage, ♡

♡ A mes enseignants, ♡

♡ A ma famille, ♡

♡ A tous mes amis et collègues. ♡

♡ **AMRI Nada Erayhane.** ♡

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Dieu**, Le Tout-Puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je saisis cette occasion pour adresser mes profonds remerciements et ma sincère reconnaissance à **mes parents**.

Un remerciement particulier à mon encadreuse, **Mlle : ADOUANE Saida**, pour sa présence, ses précieux conseils et son aide durant toute la période de ce travail.

Comme je tiens à adresser mes remerciements à **Dr : LAADJAL Baya**, pour le soutien et les orientations qu'elle m'a apportés, et qui ont grandement contribué à la réussite de ce travail.

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury : **Dr : KABOUL Hanane et Dr : GUIDAD Derradji**.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	1
Remerciements	2
Introduction	6
1 Généralités	9
1.1 Systèmes dynamiques	9
1.1.1 Représentations mathématique des systèmes dynamiques	10
1.1.2 Catégories des systèmes dynamiques	10
1.1.3 Quelques comportement des systèmes dynamiques	12
1.1.4 Point d'équilibre	13
1.2 Stabilité d'un point d'équilibre	13
1.2.1 Notions de stabilité	14
1.2.2 Méthodes d'étude de la stabilité au sens de Lyapunov	15
1.3 Bifurcations	17
1.3.1 Définitions	17
1.3.2 Types de bifurcations	18

1.4	Chaos	25
1.4.1	Définition	26
1.4.2	Quelques caractéristiques du chaos	26
2	Etude du système de Zhou	28
2.1	Introduction du système	28
2.2	Calcul des points d'équilibre	29
2.3	Stabilité des points d'équilibre	30
2.4	Analyse de bifurcation	35
	Conclusion	39
	Abréviations et Notations	42

Table des figures

1.1	Diagramme de bifurcation Noeud-col	20
1.2	Diagramme de bifurcation transcritique	22
1.3	Diagramme de bifurcation Fourche a) sur-critique b)sous-critique	23
1.4	Diagramme de bifurcation de Hopf	25
2.1	Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans le plan $(y(t), z(t))$	37
2.2	Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans l'espace $(x(t), y(t), z(t))$. . .	38
2.3	Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans l'espace $(z(t), y(t), x(t))$. . .	38

Introduction

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent, dans l'espace, avec temps. Ces systèmes viennent de Biologie, physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse.

L'intérêt sérieux pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques dans le temps, en particulier ceux qui dépendent fortement des conditions initiales, a émergé à la fin du **XIXe** siècle. En effet, il était souvent difficile, voire impossible, de trouver des solutions exactes aux équations non linéaires. Cela a poussé les scientifiques à chercher une méthode alternative pour analyser ces systèmes.

Dans ce contexte, le mathématicien français **Henri Poincaré** a joué un rôle pionnier en développant l'analyse qualitative, une approche qui ne cherche pas forcément des solutions précises, mais qui vise à comprendre le comportement global du système en combinant analyse mathématique et géométrie. En étudiant le problème des trois corps en mécanique céleste, Poincaré a observé qu'un petit changement dans les conditions initiales pouvait provoquer de grandes différences dans le comportement du système. Ce phénomène est aujourd'hui connu sous le nom de sensibilité aux conditions initiales, l'un des aspects fondamentaux du chaos.

Par la suite, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** a approfondi cette compréhension en développant des outils mathématiques pour étudier la stabilité des mouvements dans les systèmes dynamiques. Il a introduit ce qu'on appelle les exposants de Lyapunov, qui permettent de mesurer l'écart entre deux trajectoires proches. Si cet écart grandit de manière exponentielle au fil du temps, le système est considéré comme instable, ce qui révèle une forte sensibilité aux conditions de départ.[\[11\]](#)

Les systèmes dynamiques chaotiques sont des systèmes déterministes non linéaires, apériodiques et bornés. Les signaux qui évoluent dans ces systèmes sont en général à large bande et très sensibles aux conditions initiales, ce qui apparaît leur trajectoire comme un bruit pseudo aléatoire. En raison de ces propriétés, les signaux chaotiques sont en plus utilisés dans les systèmes de communications, permettant ainsi de transférer les informations entre deux systèmes sans altérer le continu. Afin d'augmenter le degré de sécurité, on utilise la cryptographie chaotique qui consiste à noyer l'information dans un signal chaotique.

Dans ce mémoire, on a fait une étude de la stabilité et bifurcation dans un système dynamique chaotique, ce travail est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre : nous présenterons quelques notions de base sur les systèmes dynamiques tel que : définition, points d'équilibres, cycles limités et stabilité. Nous retracerons alors une brève définition de la théorie de bifurcation (définition, types de bifurcation et diagramme de bifurcation), puis on a présenté la théorie de chaos (définition et caractéristiques du chaos).

Le deuxième chapitre : nous étudions la stabilité et bifurcation dans un système dynamique choisi, appelé Zhou, où nous montrons l'existence d'une bifurcation de Hopf pour ce système.

Enfin nous clôturerons le travail par une brève conclusion et des références bibliographiques

assez diversifiées.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord à la présentation des notions générales sur les systèmes dynamiques : telles que la définition, les points d'équilibre, le cycle limite, la stabilité... Ensuite, nous présenterons la théorie de bifurcation et ses types, puis nous aborderons la théorie du chaos et nous présenterons des outils d'analyse et de caractérisation des systèmes chaotiques.

1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 .
- de sa loi d'évolution.

Définition 1.1. *[10] Un système dynamique est un modèle classique qui permettant décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interactions entre ces variables. Il est défini par un triplet (X, T, f) tel que :*

X : espace d'état ou espace des phases (X est de dimension finie).

T : un domaine temporel est un l'ensemble $(\mathbb{R}, \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z})$.

Et d'une application f de transition d'état :

$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longrightarrow f(x, t) \end{aligned}$$

qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.

1.1.1 Représentations mathématique des systèmes dynamiques

Un système dynamique d'écrit par une fonction mathématique, présente deux types de variables : dynamique et statique, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore appelés paramètre de système sont fixes.

