République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : **Probabilités et Statistique**

Par

Henka Siham

Titre :

Problème de contrôle optimal partiellement observé pour les EDSs

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Hafayed Mokhtar	UMKB	Président
Dr.	Miloudi Hakima	UMKB	Encadreur
Dr.	Abba Abdelmadjid	UMKB	Examinateur

Juin 2025

Dédicace

Je dédie ce travail à tous les membres de ma chère famille,

à tous mes chers amis,

ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont soutenu(e), accompagné(e)

et encouragé(e) tout au long de mon parcours.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à **Dieu** Tout-Puissant qui m'a donné la force et la volonté d'achever ce travail.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à ma encadrante, **Dr. Miloudi Hakima**, pour son soutien constant et ses conseils avisés jusqu'à la fin de ce travail.

Je n'oublie pas de remercier aussi les membres du jury, **Pr. Mokhtar Hafayed** et **Dr. Abba Abdelmadjid**, pour les efforts qu'ils ont déployés dans l'évaluation et le jugement de mon travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse a étudier un problème de contrôle optimal partiellement observé pour les EDSs avec saut où le système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx^v(t) = f(t, x^v(t), v(t))dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))dW(t) \\ \qquad\qquad + \alpha(t, x^v(t), v(t))d\widetilde{W}(t) \\ \qquad\qquad + \int_\Theta g\left(t, x^v\left(t_-\right), v\left(t\right), \theta\right) \widetilde{N}\left(d\theta, dt\right), \quad t \in [0, T], \\ x^v(0) = x_0, \end{cases}$$

où f, σ et α sont des fonctions déterministes telles que :

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times\ d}$$

$$\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times\ d}.$$

Nous supposons que le processus d'état $x^v(.)$ n'est pas complètement observable, mais qu'il est partiellement observé à travers le processus associé $Y(.)$, qui est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x^v(t), v(t))dt + d\widetilde{W}\left(t\right) \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

où $h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^r$, et $\widetilde{W}(t)$ est un processus stochastique dépendant du contrôle $v(.)$. Notre fonction de coût est donnée par :

$$J(v(.)) = E^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \psi(x^v(T)) \right]$$

où $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes, E^v désigne l'espérance par rapport à l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P^v)$.

En pratique, les contrôleurs ne peuvent généralement pas observer l'information complète, mais seulement une information partielle avec du bruit. Cela justifie l'attention accrue portée aux problèmes de contrôle optimal partiellement observé. Le contrôle optimal stochastique des diffusions partiellement observées a été étudié par de nombreux auteurs ; voir par exemple [1, 6, 25]. Pour les diffusions de type champ moyen, le problème de contrôle optimal partiellement observée a été donné par [5, 17, 18]. Le contrôle optimal stochastique pour les équations différentielles stochastiques avant-arrière partiellement observées a été discuté par [16, 18, 21]. Wang et al. Le principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle optimal partiellement observés de type Mckean-Vlasov a été prouvé par Lakhdari, Miloudi et Hafayed, 2020 [10]. Les conditions nécessaires au contrôle optimal partiellement observé des équations différentielles stochastiques générales de McKean–Vlasov avec sauts a été prouvé par Miloudi, Lakhdari et Hafayed, 2021[12]. Récemment, le problème de contrôle linéaire-quadratique stochastique partiellement observé temps-incompatible avec saut aléatoire a été étudié par Wu et Zhuang [22].

Notre présentons notre mémoire de la manière suivante :

Chapitre 1 : nous avons donné un rappel sur le calcul stochastique (le mouvement brownien, les martingales, et la formule d'Itô...etc.) et on definissons certaines classes de contrôles stochastiques.

Chapitre 2 : Nous prouvons le principe du maximum stochastique pour le problème de contrôle optimal partiellement observés pour EDSs avec saut.

Chapitre 3 : Nous appliquons les résultats théoriques obtenie dans le chapitre 2 à le problème de contrôle linéaire quadratique partiellement observé.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables aléatoires* $X_t(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *indexée par un temps* $t \in T$.

Remarque 1.1.1 *Pour un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *,On a*

1. Pour t fixé , $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

- $T \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discret,
- $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, *elle définit une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$.

- la filtration naturelle (ou canonique) de processus X_t est donner par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.1.2 *On dit que la filtration est :*

1. Continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s \geq t} \mathcal{F}s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 *On dit que un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est mesurable si l'application définie sur* $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ *par* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *est mesurable.*

Définition 1.1.4 *Un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est dit adapté par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \in T$*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.1.5 *Un processus est à trajectoire continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Définition 1.1.6 *Soit* $(X_t)_{t \geq 0}$ *un processus, On dit que* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}$ *si* $\forall\ t \in T$ *l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *est mesurable sur* $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.1.7 *Un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche pour presque tout* ω*.*

Remarque 1.1.3 *Un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *progressivement mesurable est un processus mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Soit* $(X_t)_{t \geq 0}$ *un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors* X_t *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

1.2 Mouvement brownien

Un processus stochastique $(W(t), t \geq 0)$ est appelé un mouvement brownien standard si :

- $P[W(0) = 0] = 1$.
- $t \rightarrow W(t, w)$ est continu $P - p.s.$
- $\forall s \leq t, W(t) - W(s)$ est distribué normale centré avec une variance $(t - s)$ i.e $W(t) - W(s) \rightsquigarrow N(0, t - s)$.
- $\forall n, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ est indépendents.

