République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilities

Par Ben gherbal selsabil

Titre :

Etude de marché bond stock par la théorie des martingales

Devant le Jury :

Mme.	YAKHLEF Samia	Dr	U. Biskra	Président
Mr.	MANSOURI Bdreddine	Dr	U. Biskra	Encadreur
Mme.	CHAOUCHKHOUANE Nassima	Dr	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 03/06/2025

Dédicace

Je dédie ce travail

À mes chers parents que Dieu leur donne une vie longue et heureuse.

À mes chers soeurs et mon seul petit frère Mohamed Zakaria.

À mon petit neveu Adem.

À toute ma famille et mes chers amies.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous à donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur **Dr** : Mansouri

Baderddine, Son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des martingales est une branche fondamentale des probabilités, qui s'est imposée au fil du temps comme un outil incontournable dans l'étude des processus stochastiques. Apparue formellement au milieu du XXe siècle grâce aux travaux de Paul Lévy et de Joseph Doob, la notion de martingale s'inspire à l'origine de jeux de hasard, dans lesquels l'espérance des gains d'un joueur reste constante d'un coup à l'autre. Autrement dit, une martingale est un processus aléatoire dont la valeur espérée, conditionnée à l'information disponible à un instant donné, est égale à sa valeur actuelle. Ce comportement, souvent résumé par l'idée d'un "jeu équitable", signifie qu'il n'existe ni tendance à la hausse ni à la baisse dans l'évolution du processus, du moins sur le plan de l'espérance conditionnelle.

Au-delà de son intérêt purement théorique, la martingale s'est imposée comme un outil central en finance mathématique, notamment dans le cadre de la modélisation des marchés financiers et de la valorisation des produits dérivés. En effet, dans un marché supposé parfait, sans frictions ni opportunités d'arbitrage, les modèles financiers modernes postulent que le prix d'un actif, actualisé à un taux sans risque, suit une martingale par rapport à une certaine mesure de probabilité appelée mesure risque-neutre. Cette hypothèse fondamentale permet de construire des modèles cohérents pour évaluer les produits financiers, en particulier les options.

L'exemple le plus célèbre de cette application est sans doute le modèle de Black-

Scholes, dans lequel le prix d'une option est obtenu à partir de l'espérance, sous la mesure risque-neutre, de son gain final actualisé. Dans ce cadre, les outils de la théorie des martingales permettent non seulement de déterminer le prix "juste" d'un produit dérivé, mais aussi d'élaborer des stratégies de couverture qui minimisent le risque pour un investisseur. La martingale permet également de formaliser et de prouver de manière rigoureuse des résultats importants comme le théorème fondamental de l'évaluation des actifs, qui établit une équivalence entre l'absence d'arbitrage et l'existence d'une mesure équivalente sous laquelle les prix des actifs suivent une martingale.

Ainsi, la théorie des martingales offre un cadre mathématique puissant pour analyser le comportement des actifs financiers dans un environnement incertain. Elle permet non seulement de mieux comprendre la dynamique des marchés, mais aussi de fournir des outils concrets pour la prise de décision en matière d'investissement, de gestion des risques et d'ingénierie financière. C'est cette double richesse, à la fois théorique et pratique, qui explique pourquoi la martingale demeure un pilier fondamental de la finance quantitative contemporaine.

Chapitre 1

Notions Générales

1.1 Mathématiques Financiers

1.1.1 Marché financier

Les marchés financiers constituent un lieu de rencontre entre les émetteurs de titres financiers et les investisseurs. Ils sont essentiels pour assurer le financement des différents acteurs de l'économie. Les marchés financiers reflètent en permanence l'opinion des acteurs économiques sur la situation de l'économie nationale et internationale. Les transactions sur ces marchés s'effectuent à des coûts réduits (marché secondaire), dans le cadre d'une transparence de l'information, et permettent la liquidité du patrimoine des porteurs de titres. A fin de comprendre les mécanismes de fonctionnement des marchés financiers.

1.1.2 Les options

Définition 1.1.1 *(option d'achat européennes) Une option d'achat (call) européenne d'échéance N est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas* *l'obligation) d'acheter une action à une date N au prix K dit prix d'exercices (strike), fixé à l'avance. Ce contrat à un prix C (prime).*

Remarque 1.1.1 *Il existe de nombreux contrats d'options (sans parler des options sur les options...). On parle d'options européennes lorsque la date d'exercice de l'option est fixée à l'avance. Une option américaine par exemple peut être exercée à tout moment entre l'instant initial et la date N finale fixée.*

Au temps $n = 0$, l'achteur paie C au vendeur de l'option d'achat. Au temps N, il reçoit le maximum de $S_N - K$ et 0, noté $(S_N - K)_+$ (où S_N est le prix de l'action au temps N). Pour le vendeur de l'option, il s'agit en cas d'exercice d'être en mesure de fournir une action au prix K, et par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à $(S_N - K)_+$. Au moment de la vente de l'option, le cours futur de l'action est inconnu et deux questions se posent au vendeur de l'option :

1. Quel est le juste prix de l'option, c'est-à-dire quelle somme demender à l'acheteur pour être en mesure de produire une richesse $(S_N - K)_+$ à la date N ? C'est le problème du pricing .
2. Comment faire judicieusement fructifier la prime touchée à l'instant initial pour produire la richesse $(S_N - K)_+$ à la date N ? C'est le problème de la couverture.

Il existe une option duale dite de vente.

Définition 1.1.2 *(option de vente européenne) Une option de vente (put) européenne d'échéance N est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) de vendre une action à une date N au prix K dit prix d'exercice (strike), fixé à l'avance. Ce contrat à un prix P (prime).*

Au temps $n = 0$, l'achteur paie P au vendeur de l'option de vente. Au temps N, il reçoit le maximum de $K - S_N$ et 0, noté $(K - S_N)_+$ (où S_N est le prix de l'action au temps N).

1.1.3 Un portefeuille

Définition 1.1.3 *Un portefeuille regroupe plusieurs actifs détenus par une entreprise ou une personne. Dans un portefeuille, les actifs peuvent être de plusieurs types : actions, obligations, matières premières ou des produits dérivés. En règle générale, un portefeuille reflète le trader qui le détient, avec ses composantes clés que sont sa tolérance au risque et ses investissements stratégiques : ils permettent d'en savoir davantage sur la façon dont a été construit le portefeuille. Un investisseur recherchant à faire du profit sur du long terme avec peu de risque est susceptible d'avoir un portefeuille composé de plusieurs actions de grandes entreprises, des obligations ou des fonds indiciels avec très peu d'achat de vente à court terme. Un daytrader aurait plus d'agitation dans son portefeuille, qui serait plutôt composé de paires de devise ou de dérivés.*

1.1.4 Les produits dérivés

Définition 1.1.4 *Un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur dépend des variations d'un autre produit, appelé sous-jacent, et qui nécessite peu ou pas d'investissement initial. le règlement de ce produit se fait à une date ultérieure. Il s'agit d'un contrat entre deux parties, un achteur et un vendeur, qui définit des flux financiers futurs basés sur ceux d'un actif sous-jacent, qu'il soit réel ou théorique.*

1.1.5 L'objet des mathématiques financiers

L'institution (une banque) qui vend des produits dérivés est confrontée à deux questions :

1. Quel est le prix "équitable" C d'un produit dérivé ? c'est le problème du calcul du prix du produit dérivé (la prime).

2. Comment gérer la prime reçue (au temps 0) de telle sorte qu'à l'échéance N l'insti-tution puisse faire face à son engagement (c'est à dire verser la fonction de paiement f au client) ? C'est le problème de la couverture du produit dérivé. L'objet essentiel des mathématiques financières est de répondre à ses deux questions. Nous soulignons en particulier que le problème est bien "comment gérer les produits dérivés ? "et non pas"comment spéculer sur les marchés financiers ?". Pour répondre à ces deux questions, la première étape consiste à modéliser les marchés. L'avenir étant incertain, ces modèles sont de type probabilistes. En effet, le cours du sous-jacent d'un produit dérivé fluctue aléatoirement au cours du temps ; il sera modélisé par un processus stochastique. Par exemple, le célèbre modéle de Black et Scholes décrit l'évolution de l'actif sous-jacent par un Mouvement Brownien géométrique Une fois le marché modélisé, il faut répondre aux deux questions précédentes. Plus le modèle est complexe, plus son analyse est difficile. Par exemple, le modèle discret et le modèle de Black et Scholes. Nous verrons comment calculer le prix d'une option et la couvrir sous diverses hypothèses simplificatrices, telles que :

– l'absence de coûts de transaction (pour l'achat ou la vente d'un titre),

– l'absence de dividende sur les titres,

– la possibilité d'emprunt illimité,

– l'existence d'acheteurs et de vendeurs pour toute quantité et tout type de produits financiers (marché liquide).

1.1.6 Principe de la couverture des produits dérivés

Le principe de la couverture du risque des produits dérivés diffère fondamentalement de celui de la couverture du risque d'une assurance classique (contre le vol, le feu, etc).

Pour faire face à ses obligations, un assureur classique vend beaucoup de contrats et compte sur le fait que la probabilité qu'un trop grand nombre de sinistres aient lieu simultanément est suffisamment faible. Cette stratégie de couverture du risque, s'appelle "couverture du risque par diversification".