1.1.2 Catégories des systèmes dynamiques

Un système dynamique peut être

a) **À temps continue ou à temps discret** : [\[13\]](#)

- le système dynamique dans le cas ou la composante temps est continue est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, \mu) \quad \text{ou} \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^r, n, r \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

- Le système dynamique, dans le cas où le temps est discret, est présenté par une application (fonction itérative)

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, \mu), & x_k \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^r \quad k = 1, 2, 3... \\ x_0 = x(k_0) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec k est l'instant discret, k_0 est l'instant discret initial et x_0 est le vecteur des états initiaux.

Remarque 1.1. $\mathbb{R}^n$ est l'espace des phases, $\mathbb{R}^r$ est l'espace des paramètres.

Remarque 1.2. Si $T = \mathbb{R}$, le système (X, T, f) est dit continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$, le système (X, T, f) est dit discret.

b) Systèmes autonomes et non autonomes : [13]

Définition 1.2. Un système différentiel est dit autonome si : le temps n'apparaît pas explicitement dans la fonction F et il est de la forme :

$$\dot{x} = F(x)$$

Définition 1.3. Un système différentiel est dit non autonome si : la fonction F dépend explicitement du temps et il est de la forme :

$$\dot{x} = F(x, t)$$

c) Systèmes linéaires et non linéaires :

Définition 1.4. [4] Un système dynamique est dit linéaire s'il peut être représenté par une

équation différentielle de la forme :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t).$$

Où A est une matrice carrée et B est un vecteur dont les éléments sont des fonctions de t .

- Le mot linéaire concerne uniquement la dépendance par rapport à x , les éléments sont de $A(t)$ et de $B(t)$ n'ont pas à être linéaire en t .

Définition 1.5. [4] *Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constantes.*

- Cette définition explique la complexité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

1.1.3 Quelques comportements des systèmes dynamiques

a- Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multidimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

b- Portrait de phase

Définition 1.6. *Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique d'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase, tel que à chaque condition initiale correspond une trajectoire différente. L'intérêt d'un portrait de phase par rapport à un diagramme temporel*

est qu'il permet de visualiser facilement le comportement asymptotique d'un système et d'étudier l'influence des conditions initiales.

c- Cycle limite

Définition 1.7. [8] *Un cycle limite C du système différentiel est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autre courbes fermées.*

1.1.4 Point d'équilibre

On appelle "point d'équilibre" d'un système dynamique tout point $x_e \in X$ tel que :

$$F(x_e) = 0$$

Parfois, ce point est appelé aussi point critique, ou point singulier, ou point stationnaire, ou point fixe.[2]

Remarque 1.3. *Par le changement de variables $\zeta = x - x_e$, on peut ramener le point x_e à l'origine.*

1.2 Stabilité d'un point d'équilibre

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1.3}$$

avec f une fonction non linéaire.

1.2.1 Notions de stabilité

La notion de stabilité est très importante pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. L'analyse de la stabilité d'un système consiste à étudier son comportement lorsqu'il est déplacé d'un point d'équilibre. Cela passe par l'analyse de la trajectoire de l'état du système lorsque son état initial est proche d'un point ou d'une trajectoire d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des systèmes dynamiques tels que la stabilité au sens de Lyapunov.^[2]

Définition 1.8. *Le système (1.3) est dit stable au sens de **Lyapunov** par rapport au point d'équilibre x_e si pour des conditions initiales $x(t_0)$ suffisamment proches du point d'équilibre soit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.4)$$

Définition 1.9. *Le point d'équilibre x_e du système (1.3) est **asymptotiquement stable** s'il est stable et vérifie :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_e\| = 0 \quad (1.5)$$

Définition 1.10. *Le point d'équilibre x_e du système (1.3) est **exponentiellement stable** si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, a, b > 0 : \|x(t_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < a \|x(t_0) - x_e\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0 \quad (1.6)$$

Définition 1.11. *Le point d'équilibre x_e du système (1.3) est **instable** si la formule (1.4) n'est pas satisfaite.*

1.2.2 Méthodes d'étude de la stabilité au sens de Lyapunov

On présente ici les méthodes permettant d'étudier la stabilité des points d'équilibre du système (1.3).

a) Méthode directe

Lyapunov a proposé une méthode, appelée méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, si une telle fonction existe alors le système stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système put être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapunov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction.[12]

Théorème 1.1. *(Méthode de Lyapunov) On suppose que x_e est un point d'équilibre, il existe une fonction V de classe C^1 définie positive sur un voisinage U de x_e est dite fonction de Lyapunov de système (1.3) tel que :*

1. $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
2. $V(x_e) = 0$
3. $V(x) > 0, \forall x \in U - \{x_e\}$

Alors

- i) si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans $U - \{x_e\}$ alors : x_e est stable.
- ii) si $\dot{V}(x) < 0$ dans $U - \{x_e\}$ alors : x_e est asymptotiquement stable.
- iii) si $\dot{V}(x) > 0$ dans $U - \{x_e\}$ alors : x_e est instable.

b) Méthode indirecte

Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibres des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux même types de points d'équilibre des système linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.3) en ce point (point d'équilibre). [12]

Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire (1.3) sur x et soit x_e un point d'équilibre (ainsi $f(x_e) = 0$). Le système linéaire $\dot{x} = Ax$, avec

$$A = Df(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_e)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_e)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_e)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

s'appelle le linéaire du système au point x_e et la matrice $(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})$ s'appelle matrice Jacobienne de $f(x)$.

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x_e , consiste à étudier le système linéaire $\dot{x} = Ax$.

D'où le Théorème suivant pour le système linéaire $\dot{x} = Ax$.

Théorème 1.2. -

- Si toutes les valeurs propres λ_i de A ont leur partie réelle négative le point d'équilibre est

asymptotiquement stable.

- *Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, et les autres valeurs ayant leur partie réelle négative, alors il s'agit d'un cas critique : la stabilité du point d'équilibre ne peut pas être conclue uniquement à partir des valeurs propres.*
- *Si une des valeurs propres a sa partie réelle positive le point d'équilibre est instable.*

1.3 Bifurcations

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de bifurcation.

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres de contrôle. Selon la valeur de ce paramètre, les mêmes conditions initiales mènent à des systèmes dynamiques qualitativement différents. On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phase d'un système dynamique dépend de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations.