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire T valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.3.2 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé :*

- Une sous-martingale si pour $s \leq t$:

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s.$$

- Une martingale si pour $s \leq t$:

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s.$$

- Une sur-martingale si pour $s \leq t$:

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Proposition 1.3.1 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard, alors B_t est une martingale par rapport à sa filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t).$$

1.4 Intégrale stochastique

Proposition 1.4.1 (Propriétés d'intégrale stochastique) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté (par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t^B$ et soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard. Les propriétés suivantes sont parmi les plus importantes de l'intégrale stochastique $\int X_t dB_t$.*

1. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X_v dB_v = \int_s^u X_v dB_v + \int_u^t X_v dB_v$$

2. Linéarité : si X_t^1 et X_t^2 sont deux processus adaptés, et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_0^t (aX_s^1 + bX_s^2) dB_s = a \int_0^t X_s^1 dB_s + b \int_0^t X_s^2 dB_s$$

3. Propriétés de martingale : Pour tout processus X_t les processus :

$$t \to I_t(X) \text{ et } t \to I_t(X)^2 - \int_0^t X_s dB_s$$

   sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale continues.

$$E(I_t(X) - I_t(X)^2 / \mathcal{F}_t^B) = E(\int_0^t X_s dB_s / \mathcal{F}_t^B).$$

4. Soit $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $E(\int_0^T |x_s|^2\, ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2\, dB_s\right|^2\right] \leq 4\int_0^T |x_s|^2\, ds.$$

5. Isométrie :

$$E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2 ds\right]$$

1.5 Processus d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.5.1 *On dit que un processus stochastique défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *est un processus d'Itô, qui peut être représenté sous la forme :*

$$\forall t \in [0, T], \quad X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$$

Le coefficient φ s'appelle drift (ou dérive) du processus et θ son coefficient de diffusion, telle que :

$$\int_0^t \varphi_s ds < +\infty, \text{ et } \int_0^t \|\theta_s\|^2\, ds < +\infty.$$

La formule d'Itô est un outil de base du calcul stochastique, qui est trés utile pour l'analyse des intégrales stochastiques.

1.6 Formule d'Itô

Définition 1.6.1 *Soit X un processus d'Itô et $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^{1,2}$ à dérivées bornée, alors :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Proposition 1.6.1 (Formule d'intégration par parties) *Soit Y_t et X_t deux processus d'Itô alors, la formule d'intégration par parties est donnée par :*

$$Y_tX_t = Y_0X_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \langle Y, X \rangle_t .$$

1.7 Formule d'intégration par parties

Supposons que les processus $x_i(t)$ soient donnés par : pour $i = 1, 2, t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} dx_i(t) = f(t, x_i(t), v(t))dt + \sigma(t, x_i(t), v(t))dW(t) \\ x_i(0) = 0. \end{cases}$$

Et on trouve

$$\begin{aligned} E(x_1(T)x_2(T)) = E\left[\int_0^T x_1(t)dx_2(t) + \int_0^T x_2(t)dx_1(t)\right] \\ + E\int_0^T \sigma^\top(t, x_1(t), v(t))\sigma(t, x_2(t), v(t))dt. \end{aligned}$$

1.8 Certaines classes de contrôles stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré complet.

1.8.1 Contrôle optimal

L'objectif du problème de contrôle optimal est de minimiser une fonction de coût $J(v)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$. On dit que le contrôle $u(.)$ est un contrôle optimal si

$$J(u(t)) \leq J(v(t)), \text{ pour tout } v(.) \in \mathcal{U}.$$

1.8.2 Contrôle admissible

Un processus $v(t)$ $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans un borélien $A \subset \mathbb{R}^n$ est un contrôle admissible

$$\mathcal{U} := \{v(.) : [0, T] \times \Omega \to A : v(t) \text{ est } \mathcal{F}_t - \mathit{adapt\acute{e}}\}.$$

1.8.3 Contrôle par retour d'état (Feedback control)

On dit que $v(.)$ est un contrôle par retour d'état si le contrôle $v(.)$ dépend de la variable d'état $X(.)$. Si $\mathcal{F}_t^X$ est la filtration naturelle générée par le processus X, alors $v(.)$ est un contrôle par retour d'état s'il est $\mathcal{F}_t^X$-adapté.

1.9 Théorème de Girsanov

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard sous la probabilité $\mathbb{P}$, et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration naturelle (satisfaisant les conditions usuelles).

Soit un processus $(\theta_t)_{t \geq 0}$ adapté tel que :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty.$$

On définit un nouveau processus :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right), \quad t \in [0, T].$$

Si L_t est une martingale, on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T.$$

Alors, sous $\mathbb{Q}$, le processus suivant :

$$\widetilde{B}_t := B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un mouvement brownien.

1.10 Inégalité de Grönwall

Soit $u : [0.T] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue vérifiant :

$$u(t) \leq a + \int_0^t b(s)\, u(s)\, ds \qquad \text{pour tout } t \in [0.T]\,,$$

où : $a \geq 0$, $b : [0.T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue (ou localement intégrable). Alors, on a :

$$u(t) \leq a \times \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds\right), \forall t \in [0.T]\,.$$

.