Une telle stratégie de couverture n'est pas adéquate pour les produits dérivés (entre autre à cause de la forte corrélation entre les cours des différents produits financiers). La banque doit donc éliminer le risque sur un seul contrat. Le principe est le suivant. Considérons une option d'achat européenne. La banque va utiliser la prime C ainsi qu'un emprunt pour acheter un peu de sous-jacent S. On dit qu'elle se constitue un portefeuille. Au cours du temps, elle va faire varier la quantité de sous-jacent dans son portefeuille, de telle sorte qu'à l'échéance elle dispose d'une richesse $(S_N - K)^+$.

Dans l'exemple suivant, nous mettons en oeuvre ce principe dans le modèle le plus simple possible : le modèle à un pas - deux états. Nous mettons à profit cet exemple pour introduire de façon élémentaire les méthodes qui seront développées par la suite pour des modèles plus complexes.

1.1.7 Modèle à un pas -deux états

Dans ce modèle on suppose qu'il n'y a que deux dates, aujourd'hui et l'échéance ($N = 1$), et que le cours S_N de l'actif S à l'échéance ne peut prendre que deux valeurs S_+ ou S_-. On note S_0 le cours de l'actif S aujourd'hui. Outre la possibilité d'investir sur l'actif S, un agent financier peut aussi emprunter ou placer de l'argent au taux r.

On veut calculer le prix et la couverture d'une option d'échéance N et de fonction de paiement f de la forme $f = g(S_N)$ (s'il s'agit d'une option d'achat européenne $g(x) = (x - K)_+$. Pour faire face à son engagement, le vendeur de l'option va investir sur le marché financier. Il va acheter une quantité γ (à déterminer) d'actif S, et aussi β unités monétaires : si β est négatif, cela correspond à un emprunt au taux r, si β est positif, cela correspond à un placement rémunéré au (même) taux r. On dit que le vendeur de l'option se constitue un portefeuille $\Pi = (\beta, \gamma)$, composé de β unités monétaires et γ actifs S. La valeur de son portefeuille aujourd'hui est $X_0 = \beta + \gamma S_0$. Demain, elle sera $X_N = \beta(1 + r)^N + \gamma S_N$ (on rappelle que $N = 1$ dans ce paragraphe).

Pour que le vendeur puisse honorer son contrat, il faut que la valeur de son portefeuille au temps N soit supérieure à la fonction de paiement, c'est-à-dire :

$$X_N \geq g(S_N).$$

Imaginons que dans le cas $S_N = S_+$ ou $S_N = S_-$, la valeur du portefeuille soit strictement supérieure à la valeur de la fonction de paiement $g(S_N)$. Alors le vendeur aurait l'opportunité de gagner de l'argent avec une probabilité strictement positive, sans prendre de risque. Une telle opportunité, s'appelle une opportunité d'arbitrage en finance. On considère que cela est impossible (marché équilibré) ;

on dit que l'on fait l'hypothèse "d'absence d'oppor-tunité d'arbitrage". En conséquence, on doit avoir $X_N = g(S_N)$, donc (β, γ) est l'unique solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \beta(1+r)^N + \gamma S_+ = g(S_+) \\ \beta(1+r)^N + \gamma S_- = g(S_-) \end{cases}$$

Cette solution est donnée par

$$\gamma = \frac{g(S_+) - g(S_-)}{S_+ - S_-} \tag{1.1}$$

et

$$\beta = (1+r)^{-N} \frac{g(S_-)S_+ - g(S_+)S_-}{S_+ - S_-}$$

La formule 1.1 est communément appelée "formule du delta de couverture". Le portefeuille Π ainsi constitué par le vendeur, a une valeur initiale $X_0 = \beta + \gamma S_0$. Cette valeur correspond au coût du contrat. Le prix équitable C de l'option (la prime) sera donc $C = \beta + \gamma S_0$.

En résumé : Au temps $t = 0$, l'acheteur verse $C = \beta + \gamma S_0$ au vendeur. Avec cette prime, le vendeur se constitue un portefeuille composé de γ actifs S et β unités monétaires. Au temps N, soit l'actif vaut S_+, et alors le vendeur verse $g(S_+)$ à l'acheteur, soit l'actif vaut S_-, auquel cas le vendeur verse $g(S_-)$ à l'acheteur.

Remarque fondamentale : Le prix de l'option que l'on vient de calculer, Ainsi que la composition (β, γ) du portefeuille de couverture ne dépendent pas de la probabilité que l'actif S prenne la valeur S_+ ou S_-.

Pourquoi ? Car on a cherché à se couvrir dans tous les cas et non pas en moyenne. Si on veut être couvert dans tous les cas, peu importe que la probabilité de hausse soit supérieure ou non à celle de baisse, puisque notre couverture doit marcher dans les deux cas. Nous n'avons donc effectué aucun raisonnement de type probabiliste (à la différence de la couverture par diversification). Cependant, on peut interpréter le prix de l'option comme l'espérance de gain de son acheteur, non pas sous la probabilité réelle (dont on a vu qu'elle n'intervenait pas), mais sous une autre probabilité (artificielle) appelée probabilité risque-neutre. Cette remarque est la clef de voute des méthodes de couverture d'options développées par la suite. Examinons cela de plus près dans le cas d'une option d'achat européenne. Notons P^* laprobabilité, dite risque-neutre, définie par

$$P^*(S_N = S_+) = p^* = \frac{(1+r)^N S_0 - S_-}{S_+ - S_-}$$

et

$$P^*(S_N = S_-) = 1 - p^* = \frac{S_+ - (1+r)^N S_0}{S_+ - S_-}$$

Pour que P^* soit bien une probabilité, on supposera que $S_- < S_0(1+r)^N < S_+$(cette condition correspond à une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage). La probabilité P^* a été choisie de telle sorte que $S_0 = E^*[(1+r)^{-N} S_N]$. En effet,

$$\begin{aligned}
E^*[(1+r)^{-N} S_N] &= (1+r)^{-N} S + p^* + (1+r)^{-N} S - (1-p^*) \\
&= \frac{(1+r)^{-N} S + ((1+r)^N S_0 - S_-) + (1+r)^{-N} S - (S_+ - (1+r)^N S_0)}{S_+ - S_-} \\
&= S_0.
\end{aligned}$$

On appelle valeur réactualisée de S_n la quantité $(1+r)^{-n} S_n$. Elle correspond au nombre d'unités monétaires qu'il est possible d'acheter avec un actif S au temps

n. La probabilité P^* a donc été choisie de telle sorte que l'évolution de la valeur réactualisée de l'actif S n'ait pas de tendance à la hausse ou à la baisse en moyenne. Nous généraliserons cette approche ultérieurement par la théorie des martingales.

Relions le prix C de l'option à la probabilité P^*. Pour une option d'achat européenne, la fonction de paiement est

$$g(S_N) = (S_N - K)_+ \text{ Si } S_- < K < S_+ \text{ on a } g(S_+) = S_+ - K$$

et donc le prix de l'option est

$$C = \beta + \gamma S_0 = -(1+r)^{-N}\frac{(S_+ - K)S_-}{S_+ - S_-} + \frac{S_+ - K}{S_+ - S_-}S_0 = \frac{(S_+ - K)(S_0 - (1+r)^{-N}S_-)}{S_+ - S_-} \tag{1.2}$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de la fonction de paiement réactualisée $(1+r)^{-N}(S_N - K)_+$ sous la probabilité P^*

$$E^*[(1+r)^{-N}(S_N - K)_+] = p^*(1+r)^{-N}(S_+ - K) = \frac{(S_+ - K)(S_0 - (1+r)^{-N}S_-)}{S_+ - S_-} \tag{1.3}$$

En comparant 1.2 et 1.3, on voit que le prix C de l'option est égal à la valeur moyenne sous la probabilité risque-neutre P^* de la fonction de paiement réactualisée :

$$C = E^*[(1+r)^{-N}(S_N - K)_+].$$

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$. Alors, l´espérence condi-*

tionnelle de X par rapport à G noté par $E[X/G]$ est l´unique variable aléatoire vérifiant :

1. G-mesurable.
2. $\int_A E[X/G]dP = \int_A XdP, A \in G$.

Propriété 1.2.1 *on a*

– **Linéarité :** $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$,

$$E\left[aX + bY/G\right] = aE\left[X/G\right] + bE\left[Y/G\right].$$

– **Croissance :** Si $X \leq Y$, alors, $E\left[X/G\right] \leq E\left[Y/G\right]$.

– **Positivité :** Si $X > 0$, alors : $E\left[X/G\right] > 0$.

– Si X est indépendante de G, alors : $E\left[X/G\right] = E\left[X\right]$.

– Si X est G-mesurable, alors : $E\left[X/G\right] = X$.

– Soient G, H deux sous tribus de $\mathcal{F}$. Si $H \subset G$, alors :

$$E\left[E\left[X/G\right]/H\right] = E\left[E\left[X/H\right]/G\right] = E\left[X/H\right].$$

– **Inégalité de jensen :** Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $X \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$. Alors :

$$\varphi\left(E\left[X/G\right]\right) \leq E\left[\varphi(X)/G\right], p.s$$

1.2.1 Conditionement par rapport à un évènement

Soit A un évènement dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit G une tribu engendrée par l´évènement A, c'est-à-dire $A(G = \prec A \succ)$, où A est un évènement dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.2 *On appelle l´espérence conditionnelle de X par rapport à la tribu G notée $E[X \mid G]$, est une variable aléatoire définie comme suit :*

$$E[X \mid G](\omega) = E(X \mid A)1_A(\omega) + E(X \mid A^c)1_{A^c}(\omega)$$

1.2.2 le cas discret

Définition 1.2.3 *(Espérance conditionnelle de X sachant Z) L'espérance conditionnelle de X sachant Z, notée$E(X/Z)$, est une variable aléatoire, définie par*

$$E(X|Z) : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to h(Z(\omega))$$

où $h : Z \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $h(z) = E(X \mid Z = z)$, $\forall z \in Z$. La quantité $E(X \mid Z = z)$ est celle définie par (Conditionnement par rapport à un évènement) avec $B = \{Z = z\}$.

