

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en « **Mathématiques** »

Option : Équations aux dérivées partielles et analyse numérique

Présenté et soutenu publiquement par

BENNADJI Nesrine

Sous le thème :

**Méthodes numériques de résolution des problèmes
aux limites**

Soutenu le 3 juin 2025, devant le jury composé de :

Dr. SOUKER Abdessalem - Président

Dr. RADJEH Fouzia - Encadrante

Dr. GHEDJEMIS Fatiha - Examinatrice

Année universitaire 2024–2025

Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice de recherche, Dr. Radjeh Fouzia, pour sa disponibilité et ses encouragements. Elle m'a toujours avec un cœur ouvert et un sourire chaleureux, sans oublier ses conseils et sa compétence, qui m'ont beaucoup aidée à améliorer ce travail.

Je remercie infiniment tous mes enseignants pour leurs efforts et tout ce qu'ils ont apporté à la réalisation de ce travail, de près ou de loin.

Sans oublier les membres du jury, en particulier le président du jury Dr. Souker Abdessalem ainsi que l'examinatrice Dr. Ghedjemis Fatiha, pour le temps qu'ils consacreront à l'évaluation de ce travail, qui est pour moi une grande source d'enrichissement.

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبفضله يكتب لنا التوفيق والسداد.
إلى روح والدي الطاهرة،
إلى من وضعني على طريق الحياة، ورباني، وعلّمني أبجديات الوجود،
رحمك الله يا والدي العزيز، وجعل مثواك الجنة،
أهدي لك هذا العمل عربون وفاء وامتنان لا يفيك حَقُّك،
فقد كنت النور الذي أنار دربي، وإن غيَّبك التراب، فذكراك باقية لا تموت.
جزاك الله عني خير الجزاء، وجعل هذا العمل في ميزان حسناتك.
وإلى من علّمتني الصبر، وغرست فيّ الأمل،
إلى أعظم وأحنّ إنسانة في الوجود،
إلى أمي الحبيبة، التي كان دعاؤها سرّ ثباتي، وحبّها زادي في كل خطوة،
أطال الله في عمرك، وأبقاك سنداً لا يُعوّض.
شكراً لك يا أمي...
وإلى إخوتي الذين كانوا لي دعماً وسنداً في الخفاء،
وإلى صديقاتي العزيزات، من كنّ بجانبني بالكلمة الطيبة، والضحكة الصادقة،
لكم مني كل الامتنان... وقطعة من هذا الإنجاز.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Introduction	1
1 Problèmes aux limites	3
1.1 Notions de base	3
1.1.1 Problème de Cauchy	4
1.1.2 Problèmes aux limites	5
1.2 Théorème d'existence et d'unicité	5
1.3 Méthodes analytiques de résolution des EDO	7
1.3.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre	7
1.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre	9
1.4 Nécessité des méthodes numériques	11
2 Résolution numériques des problèmes aux limites	13
2.1 Méthode des différences finies	13
2.2 Méthode de Rayleigh-Ritz	18
2.3 Méthode du tir	21
2.3.1 Équation linéaire	21
2.3.2 Équation non linéaire	22
2.4 Comparaison entre les méthodes numériques	22
3 Applications	24
3.1 Distribution de température dans une tige chauffée	24
3.1.1 Modélisation mathématique du phénomène	25
3.1.2 Étude analytique	26

3.1.3	Étude numérique	28
3.2	Déplacement d'une barre soumise à des forces axiales	33
3.2.1	Étude analytique	33
3.2.2	Étude numérique	34
Bibliographie		37

Table des figures

2.1	Points de discrétisation pour la variable t , avec $t_0 = a$ et $t_{N+1} = b$	14
3.1	Un bilan thermique pour un élément différentiel d'une tige chauffée soumise à la conduction et à la convection.	24
3.2	Solution analytique pour la tige chauffée	28
3.3	Température (K) en fonction de la distance (m) calculée avec la méthode du tir : (a) le premier 'tir', (b) le deuxième 'tir' et (c) le 'coup' final exact.	30
3.4	Une barre sous forces axiales	33

Liste des tableaux

2.1	Comparaison entre les méthodes numériques de résolution des problèmes aux limites	23
3.1	Comparaison entre la solution analytique exacte et la solution approchée par la méthode du tir et la méthode des différences finies pour la température.	32

Introduction

La recherche en équations différentielles ordinaires (EDO) ou plus particulièrement les problèmes aux limites est un domaine extrêmement important en mathématiques appliquées. En effet, de telles problématiques sont quelquefois naturellement envisagées sous la forme modélisante que proposent les nouvelles méthodes. On les retrouve par ailleurs couramment dans différentes modélisations de phénomènes scientifiques, tels que la conduction thermique, les déformations mécaniques, les circuits électriques, etc.

Dans la réalité, les modèles que l'on étudie à l'aide de ces problèmes se révèlent vite très élaborés. Les solutions analytiques sont peu accessibles ; même si elles sont très précises ; dans le cadre des cas simples uniquement. Au contraire, on a plutôt recours dans la plupart des cas à des méthodes numériques permettant de résoudre ces problèmes de manière approchée et sous un contrôle de la précision de cette approximation.

Le processus de résolution numérique dans ce cadre passe généralement par plusieurs étapes méthodologiques successives : la description du phénomène à modéliser, la modélisation mathématique (d'après les variables et paramètres du problème), l'analyse théorique (existence, unicité, stabilité), la discrétisation puis enfin la résolution numérique elle-même.

Ce mémoire accorde une attention particulière à l'explication de trois approches numériques pour résoudre les problèmes aux limites liés aux EDO du second ordre :

- La méthode des différences finies,
- La méthode de Rayleigh-Ritz,
- La méthode du tir.

Ce travail vise à montrer comment les mathématiques numériques peuvent non seulement remplacer les approches analytiques lorsqu'elles deviennent impraticables, mais aussi fournir des outils puissants d'analyse et de simulation dans des contextes scientifiques variés.

Chaque méthode repose sur une stratégie propre, et leurs performances seront comparées à travers des exemples concrets. En particulier, deux applications physiques seront étudiées pour illustrer concrètement les méthodes analysées :

- La distribution de température dans une tige soumise à un transfert thermique.
- Le déplacement d'une barre soumise à une force axiale.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- Le premier chapitre présente les notions de base sur les EDO, les problèmes aux limites, les théorèmes d'existence et d'unicité ainsi qu'un aperçu des méthodes analytiques.
- Le deuxième chapitre détaille les trois méthodes numériques retenues.
- Le troisième chapitre est réservé à l'étude de cas pratiques.

L'objectif principal est de démontrer l'efficacité des méthodes numériques pour traiter des problèmes où les solutions exactes sont inaccessibles, tout en mettant en lumière leur pertinence scientifique dans des domaines variés.

Problèmes aux limites

Dans la modélisation des phénomènes scientifiques, les problèmes aux limites sont souvent rencontrés. Leur but est de trouver des solutions d'équations différentielles qui répondent à des conditions spécifiques aux limites du domaine. Ce chapitre présente les principes de base en lien avec les équations différentielles ordinaires, en se focalisant sur les notations, les conditions aux limites, les théorèmes d'existence et d'unicité, ainsi que sur les techniques analytiques traditionnelles.

1.1 Notions de base

Dans cette section, on va donner quelques notions générales sur les équations différentielles ordinaires à conditions initiales et finales.

Définition 1.1 : Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation reliant une fonction inconnue $y = y(t)$ d'une variable réelle t à ses dérivées successives.

D'une façon générale, une EDO d'ordre ($n \in \mathbb{N}^*$) s'écrit :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Définition 1.2 : Si l'équation (1.1) peut être résolue explicitement par rapport à $y^{(n)}$, alors l'équation différentielle ordinaire (EDO) est dite sous sa forme normale ou forme résolue, et elle s'écrit :

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \quad (1.2)$$

où $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1.1 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy, ou bien un problème à conditions initiales consiste à déterminer la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) en imposant la valeur de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ en un point donné t_0 (point de départ).

Considérons une EDO d'ordre n définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 . Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = \alpha_0, \quad y'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour faciliter la résolution, ce problème peut être transformé en un système d'équations différentielles du premier ordre. On introduit alors le vecteur :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

dont la dérivée est donnée par :

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

On définit également le vecteur des conditions initiales :

$$Y(t_0) = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Enfin, en introduisant la fonction :

$$F\left(t, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ f(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

donc , le problème peut être réécrit sous la forme compacte :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), & t \in I, \\ Y(t_0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.8)$$

Cette reformulation est particulièrement utile pour appliquer des méthodes numériques conçues pour les systèmes d'EDO du premier ordre.