Chapitre 2

Problèmes de contrôle optimal partiellement observé pour les EDSs

2.1 Formulation du problème

Nous notons $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n, $\mathbb{R}^{n\times d}$ l'ensemble des matrices $n\times d$. Pour un espace euclidien donné, nous notons $|.|$ la norme et $< .,. >$ le produit scalaire. Et nous notons par $\intercal$ exposant la transposée de matrices ou de vecteurs. $W(.), Y(.)$ sont deux mouvements browniens standards indépendants, évalués respectivement dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^r$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilités filtré complet. Soit $k(\cdot)$ un processus ponctuel $\mathcal{F}_t$-Poisson stationnaire de mesure caractéristique $m\,(d\theta)$. Nous désignons par $N\,(d\theta, dt)$ la mesure de comptage ou mesure de Poisson induite par $k(\cdot)$, Définie sur $\Theta \times \mathbb{R}_+$, où Θ est un sous-ensemble fixe non vide de $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}\,(\Theta)$ et soit $\widetilde{N}\,(d\theta, dt) = N\,(d\theta, dt) - m\,(d\theta)\,dt$ un bruit de

Poisson compensé, satisfaisant :

$$\int_{\Theta}(1 \wedge |\theta|^2)m\,(d\theta) < \infty \text{ and } m\,(\Theta) < +\infty.$$

Soient $\mathcal{F}_t^W$, $\mathcal{F}_t^Y$ et $\mathcal{F}_t^N$ les filtrations naturelles engendrées respectivement par $W(\cdot)$, $Y(\cdot)$ et $N(\cdot)$, respectively. On suppose que

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^Y \vee \mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble de toutes les parties nulles pour $\mathbb{P}$.

Soit $\mathcal{F} := \mathcal{F}_t$, et soit $T > 0$ une durée finie. E désigne l'espérance sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$. Soient

– $L^2(r, s; \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions déterministes $\eta(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telles que :

$$\int_r^s |\eta(t)|^2 dt < +\infty.$$

– $L^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_t$-mesurables , tel que

$$E|\varphi|^2 < +\infty,$$

– $L^2(r, s; \mathbb{R}^n)$ désigne également l'espace des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés $\psi(.)$ à valeurs $\mathbb{R}^n$, tels que

$$E\int_r^s |\psi(t)|^2 dt < +\infty.$$

– $\mathbb{M}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right)$ désigne l'espace des processus $g(t,\theta)$, à valeurs réelles, mesurables et adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, tels que :

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_{\Theta} |g(t,\theta)|^2\, m\,(d\theta)\, dt < +\infty.$$

On définit

$$\mathcal{F}_t^Y = \sigma\{Y(s); 0 \leq s \leq t\},$$

Soit U un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^k$.

Définition 2.1.1 *Une variable de contrôle admissible $v : [0,T] \times \Omega \to U$ est une variable de contrôle $\mathcal{F}_t^Y$ adaptée et satisfait*

$$\sup_{t \in [0,T]} E|v|^m < \infty, m = 2, 3, ...$$

On note U_{ad} l'ensemble des variables de contrôle admissibles.

Pour $v(.) \in U_{ad}$ donné, nous étudions une classe de problèmes de contrôle stochastique du type

$$\begin{cases} dx^v(t) = f(t, x^v(t), v(t))dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))dW(t) \\ \qquad\qquad + \alpha(t, x^v(t), v(t))d\widetilde{W}(t) \\ \qquad\qquad + \int_\Theta g\left(t, x^v\left(t_-\right), v\left(t\right), \theta\right) \widetilde{N}\left(d\theta, dt\right), \ t \in [0,T], \\ x^v(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où f, σ et α sont des fonctions déterministes telles que

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times\ d}$$

$$\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times\ d}.$$

Nous supposons que le processus d'état $x^v(.)$ n'est pas complètement observable, mais qu'il est partiellement observé à travers le processus associé $Y(.)$, décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x^v(t), v(t))dt + d\widetilde{W}(t) \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^r$, et $\widetilde{W}(t)$ est un processus stochastique dépendant du contrôle $v(.)$. La fonction de coût est difinie comme suivant :

$$J(v(.)) = E^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \psi(x^v(T)) \right]. \tag{2.3}$$

E^v désigne l'espérance par rapport à l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P^v)$ et l : $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Tout au long de ce chapitre, nous devons formuler l'hypothèse suivante.

Hypothèse (A1) Nous supposons que les coefficients f, σ, α, l : $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et la fonction $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont mesurables dans toutes les variables. De plus, $f(., ., v)$, $\sigma(., ., v)$, $\alpha(., ., v)$, $l(., ., v) \in C_b^{1,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $g(\cdot, \cdot, v, \theta) \in \mathbb{C}_b^{1,1}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ et $\psi(., .) \in C_b^{1,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ pour tout $v \in U$.

Hypothèse (A2) En notant

$$\phi(x) = f(x, v), \sigma(x, v), \alpha(x, v), l(x, v), g(x, v, \theta), \psi(x),$$

la fonction $\phi(\cdot)$ satisfait les propriétés suivantes :

(**i**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,la fonction $\phi(\cdot) \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R})$.

(**ii**) Toutes les dérivées $\partial_x \phi$ pour $\phi = f, \sigma, \alpha, l, \psi$ sont bornées et Lipschitz continues, avec des constantes de Lipschitz indépendantes de $v \in U$. De plus, il existe une constante $C\left(T, m(\Theta)\right) > 0$ indépendante de v et de Θ telle que :

$$\sup_{\theta\in\Theta} \left|\partial_x g\left(t, x, u, \theta\right)\right| \leq C.$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} \left|\partial_x g\left(t, x, u, \theta\right) - \partial_x g\left(t, x', u, \theta\right)\right| \leq C\left[\left|x - x'\right|\right]$$

Les fonctions f, σ, α, g et l sont continûment différentiables par rapport à la variable de contrôle v, et toutes leurs dérivées sont continues et bornées.

(**iii**) h est une fonction uniformément bornée, continue différentiable en x et continue en v, et ses dérivées sont également uniformément bornées.

Pour tout $v(.) \in U_{ad}$, **l'hypothèse(A1)** implique que 2.1 admet une unique solution adaptée à $\mathcal{F}_t$.