Remarque 1.2.1 *$E(X \mid Z = z)$ est un nombre réel, mais $E(X \diagup Z)$ est bien une variable aléatoire. En effet, $E(X \mid Z)(\omega)$ dépend de ω car la valeur que prend $Z(\omega)$ dépend de ω.*

Exemple 1.2.1 *Soit Z une variable aléatoire uniforme sur $\{1, ..., n\}$ (c'est-à-dire telle que $P(Z = i) = 1/n$ pour $i = 1, ...n)$ et ε une variable aléatoire indépendante de Z, telle que $P(\varepsilon = 1) = p$ et $P(\varepsilon = -1) = 1 - p$.*

On pose $X = \varepsilon Z$ qui une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{-n, ..., n\}$. Nous allons calculer $E(X \mid Z)$. Pour $j \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$E(X \mid Z = j) = \sum_{i=-n}^{n} iP(X = i \mid Z = j)$$

avec $P(X = i|Z = j) = 0$ si $i/ \in \{-j, j\}$ car $X = \pm Z$. Il reste donc

$$\begin{aligned} E(X|Z = j) &= -jP(X = -j|Z = j) + jP(X = j|Z = j) \\ &= -jP(\varepsilon = -1|Z = j) + jP(\varepsilon = 1|Z = j). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires ε et Z étant indépendantes, les événements $\{\varepsilon = -1\}et\{Z = j\}$ le sont aussi, donc

$$P(\varepsilon = -1|Z = j) = P(\varepsilon = -1) = 1 - p$$

et de même $P(\varepsilon = 1|Z = j) = P(\varepsilon = 1) = p$. Finalement, on obtient $E(X|Z = j) = -j(1 - p)+ jp = j(2p - 1)$ et $E(X|Z) = (2p - 1)Z$.

1.2.3 Conditionnement par plusieurs variables aléatoires

Considérons $n + 1$ variables aléatoires

$$X : \Omega \to X,$$
$$Z_1 : \Omega \to Z_1$$
$$\vdots$$
$$Z_n : \Omega \to Z_n$$

avec $\chi = \{x_1, ..., x_m\}$ et $Z_1 = \{\upsilon_{1,1}, ..., \upsilon_{k_1,1}\}, ...Z_{n=}\{\upsilon_{1,n}, ..., \upsilon_{k_n,n}\}$ des sous ensembles finis de $\mathbb{R}$. Nous allons étendre la définition précédente au cas à plusieurs variables. Pour tout $z_1 \in Z_1, ..., z_n \in Z_n$, la formule (conditionnement par rapport un évènement) donne

$$E(X|Z_1 = \upsilon_1, ..., Z_n = \upsilon_n) = \sum_{x \in \chi} xP(X = x \mid Z_1 = \upsilon_1, ..., Z_n = \upsilon_n).$$

Cette quantité est un nombre réel.

Définition 1.2.4 - *Espérance conditionnelle de X sachant $Z_1, ..., Z_n$* -

On appelle espérance conditionnelle de X sachant $Z_1, ..., Z_n$ la variable aléatoire $E(X|Z_1, ..., Z_n)$ définie par

$$E(X|Z_1, ..., Z_n)(\omega) = h(Z_1(\omega), ..., Z_n(\omega)),$$

où $h : Z_1 \times \cdots \times Zn \to \mathbb{R}$ est la fonction à n variables définie par

$$h(z_1, ..., z_n) = E(X|Z_1 = z_1, ..., Z_n = z_n)$$

pour tout $z_1 \in Z_1, ..., z_n \in Z_n$.

En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour calculer l'espérance conditionnelle $E(X|Z_1, ..., Z_n)$.

1.2.4 Cadre à densité

Deux variables aléeatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, possèdent une densité jointe (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe une fonction $f_{(X,Z)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout domaine (mesurable) $D \subset$ plan,

$$P((X, Z) \in D) = \int_D f_{(X,Z)}(x, z) dx dz.$$

Dans ce cas, on retrouve les densités marginales de X et Z par les formules

$$f_X(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dz \text{ et } \; f_z(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dx$$

Lorsque l'on a des variables avec une densité jointe, les probabilités $P(X = x)$ ou $P(Z = z)$ sont nulles, ce qui pose une difficulté pour définir la quantité $P(X = x|Z = z)$ représentant la probabilité que $X = x$ sachant que $Z = z$. Pour contourner cette difficulté, nous allons introduire la densité conditionnelle $f_X(x|Z = z)$ définie par

$$f_X(x \mid Z = z) = \frac{f_{(X,Z)}(x, z)}{f_Z(z)}$$

avec la convention $0/0 = 0$ et avec $f_Z(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dx$ d'après le rappel précédent. Remarquez que seul le terme au numérateur dépend de x. Le terme au dénominateur est une constante de normalisation qui assure que :

$$\int_{x \in \mathbb{R}} f_x(x \mid Z = z) dx = 1 \;\text{ lorsque } f_z(z) \neq 0$$

Comment interpréter cette quantité ? Tout comme la densité $f_X(x)$ représente la probabilité que la variable aléatoire X appartienne à un petit voisinage de x, la densité conditionnelle $f_X(x|Z=z)$ représente la probabilité que la variable aléatoire appartienne à un petit voisinage de x sachant que Z appartient à un petit voisinage de z.

Définition 1.2.5 *(Espérance conditionnelle avec une densité jointe) Si X et Z sont deux variables aléatoires réelles (avec X intégrable) ayant une densité jointe $f_{(X,Z)}$, l'espérance conditionnelle de X sachant Z est la variable aléatoire*

$$E(X \mid Z) : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to h(Z(\omega))$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$h(z) = \int_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x \mid Z = z)dx.$$

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *(martingale) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur cet espace. Le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$est une martingale à temps continu si :*

– $\forall t \geq 0 : E \mid X_t \mid < +\infty$;

– $\forall s, t \geq 0$,*telque* $s < t; X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable* ;

– $\forall s, t \geq 0$ *pour tout* $0 \leq s \leq t$.

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

Proposition 1.3.1 :

1. une famille de variables aléatoires réelles $(X_t)_{t\in T}$ est une sous martingale si $X_t \in L^1$, est adapté et pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s.$$

2. une famille de variables aléatoires réelles $(X_t)_{t\in T}$ est une sur-martingale si $X_t \in L^1$, est adapté et pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Exemple 1.3.1 ***(joueur au casino) :***

Nous allons introduire un certains nombre de notions mathématiques(martingales, temps d'arrêt, etc) à travers l'exemple de la fortune d'un joueur au casino.

considérons donc un joueur au casino et formalisons sa fortune :

On note J l'ensemble des jeux. Un jeu est donc $j \in J$

- **ex :** miser sur le 2 à la roulette
- ne pas miser

On appelle $R_j^{(n)}$ le rapport du jeu j au temps n.

ex : Si j= miser sur le 2, alors $R_j^{(n)} = \begin{cases} 36 \; si\ le\ 2\ sort \\ 0 \;\; \sin on \end{cases}$ Si j= ne pas miser, alors $R_j^{(n)} = 1$

On note $R^{(n)} := (R_j^{(n)}; j \in J)$ les rapports des différents jeux au temps n.

Notre joueur va miser au temps n sur chaque jeu. On note $M_j^{(n)}$ sa mise (éventuellement nulle) sur le jeu j, pour le $n^{ième}$coup.

On appelle X_0 la fortune initiale du joueur et X_n sa fortune après le $n^{ième}$ coup. Comme ne pas miser est considéré comme un jeu, le joueur réparti toute sa fortune X_{n-1} acquise après le $(n-1)^{ième}$ coup, en mises $M_j^{(n)}$ pour le coup suivant, donc

$$X_{n-1} = \sum_{j \in J} M_j^{(n)}.$$

Après le $n^{ième}$ coup, sa fortune est

$$X_n = \sum_{j \in J} M_j^{(n)} R_j^{(n)}.$$

L'information dont dispose le joueur après le $n^{ième}$ coup est donnée par les différentes valeurs prises par $R^{(1)}, ..., R^{(n)}$.On note $\sigma(R^{(1)}, ..., R^{(n)})$ cette information et pour alléger les formules on posera $\mathcal{F}_n = \sigma(R^{(1)}, ..., R^{(n)})$.

pour analyser mathématiquement l'évolution statistique de la fortune du joueur, il nous faut faire quelques hypothèses (réalistes) sur le déroulement du jeu.

Hypothèses sur le jeu :

Les rapport $R^{(1)}, ..., R^{(n)}, ...$ aux différents temps de jeu sont indépendants.

Les mises $M_j^{(n)}$ sont $\sigma(R^{(1)}, ..., R^{(n-1)})$-mesurables. Autrement dit, le joueur choisit ses mises pour le $n^{ième}$ coup uniquement en fonction de l'information $\mathcal{F}_{n-1}$ dont il dispose après le $(n-1)^{ième}$coup. Il ne devine pas le futur !

Le casino n'est pas une oeuvre philanthropique. Il ne perddonc pas d'argent en moyenne, c'est à dire : $E(R_j^{(n)}) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in J$.