1.3.1 Définitions

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\dot{x} = F(x, t, \mu) \quad \text{ou} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.8)$$

Avec : μ est un paramètre de contrôle, et x^* sa solution.

Définition 1.12. *[10] Une bifurcation est un changement qualitatif du comportement du système dynamique quand le paramètre de système traverse une valeur critique. Le changement de la dynamique signifie le changement du nombre des points fixes ou de leur caractère (stabilité,*

attractivité, etc...). La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Dans un système dynamique, un diagramme de bifurcation montre les comportements possible d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

Définition 1.13. *(Diagramme de bifurcation)[7] Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et les valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime permanent est atteint.*

1.3.2 Types de bifurcations

Il existe deux classes principales de bifurcation : bifurcations locales et bifurcations globales.

Nous aborderons dans cette section le premier type.

• Bifurcation locale :

Une bifurcation locale est un changement qualitatif de la stabilité du système suite à un changement quantitatif d'un paramètre de bifurcation. Elle est détectée à partir d'une analyse locale suite à la linéarisation du système non linéaire autour de ses points d'équilibre.

Définition 1.14. *[6] La codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètre qui doivent être modifié pour la bifurcation de se produire.*

C'est-à-dire la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation.

On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un. Il existe quatre types de bifurcations de codimension un. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation. Elles sont présentées ci-dessous, tel que dans chaque cas, on va chercher à :

- Identifier les points d'équilibres x_e du système.
- Étudier leur stabilité.
- Résumer ces informations sur un diagramme de bifurcation.

1/ Bifurcation Noeud-col

La forme normale de la bifurcation noeud-col est donnée par :

$$f(x, \mu) = \dot{x} = \mu - x^2 \tag{1.9}$$

Etudions le comportement de cette équation selon le paramètre μ :

$$f(x, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \mu$$

• Si $\mu > 0$:

$$x^2 = \mu \Leftrightarrow x_e = \pm\sqrt{\mu}$$

par conséquent, l'équation (1.9) admet deux points d'équilibres :

$$\begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x, & \text{avec } x_e = \sqrt{\mu} \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx}|_{x_e=\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0 \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x, & \text{avec } x_e = -\sqrt{\mu} \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx}|_{x_e=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0 \end{cases}$$

par suite les points d'équilibres :

$$\begin{cases} x_e = \sqrt{\mu} & \text{est stable.} \\ x_e = -\sqrt{\mu} & \text{est instable.} \end{cases}$$

• Si $\mu < 0$: l'équation (1.9) n'admet pas de solution alors il n'est pas de points d'équilibre.

• Si $\mu = 0$: il y a un seul point d'équilibre $x_e = 0$ est semi-stable.

Remarque 1.4. Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$ et

$f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il ya une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point d'équilibre et de deux points d'équilibre dont un est stable et l'autre est instable.

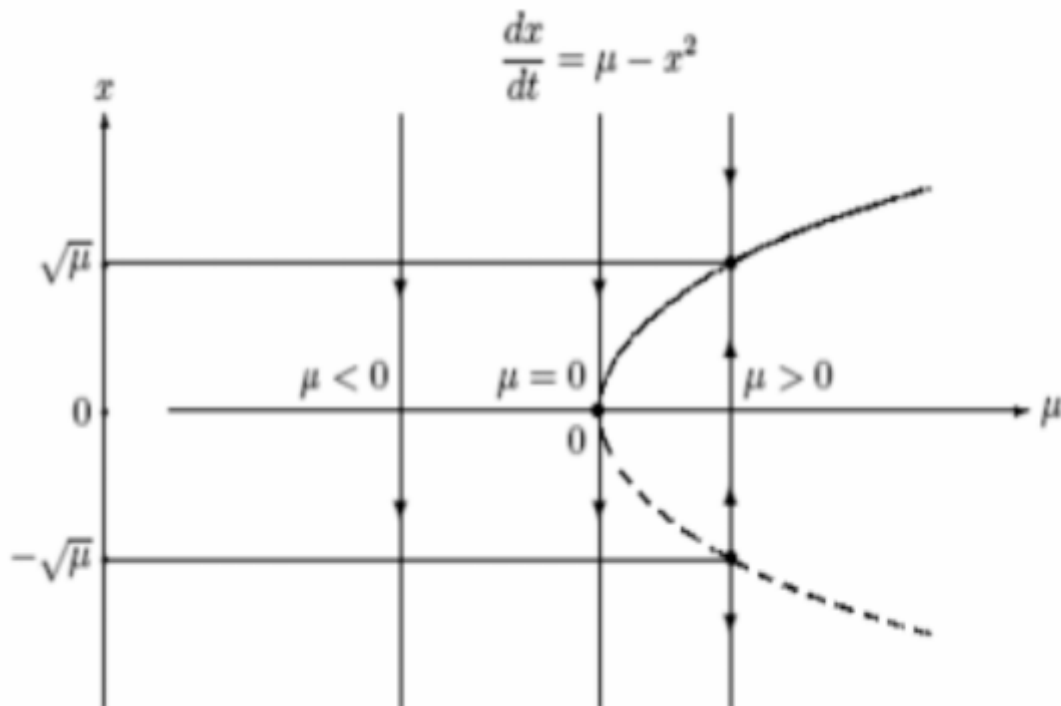


FIG. 1.1: Diagramme de bifurcation Noeud-col

La figure (1.1) présente le diagramme de bifurcation noeud-col (la variation du point d'équi-

libre en fonction du paramètre μ pour le cas $f(x, \mu) = \mu - x^2$.

Sur ce diagramme, dans ce cas, on observe une courbe de points fixes continue tangente à la ligne droite verticale. Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.

2/ Bifurcation Transcritique

La forme normale d'une bifurcation transcritique est donnée par :

$$f(x, \mu) = \dot{x} = \mu x - x^2 \quad (1.10)$$

alors

$$f(x, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(\mu - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ x_e = \mu \end{cases}$$

L'équation (1.10) admet deux points d'équilibres :

$$\begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 2x, & \text{avec } x_e = 0 \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=0} = \mu \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 2x, & \text{avec } x_e = \mu \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=\mu} = -\mu \end{cases}$$

- Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable, $x_e = \mu$ est instable.
- Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable, $x_e = \mu$ est stable.
- Si $\mu = 0$, il y a un point d'équilibre $x_e = 0$ est semi stable.