Définir $dP^v = \rho^{v(}t)dP$ avec

$$\rho^v(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s, x^v(s), v(s))dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s, x^v(s), v(s))|^2 ds\right\},$$

et $\rho(.)$ est la solution unique $\mathcal{F}_t^Y-$adaptée de l'équation différentialle stochastique linéaire (EDS) suivant :

$$\begin{cases} d\rho^v(t) = \rho^v(t)h(t, x^v(t), v(t))dY(t), \\ \rho^v(0) = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Par la formule d'Itô, on peut prouver que $\sup_{t\in[0,T]} E|\rho_t^v|^m < \infty, m = 2, 3, ...$D'aprés la théorème de Girsanov et l'hypothèse (**A1**), P^v est une nouvelle mesure de probabilité et $(W(.), \widetilde{W}(.))$ est un mouvement brownien standard bidimensionnel défini dans le nouvel espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P^v)$.

Notre problème de contrôle optimal partiellement observé consiste à minimiser la fonction de coût 2.3 pour $v(.) \in U_{ad}$ sous réserve de 2.1 et 2.2, c'est-à-dire à trouver $u(.) \in U_{ad}$ satisfaisant

$$J(u(.)) = \inf_{v(.) \in U_{ad}} J(v(.)). \tag{2.5}$$

la fonction de coût 2.3 peut être réécrite comme suit :

$$J(v(.)) = E\left[\int_0^T \rho^v(t) l(t, x^v(t), v(t)) dt + \rho^v(T)\psi(x^v(T))\right]. \tag{2.6}$$

Le problème initial 2.5 est alors équivalent à minimiser 2.6 sur $v(.) \in U_{ad}$ sous réserve de 2.1 et 2.4.

Notre objectif est de rechercher la condition nécessaire du contrôle optimal $u(.)$ partiellement observé sous la forme du principe du maximum stochastique.

2.2 Principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle optimal partiellement observés

Dans cette section, nous développons le principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle optimal partiellement observé. Nous avons basée sur la théorème de Girsanov et sur l'introduction des équations variationnelles avec quelques estimations de leurs solutions.

Soit x la trajectoire optimale correspondant au contrôle optimal $u(.)$. Pour $v(.) \in U_{ad}$ donné et pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, nous définissons le contrôle variationnel comme suit :

$$v^\varepsilon(.) = u(.) + \varepsilon v(.), \text{ où } v^\varepsilon(.) \in U_{ad}.$$

Avec des notations évidentes, nous désignons par $x^\varepsilon(.), x(.), \rho^\varepsilon(.), \rho(.)$ les trajectoires d'état de 2.1 et 2.4 correspondant à $v^{\varepsilon}(.)$ et $u(.)$. Nous introduisons maintenant les EDS suivantes :

$$\begin{cases} d\varphi(t) = \{f_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + f_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dt \\ \qquad + \{\sigma_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + \sigma_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dW(t) \\ \qquad + \{\alpha_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + \alpha_v(t,x(t),u(t))v(t)\}d\widetilde{W}(t) \\ \qquad + \int_\Theta [g_x(t,x(t_-),u(t),\theta)\phi(t) + g_v(t,x(t_-),u(t),\theta)v(t)]\,\widetilde{N}\,(d\theta,dt)\,, \\ \varphi(0) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

et

$$\begin{cases} d\rho_1(t) = \{\rho_1(t)h(t,x(t),u(t)) + \rho(t)h_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) \\ \qquad\qquad + \rho(t)h_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dY(t), \\ \rho_1(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Par l'hypothèse **(A1)**, il est clair que les équations différentielles stochastiques (EDS) 2.7 et 2.8 admettent des solutions adaptées uniques $\varphi(.)$ et $\rho_1(.)$, respectivement.

Lemme 2.2.1 *Soit l'hypothèse **(A1)**. Alors, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E \sup_{0\le t\le T} |x^{\varepsilon}(t) - x(t)|^2 = 0.$$

Preuve. À partir d'estimations standard, nous obtenons en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ■

$$
\begin{aligned}
E\sup_{0\leq s\leq t}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2} \leq{} & E\int_{0}^{t}|f(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-f(s,x(s),u(s))|^{2}ds \\
& + E\int_{0}^{t}|\sigma(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-\sigma(s,x(s),u(s))|^{2}ds \\
& + E\int_{0}^{t}|\alpha(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-\alpha(s,x(s),u(s))|^{2}ds \\
& + \mathbb{E}\int_{0}^{t}\int_{\Theta}\left|g^{\varepsilon}\left(s,x^{\varepsilon}(s_{-}),v^{\varepsilon}(s),\theta\right)-g\left(s,x(s_{-}),u(s),\theta\right)\right|^{2}m\left(d\theta\right)ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant des conditions de Lipschitz sur les fonctions f, σ ,α et g par rapport à x et v, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
E\sup_{0\leq t\leq T}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2} \leq{} & C_{T}E\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2}ds \\
& + C_{T}\varepsilon^{2}E\int_{0}^{t}|v(s)|^{2}ds.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

D'aprés 2.9, on obtient

$$
E\sup_{0\leq t\leq T}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2}\leq C_{T}E\int_{0}^{t}\sup_{0\leq r\leq s}|x^{\varepsilon}(r)-x(r)|^{2}ds+M_{T}\varepsilon 2.
$$

En appliquant le lemme de Gronwall, le résultat suit immédiatement en laissant ε aller à zéro.