1.3.1 Temps d'arrêt

Définition 1.3.2 *Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, \infty]$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si, pour tout $t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On associé à un temps d'arrêt les tribus suivants :

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

1. une constante positive est un temps d'arrêt.
2. Si T est un temp d'arrêt, T est $\mathcal{F}_t-$mesurable.
3. Si S et T deux temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.
4. Si S et T deux temps d'arrêt tel que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_T$.
5. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus T temps d'arrêt fini, on définit $X_t(\omega) = X_{T(\omega)}$.
6. Si un processus X est adapté, X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

1.3.2 Théorème d'arrêt

Théorème 1.3.1 ***(théorème d'arrêt pour un temps d'arrêt borné)***

Soient $X = (X_n)_{n \in N}$ une martingale (resp sous martingale, sur-martingale) par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n \in N}$, et T un temps d'arrêt borné alors,

$$E[X_T] = E[X_0] (resp E[X_T] \geq E[X_0], E[X_T] \leq E[X_0]).$$

Preuve. Comme T est borné, il existe $M \geq 1$ tel que $0 \leq T \leq M$ d'ou

$$X_{T \wedge M} = X_T$$

$$X_T = X_{T \wedge M} = X_0 + \sum_{k=0}^{M-1} 1_{\{k \langle T\}}(X_{k+1} - X_k)$$

■

ou, pour chaque $k = 0, 1, ..., M-1$, on a :

$E[1_{\{k \langle T\}}(X_{k+1} - X_k)] = E[E[1_{\{k \langle T\}}(X_{k+1} - X_k) \mid \mathcal{F}_k]] = E[1_{\{k \langle T\}}E[(X_{k+1} - X_k) \mid \mathcal{F}_k]]$.

Maintenant, Si X est une martingale (resp sous martingale, sur-martingale), on a :

$E[(X_{k+1} - X_k) \mid \mathcal{F}_k] = 0$ (resp ≥ 0,resp ≤ 0).

d'ou $E[1_{\{K \langle T\}}(X_{K+1} - X_K)] = 0$ (resp ≥ 0,resp ≤ 0).

par suite,

$$E[X_T] = E[X_0] + \sum_{k=0}^{M-1} E[1_{\{k \langle T\}}(X_{k+1} - X_k)]$$
$$= E[X_0].$$

(resp $\geq E[X_0]$, resp $\leq E[X_0]$).

Théorème 1.3.2 ***(théorème d'arrêt pour les martingales dominnées) :***

Soient $X = (X_n)_{n \in N}$ une $\mathcal{F}$- martingale et T un temps d'arrêt. on suppose, de plus que :

1. $P(\{T < +\infty\}) = 1$.

2. $E[\sup \mid X_{T\Lambda n} \mid] < +\infty$.

   Alors $E[\mid X_T \mid] < +\infty$ et $E[X_T] = E[X_0]$.

   Preuve. Comme $T\Lambda n$ est un temps d'arrêt borné, d'après la théorème précédente le processus arrête $(X_{T\Lambda n}) \Longrightarrow E[X_{T\Lambda n}] = E[X_0]$. ■

   pour demontrer le théorème, il suffit de prover que $E[X_{T\Lambda n}] \to E[X_T]$ et que X_T est intégrable .

La condition **1** implique que l'on a : $X_{T\Lambda n} \to X_T$ quand $n \to \infty$, En générale, ce résultat n'applique pas nécessairement que l'on a : $E[X_{T\Lambda n}] \to E[X_T]$.

Ceci est pourtant vrai ici, mais pour des raison bien préciser que l'on détaille ci-après. posons

$$Z = \sup_{n \geq 0} \mid X_{T\Lambda n} \mid$$

D'après la condition **2**, cette variable aléatoire évidemment positive est intégrable et naturellement, pour tout $n \geq 0$, ona : $\mid X_{T\Lambda n} \mid \leq Z$. les conditions d'application du théorème de convergence dominé de Lebsegue sont satisfaites, on peut donc conclure que X_T est intégrable et que $E[X_{T\Lambda n}] \to E[X_T]$, lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 1.3.3 *Soit $(X_t)_{t \in I}$ une sous martingale positive indéxeé par $I \subset \mathbb{R}_+$. et on note par J l'ensemble des temps d'arrêt prenant leur valeurs dans un sous-ensemble fini de I.*

Alors la famille $\{X_\tau, \tau \in J\}$ est uniformément intégrable.

Chapitre 2

Marché Bond-Stock

2.1 Marché Bond-stock (ou marché B-S)

Evolution

On s'intéresse à un marché constitué de deux actifs :

– Un actif sans risque **B** (d'évolution prévisible),

– Un actif risqué **S** (d'évolution imprévisible).

L'actif sans risque **B** (Bond ou obligation) est typiquement un bon du trésor. L'actif risqué **S** (Stock) peut être n'importe quelle valeur négociée sur les marchés, par exemple une action cotée en bourse, le cours d'une matière première, le cours d'une option, Notons $\Delta B_n = B_n - B_{n-1}$ et $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ les variations de B et de S entre les temps $n-1$ et n L'évolution des actifs B et S est décrite par :

$$\begin{cases} \Delta B_n = r_n B_{n-1} \\ \Delta S_n = \rho_n S_{n-1} \end{cases} \tag{2.1}$$

avec r_n le taux d'intérêt de B et ρ_n le rendement de S. Le taux d'intérêt de r_n

et le rendement ρ_n sont a priori stochastiques. autrement dit r_n et ρ_n sont des variables aléatoires.

On note $\mathcal{F}_n$ l'information dont on dispose au temps n. L'actif B est dit sans risque car son évolution est prévisible : au temps $n-1$ on connait le valeur du taux d'intérêt r_n pour le temps n. La variable aléatoire r_n est donc $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable. Par contre, l'actif S est un actif risqué : au temps $n-1$ on ne connait pas la valeur de ρ_n. La variable aléatoire ρ_n est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable, mais pas $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Notre information au temps n est donc constituée de $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, ..., S_n, B_0, ..., B_{n+1})$.

Remarque 2.1.1 *Ici le temps n est discret, et on peut voir $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ comme la dérivée en temps discret de X. On suposera aussi dans toute la suite que B et S ne peuvent prendre qu'un **nombre fini** de valeurs. Cela correspond en fait à la réalité : les cotations sont données avec un nombre fini de chiffres après la virgule et elle ne se font pas exactement en temps continu.*

Il est commode de réécrire l'évolution des actifs sous la forme suivante. L'équation 2.1 donne $B_n - B_{n-1} = r_n B_{n-1}$ d'où $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$. par réccurence on obtient

$$B_n = (1 + r_n)...(1 + r_1)B_0$$

et de la même manière $S_n = (1 + \rho_n)...(1 + \rho_1)S_0$.

Définition 2.1.1 *(Exponentielle stochastique) A un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ on associé l'exponentielle stochastique $\varepsilon_n(X)$ définie par $\varepsilon_0(X) = 1$ et*

$$\varepsilon_n(X) = (1 + \Delta X_1)...(1 + \Delta X_n),\ \ n \geq 1$$

On peut réexprimer les valeurs de B_n et S_n avec l'éxponentielle stochastique. En *posant*

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} r_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n} \rho_k$$

Les valeurs de B_n et S_n sont données par

$$\begin{cases} B_n = B_0 \varepsilon_n(U) \\ S_n = S_0 \varepsilon_n(V) \end{cases}$$

Le lemme suivant répertoire les principales propriètés de l'éxponentielle stochastique.

Lemme 2.1.1 *propriétés de* $\varepsilon_n(.)$

1. On a $\varepsilon_n(X)\varepsilon(Y) = \varepsilon_n(X + Y + [X, Y])$, où $[X, Y]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k$ est appelée variation quadratique de X et Y. par convention $[X, Y]_0 = 0$.
2. On a $1/\varepsilon_n(X) = \varepsilon(-X^*)$, oú $X_0^* = 0$ et $\Delta X_n^* = \frac{\Delta X_n}{1+\Delta X_n}$.
3. $(\varepsilon_n(X))_{n \leq N}$ est une martingale ssi $(X_n)_{n \leq N}$ est une martingale .

Preuve.

1. Par réccurence. La formule est vraie pur $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n - 1$, et montrons qu'elle sera alors vraie au rang n :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(X)\varepsilon_n(Y) &= \varepsilon_{n-1}(X)(1 + \Delta X_n)\varepsilon_{n-1}(Y)(1 + \Delta Y_n) \\ &= \varepsilon_{n-1}(X)\varepsilon_{n-1}(Y)(1 + \Delta X_n + \Delta Y_n + \Delta X_n \Delta Y_n) \\ &=^{réccurence} \varepsilon_{n-1}(X + Y + [X, Y])(1 + \Delta(X + Y + [X, Y])_n) \\ &= \varepsilon_n(X + Y + [X, Y]). \end{aligned}$$

2. Difinissons X^*par $X_0^* = 0$ et $\Delta X_n^* = \frac{\Delta X_n}{1+\Delta X_n}$.Vu la formule du **1.** on a

$$\varepsilon_n(X)\varepsilon_n(-X^*) = \varepsilon_n(X - X^* - [X, X^*]).$$

on a aussi

$$\begin{aligned}\Delta(X - X^* - [X, X^*])_n &= \Delta X_n - \frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n} - \Delta X_n(\frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n}) \\ &= \frac{\Delta X_n + (\Delta X_n)^2 - \Delta X_n - (\Delta X_n)^2}{1 + \Delta X_n} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comme pour tout processus Z , on a l'égalité $Z_n = Z_0 + \sum_{k=1}^n \Delta Z_k$, il s'en suit que $(X - X^* - [X, X^*])_n = 0$ et finalemment $\varepsilon_n(X)\varepsilon_n(-X^*) = \varepsilon_n(0) = 1$.