1.1.2 Problèmes aux limites

Dans les problèmes mathématiques , on trouve très souvent des équations différentielles non seulement à condition initiale mais aussi on ajoute une condition au bord du domaine.

Définition 1.3 : Commençons par examiner le problème aux limites unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.9)$$

Ce problème est appelé problème de Dirichlet .

1.2 Théorème d'existence et d'unicité

Pour résoudre n'importe quel problème, il faut assurer l'existence et l'unicité de ce problème. Pour aboutir à ce but, on va exposer la notion d'une fonction Lipschitzienne.

Définition 1.4 : (*Condition de Lipschitz*) La fonction $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite Lipschitzienne par rapport à Y si elle vérifie l'inégalité suivante :

$$\exists L > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^n : \quad \|F(t, U) - F(t, V)\| \leq L\|U - V\|. \quad (1.10)$$

Théorème 1.1 : (*Cauchy-Lipschitz-Picard*) Si $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue vérifiant la condition de Lipschitz (1.10), alors le problème (1.3) admet une solution unique.

Preuve : L'idée principale de la preuve repose sur le théorème du point fixe de Picard, qui garantit l'existence et l'unicité d'une solution sous certaines conditions.

(i) Existence de la solution

On définit l'opérateur $\mathcal{L}$ suivant :

$$\mathcal{L}V(t) = \alpha + \int_0^t F(s, V(s))ds. \quad (1.11)$$

Une fonction $Y(t)$ est une solution si elle est un point fixe de $\mathcal{L}$.

On travaille dans l'espace de Banach :

$$X_k^T = \left\{ V \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) : \|V\|_{X_k^T} < +\infty \right\}, \quad (1.12)$$

avec la norme :

$$\|V\|_{X_k^T} = \sup_{t \in [0, T]} \left\| e^{-kt} V(t) \right\|. \quad (1.13)$$

Vérification de la contraction : On montre que $\mathcal{L}$ est contractant :

$$\|\mathcal{L}U - \mathcal{L}V\|_{X_k^T} \leq \frac{L}{k} \|U - V\|_{X_k^T}. \quad (1.14)$$

Si $k > L$, alors $\frac{L}{k} < 1$, ce qui permet d'appliquer le théorème du point fixe de Picard, garantissant l'existence d'une solution.

(ii) Unicité de la solution

1. Supposons qu'il existe deux solutions : Y_1 et Y_2 .

2. Calcul de la différence : On a :

$$Y_1(t) - Y_2(t) = \int_0^t [F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))]ds. \quad (1.15)$$

3. Application de la condition de Lipschitz

$$\|Y_1(t) - Y_2(t)\| \leq L \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\|ds. \quad (1.16)$$

4. Application du lemme de Gronwall : Cette inégalité implique que $\|Y_1(t) - Y_2(t)\| = 0$, donc la solution est unique.

L'équation différentielle est équivalente à l'équation intégrale :

$$\begin{cases} Y(t) - Y(t') = \int_{t'}^t F(s, Y(s))ds, \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.17)$$

Cette formulation est essentielle pour les méthodes numériques afin d'approcher les solutions.

Alors, nous avons prouvé que sous la condition de Lipschitz, l'EDO admet une solution unique. Cette approche est essentielle pour les schémas numériques.

1.3 Méthodes analytiques de résolution des EDO

Pour faire une comparaison entre les méthodes analytiques existantes et les méthodes numériques qu'on va exposer prochainement, on va faire une étude simple en analyse réelle pour la résolution des EDO. Dans notre étude, on s'intéresse à la résolution numérique des équations différentielles à conditions finales et on veut démontrer qu'on ne peut pas continuer par les méthodes analytiques parce qu'elles ne répondent pas à notre besoin de précision.

1.3.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit sous la forme :

$$m(t)y'(t) + n(t)y(t) = g(t) \quad (1.18)$$

où $m(t)$ et $n(t)$ sont des fonctions continues appelées les coefficients de l'équation, et $g(t)$ est une fonction donnée appelée le second membre.

Une fonction y de classe C^1 sur un intervalle I est une solution de cette équation si elle vérifie l'égalité pour tout $t \in I$.

- **Solution de l'équation homogène**

L'équation précédente est dite homogène si le second membre est nul ; c'est-à-dire :

$$m(t)y'(t) + n(t)y(t) = 0. \quad (1.19)$$

Pour faire la résolution de ce type d'équations, on distingue deux cas :

Cas des coefficients constants :

Si m et n sont des constantes, la solution générale est :

$$y(t) = Ce^{rt}, \quad \text{où } r = -\frac{n}{m}.$$

Cas des coefficients variables :

Si $m(t)$ et $n(t)$ sont continues sur un intervalle I , avec $m(t) \neq 0$, alors la solution générale est :

$$y(t) = Ce^{u(t)} \quad \text{où } u'(t) = -\frac{n(t)}{m(t)}.$$

- **Solution générale**

Si $y_0(t)$ est une solution particulière de l'équation (1.18), alors la solution générale est :

$$y(t) = y_0(t) + v(t),$$

où $v(t)$ est la solution générale de l'équation homogène (1.19).

- **Recherche d'une solution particulière**

Dans cette partie, pour faire l'étude, on présente deux méthodes principales :

1. Cas où $g(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$ (avec P_n un polynôme de degré n) :

- Si $\lambda \neq r = -\frac{n}{m}$, on propose une solution particulière de la forme :

$$y_0(t) = e^{\lambda t} Q_n(t).$$

- Si $\lambda = r$, on propose :

$$y_0(t) = te^{\lambda t} Q_n(t).$$

2. Méthode de variation de constante :

Si $v(t)$ est une solution de l'équation homogène, on pose :

$$y_0(t) = C(t)v(t), \text{ où } C'(t) = \frac{g(t)}{m(t)v(t)}.$$

Pour faciliter l'apprentissage, on propose deux exemples d'équations différentielles.

Exemple 1 : Résoudre $y'(t) + 3y(t) = 2 \sin t$:

Pour $y'(t) + 3y(t) = 2 \sin t$, on résout d'abord l'équation homogène $y'(t) + 3y(t) = 0$ qui donne $y_h(t) = Ce^{-3t}$. Ensuite, on suppose une solution particulière sous la forme $y_0(t) = A \cos t + B \sin t$ et on résout pour A et B . La solution générale est :

$$y(t) = y_h(t) + y_0(t).$$

Exemple 2 : Résoudre $ty'(t) + 2y(t) = \ln t$, pour $t > 0$:

Pour $ty'(t) + 2y(t) = \ln t$, on divise par t pour obtenir $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \frac{\ln t}{t}$. La solution homogène est $y_h(t) = Ct^{-2}$. On applique la méthode de variation des constantes pour trouver $y_0(t)$, et la solution générale est $y(t) = y_h(t) + y_0(t)$.

1.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

C'est exactement de la même manière qu'on va faire notre étude dans le cas du second ordre :

Tout d'abord, on propose une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :

$$m(t)y''(t) + n(t)y'(t) + p(t)y(t) = g(t), \quad (1.20)$$

où m , n et p sont des fonctions données, $g(t)$ est le second membre. Une solution $y(t)$ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle I .

La solution générale de cette équation est :

$$y(t) = y_h(t) + y_0(t),$$

où $y_h(t)$ est la solution homogène associée et $y_0(t)$ est une solution particulière.

• Solution de l'équation homogène

L'équation homogène est donnée par :

$$m(t)y''(t) + n(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t),$$

où $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes. Pour déterminer $y_1(t)$ et $y_2(t)$, on propose la méthode de réduction d'ordre :

- Trouver une solution $y_1(t)$ (par essais : polynômes, exponentielles, etc.).
- Chercher une solution $y_2(t) = C(t)y_1(t)$, où $C(t)$ est une fonction non constante.
- La solution générale est alors $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$.