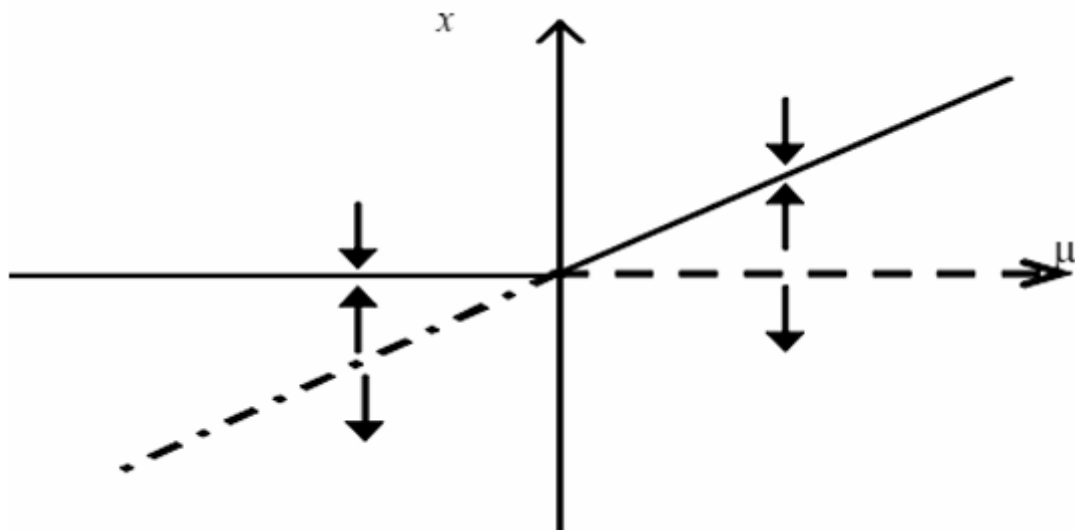


FIG. 1.2: Diagramme de bifurcation transcritique

Sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points d'équilibres qui se croisent en un point et par le changement de stabilité de deux branches au passage par le point d'intersection.

3/ Bifurcation en Fourche

La forme normale d'une bifurcation fourche est donnée par :

$$f(x, \mu) = \dot{x} = \mu x - x^3 \quad (\text{sur critique}) \quad (1.11)$$

On calcule ses points d'équilibres :

$$\mu x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(\mu - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 = \mu \end{cases}$$

- Si $\mu < 0$, alors (1.11) admet un seul point d'équilibre $x_e = 0$
- Si $\mu > 0$, alors (1.11) admet trois points d'équilibres :

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ x_e = \sqrt{\mu} \\ x_e = -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

La stabilité de ces points d'équilibre est :

$$\begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2, & \text{avec } x_e = 0 \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx}|_{x_e=0} = \mu \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2, & \text{avec } x_e = \pm\sqrt{\mu} \Rightarrow \frac{df(x, \mu)}{dx}|_{x_e=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \end{cases}$$

- Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable, $x_e = \pm\sqrt{\mu}$ est stable.
- Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable.
- Si $\mu = 0$, il y a un point d'équilibre $x_e = 0$ est semi stable.

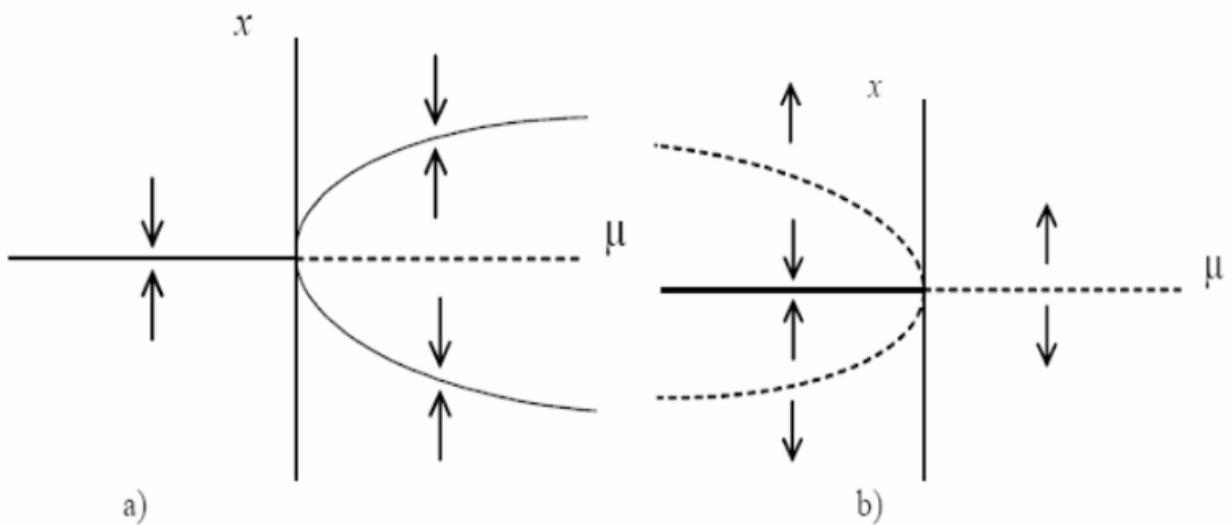


FIG. 1.3: Diagramme de bifurcation Fourche a) sur-critique b) sous-critique

★ Dans le cas d'une bifurcation fourche (sous-critique) la forme normale est :

$$f(x, \mu) = \dot{x} = \mu x + x^3$$

4/ Bifurcation de Hopf

La forme normale d'une bifurcation de Hopf est donnée par :

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z \quad (1.12)$$

La bifurcation de Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice Jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

Remarque 1.5. -

1. *La bifurcation de Hopf ne peut se produire que dans des systèmes de dimension deux ou plus.*
2. *Lorsqu'un cycle limite stable entoure un point d'équilibre instable, la bifurcation est appelée bifurcation de Hopf supercritique. Si le cycle limite est instable et entoure un point d'équilibre stable, alors la bifurcation est appelée une bifurcation de Hopf sous-critique.*