3. En utilisant que $\varepsilon_{n-1}(X)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable on obtient

$$\begin{aligned}E(\varepsilon_n(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= E((1 + \Delta X_n)\varepsilon_{n-1}(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \varepsilon_{n-1}(X)(1 + E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})).\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&E(\varepsilon_n(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon_{n-1}(X) \textbf{ ssi } E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \\ &\textbf{ssi } E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}.\end{aligned}$$

■

2.1.1 Probabilités risque-neutre

Nous avons vu sur le modèle à "un pas/deux états" qu'il pouvait être judicieux de regarder l'évolution du marché non pas sous la probabilité réelle P, mais sous une probabilité artificielle, appelée probabilité risque-neutre, qui annule en moyenne la tendance haussière ou baissière du cours réactualiséde S. Nous allons généraliser cette démarche.

Définition 2.1.2 *(Probabilité risque-neutre) On dit que* P^* *est une probabilité risque-neutre si :*

– P^* est équivalente à la probabilité réelle P, c'est à dire $P^*(A) = 0$ **ssi** $P(A) = 0$,
– $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$ est une martingale sous P^*.

La première condition est une condition technique qui impose qu'un évènement qui n'a pas lieu dans le monde réel ($P(A) = 0$), n'a pas lieu non-plus sous la probabilité risque-neutre ($P^*(A) = 0$) ; et vice-versa. La seconde condition est équivalente à "$(S_n/B_n)_{n \leq N}$ est une martingale sous P^*".

La valeur $S_n/\varepsilon_n(U)$ est appelée valeur réactualisée de S_n. Elle correspond à la valeur relative de S_n par rapport à B_n. Autrement dit, elle donne le nombre d'obligation B que l'on peut acheter au temps n avec un actif S.

Comment interpréter cette probabilité P^* ?

Sous la probabilité P^*les évolutions possibles du marché sont les même que dans le "monde réel"(sous P), mais elles ont lieu avec une probabilité différente. Par exemple, une évolution très probable sous P, sera peut être peu probable sous P^*. La probabilité P^* n'est pas donc pas observée sur les marchés, mais c'est un outil de calcul très utile. Elle permet de se ramener à un marché"risque-neutre" où la valeur relative (S_n/B_n) du cours de S par rapport au cours de B n'a pas de tendance haussière ou baissière.

Nous allons relier dans les paragraphes suivants l'existence d'une probabilité risque-neutre aux notions économique d'arbitrage et de complitude du marché.

Dorénavant , nous noterons $E^*(X)$ pour l'espérance de X prise sous la probabilité P^*, $E^*(X \mid \mathcal{F}_n)$ pour l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}_n$ sous la probabilité P^*, etc.

Par exemple, si $X : \Omega \to \{x_1, ..., x_k\}$

$$E^*(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P^*(X = x_i).$$

La prochaine proposition exprime la condition sur U_n et V_n pour qu'une probabilité soit "risque-neutre".

Proposition 2.1.1 *-caractérisation d'une probabilité risque-neutre-*

Si P^*est une probabilité équivalente à P alors P^* est une probabilité risque-neutre **ssi** $(V_n - U_n)$ est une martingale sous P^*.

Preuve. Pour montrer que P^* est une probabilité risque-neutre il faut vérifier que $(S_n/\varepsilon_n(U))$ est une martingale sous P^* **si et seulement si** $(V_n - U_n)$ est une martingale sous P^*. Exprimons $S_n/\varepsilon_n(U)$ à l'aide de l'exponentielle stochastique :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} &= \frac{S_0 \varepsilon_n(V)}{\varepsilon_n(U)} \\ &=^{lemme 2.1.2} S_0 \varepsilon_n(V) \varepsilon_n(-U^*) \\ &=^{lemme 2.1.1} S_0 \varepsilon_n(V - U^* - [V, U^*]) \end{aligned}$$

■

on déduit du lemme 2.1.3 que le processus $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n\leq N}$ est une martingale sous P^***ssi**

$$E^*(\Delta(V-U^*-[V,U^*])_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E^*(\frac{\Delta V_n - \Delta U_n}{1+\Delta U_n} \mid \mathcal{F}_n) = 0.$$

ou $\Delta U_n = r_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable donc

$$E^*(\Delta(V-U^*-[V,U^*])_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{1+\Delta U_n} E^*(U_n - \Delta U_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

et $(V-U^*-[V,U^*])_{n\leq N}$ est une martingale **ssi** $E^*(\Delta V_n - \Delta U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$

c'est à dire **ssi** $V-U$ est une martingale. En recollant tous les morceaux, on obtient le résultat annoncé.

2.1.2 Portefeuilles autofinances

Confectionnons-nous un portefeuille $\Pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n\leq N}$ composé au temps n de β_n unités de B et γ_n unités de S. Sa valeurau temps n est

$$X_n^{\Pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

La gestion du portefeuille Π s'effectue de la manière suivante. Au temps n, nous possédons une quantité β_n et γ_n d'actifs B et S dont les cours sont B_n et S_n. Nous composons notre portefeuille Π de nouvelles quantités β_{n+1} et γ_{n+1} d'actifs B et S. Ce choix s'effectue au temps n, donc β_{n+1} et γ_{n+1} sont $\mathcal{F}_n$-mesurables (ou de manière équivalente β_n et γ_n sont $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable).

Au temps n, la valeur du portefeuille est donnée par $X_n^{\Pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$. Après le réinvestissement, sa valeur est donnée par $\beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n$. Il est naturel de considérer les portefeuilles qui gardent une valeur constante lors du réinvestissement (on n'ajoute ni ne retire de l'argent au portefeuille), c'est à dire tels que

$$\beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n$$

Un tel portefeuille sera dit autofinancé. Dans la définission suivante, la condition d'autofinancement est exprimée au temps $n-1$ plutôt que n.

Définition 2.1.3 *(portefeuille autofinancé) Un portefeuille est dit autofinancé si*

$$\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0$$

Remarque 2.1.2 *La valeur d'un portefeuille autofinancé ne varie pas lors du réinvestissement, mais elle varie entre deux instants consécutifs.*

– Comment évolue statistiquement la valeur X_n^Π d'un portefeuille autofinancé sous une probabilité risque-neutre ? La réponse est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.1.2 *(Autofinancement et martingales)*

Supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre P^*. Alors, la valeur réactualisée $(\varepsilon_n(U)^{-1} X_n^\Pi)_{n\geq 0}$ d'un portefeuille autofinancé Π est une martingale sous P^*.

Preuve. Comme $B_n = B_0 \varepsilon_n(U)$, la valeur réactualisée du portefeuille est donnée par

$$X_n^\Pi / \varepsilon_n(U) = \beta_n B_0 + \gamma_n S_n / \varepsilon_n(U).$$

■

En prenant l'espérance conditionnelle de cette égalité on obtient

$$
\begin{aligned}
E^*(\frac{X_n^\Pi}{\varepsilon_n(U)} \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= E^*(\beta_n B_0 \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E^*(\gamma_n \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \beta_n B_0 + \gamma_n E^*(\frac{S_n}{\varepsilon_{n(U)}} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \quad \text{(car } \beta_n \text{ et } \gamma_n \text{ sont } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable)} \\
&= \beta_n B_0 + \gamma_n \frac{S_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \quad \text{(car } (S_n/\varepsilon_n(U)) \text{ est une martingale sous } P^*) \\
&= (\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1})/\varepsilon_{n-1}(U) \quad \text{(car } B_{n-1} = B_0 \varepsilon_{n-1}(U)) \\
&= (\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1})/\varepsilon_{n-1}(U) \quad \text{(par autofinancement)} \\
&= X_{n-1}^\Pi/\varepsilon_{n-1}(U).
\end{aligned}
$$

donc $\left(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U)\right)$ est bien une martingale sous P^*.

2.2 Arbitrage et martingales

Dorénavant on s'intéresse à l'évolution du marché jusqu'à une date N fixée.

En économie, la notion d'opportunité d'arbitrage correspond à la notion "d'opportunité de gagner de l'argent sans prendre de risque". Mathématiquement, cela se formalise de la manière suivante.

Définition 2.2.1 *(opportunité d'arbitrage)*

On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille autofinancé Π tel que

$$X_0^\Pi = 0, \quad X_n^\Pi \geq 0 \ \ \forall n \leq N \ , \ \text{et } P(X_N^\Pi > 0) > 0.$$

Autrement dit, il existe une opportunité d'arbitrage s'il est possible, en gérant un portefeuille de façon autofinancée, de gagner de l'argent (avec probabilité positive), tout en ayant aucun risque d'en perdre. Cette hypthèse est naturelle dans un marché équilibé. Le théorème fondamental suivant relie la notion économique "d'absence dopportunité d'arbitrage" à la notion mathématique "d'éxistence d'une probabilité risque-neutre".

Théorème 2.2.1 *(Arbitrage et probabilité risque-neutre)*

Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage $\Longleftrightarrow$Il existe au moins une probabilité risque-neutre.