• Cas des EDO homogènes à coefficients constants

D'une façon générale, une équation linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme :

$$my''(t) + ny'(t) + py(t) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est :

$$mr^2 + nr + p = 0,$$

avec le discriminant $\Delta = n^2 - 4mp$; on a alors trois cas :

— Si $\Delta > 0$: On a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 :

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

— Si $\Delta < 0$: On a deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$:

$$y(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)).$$

— Si $\Delta = 0$: On a une racine double $r = -\frac{n}{2m}$:

$$y(t) = (A + Bt)e^{rt}.$$

• Recherche d'une solution particulière

On passe maintenant à la résolution d'une EDO générale ; non seulement homogène. Pour résoudre l'EDO complète :

$$m(t)y''(t) + n(t)y'(t) + p(t)y(t) = g(t),$$

on peut utiliser plusieurs méthodes selon la forme de $g(t)$ (polynôme, sinus, exponentielle, etc.), on expose alors les deux cas :

Cas d'une EDO à coefficients constants :

La forme proposée de $y_0(t)$ pour trouver une solution particulière est :

— Si $g(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$, on pose :

$$y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

— Si $f(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$, avec P_n un polynôme de degré n , on distingue trois cas :

1. Si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$, alors :

$$y_0(t) = e^{\lambda t} Q_n(t).$$

2. Si $\lambda = r_1$ ou r_2 ; deux racines simples de l'équation caractéristique :

$$y_0(t) = t e^{\lambda t} Q_n(t).$$

3. Si $\lambda = r_1 = r_2$; une racine double :

$$y_0(t) = t^2 e^{\lambda t} Q_n(t).$$

Méthode de variation des constantes : Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Une solution particulière de l'équation complète s'écrit alors :

$$y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t),$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions à déterminer. Elles vérifient le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} y_1(t)A'(t) + y_2(t)B'(t) = 0 \\ y_1'(t)A'(t) + y_2'(t)B'(t) = \frac{f(t)}{a(t)} \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique si le Wronskien $W(t)$ est non nul :

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0.$$

On résout pour $A'(t)$ et $B'(t)$, puis on intègre pour obtenir $A(t)$ et $B(t)$, ce qui nous permet de déduire la solution particulière $y_0(t)$.

1.4 Nécessité des méthodes numériques

Pour démontrer la grande utilité des méthodes numériques dans certains problèmes scientifiques qu'on ne peut pas les résoudre analytiquement, on propose les deux exemples suivants et pour mieux illustrer cela, considérons le premier exemple :

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) &= -\pi^2 y, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = d. \end{cases}$$

Ce problème peut parfois n'admettre pas deux solutions. En effet, la solution générale de cette équation est :

$$y(t) = A \cos(\pi t) + B \sin(\pi t).$$

En tenant compte la condition $y(0) = 0$, on obtient $A = 0$, donc la solution devient :

$$y(t) = B \sin(\pi t).$$

Puisque, $\sin(\pi) = 0$, donc la condition $y(1) = d$ ce qui implique que $d = 0$.

Cela signifie que :

- Si $d \neq 0$, l'équation n'a aucune solution.
- Si $d = 0$, toute valeur de B convient, donc il existe une infinité de solutions.

Cet exemple montre que, selon les conditions imposées, il se peut qu'aucune solution ne soit possible, ou qu'il y en ait plusieurs.

Prenons maintenant un second exemple, un peu différent :

$$(2) \quad \begin{cases} y'(t) = y(x), & t \in [a, b] \\ y(a) = d - Ay(b), \end{cases}$$

où A et d sont des constantes. La solution générale de cette équation est :

$$y(x) = ce^x,$$

avec c une constante à déterminer. En appliquant la condition initiale, on obtient :

$$ce^a = d - Ace^b \Rightarrow c(e^a + Ae^b) = d.$$

Ainsi, pour qu'une solution existe, il faut que $e^a + Ae^b \neq 0$. Sinon, on aurait une équation de la forme $0 = d$, ce qui est impossible si $d \neq 0$.

En particulier, si $A = -e^{a-b}$ et $d \neq 0$, alors il n'existe aucune constante c qui satisfasse la condition, donc le problème n'a pas de solution.

Avant d'achever ce chapitre, on peut dire que l'existence d'une solution pour un problème aux limites n'est pas toujours garantie. En effet, certaines équations différentielles, à cause de leur complexité ou des conditions imposées, peuvent ne pas admettre de solution exacte (analytique), ou en admettre une infinité. Dans ce contexte, les méthodes numériques deviennent indispensables : elles permettent d'obtenir des solutions approchées avec une précision que l'on peut maîtriser, même lorsque la résolution exacte est hors de portée.

Résolution numériques des problèmes aux limites

La résolution numérique des problèmes aux limites est crucial en sciences et en ingénierie. Dans ce chapitre, on va présenter trois méthodes classiques et complémentaires : la méthode des différences finies, la méthode de Rayleigh-Ritz, et la méthode du tir. Bien que chacune repose sur des principes distincts, elles partagent le même objectif : rendre accessible un problème analytique souvent complexe en le transformant en un problème numérique, avec des avantages et des limites propres que nous comparerons.

2.1 Méthode des différences finies

Il est très connue qu'une équation différentielle du second ordre

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{2.1}$$

est dite linéaire si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y''(t) = p_2(t)y'(t) + p_1(t)y(t) + p_0(t),$$

avec des conditions aux limites constantes.

Pour appliquer n'importe quelle méthode numérique, il faut assurer tout d'abord l'existence et l'unicité de notre problème.

Théorème 2.1 : (*Existence et unicité de la solution*)

On donne le problème aux limites :

$$(I) \begin{cases} y''(t) = p_2(t)y'(t) + p_1(t)y(t) + p_0(t), & t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

Si les fonctions $p_2(t)$, $p_1(t)$ et $p_0(t)$ sont continues avec $p_1(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$, on peut dire que le problème (I) admet une solution unique.

La méthode des différences finies, c'est l'une des méthodes de discrétisation numérique qui transforme le problème aux limites en un système linéaire facile à calculer.

- **Discrétisation du domaine**

Soit l'intervalle $[a, b]$ sur lequel est définie l'équation différentielle. On divise cet intervalle en $N + 1$ sous-intervalles égaux de pas h ; tel que :

$$h = \frac{b - a}{N + 1}.$$

On définit les points de discrétisation : $t_i = a + ih$, pour $i = 0, 1, \dots, N + 1$

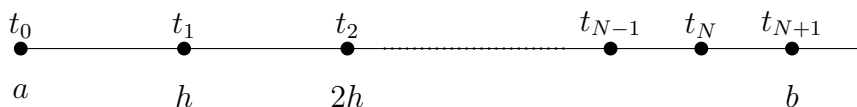


FIGURE 2.1 – Points de discrétisation pour la variable t , avec $t_0 = a$ et $t_{N+1} = b$

- **Approximations des dérivées**

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées existantes dans une équation différentielle à l'aide d'expressions discrètes basées sur les valeurs de la fonction aux points du maillage.

Pour faire cette approximation, on considère tout d'abord le problème ponctuel sous forme d'une équation différentielle du second ordre, de type :

$$y''(t_i) = p_2(t_i)y'(t_i) + p_1(t_i)y(t_i) + p_0(t_i), \quad (2.2)$$

avec $y \in \mathcal{C}^4[a, b]$, ensuite, en utilisant le développement de Taylor autour du point t_i :

$$y(t) = y(t_i) + (t - t_i)y'(t_i) + \frac{(t - t_i)^2}{2!}y''(t_i) + \frac{(t - t_i)^3}{3!}y^{(3)}(t_i) + \frac{(t - t_i)^4}{4!}y^{(4)}(\xi_i),$$

où ξ_i est compris entre t et t_i . Évaluons $y(t)$ aux points t_{i-1} et t_{i+1} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} y(t_{i-1}) &= y(t_i) - hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) - \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(t_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in [t_{i-1}, t_i] \\ y(t_{i+1}) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(t_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in [t_i, t_{i+1}] \end{aligned}$$

Pour trouver l'approximation de la dérivée seconde, nous additionnons membre à membre les deux équations précédentes :

$$y(t_{i+1}) + y(t_{i-1}) = 2y(t_i) + h^2y''(t_i) + \frac{h^4}{4!} [y^{(4)}(\xi_1^+) + y^{(4)}(\xi_2^-)],$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$; tel que :

$$y^{(4)}(\xi_i) = \frac{y^{(4)}(\xi_1^+) + y^{(4)}(\xi_2^-)}{2},$$

avec une erreur de troncature d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$:

$$y''(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i). \quad (2.3)$$

Donc :

$$\boxed{y''(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.} \quad (2.4)$$

C'est exactement de la même manière qu'on peut trouver l'approximation de la dérivée première lors qu'on fait la soustraction membre à membre.