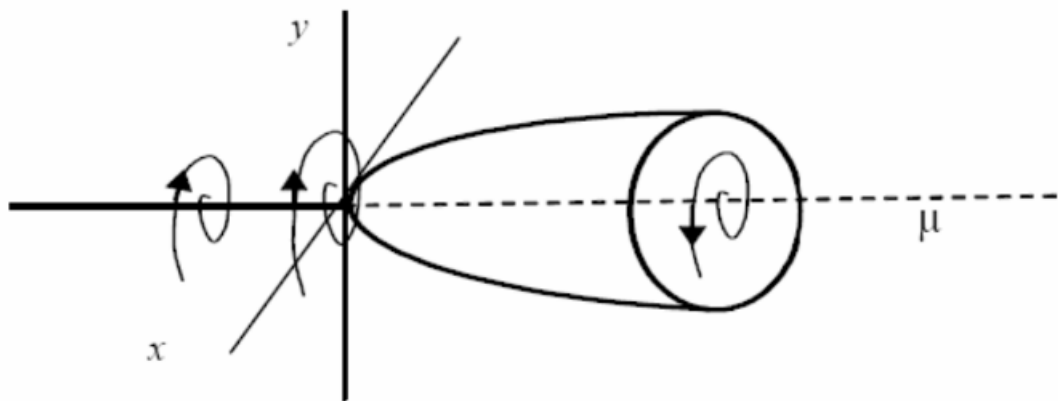


FIG. 1.4: Diagramme de bifurcation de Hopf

Le diagramme de bifurcation dans l'espace $(\text{Re}(z); \text{Im}(z); \mu)$ est le suivant :

Nous partons d'un système où le paramètre μ est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine.

- Lorsque $\mu = 0$, ce point d'équilibre perd sa stabilité.
- Puis lorsque $\mu > 0$, il se forme alors une trajectoire périodique stable ou cycle limite.

1.4 Chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématique du Chaos mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle de Chaos.

- la définition du Chaos selon **Robert L. Devancy** est la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables.

1.4.1 Définition

Définition 1.15. [5, 15] Soient un sous-ensemble V de X , la fonction $f : X \rightarrow X$ est dite chaotique sur V si :

1. La fonction f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. La fonction f est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts $U, V \subset X$, il existe $j > 0$ tel que $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.
3. L'ensemble des points périodiques de la fonction f sont denses dans X .

1.4.2 Quelques caractéristiques du chaos

Les systèmes chaotiques présentent plusieurs propriétés qui les distinguent des autres types de systèmes dynamiques :

- **Un système chaotique** : est un système dynamique non linéaire.
- **Sensibilité aux conditions initiales** : cela signifie que de petites variations dans les conditions initiales peuvent entraîner de grandes différences dans le comportement du système au fil du temps.[3]
- **Présence d'un attracteur étrange** : Dans les systèmes chaotiques, les trajectoires ne convergent pas vers un point fixe ou un cycle périodique, mais vers une structure géométrique complexe appelée **attracteur étrange**.
- **Exposant de Lyapunov positifs** : l'exposant de Lyapunov est un outil permettant de mesurer la vitesse à laquelle des trajectoires proches divergent dans un système dynamique. Il tire son nom du mathématicien russe Alexandre Lyapunov, qui a développé ce concept à la fin du XIX^e siècle.

- s'il est positif, le système est instable et se comporte de manière chaotique, car les trajectoires voisines divergent avec le temps.
- En revanche, si l'exposant est négatif, les trajectoires proches convergent au fil du temps, ce qui indique que le système est stable.
- Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit $L_1, L_2, L_3, \dots$
- Cet exposant est souvent utilisé pour étudier le comportement des systèmes chaotiques, où les trajectoires voisines peuvent diverger de manière soudaine et imprévisible.

Chapitre 2

Etude du système de Zhou

Dans ce chapitre nous étudions la stabilité du système de Zhou et nous allons analyser sa bifurcation.

2.1 Introduction du système

Le système de Zhou est l'un des systèmes dynamiques non linéaires tridimensionnels utilisés pour étudier le comportement chaotique dans les systèmes physiques et mathématiques. Ce système est composé de trois équations différentielles non linéaires représentant l'évolution des trois variables x, y et z au cours du temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -xz + bx \\ \dot{z} = xy + cz \end{cases} \quad (2.1)$$

- x, y et z sont les variables dynamiques.
- a, b et c sont des paramètres réels constants influençant le comportement du système.

Dans notre étude nous allons concentrer sur le cas particulier où les paramètres prennent les valeurs suivantes :

$$a = 10, \quad c = -1, \quad b \in \mathbb{R}$$

Alors, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = -xz + bx \\ \dot{z} = xy - z \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec b est un nombre réel.

2.2 Calcul des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont par définition tel que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$

- Un premier point fixe trivial est : $E_0(0, 0, 0)$
- Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$:

$$10(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (2.3)$$

$$-xz + bx = 0 \Leftrightarrow xz = b \quad (2.4)$$

$$xy - z = 0 \Leftrightarrow xy = z \quad (2.5)$$

(2.3) et (2.4) dans (2.5) $\Rightarrow x^2 = b$.

a) pour $b \leq 0$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre, l'origine $E_0 = (0, 0, 0)$

b) pour $b > 0$, il y a 3 points :

$$E_0 = (0, 0, 0)$$

$$E_+ = (\sqrt{b}, \sqrt{b}, b)$$

$$E_- = (-\sqrt{b}, -\sqrt{b}, b)$$

2.3 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i de la matrice Jacobienne s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ b - z & 0 & -x \\ y & x & -1 \end{bmatrix}$$

La stabilité au point $E_0(0, 0, 0)$

Au point $E_0(0, 0, 0)$, les valeurs propres λ de la Jacobienne A :

$$J|_{E_0} = A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$(1 + \lambda)(\lambda^2 + 10\lambda - 10b) = 0 \tag{2.6}$$

donc

$$1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_0 = -1 \quad (2.7)$$

ou

$$\lambda^2 + 10\lambda - 10b = 0 \quad (2.8)$$

de (2.8) on a :

$$\Delta = 100 + 40b$$

• Si $\Delta > 0$

$$\Delta = 100 + 40b > 0 \Rightarrow b > -2.5$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-10 - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-10 + \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

et donc

$$\lambda_1 < 0 \quad \forall b > -2.5 \quad (2.9)$$

$$\lambda_2 < 0 \Rightarrow \Delta < 100$$

$$\Rightarrow 100 + 40b < 100$$

$$\Rightarrow b < 0$$

et on a

$$b \in]-2.5, 0[: \quad \lambda_2 < 0$$

$$b = 0 : \quad \lambda_2 = 0$$

$$b \in]0, +\infty[: \quad \lambda_2 > 0$$

- Si $\Delta = 0$

$$\Delta = 100 + 40b = 0 \Rightarrow b = -2.5$$

Alors

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -5$$

- Si $\Delta < 0$

$$\Delta = 100 + 40b < 0 \Rightarrow b < -2.5$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5 + iw \\ \lambda_2 = -5 - iw \end{cases}$$

– Les valeurs propres sont des nombres complexes dont la partie réelle est strictement négative.