($\Longleftarrow$) Soit P^* une probabilité risque-neutre et Π un portefeuille autofinancé tel que $X_0^\Pi = 0$. D'après la proposition de (Autofinancement et martingales), $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))_{n\leq N}$ est martingalesous P^*. En particulier

$$E^*(\frac{X_N^\Pi}{\varepsilon_N(U)}) = E^*(\frac{X_0^\Pi}{\varepsilon_0\,(U)}) = 0.$$

En conséquence si $X_N^\Pi/\varepsilon_N(U) \geq 0$, alors nécessairement $P^*(X_N^\Pi > 0) = 0$, Comme de plus P et P^* sont par hypothèse équivalentes, on en déduit que $P(X_N^\Pi > 0) = 0$, Il n'ya pas d'opportunité d'arbitrage possible.

($\Longrightarrow$) La preuve de la réciproque est plus ardue. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [14] Théorème 2.6.

2.3 Complétude du marché

En économie un marché complet correspond à un marché idéal, sans contraintes ni frais de transactions, où tous les actifs sont accessibles à tout moment et en n'importe quelle quantité. Mathématiquement, cette notion est formalisée de la manière suivante.

Définition 2.3.1 *(Marché complet) Le marché B-S est dit complet si, pour toute variable aléatoire $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, il existe un portefeuille autofinancé* Π *qui réplique* f *à l'échéance* N*, c'est à dire tel que*

$$X_N^{\Pi}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

L'hypothèse de complétude du marché est difficillement justifiable économiquement. cependant, cette hypothèse permet de construire une théorie d'évaluation des produits dérivés très simple, qui sert de "guide" en pratique.

Nous allons voir que la notion de complétude est liée à l'unicité d'une probabilité risque-neutre.

Théorème 2.3.1 *(complitude et probabilité risque-neutre)*

Considérons un marché B-S sans opportunité d'arbitrage. On a l'équivalence :

Le marché est complet $\Leftrightarrow$ Il existe une **unique** probabilité risque-neutre P^*.

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que le marché soit complet et qu'il existe deux probabilités risque-neutre P^*et $P^{'}$. Comme $P^* \neq P^{'}$, il existe un évènement A tel que :

$$P^*(A) \neq P^{'}(A).$$

■

Posons $f(\omega) = \varepsilon_N(U)(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)$. Le marché étant complet il existe un portefeuille autofinancé Π tel que $X_N^{\Pi}(\omega) = f(\omega)$ trel que soit $\omega \in \Omega$. D'après la proposition de (Autofinancement et martingales), la valeur réactualisée du portefeuille Π est une martingale sous P^* et sous $P^{'}$. En conséquence,

$E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi}) = E^*(\varepsilon_0(U)^{-1}X_0^{\Pi})$ et $E^{'}(\ \varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi}) = E^{'}(\varepsilon_0(U)^{-1}X_0^{\Pi})$.

d'une part $\varepsilon_0(U)^{-1} = 1$ et d'autre part $\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi} = \varepsilon_N(U)^{-1}f = \mathbf{1}_A$, donc

$$E^*(\mathbf{1}_A) = X_0^{\Pi} = E^{'}(\mathbf{1}_A),$$

c'est à dire $P^*(A) = P^{'}(A)$ ce qui contredit (proposition de caractisation d'une probabilité risqe-neutre). Il ne peut donc pas exister deux probabilité risque-neutre différentes. On sait par ailleurs qu'il en existe au moins une car on a supposé l'absence d'opportunité d'arbitrage.

($\Longleftarrow$) comme précédemment. nous ne démontrons pas la réciproque. Nous revoyons le lecteur curieux à Théorème de (Arbitrage et probabilités risque-neutre).

2.4 Lemme de Girsanov

Dans le cadre du marché B-S, les notions économiques d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude correspondent aux notions mathématiques d'existence et d'unicité d'une probabilité risque-neutre P^* à partir de P. On peut créer facilement une nouvelle probabilité $P^{'}$ à partir de P. Considérons une variable aléatoire $Z > 0$ vérifiant $E(Z) = 1$ et difinissons $P^{'}$ en posant

$$P^{'}(\omega) = Z(\omega)P(\omega), \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega. \tag{2.2}$$

On a alors pour tout évènement A

$$P^{'}(A) = \sum_{\omega \in A} P^{'}(\omega) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega)P(\omega) = E(Z\mathbf{1}_A).$$

On vérifie aisément que $P^{'}$ est bien une probabilité, et on peut montrer que toute probabilité $P^{'}$ équivalente à P est de la forme (2.2). On vérifie également que l'éspérance sous $P^{'}$ d'une variable aléatoire X est donnée (dès qu'elle existe) par

$$E'(X) = E(ZX).$$

Le lemme suivant permet d'obtenir, pour un processus qui n'est pas une martingale sous P, une probabilité P' de la forme (2.2) sous laquelle le processus sera une martingale.

Lemme 2.4.1 *-Formule Girsanov (temps discret)-*

Soit $(M_n)_{n \leq N}$ une $\mathcal{F}_n-$martingale sous la probabilité P et Z une variable aléatoire vérifiant $E(Z) = 1$ et $Z(\omega)\rangle 0$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Définissons la probabilité P' en posant

$$P'(\omega) = Z(\omega)P(\omega), \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

Alors le processus $(M_n^*)_{n \leq N}$ défini par

$$M_n^* = M_n - \sum_{k=1}^{n} E(\frac{Z_k}{Z_{k-1}} \Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1}), \quad \text{avec } Z_n = E(Z \mid \mathcal{F}_n),$$

est une martingale sous la probabilité P'.

2.5 Couverture des options européenne

Une option de type européenne est un contrat qui ne peut être exercé qu'à l'échéance N fixée à l'avance. Une telle option est donc caractérisée par son échéance N et sa fonction de paiement $f : \Omega \to \mathbb{R}$. La quantité $f(\omega)$ correspond à ce que reçoit le détenteur de l'option à l'échéance N dans l'éventualité ω.

Exemples d'options européennes :

Option d'achat européenne : $f(\omega) = (S_N(\omega) - K)_+$

- Option de vente européenne : $f(\omega) = (K - S_N(\omega))_+$

- Option Collar : $f(\omega) = min(S_N(\omega) - K_1, K_2)$

- Option "look-back" : $f(\omega) = S_N(\omega) - min(S_0(\omega), ..., S_N(\omega))$

- Option asiatique $f(\omega) = \frac{S_{N-p}(\omega)+...+S_N(\omega)}{p}$ pour un $p < N$.

Pour se couvrir le vendeur de l'option va investir sur le marché l'argent que l'acheteur lui a versé. Il va se constituer un portefeuille Π dont la valeur à la date N lui permettra de faire face à son engagement : son portefeuille Π doit donc vérifier $X_N^{\Pi}(\omega) \geq f(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. On appelle portefeuille de couverture un tel portefeuille.

Définition 2.5.1 *(Portefeuille de couverture) Un portefeuille Π est un portefeuille de couverture, si sa valeur à l'échéance est supérieure ou égale à la fonction de paiement f , c'est à dire si*

$$X_N^{\Pi}(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Le vendeur ne va pas injecter d'argent dans son portefeuille ni en retirer. Il va donc le gérer de manière autofinancée. De plus, la valeur initiale X_0^Π de son portefeuille va correspondre au montant (la prime) que l'acheteur lui a versé. En conséquence, le prix (équitable) d'une option correspond à la plus petite valeur initiale X_0^Π parmi toutes les valeurs initiales des portefeuilles de couverture autofinancés Π. Ecrit de manière synthétique cela donne :

Définition 2.5.2 *(Prix d'une option européenne) Le prix C d'une option européenne de fonction de paiement f et d'échéance N correspond à la quantité*

$$C = \inf \left\{ \begin{array}{c} X_0^\Pi \textit{ tel que - } \Pi \textit{ est autofinancé} \\ \text{- } X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}$$

2.5.1 Prix d'une option dans un marché complet

Nous supposerons dans ce paragraphe que le marché $B - S$ est sans opportunité d'arbitrage et complet. Vu les résultats du chapitre précédent, il existe donc une unique probabilité risque-neutre P^*. Le résultat suivant établit le prix d'une option européenne en fonction de P^*.

Théorème 2.5.1 *(Prix d'une option européenne)*

1. Le prix d'une option européenne de fonction de paiement f à l'échéance N est

$$C = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f).$$

2. Il existe un portefeuille de couverture autofinancé Π^* de valeur initiale C. La valeur au temps n de ce portefeuille est donnée par

$$X_n^{\Pi^*} = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} \varepsilon_n(U) f \mid \mathcal{F}_n)$$

où $\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, ..., B_{n+1}, S_0, ..., S_n)$.

Remarque 2.5.1 – *Le résultat précédent ne donne pas la composition* $(\beta_n^*, \gamma_n^*)_{n\leq N}$ *du portefeuille* Π^*. *Cependant, on peut généralement utiliser la formule donnant* X_n^Π *pour calculer* β_n^* *et* γ_n^*. *La difficulté consiste souvent à déterminer* P^*.

Si P^*est connu, on peut alors obtenir C, au moins par des simulations numériques (avec des méthodes de Monte-Carlo).