On a alors : la formule progressive (avant) :

$$\boxed{y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h},} \quad (2.5)$$

avec une erreur de troncature de l'ordre $\mathcal{O}(h)$.

$$y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}], \quad (2.6)$$

et la formule régressive (arrière) :

$$\boxed{y'(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1}))}{h},} \quad (2.7)$$

avec une erreur de troncature aussi de l'ordre $\mathcal{O}(h)$.

$$y'(t_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1}))}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.8)$$

ou encore la formule centrée :

$$\boxed{y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}))}{2h}}, \quad (2.9)$$

avec une erreur de troncature également d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$:

$$y'(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_{i+1}]. \quad (2.10)$$

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées $y'(t_i)$ et $y''(t_i)$ dans l'équation différentielle (2.2) par ses dérivées approchées (2.9) et (2.4) pour obtenir un système linéaire.

• **Forme du système linéaire**

En négligeant les erreurs de chaque dérivées et en posant $w_i \approx y(t_i)$, on obtient, pour $i = 1, 2, \dots, N$, l'équation suivante :

$$-(1 + \frac{h}{2}p_2(t_i))w_{i-1} + (2 + h^2p_1(t_i))w_i - (1 - \frac{h}{2}p_2(t_i))w_{i+1} = -h^2p_0(t_i),$$

avec les conditions aux bords : $w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta$.

Ce schéma donne lieu à un système linéaire tridiagonal d'inconnues $w_1, \dots, w_N$, s'écrivant sous forme développée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_1w_1 + C_1w_2 = d_1 - A_1\alpha & \text{pour } i = 1 \\ A_2w_1 + B_2w_2 + C_2w_3 = d_2 & \text{pour } i = 2 \\ A_3w_2 + B_3w_3 + C_3w_4 = d_3 & \text{pour } i = 3 \\ \vdots & \\ A_{N-1}w_{N-2} + B_{N-1}w_{N-1} + C_{N-1}w_N = d_{N-1} & \text{pour } i = N - 1 \\ A_Nw_{N-1} + B_Nw_N = d_N - C_N\beta & \text{pour } i = N \end{array} \right.$$

Ce système peut être réécrit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & A_N & B_N \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}}_W = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 - A_1 \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N - C_N \beta \end{bmatrix}}_b$$

où les coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} A_i = -1 - \frac{h}{2}p_2(t_i) \\ B_i = 2 + h^2p_1(t_i) \\ C_i = -1 + \frac{h}{2}p_2(t_i) \\ d_i = -h^2p_0(t_i) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2p_0(t_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p_2(t_1)\right) \alpha \\ -h^2p_0(t_2) \\ \vdots \\ -h^2p_0(t_N) + \left(1 - \frac{h}{2}p_2(t_N)\right) \beta \end{bmatrix}$$

La question qui se pose ici : sous qu'elle conditions , le système linéaire obtenu à une solution unique. Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'exposer le théorème suivant :

Théorème 2.2 : Supposons que les fonctions p_2 , p_1 et p_0 soient continues sur l'intervalle $[a, b]$ et que $p_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors, le système tridiagonal ainsi obtenu admet une **solution unique** si le pas h vérifie :

$$h < \frac{2}{L}, \quad \text{où} \quad L = \max_{a \leq t \leq b} |p_2(t)|$$

Démonstration : Pour faire la démonstration, en faisant appel aux coefficients :

$$A_i = -1 - \frac{h}{2}p_2(t_i), \quad B_i = 2 + h^2p_1(t_i), \quad C_i = -1 + \frac{h}{2}p_2(t_i).$$

En tenant compte la condition du théorème pour trouver :

$$\frac{h}{2}|p_2(t_i)| \leq \frac{h}{2} \max_{a \leq t \leq b} |p_2(t)| < 1,$$

ce qui implique :

$$|A_i| + |C_i| = 1 + \frac{h}{2}p_2(t_i) + 1 - \frac{h}{2}p_2(t_i) = 2.$$

Comme $p_1(t) \geq 0$, $B_i \geq 2$, on trouve donc les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |B_1| > C_1 \\ |B_N| > A_N \\ |A_i| + |C_i| \leq |A_i|, \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ A_i C_i = 0 \end{cases}$$

Ces conditions assurent que le système tridiagonal : $Aw = p_0$ possède une solution unique, où le second membre est donné par :

$$\begin{cases} p_{0,1} = -h^2 p_0(t_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p_2(t_1)\right) w_0 \\ p_{0,i} = -h^2 p_0(t_i), \quad i = 2, \dots, N-1 \\ p_{0,N} = -h^2 p_0(t_N) + \left(1 - \frac{h}{2}p_2(t_N)\right) w_{N+1}. \end{cases}$$

2.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

La deuxième méthode qu'on va exposer dans cette section est la méthode connue également sous le nom : Rayleigh-Ritz qui commence par une Formulation variationnelle.

• Formulation variationnelle

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(I) \begin{cases} -\frac{d}{dt} \left(p_2(t) \frac{dy}{dt} \right) + p_1(t)y(t) = g(t), \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

et l'espace :

$$C_0^2[0, 1] = \{u \in C^2[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Avant de développer la méthode de Rayleigh-Ritz, donnons d'abord un théorème qui permet de reformuler le problème (I) sous forme variationnelle.

Théorème 2.3 : Soient $p_2 \in C^1[0, 1]$, $p_1, g \in C[0, 1]$, avec $p_2(t) \geq \delta > 0$ et $p_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors $y \in C_0^2[0, 1]$ est la solution unique du problème aux limites (I) si et seulement si elle est l'unique fonction qui minimise l'intégrale suivante :

$$I(u) = \int_0^1 \{p_2(t)(u'(t))^2 + p_1(t)(u(t))^2 - 2g(t)u(t)\} dt.$$

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à approximer la solution en minimisant $I(u)$, non pas sur tout $C_0^2[0, 1]$, mais sur un sous-espace vectoriel engendré par des fonctions linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ vérifiant :

$$\boxed{\psi_i(0) = \psi_i(1) = 0.}$$

On cherche alors une approximation de la forme :

$$\boxed{\psi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t),}$$

où les constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont déterminées lorsque en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \dots, c_n) &= I\left(\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t)\right) \\ &= \int_0^1 \left\{ p_2(t) \left(\sum_{i=1}^n c_i \psi_i'(t)\right)^2 + p_1(t) \left(\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t)\right)^2 - 2g(t) \left(\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t)\right) \right\} dt. \end{aligned}$$

• Minimisation de la fonctionnelle F

Il est clair mathématiquement, que la fonctionnelle F admet un minimum, si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Autrement dit, on impose :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_0^1 \left\{ 2p_2(t) \psi_i'(t) \sum_{i=1}^n c_i \psi_i'(t) + 2p_1(t) \psi_i(t) \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t) - 2g(t) \psi_i(t) \right\} dt = 0.$$

En simplifiant, pour obtenir le système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 [p_2(t) \psi_i'(t) \psi_i'(t) + p_1(t) \psi_i(t) \psi_i(t)] dt \right) c_i = \int_0^1 g(t) \psi_i(t) dt \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Maintenant, il reste à choisir les éléments de base $\psi_i(t)$.

• Choix des fonctions de base

Considérons une partition de l'intervalle $[0, 1]$ donnée par :

$$\{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\} \quad \text{avec } h_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

On définit alors les fonctions de base $\psi_i(t)$:

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_{i-1} \\ \frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{si } t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \frac{t_{i+1}-t}{h_i} & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{si } t_{i+1} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

et leurs dérivées sont :

$$\psi'_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i-1} \text{ ou } t > t_{i+1} \\ \frac{1}{h_{i-1}} & \text{si } t_{i-1} < t < t_i \\ -\frac{1}{h_i} & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

• Système linéaire

Puisque les fonctions ψ_i et leurs dérivées ψ'_i sont nulles partout sauf sur les intervalles (t_{i-1}, t_{i+1}) , le système linéaire se réduit à un système tridiagonal de la forme : $AC = b$, où :

$$C^\top = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n], \quad b^\top = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n], \quad A = (a_{ij})_{n \times n}.$$

Les éléments de la matrice A sont donnés par :

$$a_{ii} = \int_0^1 \left\{ p_2(t)(\psi'_i(t))^2 + p_1(t)(\psi_i(t))^2 \right\} dt; i = 1, 2, \dots, n$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} a_{ii} = & \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 p_2(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 p_2(t) dt \\ & + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 p_1(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{t_{i+1}-t}{h_i} \right)^2 p_1(t) dt, \end{aligned}$$

sur la diagonale supérieure pour $i = 1, 2, \dots, n-1$:

$$a_{i,i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_i} \right) \left(\frac{1}{h_i} \right) p_2(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{t_i-t}{h_i} \right) \left(\frac{t_{i+1}-t}{h_i} \right) p_1(t) dt,$$

et sur la diagonale inférieure pour pour $i = 2, 3, \dots, n$:

$$a_{i,i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(-\frac{1}{h_{i-1}} \right) \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right) p_2(t) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{t_i-t}{h_{i-1}} \right) \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1}} \right) p_1(t) dt.$$

On définit aussi le vecteur b tel que : chaque composante b est donnée par :

$$b_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{t - t_{i-1}}{h_{i-1}} g(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{t_{i+1} - t}{h_i} g(t) dt.$$

On a bien remarqué que cette méthode repose principalement sur la construction d'une approximation $\psi(t)$ de la solution exacte $y(t)$ du problème (I) par la résolution d'un système linéaire $AC = b$.

plus précisément le système obtenu est tridiagonal qui possède une solution unique.