Alors :

- Pour $b < 0$, il y a trois racines réelles négatives, l'équilibre est donc stable.
- Pour $b > 0$ une des valeurs propres est positive, l'équilibre est donc instable.

- Pour $b = 0$ cas critique.

La stabilité pour E_+ et E_-

La matrice Jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$J|_{E_{\pm}^+} = A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ b & 0 & \mp\sqrt{b} \\ \pm\sqrt{b} & \pm\sqrt{b} & -1 \end{bmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^3 + 11\lambda^2 + (10 + b)\lambda + 20b = 0 \quad (2.10)$$

Pour étudier les conditions de stabilité des points d'équilibre. On a appliqué le critère de **Routh-Hurwitz** [16] dans lequel toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 \cdot a_2 > a_3 \quad (2.11)$$

Où a_1, a_2 et a_3 sont définis tels que :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

donc on a :

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_2 = 10 + b \\ a_3 = 20b \end{cases}$$

- Pour $b > 0$, tous les coefficients du polynôme caractéristique sont strictement positifs, ce qui constitue la première condition de stabilité.

Vérifions maintenant la seconde condition du critère de **Routh-Hurwitz** :

$$11(10 + b) > 20b \Rightarrow 110 + 11b > 20b \Rightarrow 110 > 9b \Rightarrow b < \frac{110}{9} \approx 12.22$$

Nous déduisons que :

- Si $b < \frac{110}{9}$, alors toutes les parties réelles des racines sont strictement négatives, et donc **le point d'équilibre est asymptotiquement stable**.
- Si $b = \frac{110}{9}$, cas critique.
- Si $b > \frac{110}{9}$, une racine possède une partie réelle strictement positive, d'où **le point d'équilibre est instable**.

Suivant le critère de Routh-Hurwitz (2.11) E_+ et E_- est stable si seulement si le paramètre b satisfaisant la condition $b < \frac{110}{9}$.

2.4 Analyse de bifurcation

Le système étudié présente deux types distincts de bifurcations :

- **Bifurcation en fourche :**

Lorsque le paramètre b change de signe, passant d'une valeur négative à une valeur positive, le système subit une bifurcation en fourche.

- **Avant la bifurcation ($b < 0$) :** Le point d'équilibre E_0 est stable.
- **Au point critique ($b = 0$) :** Le point E_0 commence à perdre sa stabilité.
- **Après la bifurcation ($b > 0$) :** Le point devient instable et deux nouveaux points d'équilibre E_+ et E_- apparaissent, tous deux stables.

- **Bifurcation de Hopf :**

Cette section décrit la bifurcation de Hopf du système b -paramétrique. Puisque les deux points d'équilibre E_+ et E_- sont instables pour chaque valeur positive de b , E_+ et E_- change les propriétés de stabilité à $b = \frac{110}{9}$, on étudie la bifurcation de Hopf à partir de E_+ et E_- .

Proposition 2.1. *Le système (2.2) subit une bifurcation de Hopf supercritique à E_+, E_- lorsque le paramètre b croise la valeur critique $b_c = \frac{110}{9}$*

Démonstration. La matrice Jacobienne A est donné par :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ b & 0 & \mp\sqrt{b} \\ \pm\sqrt{b} & \pm\sqrt{b} & -1 \end{bmatrix}$$

On souhaite déterminer les conditions suffisantes pour que A ait une valeur propre réelle négative.

tive $\lambda_0(b)$ et deux valeurs propres conjugués complexes

$$\lambda_{\pm}(b) = \gamma(b) \pm i.w(b)$$

Avec la partie réelle $\gamma(b)$ remplit les conditions :

$$\gamma(b_c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{db}|_{b=b_c} \neq 0$$

On écrit l'équation caractéristique comme suit :

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-) = 0 \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) se transforme à forme suivante :

$$\lambda^3 - \lambda^2(2\gamma + \lambda_0) + \lambda(|\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0) - |\lambda_+|^2\lambda_0 = 0 \tag{2.13}$$

De (2.10) et (2.13) on obtient :

$$\begin{cases} -(2\gamma + \lambda_0) = 11 \\ |\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0 = 10 + b \\ -|\lambda_+|^2\lambda_0 = 20b \end{cases} \tag{2.14}$$

On a $\lambda_0 = -(11 + 2\gamma) < 0$ alors le matrice Jacobienne A a deux valeurs propres imaginaires

pures si et seulement si $a_1.a_2 = a_3$ donc $b = \frac{110}{9}$.

(Dans ce cas, on a $\lambda_0 = -11, \lambda_1 = i\sqrt{\frac{200}{9}}, \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{200}{9}}$)

Alors, le point critique de la bifurcation de Hopf b_c est $b_c = \frac{110}{9}$. Le point d'équilibre E_+ et E_-

change sa propriété de stabilité en b_c à partir (2.14) on obtient :

$$(9 - 2\gamma)b - 110 - 20\gamma - 2\gamma(11 + 2\gamma)^2 = 0$$

La dérivation par rapport à b nous donne :

$$\frac{d\gamma}{db} = \frac{9 - 2\gamma}{2((11 + 2\gamma)^2 + 4\gamma(11 + 2\gamma) + b + 10)}$$

Alors

$$\frac{d\gamma}{db}|_{b=b_c} = \frac{81}{1289} \neq 0$$

Par suite le système (2.2) satisfait les conditions du théorème de bifurcation de Hopf à E_+, E_- .