Lemme 2.2.2 *Soit l'hypothèse* ***(A1)****.On a alors*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}E\left|\frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon}-\varphi(t)\right|^{2}=0. \tag{2.10}
$$

Preuve. Soit $\eta^{\varepsilon}(t)=\frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon}-\varphi(t),t\in[0,T]$. ■

Pour plus de simplicité, On prendre les notations suivantes

$$x^{\lambda,\varepsilon}(s) = x(s) + \lambda\varepsilon(\eta^{\varepsilon}(s) + \varphi(s)),$$

$$\widehat{x}^{\lambda,\varepsilon}(s) = x(s) + \lambda\varepsilon\widehat{\eta}^{\varepsilon}(s) + \widehat{\varphi}(s),$$

$$v^{\lambda,\varepsilon}(s) = u(s) + \lambda\varepsilon v(s).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\eta^{\varepsilon}(t) = & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - f(s, x(s), u(s))]ds \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\sigma(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - \sigma(s, x(s), u(s))]dW(s) \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\alpha(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - \alpha(s, x(s), u(s))]d\widetilde{W}(s) \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\Theta} [g(s, x^{\varepsilon}(s_-), v^{\varepsilon}(s), \theta) - g(s, x(s_-), u(s), \theta)]\, \widetilde{N}\,(d\theta, ds) \\
& - \int_0^t \{f_x(s, x(s), u(s))\varphi(s) + f_v(s, x(s), u(s))v(s)\}ds \\
& - \int_0^t \{\sigma_x(s, x(s), u(s))\varphi(s) + \sigma_v(s, x(s), u(s))v(s)\}dW(s) \\
& - \int_0^t \alpha_x(s, x(s), u(s))\varphi(s) + \alpha_v(s, x(s), u(s))v(s)\}d\widetilde{W}(s) \\
& - \int_0^t \int_{\Theta} [g_x(s, x(s_-), u(s), \theta)\phi(s) + g_v(s, x(s_-), u(s), \theta)v(s)]\, \widetilde{N}\,(d\theta, ds)\,.
\end{aligned}$$

Décomposons maintenant $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - f(s, x(s), u(s))]ds$ en les parties suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - f(s, x(s), u(s))]ds \\
& = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - f(s, x(s), v^{\varepsilon}(s))]ds \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s, x(s), v^{\varepsilon}(s)) - f(s, x(s), u(s))]ds
\end{aligned}$$

Notant que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f(s,x^\varepsilon(s),v^\varepsilon(s))-f(s,x(s),v^\varepsilon(s))]ds\\&=\int_0^t\int_0^1 [f_x(s,x^{\lambda,\varepsilon}(s),v^\varepsilon(s)(\eta^\varepsilon(s)+\varphi(s))]d\lambda ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (f(s,x(s),v^\varepsilon(s))-f(s,x(s),u(s)))ds\\&=\int_0^t\int_0^1 [f_v(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}(s)v(s))]d\lambda ds.\end{aligned}$$

Avec le même travail, nous pouvons obtenir une décomposition similaire pour σ,α et g. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}E(\sup_{s\in[0,t]}|\eta^\varepsilon(s)|^2)=C(t)\Bigg[&E\int_0^t\int_0^1 |f_x(s,x^{\lambda,\varepsilon}(s),v^\varepsilon(s))\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds\\&+E\int_0^t\int_0^1 |\sigma_x(s,x^{\lambda,\varepsilon}(s),v^\varepsilon(s))\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds\\&+E\int_0^t\int_0^1 |\alpha_x(s,x^{\lambda,\varepsilon}(s),v^\varepsilon(s))\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds\\&+\int_0^t\int_\Theta\int_0^1 \left|g_x\left(s,x^{\lambda,\varepsilon}(s_-),v^\varepsilon(s),\theta\right)\eta^\varepsilon\left(s\right)\right|^2 d\lambda m\left(d\theta\right)ds\\&+C\left(t\right)E[\sup_{s\in[0,t]}|\gamma^\varepsilon(s)|^2\Bigg].\end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned}
\gamma^{\varepsilon}(t) &= \int_0^t \int_0^1 [f_x(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - f_x(s, x(s), u(s))]\varphi(s) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 [f_v(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - f_v(s, x(s), u(s))] v(s) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 [\sigma_x(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - \sigma_x(s, x(s), u(s))]\varphi(s) d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \{\sigma_v(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - \sigma_v(s, x(s), u(s))\} v(s) d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 [\alpha_x(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)) - \alpha_x(s, x(s), u(s))]\varphi(s) d\lambda d\widetilde{W}(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \{\alpha_v(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - \alpha_v(s, x(s), u(s))\} v(s) d\lambda d\widetilde{W}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_0^t \int_\Theta \int_0^1 \left[g_x^{\lambda,\varepsilon}\left(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s_-), v^{\varepsilon}(s), \theta\right) - g_x\left(s, x(s_-), u(s), \theta\right)\right] \phi(s_-) d\lambda \widetilde{N}\left(d\theta, ds\right) \\
&+ \int_0^t \int_\Theta \int_0^1 \left[g_v\left(s, x(s_-), v^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right), \theta\right) - g_v\left(s, x(s_-), u(s), \theta\right)\right] v(s) d\lambda \widetilde{N}\left(d\theta, ds\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous avons la propriété de Lipschitz continue en (x, v) pour les dérivées des fonctions f, σ, α et g par rapport à (x, v). Par conséquent, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E[\sup_{s\in[0,t]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2] = 0.$$

On a les dérivées de f, σ, α et g par rapport à (x, v) sont bornées, Allors $\forall t \in [0, T]$:

$$E[\sup_{s\in[0,t]} |\eta^{\varepsilon}(s)|^2] \leq c(t)(E \int_0^t |\eta^{\varepsilon}(s)|2ds + E[\sup_{s\in[0,t]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2])$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous trouvons $\forall t \in [0, T]$

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]} |\eta^{\varepsilon}(s)|^2\right] \leq c(t)\left(E[\sup_{s\in[0,t]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2] exp\left\{\int_0^t c(s)ds\right\}\right).$$

Enfin, en posant $t = T$ et en laissant ε atteindre zéro, la preuve est terminée.