Pour une meilleure précision, on pourrait utiliser d'autres fonctions de base (par exemple cubiques), mais le système $AC = b$ ne serait alors plus tridiagonal.

2.3 Méthode du tir

La méthode du tir est une approche numérique utilisée pour résoudre des problèmes aux limites pour les EDO. Elle consiste à transformer un problème aux limites en un ou plusieurs problèmes de Cauchy.

2.3.1 Équation linéaire

Considérons le problème aux limites linéaire :

$$(I) \begin{cases} y''(t) = p_2(t)y'(t) + p_1(t)y(t) + p_0(t), & t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta. \end{cases}$$

Le théorème suivant, nous permet de donner une idée générale sur la solution cherchée.

Théorème 2.4 : (*Formule de la solution*) Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont les solutions des deux problèmes de Cauchy :

$y_1(t)$ est la solution du problème avec des conditions initiales : $y(a) = \alpha$, $y'(a) = 0$.

$$(II) \begin{cases} y''(t) = p_2(t)y'(t) + p_1(t)y(t) + p_0(t), & t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y'(a) = 0, \end{cases}$$

et $y_2(t)$ est la solution du problème avec des conditions initiales : $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$

$$(III) \begin{cases} y''(t) = p_2(t)y'(t) + p_1(t)y(t) + p_0(t), & t \in [a, b] \\ y(a) = 0, & y'(a) = 1. \end{cases}$$

Alors, la solution du problème aux limites (I) est en fonction de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ comme l'indique la formule suivante :

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + \left(\frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(t).} \quad (2.13)$$

En effet, on détermine c tel que $y(b) = \beta$:

$$y(b) = y_1(b) + c \cdot y_2(b) = \beta \Rightarrow c = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}, \quad (2.14)$$

finalemt, la solution cherchée est :

$$y(t) = y_1(t) + \left(\frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(t).$$

2.3.2 Équation non linéaire

Dans ce cas, on propose un problème aux limites du second ordre général ; c'est-à-dire il n'est pas nécessairement linéaire :

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (2.15)$$

Ce type de problème ne peut pas être résolu directement comme un problème de Cauchy. Pour utiliser la méthode du tir, on peut procéder comme suit :

1. On transforme le problème aux limites en un problème de Cauchy en introduisant un paramètre inconnu z :

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z.$$

2. On résout ce problème de Cauchy avec une valeur initiale supposée de z ; notée z_0 ; et on obtient une solution $y_0(t)$.
3. On calcule $y_0(b)$ et on compare à β . Si $y_0(b) = \beta$, alors z_0 est la bonne valeur. Sinon, on ajuste z .
4. On répète le processus pour une autre valeur z_1 , ce qui donne une solution $y_1(t)$ avec $y_1(b)$; (c'est-à-dire $y_1(t)$ pour $t = b$).
5. On utilise l'interpolation linéaire pour estimer une nouvelle valeur de z :

$$z = z_0 + \left(\frac{\beta - y_0(b)}{y_1(b) - y_0(b)} \right) (z_1 - z_0).$$

6. On répète jusqu'à ce que $|y(b) - \beta| < \varepsilon$ avec une précision fixée.

2.4 Comparaison entre les méthodes numériques

La méthode des différences finies adopte une approche discrète qui consiste à approcher les dérivées par des différences sur un maillage régulier. Cette technique est particulièrement simple à mettre en œuvre et génère un système linéaire tridiagonal qui se résout facilement. Toutefois, elle atteint ses limites dans les domaines irréguliers ou

avec les équations non linéaires.

En revanche, **la méthode de Rayleigh-Ritz** utilise la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie associée au problème pour offrir une grande souplesse et un meilleur contrôle de l'erreur, particulièrement dans le cadre de problèmes physiques complexes. Cependant, elle demande une sélection soigneuse des fonctions de base et une formulation mathématique plus complexe.

La méthode du tir, pour sa part, convertit le problème aux limites en un problème de Cauchy en ajustant la pente initiale afin de satisfaire la condition finale. Bien qu'intuitive et appropriée pour les équations non linéaires, elle peut nécessiter plusieurs essais pour atteindre la convergence et elle est sensible aux erreurs d'intégration numérique.

Méthode	Principe	Avantages	Inconvénients
Différences Finies	Discrétiser l'équation en approximant les dérivées par des différences sur un maillage	- Facile à implémenter - Système tridiagonal simple à résoudre - Excellente précision avec un maillage fin	- Moins adapté aux domaines irréguliers - Dépendance directe de la précision au pas h
Rayleigh-Ritz	Minimiser une fonctionnelle d'énergie en utilisant une combinaison de fonctions de base	- Approche générale et puissante - Contrôle meilleur sur l'erreur - Adaptable aux cas complexes	- Formulation plus lourde - Qualité dépend du choix des fonctions de base
Méthode du Tir	Transformer le problème aux limites en un problème de Cauchy en ajustant la pente initiale	- Intuitive et simple à comprendre - Convient bien aux équations non linéaires	- Peut nécessiter plusieurs essais - Sensible aux erreurs numériques - Risque d'instabilité

TABLE 2.1 – Comparaison entre les méthodes numériques de résolution des problèmes aux limites

Applications

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes numériques étudiées pour résoudre deux phénomènes scientifiques : le déplacement d'une barre soumise à des forces axiales et la distribution de température dans une tige chauffée. Ces exemples démontrent la conversion d'un problème physique en une représentation mathématique et sa résolution numérique.

3.1 Distribution de température dans une tige chauffée

Position du problème

On cherche à déterminer la distribution de température le long d'une tige soumise à un transfert de chaleur par conduction interne, ainsi qu'à une perte de chaleur par convection avec le milieu ambiant. Ce phénomène est modélisé par une équation différentielle du second ordre obtenue à partir d'un bilan d'énergie appliqué à un élément différentiel de la tige.

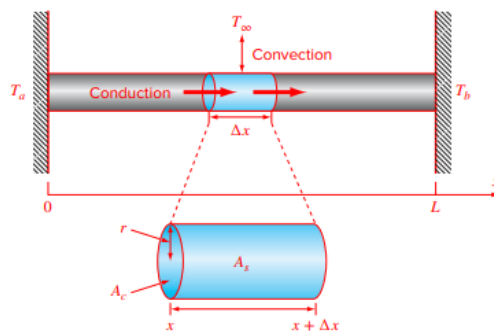


FIGURE 3.1 – Un bilan thermique pour un élément différentiel d'une tige chauffée soumise à la conduction et à la convection.

3.1.1 Modélisation mathématique du phénomène

Pour trouver le modèle mathématique de notre problème étudié comme un problème aux limites, il faut suivre les étapes :

1. Bilan d'énergie sur un élément de longueur Δx :
 - Flux de chaleur entrant : $q(x)A_c$
 - Flux de chaleur sortant : $q(x + \Delta x)A_c$
 - Perte par convection : $hA_s(T_\infty - T)$
2. En appliquant le principe de conservation de l'énergie :

$$0 = q(x)A_c - q(x + \Delta x)A_c + hA_s(T_\infty - T)$$

3. En divisant par le volume de l'élément $\pi r^2 \Delta x$:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{2h}{r}(T_\infty - T) = 0$$

4. En passant à la limite quand $\Delta x \rightarrow 0$:

$$-\frac{dq}{dx} + \frac{2h}{r}(T_\infty - T) = 0$$

5. En utilisant la loi de Fourier : $q = -k \frac{dT}{dx}$

6. On dérive q :

$$\frac{dq}{dx} = -k \frac{d^2T}{dx^2}$$

7. Substitution dans l'équation du bilan :

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{2h}{r}(T_\infty - T) = 0$$

8. Division finale par k pour obtenir l'équation normalisée :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{rk}(T - T_\infty) = 0$$

On définit bien sûr chaque paramètre dans cette formule

- $T(x)$: température à une position x le long de la tige,
- T_∞ : température du milieu environnant,
- h : coefficient de convection ($\text{W/m}^2 \text{K}$),
- r : rayon de la tige,

- k : conductivité thermique du matériau (W/m K),
- $h' = \frac{2h}{rk}$: coefficient global d'échange thermique (en m^{-2}).