□

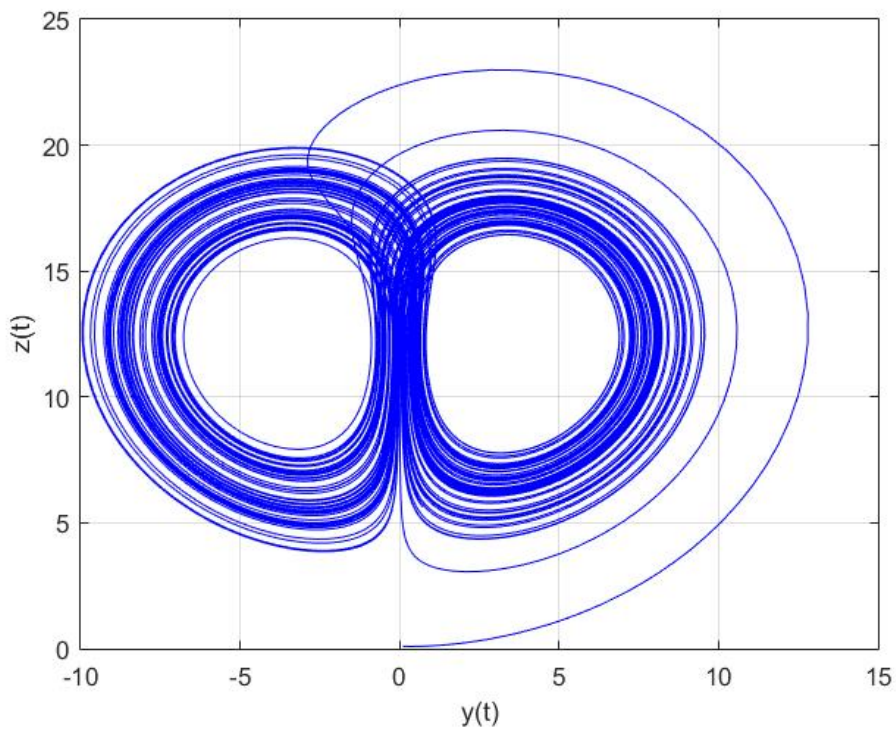


FIG. 2.1: Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans le plan $(y(t), z(t))$

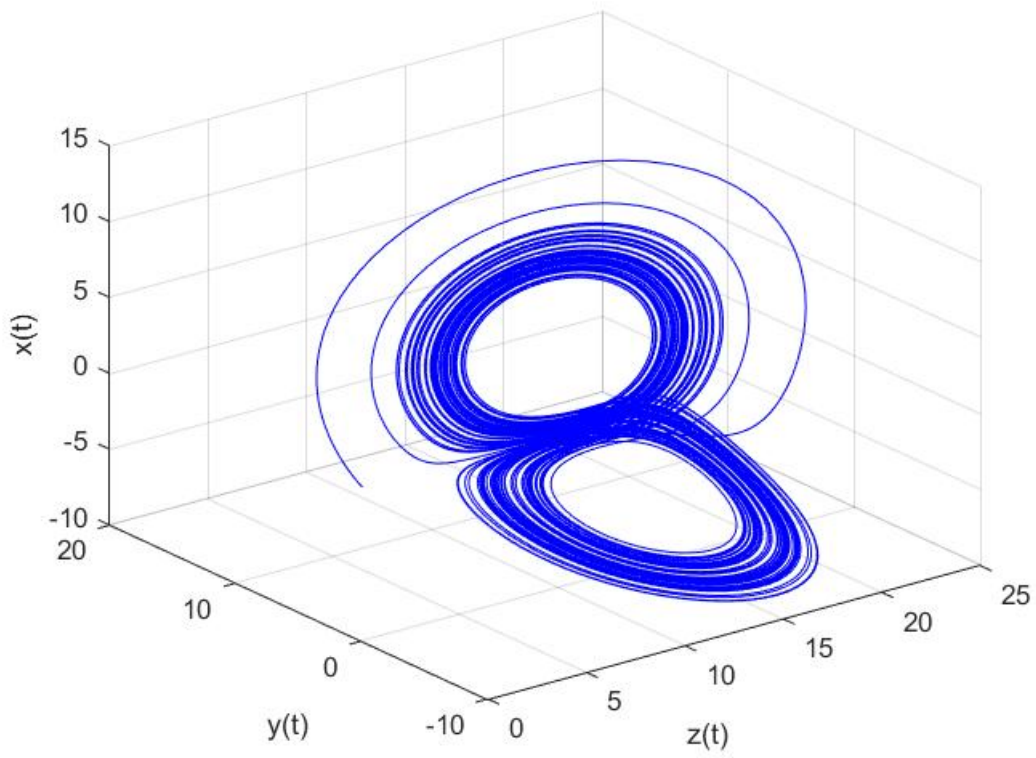


FIG. 2.2: Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans l'espace $(x(t), y(t), z(t))$