Nous obtenons également des estimations d'ordre ε de la différence entre le processus observé perturbé $\rho^\varepsilon(.)$ et la somme du processus observé optimal $\rho(.)$ et du processus variationnel observé $\rho_1(.)$. Le lemme suivant joue un rôle important dans le calcul du processus variationnel. Inégalité pour la fonction de coût 2.6 soumise à 2.1 et 2.4.

Lemme 2.2.3 *Soit l'hypothèse (A1). Alors, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} E\left|\frac{\rho^\varepsilon(t)-\rho(t)}{\varepsilon} - \rho_1(t)\right|^2 = 0. \tag{2.11}$$

Preuve. D'après la définition de $\rho(.)$ et $\rho_1(.)$, on a ■

$$\begin{aligned}
\rho(t) + \varepsilon\rho_1(t) &= 1 + \int_0^1 \rho(s)h(s,x(s),u(s))dY(s) \\
&+ \varepsilon \int_0^1 [\rho_1(s)h(s,x(s),u(s)) + \rho(s)h_x(s,x(s),u(s))\varphi(s) \\
&+ \rho(s)h_v(s,x(s),u(s))v(s)]dY(s) \\
&= 1 + \varepsilon \int_0^1 \rho_1(s)h(s,x(s),u(s))dY(s) \\
&+ \int_0^1 \rho(s)h(s,x(s)+\varepsilon\varphi(s),u(s)+\varepsilon v(s)dY(s) - \varepsilon\int_0^1 \rho(s)[A\varepsilon(s)]dY(s),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A^\varepsilon(s) = &\int_0^1 [h_x(s,x(s)+\lambda\varepsilon\varphi(s),u(s)+\lambda\varepsilon v(s)) - h_x(s,x(s),u(s))]d\lambda\varphi(s) \\
+ &\int_0^1 [h_v(s,x(s)+\lambda\varepsilon\varphi(s),u(s)+\lambda\varepsilon v(s)) - h_v(s,x(s),u(s))]d\lambda v(s).
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$
\begin{aligned}
&\rho^\varepsilon(t) - \rho(t) - \varepsilon\rho_1(t) \\
&= \int_0^1 \rho^\varepsilon(s) h(s, x^\varepsilon(s), v^\varepsilon(s)) dY(s) - \varepsilon \int_0^1 \rho_1(s) h(s, x(s), u(s)) dY(s) \\
&- \int_0^1 \rho(s) h(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s), u(s) + \varepsilon v(s)) dY(s) + \varepsilon \int_0^1 \rho(s)[A^\varepsilon(s)] dY(s) \\
&= \int_0^1 (\rho^\varepsilon(s) - \rho(s) - \varepsilon\rho_1(s)) h(s, x^\varepsilon(s), v^\varepsilon(s)) dY(s) \\
&+ \int_0^1 (\rho(s) + \varepsilon\rho_1(s))[h(s, x^\varepsilon(s), v^\varepsilon(s)) - h(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s), u(s) + \varepsilon v(s))] dY(s) \\
&+ \varepsilon \int_0^1 \rho_1(s) h(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s), u(s) + \varepsilon v(s)) dY(s) \\
&- \varepsilon \int_0^1 \rho_1(s) h(s, x(s), u(s)) dY(s) + \varepsilon \int_0^1 \rho(s)(A^\varepsilon(s)] dY(s) \\
&= \int_0^1 (\rho^\varepsilon(s) - \rho(s) - \varepsilon\rho_1(s)) h(s, x^\varepsilon(s), v^\varepsilon(s)) dY(s) \\
&+ \int_0^1 (\rho(s) + \varepsilon\rho_1(s))[\Lambda_1^\varepsilon(s)] dY(s) + \varepsilon \int_0^1 \rho_1(s)[\Lambda_2^\varepsilon(s)] dY(s) \\
&+ \varepsilon \int_0^1 \rho(s)(A^\varepsilon(s)] dY(s),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1^\varepsilon(s) &= h(s, x^\varepsilon(s), v^\varepsilon(s)) - h(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s), u(s) + \varepsilon v(s)), \\
\Lambda_2^\varepsilon(s) &= h(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s), u(s) + \varepsilon v(s)) - h(s, x(s), u(s)).
\end{aligned}
$$

Noter que

$$
\Lambda_1^\varepsilon(s) = \int_0^1 [h_x(s, x(s) + \varepsilon\varphi(s) + \lambda(x^\varepsilon(s) - x(s) - \varepsilon\varphi(s)), v^\varepsilon(s))] d\lambda (x^\varepsilon(s) - x(s) - \varepsilon\varphi(s)).
$$

Par le lemme 2.2.2, nous savons que

$$E\int_0^1 |(\rho(s)+\varepsilon\rho_1(s))\Lambda_1^\varepsilon(s)|^2 ds \leq C_\varepsilon \varepsilon^2, \tag{2.12}$$

où C_ε désigne une constante positive telle que $C_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. De plus, il est facile de voir que

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left(\varepsilon\int_0^1 \rho(s)A^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2 \leq C_\varepsilon\varepsilon^2, \tag{2.13}$$

et

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left(\varepsilon\int_0^1 \rho_1(s)\Lambda_2^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2 \leq C_\varepsilon\varepsilon^2. \tag{2.14}$$

D'après 2.12, 2.13 et 2.14, on a

$$\begin{aligned}
&E|(\rho^\varepsilon(t)-\rho(t))-\varepsilon\rho_1(t)|^2\\
&\leq C\int_0^1 E|(\rho^\varepsilon(s)-\rho(s))-\varepsilon\rho_1(s)|^2 + E\int_0^1 |(\rho(s)+\varepsilon\rho_{1(}s))\Lambda_1^\varepsilon(s)|^2 ds\\
&+\sup_{0\leq s\leq t} E\left(\varepsilon\int_0^1 \rho(s)A^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2 + \sup_{0\leq s\leq t} E\left(\varepsilon\int_0^1 \rho_1(s)\Lambda_2^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2\\
&\leq C\int_0^1 E|\rho^\varepsilon(s)-\rho(s)-\varepsilon\rho_1(s)|^2 ds + C_\varepsilon\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient le résultat souhaité.