On obtient alors la forme finale de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) = 0 \\ T(0) = T_a \quad \text{et} \quad T(L) = T_b. \end{cases}$$

Ce problème est complété par deux conditions aux limites (conditions de Dirichlet) qui fixent la température aux extrémités de la tige :

$$T(0) = T_a \quad \text{et} \quad T(L) = T_b.$$

Ces conditions traduisent physiquement le fait que les températures aux extrémités de la tige sont imposées par le contact avec des sources thermiques à température constante.

3.1.2 Étude analytique

En analyse numérique pour mesurer l'efficacité de notre méthode, il faut comparer les résultats numériques (approchés) obtenus avec les valeurs exactes ; alors on essaye de trouver tout d'abord la solution exacte.

Considérons une tige de longueur $L = 10 \text{ m}$, soumise à un échange thermique avec un fluide ambiant de température constante $T_\infty = 200 \text{ K}$. Le modèle mathématique du transfert thermique est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) = 0,$$

où le paramètre h' est défini par :

$$h' = \frac{2h}{rk} = \frac{2 \times 1}{0.2 \times 200} = 0,05 \text{ m}^{-2},$$

avec :

- $h = 1 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{s})$.
- $r = 0,2 \text{ m}$
- $k = 200 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{s})$.

Les conditions aux limites imposées sont :

$$T(0) = 300 \text{ K}, \quad T(10) = 400 \text{ K}.$$

• Méthode de résolution

Pour faire la résolution analytique par les étapes qu'on a vu au chapitre 1, on réécrit l'équation sous forme équivalente :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - h'T = -h'T_\infty.$$

Cette équation est linéaire à coefficients constants. La solution générale est la somme :

$$T(x) = T_\infty + Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \quad \text{où } \lambda = \sqrt{h'} = \sqrt{0,05}.$$

Afin de trouver la solution homogène, on pose $T(x) = e^{\lambda x}$, ce qui donne après la substitution :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - h' e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = h' \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{h'}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$T_h(x) = Ae^{\sqrt{h'}x} + Be^{-\sqrt{h'}x},$$

où, la solution particulière est constante : $T_p = T_\infty$.

Par une somme directe, on trouve que la solution complète :

$$T(x) = T_\infty + Ae^{\sqrt{h'}x} + Be^{-\sqrt{h'}x},$$

Maintenant il reste à déterminer les constantes par l'utilisation des conditions aux limites :

$$T(0) = T_\infty + A + B = 300.$$

$$T(L) = T_\infty + Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L} = 400$$

On trouve alors deux équations à deux inconnues A et B :

$$A = \frac{(T_a - T_\infty)e^{-\lambda L} - (T_b - T_\infty)}{e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}}, \quad B = \frac{(T_b - T_\infty) - (T_a - T_\infty)e^{\lambda L}}{e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}}.$$

Par la substitution numérique avec $h' = 0,05 \Rightarrow \lambda = \sqrt{0,05} \approx 0,2236$, $T_\infty = 200$, $T_a = 300$, $T_b = 400$, $L = 10$, on obtient :

$$A \approx 20,4671, \quad B \approx 79,5329.$$

Alors, notre solution finale est :

$$T(x) = 200 + 20,4671 e^{0,2236x} + 79,5329 e^{-0,2236x}$$

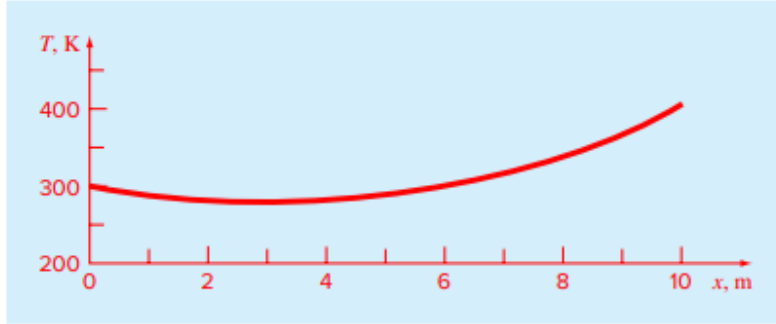


FIGURE 3.2 – Solution analytique pour la tige chauffée

Remarque : La courbe de température est symétrique et elle montre une dépression thermique au centre de la tige, due aux pertes de chaleur par convection avec le milieu environnant plus froid.

3.1.3 Étude numérique

Dans cette section, on veut résoudre le problème numériquement ; C'est-à-dire qu'on essaye de trouver des résultats approchés par l'utilisation des méthodes de tir et de différences finies.

- **Étude numérique par la méthode du tir**

Considérons l'équation différentielle suivante, représentant un problème aux limites :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) = 0 \\ T(0) = T_a \quad \text{et} \quad T(L) = T_b \end{cases}$$

où : $L = 10\text{m}$, $h' = 0.05\text{m}^{-2}$, $T_\infty = 200\text{K}$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -0.05(200 - T),$$

avec les conditions aux limites :

$$T(0) = 300 \quad \text{et} \quad T(10) = 400.$$

On introduit deux nouvelles variables pour transformer l'équation du second ordre en un système de deux équations du premier ordre :

$$y_1 = T(x), \quad y_2 = \frac{dT}{dx}.$$

Ainsi, le système devient :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -0.05(200 - y_1), \end{cases}$$

avec les conditions :

$$y_1(0) = 300, \quad y_1(10) = 400.$$

La valeur initiale de $y_2(0)$ est inconnue. On va la deviner, résoudre le système, puis ajuster cette valeur pour satisfaire la condition $y_1(10) = 400$.

Résolution numérique en code MATLAB :

Tir initiale :

On choisit une valeur initiale arbitraire pour $y_2(0)$, par exemple $s = -5$, et on intègre le système avec un solveur numérique comme `ode45` en MATLAB :

```
function dy = Ex2402(x,y)
dy = [y(2);0.05*(200 - y(1))];
Nous pouvons alors générer la solution comme suit
>> [t,y] = ode45(@ Ex2402,[0 10],[300, 5]);
>> Tb1 = y(length(y))
Tb1 =
569.7539
```

On obtient une valeur approximative $T_1 = y_1(10)$. On répète avec une autre valeur, par exemple $s = -10$, pour obtenir $T_2 = y_1(10)$.

Comme l'équation est linéaire, on peut interpoler linéairement les deux solutions précédentes pour trouver le tir exact :

$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{T_2 - T_1}(T_b - T_1),$$

où :

- s_1, s_2 sont les valeurs initiales de $y_2(0)$.
- T_1, T_2 sont les températures obtenues à $x = 10$.
- T_b est la température cible (ici 400),

avec :

$$s = -5 + \frac{-20 - (-5)}{569.7539 - 259.5131}(400 - 259.5131) = -13.2075.$$

Tir final avec le bon s

```
% Tir final
[tf, yf] = ode45(@Ex2402, [0 10], [300, -13.2075]);
Tf = yf(end,1); % Tf 400
```

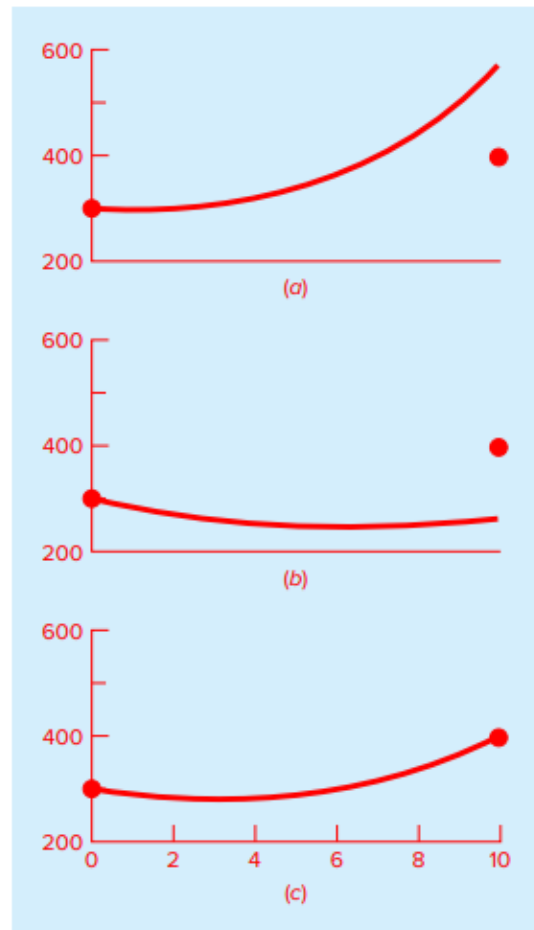


FIGURE 3.3 – Température (K) en fonction de la distance (m) calculée avec la méthode du tir : (a) le premier 'tir', (b) le deuxième 'tir' et (c) le 'coup' final exact.