Considérons un portefeuille de couverture autofinancé Π. Sous P^*, la valeur réactualisée du portefeuille $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))_{n\leq N}$ est une martingale (complétude de marché) donc

$$E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^\Pi) = X_0^\Pi.$$

Or $X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ donc

$$X_0^\Pi \geq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f)$$

Cela étant vrai pour tout portefeuille de couverture autofinancé, on en déduit que

$$C = \inf \left\{ \begin{array}{c} X_0^\Pi \text{ tel que } - \ \Pi \text{ est autofinancé} \\ - \ X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \ \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \geq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f) \qquad (2.3)$$

Parallèlement, le marché étant complet il existe un portefeuille autofinancé Π^* tel que $X_N^{\Pi^*}(\omega) = f(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Comme Π^* est autofinancé,$(X_n^{\Pi^*}/\varepsilon_n(U))_{n\leq N}$ est une martingale. En conséquence

$$X_0^{\Pi^*} = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi^*}) = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f)$$

et comme Π^* est un portefeuille de couverture autofinancé, on a $X_0^{\Pi^*} \geq C$, donc finalement

$$C \leq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f \tag{2.4}$$

En combinant 2.3 et 2.4 on obtient

$$C = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f).$$

Nous avons prouvé le 1. Concernant le 2. on remarque que Π^* convient et comme $(X_n^{\Pi^*}/\varepsilon_n(U))$ est une martingale sous P^*

$$\frac{X_n^{\Pi^*}}{\varepsilon_n(U)} = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} X_N^{\Pi^*} \mid \mathcal{F}_n) = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f \mid \mathcal{F}_n)$$

et on obtient la valeur du portefeuille Π^* en multipliant l'égalité par $\varepsilon_n(U)$, et en faisant rentrer $\varepsilon_n(U)$ dans l'espérance conditionnelle (car $\varepsilon_n(U)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable).

2.5.2 Cas d'un marché incomplet

Que se passe-t-il si le marché est incomplet ? Dans ce cas, il n'y a plus un prix rationnel, mais une fourchette de prix acceptables (appelée spread par les anglo-saxons). Considérons les deux quantités

prix demandé (ask) : $C^+ = \inf \left\{ \begin{array}{c} X_0^{\Pi} \text{ tel que - } \Pi \text{ est autofinancé} \\ \text{- } X_N^{\Pi}(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}$

et prix offert (bid) : $C^- = \sup \left\{ \begin{array}{c} X_0^{\Pi} \text{ tel que - } \Pi \text{ est autofinancé} \\ \text{- } X_N^{\Pi}(\omega) \leq f(\omega), \ \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}$

Observons tout d'abord que si P^* est une probabilité risque-neutre,

$$C^- \leq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq C^+.$$

En effet, si Π est un portefeuille autofinancé, $(X_n^{\Pi^*}/\varepsilon_n(U))$ est une martingale sous P^* (Proposition 3.3 - Autofinancement et martingales -) donc $X_0^\Pi = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} X_N^\Pi)$. En particulier :

– Si $X_N^\Pi \geq f$, alors $X_0^\Pi \geq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f)$ et donc $C^+ \geq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f)$,

– Si $X_N^\Pi \leq f$, alors $X_0^\Pi \leq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f)$ et donc $C^- \leq E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f)$.

Remarquons ensuite que si le marché est complet $C^+ = C^- = C$. En effet, nous avons vu qu'il existe Π^* autofinancé tel que $X_0^{\Pi^*} = C^+ = E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f)$ et $X_N^{\Pi^*} = f$. Le portefeuille Π^* vérifie aussi les conditions de C^- donc $C^+ = X_0^{\Pi^*} \leq C^-$. Finalement $C_+ = C_-$car on

a toujours $C^- \leq C^+$. Vu l'inégalité (en marché incomplet), dans un marché incomplet on a

$$C^- \leq \inf_{\substack{P^* proba \\ risque-neutre}} E^*(\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq \sup_{\substack{P^* proba \\ risque-neutre}} E * (\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq C^+$$

En particulier $C^- < C^+$ en général : on dit qu'il y a un "spread" non nul.

Dans un marché incomplet il peut être intéressant de développer des portefeuilles de couver-ture non strictement autofinancés : par exemple des portefeuilles autofinancés en moyenne, etc. Il y a alors un risque de ne pas pouvoir couvrir l'option (donc de perdre de l'argent) et il s'agit de minimiser les risques. Nous renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages plus avancés.

2.6 Couverture des options américaines

Une option de type américaine est un contrat qui peut être exercé (une seule fois) à n'importe quel instant avant l'échéance N. Il est caractérisé par son échéance N et ses fonctions de paiement fn aux temps $n \leq N$. La fonction f_n correspond à ce que le détenteur de l'option reçoit s'il exerce son droit au temps n.

- Option américaine d'achat : $f_n(\omega) = (S_n(\omega) - K)_+$

- Option américaine de vente : $f_n(\omega) = (K - S_n(\omega))+$

- Option russe : $f_n(\omega) = sup_{k \leq n} S_k(\omega) - S_n(\omega)$.

Le détenteur de l'option a le droit d'exercer son option à n'importe quel temps n avant l'échéance N . Il reçoit alors la valeur f_n de la part du vendeur. Pour se couvrir, le vendeur doit donc se constituer un portefeuille Π tel que

$$X_n^{\Pi}(\omega) \geq f_n(\omega) \ \forall n \leq N \ \forall \omega \in \Omega$$

Définition 2.6.1 *(Portefeuille de couverture) On appelle portefeuille de couverture un portefeuille* Π *vérifiant la condition*

$$X_n^{\Pi}(\omega) \geq f_n(\omega) \quad \forall n \leq N, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Comme dans le cas des options européennes, le prix équitable d'une option de type américaine va correspondre à la valeur initiale minimale que doit avoir un portefeuille de couverture pour pouvoir être autofinancé. Plus précisément :

Définition 2.6.2 *(Prix d'une option américaine) Le prix d'une option de type* *américaine correspond à la quantité*

$$C = \inf \left\{ \begin{array}{c} X_0^\Pi \text{ tel que - } \Pi \text{ est autofinancé} \\ \text{- } X_n^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

Appelons τ^{exc} le temps auquel l'acheteur décide d'exercer son option. Le temps τ^{exc} dépend de l'évolution du marché, c'est donc une variable aléatoire. De plus, le détenteur de l'option prend sa décision d'exercice uniquement à partir de l'information dont il dispose à cette date là (il n'est pas devin) : le temps τ^{exc} est donc un temps d'arrêt.

2.6.1 Prix d'une option américaine

Supposons que Π est un portefeuille de couverture autofinancé. Nous savons (proposition de Autofinancement et martingales) que $X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))$ est une martingale sous P^*et d'après la discussion précédente τ^{exc} est un temps d'arrêt. Si nous appliquons le théorème d'arrêt (ce que nous pouvons faire car τ^{exc} est borné par $N : \tau^{exc}(\omega) \leq N, \forall \omega \in \Omega$, nous obtenons

$$E^*(\varepsilon_{\tau^{exc}}(U)^{-1} X_{\tau^{exc}}^\Pi) = E^*(\varepsilon_0(U)^{-1} X_0^\Pi) = X_0^\Pi.$$

Comme $X_n^\Pi \geq f_n$ quel que soit $n \leq N$, on a $X_{\tau^{exc}}^\Pi \geq f_{\tau^{exc}}$ et

$$X_0^\Pi \geq E^*(\varepsilon_{\tau^{exc}}(U)^{-1} f_{\tau^{exc}}).$$

Cela doit être vrai quel que soit le temps d'exercice τ^{exc}, donc on doit avoir

$$X_0^{\Pi} \geq \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

où T_N est l'ensemble des temps d'arrêt τ tels que $\tau(\omega) \leq N$ pour tout $\omega \in \Omega$. En conséquence le prix C de l'option défini par (Prix d'une option américaine) 2.5 satisfait l'inégalité

$$C \geq \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau). \tag{2.6}$$

En fait, nous allons voir qu'il y a égalité.

Théorème 2.6.1 - *Prix d'une option américaine* -

Le prix d'une option américaine d'échéance N et de fonction de paiement f_n est donnée par

$$C = \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

où E^* représente l'espérance prise sous l'unique probabilité risque-neutre P^*et T_N est l'ensemble des temps d'arrêt τ tels que $\tau(\omega) \leq N$ pour tout $\omega \in \Omega$. La formule 2.6 nous donne déja l'inégalité $C \geq \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$. Il reste maintenant à exhiber un portefeuille de couverture autofinancé Π^* de valeur initiale

$$X_0^{\Pi^*} = \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

2.6.2 Principe de programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique va nous permettre de calculer le supremum

$$\sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau).$$

Nous noterons dorénavant $X_n = \varepsilon_n(U)^{-1} f_n$. et nous introduisons la suite $(Y_n)_{n \leq N}$ définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} Y_N = X_N \\ Y_{N-1} = \max(X_{N-1}, E^*(Y_N \mid \mathcal{F}_{N-1})) \\ \vdots \\ Y_n = \max(X_n, E^*(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \\ \vdots \\ Y_0 = \max(X_0, E^*(Y_1 \mid \mathcal{F}_0)). \end{cases}$$

Le problème maximisation est résolu grâce au résultat suivant.

Théorème 2.6.2 - *Principe de programmation dynamique* -

Définissons le temps T par

$$T(\omega) = \inf \{K \geq 0, \text{ tel que } X_k(\omega) = Y_k(\omega)\}.$$

Alors T est un temps d'arrêt borné par N vérifiant (5.4)

$$Y_0 = E^*(X_T) = \sup_{\tau \in T_N} E^*(X_\tau). \tag{2.7}$$

En particulier, le prix C de l'option est donné par Y_0 et le temps d'exercice optimal par T.

Plus généralement, si $T_n(\omega) = \inf \{k \in [n, N], \text{ tel que } X_k(\omega) = Y_k(\omega)\}$, alors

$$E^*(X_{T_n} \mid \mathcal{F}_n) = Y_n = \sup_{\substack{\tau \in T_N \\ n \leq \tau \leq N}} E^*(X_\tau \mid \mathcal{F}_n). \tag{2.8}$$

Remarque 2.6.1 *La définition de* Y_n *fait intervenir la quantité* $E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$*. Lorsque la probabilité risque-neutre est de la forme* $P^*(\omega) = Z(\omega)P(\omega)$*, cette quantité est donnée par*

$$E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{Z_n} E(Y_{n+1}Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

où $Z_n = E(Z|\mathcal{F}_n)$.