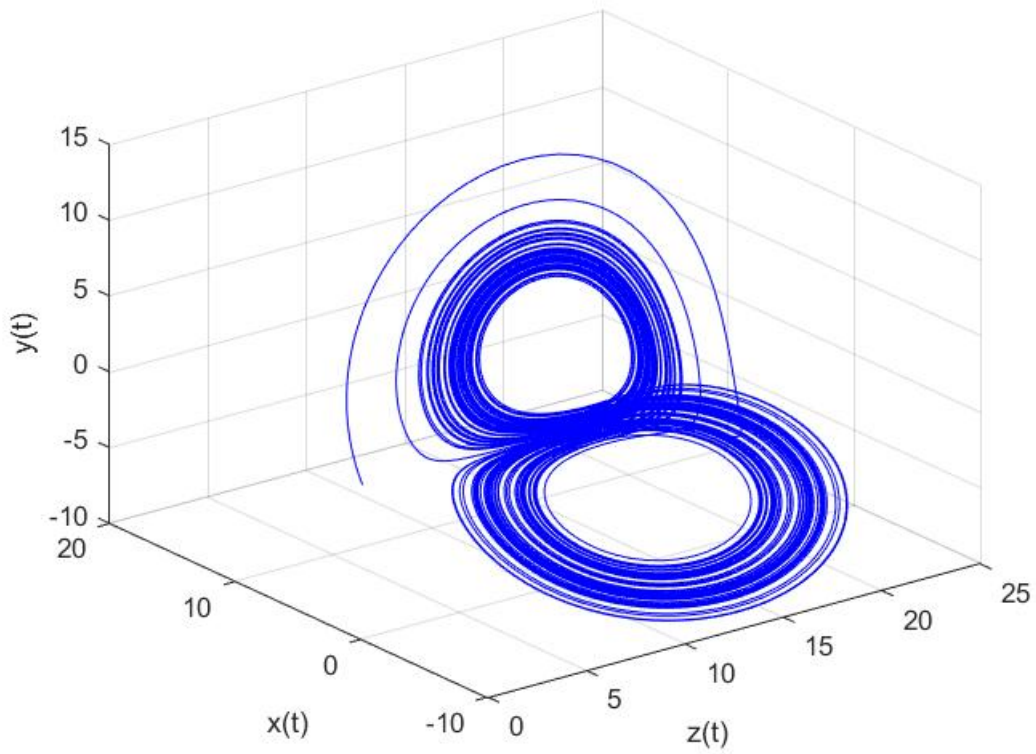


FIG. 2.3: Phase portrait du système (2.2) (cycle limite) dans l'espace $(z(t), y(t), x(t))$

Conclusion

Le travail développé dans ce mémoire a porté sur la stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcation.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions fondamentales des systèmes dynamique, des points d'équilibre et de leur stabilité et nous avons donné aussi une brève définition de la théorie des bifurcations et du chaos.

Au deuxième chapitre, nous avons intéressé à l'étude du système de Zhou, nous avons étudié leur stabilité, nous avons aussi trouvé les points et les conditions où ce système est stable et où il est instable et nous avons aussi étudié la bifurcation de ce système.

Bibliographie

- [1] Abidallah, W., (2022). Stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcation (Université de Larbi Tébessi- Tébessa).
- [2] Benkhelifa, A., & Ghoul, A. (2012). synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires (Université de Larbi Tébessi- Tébessa).
- [3] Bennad, N.H., (2022/2023) Chaos un fractional order systems. (Université de Larbi Tébessi- Tébessa).
- [4] Charif, M. (2018). Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.
- [5] Devancy, R. L (2003). An introduction to chaotic dynamical systems second edition, West-view press.
- [6] Garti, I. (2020). Etude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire (Université Mouhamed Khider, Biskra).
- [7] Gasri, A., & Zeraoulia, E. (2018). Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques (Doctoral dissertation, Université Frères Mentouri Constantine).

- [8] Hilborn, R. C. (2000). Chaos and nonlinear dynamics, Second Edition. Oxford University Press.
- [9] Khaldi, M., (2022). Stabilité et bifurcation dans un système dynamique chaotique continue (Université Mouhamed Khider, Biskra).
- [10] Kuznetsov. Y. A, (1998). Elements of applied bifurcation theory, Second Edition. Springer-vetlag New York, Inc.
- [11] Layek, G.C. (2015). An introduction to dynamical systems and Cgaos springer.
- [12] Ouahabi, R. (2018). Systèmes dynamiques et Chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation (Thèse de doctorat). Université de Constantine 1, Algérie.
- [13] Pac, J. L. (2016). Les systèmes dynamiques : cours et exercices corrigés 2^{me} édition. Dunod.
- [14] Soon, T. L., & Salleh, Z. (2015). Hopf bifurcation analysis of Zhou system. International joournal of pure and applied mathematics, 104 (1). 1-18.
- [15] Strogatz, S. H. (2015). Nonlinear dynamics and Chaos : with applications to physics biology. Chemistry and engineering (2^e éd). Westview Press.
- [16] Taconet, B., Kebairi, S., Djematene, A., & Mercy, P. (1997). Marge de stabilité des systèmes linéaires : une extension du critère de Routh-Hurwitz.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce travail sont expliquées

ci-dessous :

$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n fois.

$\mathbb{R}^r$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ r fois.

$\mathbb{N}$ L'ensemble des nombres naturels.

$\dot{x}$ Dérivée temporelle.

x_e Point d'équilibre.

$\exists$ Il existe.

$\forall$ Pour tout.

λ_i Les valeurs propres.

$V(x)$ Fonction de Lyapunov.

$|\cdot|$ Valeur absolue.

J Matrice Jacobienne.

$P_{E_{\pm}}(\lambda)$ Le polynôme caractéristique de λ en $\{E_{\pm}\}$.

$\Rightarrow$ Implique.

$\Leftrightarrow$ Équivalence.

الملخص

يتعلق العمل الذي تم تناوله في هذه المذكرة بدراسة إستقرار نظام ديناميكي وتحليل تشعبه نعرف أولا المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية مثل الدورات الحدية ونقاط التوازن واستقرارها. ثم نتناول نظريتي التشعب والفوضى. أخيرا، نقدم تطبيقا للمفاهيم النظرية التي قدمت على نظام تشو، كان الهدف هو البحث عن نقاط التوازن ودراسة استقرارها وإيجاد التشعبات. الكلمات المفتاحية: نظام ديناميكي، الاستقرار، التشعب، فوضى.

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire concerne l'étude la stabilité d'un système dynamique et l'analyse de ses bifurcations. Nous définissons d'abord des notions de base sur les systèmes dynamiques, tels que les cycles limites, les points d'équilibre et leur stabilité. Puis, on aborde les théories de la bifurcation et du Chaos. Enfin, nous appliquons les notions théoriques développées au système de Zhou. L'objectif est d'identifier les points d'équilibre, d'analyser leur stabilité et de détecter les bifurcations possibles.

Mots clé : Système dynamique, stabilité, bifurcation, chaos

Abstract

The work addressed in this memoir concerns the study of the stability of a dynamical system and the analysis of its bifurcations. We begin by defining the basic concepts related to dynamical systems, such as limit cycles, equilibrium points, and their stability. Then, we adress bifurcations and chaos. Finally, we apply the theoretical concepts developed to the Zhou system. The objective is to identify the equilibrium points, analyze their stability, and detect possible bifurcations.

Key words : Dynamical system, stability, bifurcation, chaos