Remarque : Avec le tir ajusté, on obtient une solution qui respecte parfaitement les deux conditions aux limites. Également, puisque cette méthode utilise une équation linéaire, sa convergence est rapide. Presque toutes les solutions obtenues sont identiques à celle donnée par la méthode analytique. On applique la valeur calculée de s pour une dernière intégration avec (`ode45`), ce qui donne une solution qui satisfait les deux conditions aux limites.

Cette méthode du tir permet donc de transformer un problème aux limites en un problème à valeur initiale, que l'on peut résoudre efficacement avec des outils numériques comme `ode45`.

- **Étude numérique par la méthode des différences finies**

Nous reprenons ici le même problème traité précédemment par la méthode du tir :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -0,05(200 - T), \quad \text{avec } T(0) = 300 \quad \text{et} \quad T(10) = 400,$$

et on veut le résoudre cette fois par la méthode des différences finies.

Tout d'abord, on commence par la discrétisation ; c'est à dire, On divise la tige en $n = 4$ nœuds intérieurs avec un pas $\Delta x = 2$ m, ce qui donne :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 10.$$

$$T_0 = 300, \quad T_5 = 400 \quad (\text{conditions aux limites})$$

Ensuite, on remplace la dérivée seconde par la dérivée approchée, on utilise alors l'approximation par la différences finies centrées :

$$\frac{d^2T}{dx^2} \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2},$$

on obtient alors l'équation :

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{4} = -0.05(200 - T_i).$$

On multiplie par 4 pour simplifier :

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -0.2(200 - T_i) = -40 + 0.2T_i.$$

On transforme notre problème en un problème ponctuel, en regroupant les termes :

$$T_{i-1} + (-2.2)T_i + T_{i+1} = -40 \quad \Longleftrightarrow \quad -T_{i-1} + 2.2T_i - T_{i+1} = 40.$$

Enfin, en appliquant la formule pour chaque nœud intérieur pour trouver le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 2.2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 40 \\ 40 \\ 440 \end{bmatrix}$$

où les termes 340 et 440 sont dus aux conditions de bord $T_0 = 300$ et $T_5 = 400$.

Résolution numérique avec MATLAB

Le code MATLAB correspondant est :

```
>> A = [2.2 1 0 0;  
1 2.2 1 0;  
0 1 2.2 1;  
0 0 1 2.2];  
>> b = [340 40 40 440]';  
>> T = A\b  
T =  
283.2660  
283.1853  
299.7416  
336.2462
```

Avec les conditions aux limites :

$$T_0 = 300, \quad T_5 = 400.$$

Il est clair que la méthode des différences finies permet de transformer un problème aux limites en un système d'équations linéaires, résolu facilement à l'aide de solveurs numériques. Cette approche est particulièrement efficace pour les équations linéaires à coefficients constants.

Pour résumer, nous regroupons les points afin de comparer les valeurs exactes (analytiques) avec les valeurs expérimentales obtenues.

Position x (m)	Solution analytique	Méthode du tir	Méthode des différences finies
0	300.0000	300.0000	300.0000
2	282.8634	282.8889	283.2660
4	282.5775	282.6158	283.1853
6	299.0843	299.1254	299.7416
8	335.7404	335.7718	336.2462
10	400.0000	400.0000	400.0000

TABLE 3.1 – Comparaison entre la solution analytique exacte et la solution approchée par la méthode du tir et la méthode des différences finies pour la température.

3.2 Déplacement d'une barre soumise à des forces axiales

Position du problème

Dans cette partie, on va appliquer la méthode de Rayleigh-Ritz (utilisant des polynômes de degrés différents) pour étudier le déplacement axial d'une barre élastique, avec une extrémité fixée et sous l'effet d'une charge répartie $p = CX_1$ et d'une charge ponctuelle P .

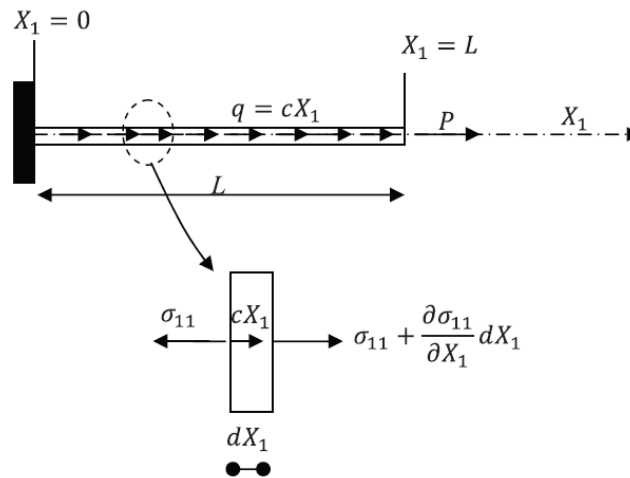


FIGURE 3.4 – Une barre sous forces axiales

Pour bien comprendre cette figure, on définit $X_1, u_1(X_1), A, E, C, P, \sigma_{11}$ respectivement par :

- X_1 : position le long de la barre (en mètres).
- $u_1(X_1)$: déplacement axial de la barre.
- A : aire de la section transversale.
- E : module d'Young du matériau.
- C : constante de charge répartie (force par unité de longueur).
- P : force appliquée à l'extrémité libre de la barre.
- σ_{11} : contrainte normale dans la barre.

3.2.1 Étude analytique

Pour mesurer l'efficacité (précision) de l'étude numérique, on va calculer tout d'abord, la solution exacte qui satisfait les équations d'équilibre. Ces équations sont obtenues, sous charge axiale, lorsque E et A sont constants :

$$\frac{d^2 u_1}{dX_1^2} = -\frac{CX_1}{EA},$$

faisant quelques calculs mathématiques pour trouver la solution exacte sous la forme :

$$u_1 = -\frac{CX_1^3}{6EA} + C_1 X_1 + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont déterminés à l'aide des conditions aux limites :

$$X_1 = 0 : u_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$X_1 = L : \sigma_{11} = E \frac{du_1}{dX_1} = \frac{P}{A} \Rightarrow C_1 = \frac{P}{AE} + \frac{CL^2}{2EA}.$$

On trouve alors, la solution exacte pour le déplacement u_1 et la contrainte σ_{11} :

$$\boxed{u_1 = -\frac{CX_1^3}{6EA} + \left(\frac{P}{AE} + \frac{CL^2}{2EA} \right) X_1.} \quad (3.1)$$

3.2.2 Étude numérique

On va faire l'étude numérique par l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz.

La première étape de cette méthode consiste à minimiser l'énergie potentielle du système, qu'on l'écrive comme suit :

$$PE = \int \bar{U} dX_1 - W = \int_0^L \frac{\sigma_{11}\varepsilon_{11}}{2} A dX_1 - Pu_1|_{X_1=L} - \int_0^L p u_1 dX_1.$$

On remarque que l'énergie potentielle perdue par l'action de la force appliquée P est un produit de P et du déplacement u_1 évalué en $X_1 = L$, tandis que l'énergie potentielle perdue par l'action des forces corporelles distribuées est une intégrale, car elle agit sur chaque point le long de la longueur de la barre. De plus, on utilise l'équation obtenue pour réécrire la fonction d'énergie potentielle en fonction de u_1 :

$$PE = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{du_1}{dX_1} \right)^2 dX_1 - Pu_1|_{X_1=L} - \int_0^L C X_1 u_1 dX_1.$$

Pour compléter cette étude afin de trouver une solution approchée, il faut introduire une hypothèse sur la fonction u_1 .