Lemme 2.2.4 *Sous l'hypothèse (A1), on a*

$$\begin{aligned}
0 \leq E\int_0^1 &\{\rho_1(t)l(t,x(t),u(t)) + \rho(t)l_x(t,x(t),u(t))\varphi(t)\\
&+\rho(t)l_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dt\\
&+E[\rho_1(T)\psi(x(T))] + E[\rho(T)\psi_x(x(T))\varphi(T)]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. En utilisant les lemmes 2.2.2 et 2.2.3, et le développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}E[\rho^{\varepsilon}(T)\psi(x^{\varepsilon}(T))-\rho(T)\psi(x(T))]\\
&=E[\rho_1(T)\psi(x(T))+\rho(T)\psi_x(x(T))\varphi(T)],
\end{aligned}$$

■

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}E\int_0^1\{\rho^{\varepsilon}(t)l(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))-\rho(t)l(t,x(t),u(t))\}dt\\
&=E\int_0^1\{\rho_1(t)l(t,x(t),u(t))+\rho(t)l_x(t,x(t),u(t))\varphi(t)\\
&+\rho(t)l_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, par l'optimalité de $u(.)$, nous tirons la conclusion souhaitée.

On definisson la fonction d'hamiltonien $H:[0,T]\times\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned}
H(t,x,v,\Phi,Q,\overline{Q},K,R)&=l(t,x,v)+f(t,x,v)\Phi+\sigma(t,x,v)Q+\alpha(t,x,v)\overline{Q}\\
&\quad+h(t,x,v)K+\int_{\Theta}g\left(t,x,v,\theta\right)R\left(\theta\right)m\left(d\theta\right).
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Nous introduisons maintenant les équations adjoints impliquées dans le principe du maximum stochastique :

$$\begin{cases}
-dy(t)=l(t,x(t),u(t))dt-z(t)dW(t)-K(t)d\widetilde{W}(t)-\int_{\Theta}R\left(t,\theta\right)\widetilde{N}\left(d\theta,dt\right),,\\
y(T)=\psi(x(T)),
\end{cases}\tag{2.17}$$

et

$$\begin{cases} -d\Phi(t) = \{f_x(t,x(t),u(t))\Phi(t) + \sigma_x(t,x(t),u(t))Q(t) \\ +\alpha_x(t,x(t),u(t))\overline{Q}(t) + l_x(t,x(t),u(t)) + \int_\Theta \left[g_x\left(t,x(t_-),u(t),\theta\right)R\left(t,\theta\right)\right]m\left(d\theta\right) \\ +h_x(t,x(t),u(t))K(t)\}dt - Q(t)dW(t) - \overline{Q}(t)d\widetilde{W}(t) - \int_\Theta R\left(t,\theta\right)\widetilde{N}\left(d\theta,dt\right), \\ \Phi(T) = \psi_x(x(T)). \end{cases} \tag{2.18}$$

Posons $\widetilde{\rho}(t) = \rho^{-1}(t)\rho_1(t)$. En utilisant la formule d'Itô, nous obtenons

$$\begin{cases} d\widetilde{\rho}(t) = \{h_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + h_v(t,x(t),u(t))v(t)\}d\widetilde{W}(t), \\ \widetilde{\rho}(0) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

Ensuite, en appliquant la formule d'Itô à $\Phi(t)\varphi(t), y(t)\widetilde{\rho}(t)$ et en prenant l'espérance respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned} E^u[\Phi(T)\varphi(T)] &= E^u\int_0^T \Phi(t)d\varphi(t) + E^u\int_0^T \varphi(t)d\Phi(t) \\ &+ E^u\int_0^T Q(t)\{\sigma_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + \sigma_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dt \\ &+ E^u\int_0^T \overline{Q}(t)\left\{\alpha_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + \alpha_v(t,x(t),u(t))v(t)\right\}dt \\ &+ \mathbb{E}^u\int_0^T\int_\Theta R\left(t,\theta\right)\left[g_x(t,x(t_-),u(t),\theta)\phi(t) + g_v(t,x(t_-),u(t),\theta)v(t)\right]m\left(d\theta\right)dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= E^u\int_0^T \Phi(t)d\varphi(t) = E^u\int_0^T \Phi(t)\{f_x(t,x(t),u(t))\varphi(t) + f_v(t,x(t),u(t))v(t)\}dt \\ &= E^u\int_0^T \Phi(t)f_x(t,x(t),u(t))\varphi(t)dt + E^u\int_0^T \Phi(t)f_v(t,x(t),u(t))v(t)dt \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
I_2 = E^u \int_0^T \varphi(t) d\Phi(t) = -E^u \int_0^T \varphi(t) \{ & f_x(t, x(t), u(t))\Phi(t) + \sigma_x(t, x(t), u(t))Q(t) \\
& + \alpha_x(t, x(t), u(t))\overline{Q}(t) + l_x(t, x(t), u(t)) \\
& + \int_\Theta g_x\left(t, x(t_-), u(t), \theta\right) R\left(t, \theta\right) m\left(d\theta\right) + h_x(t, x(t), u(t))K(t)\} dt.
\end{aligned}
$$