2.6.3 Décomposition de Doob

Nous allons voir un résultat de la théorie des martingales, qui est une des clefs de la preuve du Théorème de (Prix d'une option américaine) et du principe de programmation dynamique. Nous commençons par introduire les processus croissant-prévisibles.

Définition 2.6.3 - *Processus croissant-prévisible* -

Un processus $(A_n)_{n \leq N}$ est dit croissant-prévisible si :

1. A_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, quel que soit $n \leq N$, (on dit que (A_n) est prévisible)
2. $\Delta A_n(\omega) = A_n(\omega) - A_{n-1}(\omega) \geq 0$, quel que soit $n \leq N$, $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire (A_n) est croissant. La décomposition de Doob décompose une sur-martingale en une martingale et un processus croissant-prévisible.

Théorème 2.6.3 - *Décomposition de Doob* -

Si $(Y_n)_{n \leq N}$ est une sur-martingale (*i.e.* $Y_n \geq E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$), il existe une unique martingale $(M_n)_{n \leq N}$ et un unique processus croissant-prévisible $(A_n)_{n \leq N}$ tels que

$$Y_n = M_n - A_n \text{ et } Y_0 = M_0.$$

– Existence de M_n et A_n : prendre

$$M_n = Y_0 - \sum_{k=1}^{n} [E(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - Y_k]$$
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} [Y_{k-1} - E(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]$$

et vérifier qu'ils conviennent.

– unicité : Si $Y_n = M_n - A_n = M_n^{'} - A_n^{'}$, alors

$$\Delta A_n^{'} = \Delta A_n + \Delta M_n^{'} - \Delta M_n^{'}. \tag{2.9}$$

Comme A_n et $A_n^{'}$ sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables

$$E(\Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A_n \text{ et } E(\Delta A_n^{'} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A_n^{'}.$$

de même comme M_n et $M_n^{'}$ sont des martingales

$$E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \text{ et } E(\Delta M_n^{'} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Donc si on prend $E(\cdot | F_{n-1})$ de l'égalité (2.9), il vient $\Delta A_n^{'} = \Delta A_n$ quel que soit $n \leq N$ Comme $A^{'} = A_0^{'} = 0$, on a $A_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ et $A_n^{'} = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k^{'}$, et vu que $\Delta A_k = \Delta A_k^{'}$, on a finalement $A_n = A_n^{'}$. En conséquence, on a aussi $M_n = M_n^{'}$.

Preuve. de théorème Prix d'une option américaine Par commodité on va poser

$$\Lambda = \sup_{\tau \in T_N} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau$$

■

On a déjà vu que $C \geq \Lambda$. Pour prouver le (Prix d'une option américaine). il reste à construire un portefeuille decouverture autofinancé Π^* de valeur initiale Λ.

Considérons la suite (Y_n) du principe de programmation dynamique. Vu que

$$Y_n = \max(X_n, E^*(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

on a $Y_n \geq E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ donc $(Y_n)_{n\leq N}$ est une sur-martingale. Notons $Y_n = M_n - A_n$ sa décomposition de Doob. Posons $f = \varepsilon_N(U)M_N$. Le marché étant complet, il existe un portefeuille $\Pi^* = (\beta_n, \gamma_n)_{n\leq N}$ autofinancé tel que $X_N^{\Pi^*} = f$. Or (M_n) est une martingale sous P^* et $(\varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*})$ aussi (Proposition Autofinancement et martingales) donc

$$E^*(M_N \mid \mathcal{F}_n) = M_n \text{ et } E^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi^*} \mid \mathcal{F}_n) = \varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*}.$$

Vu que $X_N^{\Pi^*} = f = \varepsilon_N(U)M_N$, il découle des deux égalités précédentes que $Mn = \varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*}$ quel que soit $n \leq N$. En particulier

$$X_n^{\Pi^*} = \varepsilon_n(U)M_n \geq \varepsilon_n(U)Y_n \text{ car } M_n = Y_n + A_n \text{ avec } A_n \geq 0$$

D'après le principe de programmation dynamique 2.8

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(U)Y_n &= \varepsilon_n(U) \sup_{\substack{\tau\in T_N \\ n\leq\tau\leq N}} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}f_\tau \mid \mathcal{F}_n) \\
&=^{P5} \sup_{\substack{\tau\in T_N \\ n\leq\tau\leq N}} E^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}\varepsilon_n(U)f_\tau|\mathcal{F}_n) \geq f_n
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient de l'´egalité $f_n = E^*\varepsilon_\tau(U)^{-1}\varepsilon_n(U)f_\tau|\mathcal{F}_n$ pour le temps d'arrêt donné par $\tau(\omega) = n$, quel que soit $\omega \in \Omega$. En recollant les morceaux, on conclut que $X_n^{\Pi^*} \geq f_n$ pour tout $n \leq N$, donc le portefeuille Π^* couvre bien l'option. C'est donc un portefeuille de couverture autofinancé de valeur initiale

$$X^{\Pi^*} = M_0 = Y_0 = \Lambda.$$

Conclusion

En conclusion, la théorie des martingales constitue un outil mathématique puissant et élégant, dont l'utilité dépasse largement le cadre des probabilités pures pour s'étendre à des domaines appliqués comme la finance. Son principe fondamental, fondé sur l'absence de tendance exploitable dans un processus stochastique, correspond parfaitement à l'idée de marché efficient, où aucune stratégie ne permettrait de réaliser un gain systématique sans risque. Grâce à cette propriété, les martingales ont permis de poser les bases rigoureuses de la valorisation des actifs financiers, en particulier dans le contexte des produits dérivés. Elles permettent également de formuler et de démontrer des théorèmes essentiels, comme celui de l'absence d'arbitrage ou de l'évaluation neutre au risque. De nos jours, la maîtrise de la théorie des martingales est devenue indispensable pour quiconque souhaite comprendre et modéliser les phénomènes aléatoires en finance. Elle reste, encore aujourd'hui, un domaine d'étude actif et en constante évolution, au cœur des travaux de recherche en ingénierie financière et en probabilités appliquées.

Bibliographie

[1] Björk, T. Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, 3e édition, 2009.

[2] Bougerol, Ph. Modèles stochastiques et Applications à la finance, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 8-3-2016

[3] Chesney, M ; Jeanblanc, M ; Yor, M. Mathematical Methods for Financial Markets, Springer, 2009.

[4] Delbaen, F ; Schachermayer, W. The Fundamental Theorem of Asset Pricing, Mathematical Finance, 1994

[5] Doob, J. L. Stochastic Processes, Wiley, 1953.

[6] Foata , D ; Fuchs, A. Processus de poisson, Chaines de Markov et martingales, Université Louis-Pasteur de strasbourg.

[7] Giraud, C. Martingales pour la finance, Cours et Exercices corrigés.

[8] Harrison, J. M ; Kreps, D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, 1981.

[9] Revuz, D ; Yor, M. Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer, 1999.

[10] Shreve, S. E. Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models, Springer, 2004.

[11] Walter, C. P. Les Martingales Sur Les Marchés Financiers. Une Convention Stochastique ?, ESSAI, October 2006

[12] Williams, D. Probability with Martingales, Cambridge University Press, 1991.

[13] Zedike, I. Martingale et semi-Martingale, Mémoire de master, Encadreur : Dr.Mansouri Badreddine. Université de Biskra.

[14] Lamberton D., Lapeyre B. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.Seconde édition. Ellipses, Edition Marketing, Paris, 1997.

Résumé

Le mémoire explore l’étude des marchés financiers, spécifiquement le marché Bond-Stock (obligations et actions), à travers l’utilisation de la théorie des martingales. Ce projet vise à modéliser les actifs risqués et sans risque, en étudiant leur évolution probabiliste et leur gestion optimale pour répondre aux engagements financiers. Il examine les principes fondamentaux des portefeuilles auto financés et la valorisation des options européennes et américaines. La théorie des probabilités risque-neutres et l’absence d’opportunités d’arbitrage sont au cœur de l’analyse, établissant des bases pour la couverture et la trafication des dérivés financiers.

Abstract

This thesis explores the study of financial markets, particulary bond and stock markets(bonds and equities), through the use of martingale theory. This project aims to model risky and risk-free assets, studying their probabilistic evolution and optimal management to meet financial commitments. Il examines the fondamental principales of self-financing portofolies and the valuation of european and amiricain options. Risk-neutral probability theory and the absence of arbitrage opportunities are central to the analysis, establishing foundations for hedging and pricing financial derivations.

ملخص

تتناول هذه الرسالة الأسواق المالية، وتحديدا سوق السندات و الأسهم من خلال استخدام نظرية مارتينجال. يهدف هذا المشروع إلى نمذجة الأصول الخطرة و الخالية من المخاطر، ودراسة تطورها الاحتمالي وإدارتها المثلى لتلبية الالتزامات المالية. يتناول هذا الموضوع أساسيات محافظ التمويل الذاتي وتقييم الخيارات الأوروبية والأمريكية. تشكل نظرية الاحتمالات المحايدة للمخاطر وغياب فرص التحكيم عنصرين أساسيين في التحليل، مما يضع الأسس للتحوط وتسعير المشتقات المالية.