Pour répondre à nos besoins d'intégrabilité et dérivabilité, on peut prendre u_1 comme un polynôme.

Les études faites dans [10] montrent la non-efficacité d'un polynôme de degré zéro ; on trouve après quelques calculs que $u_1 = 0$ ce qui sera automatiquement rejeté.

C'est la même chose si on suppose que u_1 est un polynôme de degré un, on trouve un résultat qui n'est pas très précis, car elle ne satisfait pas l'équation différentielle d'équilibre.

Dans la suite, il nous reste à supposer que u_1 est un polynôme de degré deux ou trois.

On commence tout d'abord par le cas où u_1 est un polynôme de degré deux.

Si on écrit u_1 sous la forme générale d'un polynôme de degré deux et on utilise les conditions aux limites $X_1 = 0$, $u_1 = 0$, on trouve facilement :

$$u_1 = a_1 X_1 + a_2 X_1^2.$$

Le composant de la déformation ε_{11} peut être calculé comme suit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dX_1} = a_1 + 2a_2 X_1,$$

où ε_{11} : allongement relatif le long de l'axe X_1 .

En substituant dans l'équation de l'énergie potentielle du système :

$$\begin{aligned} PE &= \int_0^L \frac{EA}{2} (a_1 + 2a_2 X_1)^2 dX_1 - P(a_1 L + a_2 L^2) - \int_0^L C(a_1 X_1^2 + a_2 X_1^3) dX_1 \\ &= \frac{2EAL^3}{3} a_2^2 + EAL^2 a_2 a_1 + \frac{EAL}{2} a_1^2 - PL^2 a_2 - PL a_1 - \frac{CL^4}{4} a_2 - \frac{CL^3}{3} a_1. \end{aligned}$$

Pour minimiser l'énergie potentielle du système, en effet :

$$\frac{\partial PE}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow EAL^2 a_2 + EAL a_1 - PL - \frac{CL^3}{3} = 0,$$

et

$$\frac{\partial PE}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{4EAL^3}{3} a_2 + EAL^2 a_1 - PL^2 - \frac{CL^4}{4} = 0.$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$a_1 = \frac{7CL^2 + 12P}{12EA}, \quad a_2 = -\frac{CL}{4EA}.$$

Alors, le meilleur polynôme de degré deux selon la méthode de Rayleigh-Ritz est :

$$u_1 = -\frac{CL}{4EA} X_1^2 + \frac{7CL^2 + 12P}{12EA} X_1.$$

Un déplacement parabolique produirait une contrainte linéaire :

$$\sigma_{11} = -\frac{CL}{2A} X_1 + \frac{7CL^2 + 12P}{12A}.$$

C'est exactement la même chose lorsqu'on choisit un polynôme de degré trois comme une fonction approximative de déplacement c'est-à-dire : elle est de la forme canonique d'un polynôme :

$$u_1 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2 + a_3 X_1^3,$$

on dérive pour obtenir une approximation de la déformation axiale :

$$\varepsilon_{11} = a_1 + 2a_2 X_1 + 3a_3 X_1^2.$$

En tenant compte les conditions aux limites pour trouver $a_0 = 0$. Ce qui nous permet de déduire que l'énergie potentielle du système est de la forme :

$$\begin{aligned} PE = & \int_0^L \frac{EA}{2} (a_1 + 2a_2 X_1 + 3a_3 X_1^2)^2 dX_1 - P(a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3) \\ & - \int_0^L C (a_1 X_1^2 + a_2 X_1^3 + a_3 X_1^4) dX_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Elle est clair que la méthode donne un grand ensemble d'équations, ce qui est difficile à résoudre manuellement ; en faisant appel au Mathematica pour trouver les valeurs des constantes a_1 , a_2 , et a_3 qui minimisent l'énergie potentielle du système.

Enfin, on peut dire que la méthode de Rayleigh-Ritz génère une solution exacte (pour le déplacement et les contraintes) parce qu'elle est très similaire à la fonction d'essai choisie comme un polynôme de degré trois au début.

$$u_1 = -\frac{CX_1^3}{6EA} + \left(\frac{P}{AE} + \frac{CL^2}{2EA} \right) X_1.$$

$$\sigma_{11} = E \frac{du_1}{dX_1} = -\frac{CX_1^2}{2A} + \left(\frac{P}{A} + \frac{CL^2}{2A} \right).$$

Bibliographie

- [1] Chapra, S. C. (2018). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists* (4th ed.). McGraw-Hill Education.
- [2] Derradji, S. (n.d.). *Analyse numérique I*. INESM de Batna, Département de Mécanique. Office des Publications Universitaires, 1 Place Centrale de Ben Aknoun, Alger.
- [3] Fortin, A. (2020). *Analyse numérique pour ingénieurs* (4^e éd.). Presses internationales Polytechnique, Montréal.
- [4] Frey, P. J. (2020). *Introduction à la modélisation mathématique et à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Master MPE, Sorbonne Université, Laboratoire Jacques Louis Lions, Institut des sciences du calcul et des données. Disponible en ligne : LJLL - Frey, Cours UPMC. Consulté le 21 mai 2025.
- [5] Laadj, T. (2021). *Notes de cours sur les équations différentielles ordinaires*. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB). Disponible en ligne : USTHB - Notes de cours. Consulté le 20 février 2025.
- [6] Rappaz, J., & Picasso, M. (2017). *Introduction à l'analyse numérique* (3^e éd.). Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), Lausanne, Suisse.
- [7] Rezzoug, I. (2019). *Introduction aux différences finies*. Cours non publié, Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi, Département des Mathématiques et de l'Informatique.
- [8] Rondepierre, A., & Rouchon, A. (2012). *Introduction aux équations aux dérivées partielles : Étude théorique*. Département STPI, 2^e année IC, Université Polytechnique.
- [9] Tordeux, S., & Péron, V. (2021). *Analyse numérique : La méthode des différences finies*. Université de Pau, Master 1 MMS, 2020/2021.
- [10] University of Alberta. (n.d.). *Example 1 : A Bar Under Axial Forces – Approximate Methods (Rayleigh-Ritz)*. Disponible en ligne : Université d'Alberta – Exemple 1 (Rayleigh-Ritz). Consulté le 10 mai 2025.

الملخص

تعالج هذه المذكرة دراسة المشكلات ذات القيم الحدية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية من خلال تطبيق ثلاث طرق عددية مختلفة، وهي: طريقة الفروقات المنتهية، طريقة رايلي-ريتز، وطريقة الرمي. بعد تقديم خلفية نظرية عن كل من هذه الطرق، يتم تقييم دقتها وكفاءتها من خلال تطبيقات فيزيائية عملية مثل انتقال الحرارة وتشوه قضيب تحت تأثير قوة محورية. في النهاية، توضح المقارنات نقاط القوة والضعف لكل طريقة، مما يبين أن التحليل العددي يمكن أن يكون أداة مفيدة لحل المشكلات التي لا تمتلك حلولاً تحليلية ممكنة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العادية، المشكلات الحدية، الطرق العددية، طريقة الفروقات المنتهية، رايلي-ريتز، طريقة الرمي، التطبيقات الفيزيائية.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires du second ordre à travers l'application de trois méthodes numériques différentes : la méthode des différences finies, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode du tir. Après avoir présenté un cadre théorique pour chacune de ces méthodes, nous évaluons leur précision et efficacité sur des applications physiques pratiques ; telles que la conduction thermique et la déformation d'une barre soumise à une force axiale. Enfin de compte, les comparaisons mettent en évidence les avantages et les inconvénients de chaque méthode, démontrant que l'analyse numérique est un outil utile pour résoudre des problèmes qu'on ne peut pas trouver leurs solutions analytiques.

Mots-clés : équations différentielles ordinaires, problèmes aux limites, méthodes numériques, différences finies, Rayleigh-Ritz, méthode du tir, applications physiques.

Abstract

This memory will address the study of boundary value problems associated with second-order ordinary differential equations through the application of three different numerical methods, such as the finite difference method, the Rayleigh-Ritz method, and the shooting method. After providing a theoretical background of the different methods, I will evaluate the accuracy and efficiency of the methods applied to a practical physical application such as heat conduction and the deformation of a bar under axial force. Ultimately, the comparisons illustrate the strengths and weaknesses of each method, demonstrating that numerical analysis can be a helpful tool when attempting to solve problems that do not have feasible analytical solutions.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, numerical methods, finite difference method, Rayleigh-Ritz, shooting method, physical applications.