Par un calcul simple, on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_2 = & -E^u \int_0^T \varphi(t) f_x(t, x(t), u(t))\Phi(t)dt - E^u \int_0^T \varphi(t)\sigma_x(t, x(t), u(t))Q(t)dt \\
& - E^u \int_0^T \varphi(t)\alpha_x(t, x(t), u(t))Q(t)dt - E^u \int_0^T \varphi(t) l_x(t, x(t), u(t))dt \\
& - \mathbb{E}^u \int_0^T \int_\Theta \phi\left(t\right) g_x\left(t, x(t_-), u(t), \theta\right) R\left(t, \theta\right) m\left(d\theta\right) dt \\
& - E^u \int_0^T \varphi(t) h_x(t, x(t), u(t))K(t)dt
\end{aligned}
$$

De même, on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_3 = & E^u \int_0^T Q(t)\sigma_x(t, x(t), u(t))\varphi(t)dt + E^u \int_0^T Q(t)\sigma_v(t, x(t), u(t))v(t)dt \\
& + E^u \int_0^T \overline{Q}(t)\alpha_x(t, x(t), u(t))\varphi(t)dt + E^u \int_0^T \overline{Q}(t)\alpha_v(t, x(t), u(t))v(t)dt,
\end{aligned}
$$

$$
I_4 = \mathbb{E}^u \int_0^T \int_\Theta R\left(t, \theta\right) \left[g_x(t, x(t_-), u(t), \theta)\phi(t) + g_v(t, x(t_-), u(t), \theta)v(t) \right] m\left(d\theta\right) dt.
$$

et

$$
\begin{aligned}
E^u[y(T)\widetilde{\rho}(T)] & = E \int_0^T y(t) d\widetilde{\rho}(t) + E \int_0^T \widetilde{\rho}(t) dy(t) \\
& + E^u \int_0^T K(t)\{h_x(t, x(t), u(t))\varphi(t) + h_v(t, x(t), u(t))v(t)\} dt \qquad (2.21) \\
& = J_1 + J_2 + I_3,
\end{aligned}
$$

où $J_1 = E^u \int_0^T y(t) d\widetilde{\rho}(t)$ est un martingale avec une espérance nulle, et

$$J_2 = E^u \int_0^T \widetilde{\rho}(t) dy(t) = -E^u \int_0^T \widetilde{\rho}(t) l(t, x(t), u(t)) dt.$$

De même, nous pouvons obtenir

$$J_3 = E^u \int_0^T K(t) \{ h_x(t, x(t), u(t)) \varphi(t) + h_v(t, x(t), u(t)) v(t) \} dt$$

Enfin, en substituant 2.20 et 2.21 dans 2.15, nous obtenons

$$E^u [H_v(t, x(t), u(t), \Phi(t), Q(t), \overline{Q}(t), K(t), R(t, \theta)) v(t)] \geq 0. \tag{2.22}$$

En utilisant la méthode similaire développée dans [7], notre principal résultat de cette section est le théorème suivant.

Théoréme 2.2.1 *Soit l'hypothèse* ***(A1)****. Soit $u(.)$ optimal. Alors, le principe du maximum*

$$\mathbb{E}^u \left[H_v(t, x(t), u(t), \Phi(t), Q(t), \overline{Q}(t), K(t), R(t, \theta)) (v(t) - u(t)) \mid \mathcal{F}_t^Y \right] \geq 0, \; a.s., \; a.e.,$$

est vérifié, où la fonction hamiltonienne H est définie par 2.16.

Chapitre 3

Application : Problème de contrôle linéaire-quadratique partiellement observé

Dans cette chapitre, à titre d'application, nous étudions un problème de contrôle optimal partiellement observé pour un problème linéaire quadratique avec diffusion à sauts, où le système stochastique est décrit par un ensemble d'équations différentielles stochastiques linéaires, et où le coût est défini par une fonction quadratique.

En appliquant notre principe du maximum stochastique établi dans le chapitre 2 ainsi que la théorie classique de la filtration, nous obtenons une expression explicite du contrôle optimal, représentée sous forme de rétroaction (feedback), impliquant à la fois le processus d'état contrôlé $x(t)$, via les solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO).

Considérons le système de contrôle partiellement observé suivant.

$$\begin{cases} dx^v(t) = & f(t, x^v(t), v(t))\, dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))\, dW(t) \\ & +\alpha(t, x^v(t), v(t))\, d\widetilde{W}(t) \\ & +\int_\Theta g(t, x^v(t_-), v(t), \theta)\, \widetilde{N}(d\theta, dt) \\ x^v(0) = & x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned} f(t, x^v(t), v(t)) = &\ A(t)\, x(t) + C(t)\, v(t), \\ \sigma(t, x^v(t), v(t)) = &\ D(t), \\ \alpha(t, x^v(t), v(t)) = &\ 0, \\ g(t, x^v(t_-), v(t), \theta) = &\ F(t), \\ h(t, x^v(t), v(t)) = &\ G(t), \end{aligned}$$

avec une observation

$$\begin{cases} dY(t) & = G(t)\, dt + d\widetilde{W}(t), \\ Y(0) & = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

et la fonctionnelle de coût quadratique

$$J(v(.)) = E^u \int_0^T L(t) v^2(t) dt + M_T x^2(T) \tag{3.3}$$

Ici, les coefficients $A(\cdot), C(\cdot), D(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)$ et $L(\cdot)$ sont des fonctions continues et bornées, et $M_T \geq 0$. Pour tout $v \in U_{ad}$, les équations (3.1) et (3.2) admettent respectivement une solution unique.

Notre objectif est de trouver un contrôle optimal explicite minimisant la fonction de coût $J(v(\cdot))$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $v(\cdot) \in U_{ad}$, sous les contraintes des équations (3.1) et (3.2).

Nous allons à présent chercher une expression explicite du contrôle optimal en deux étapes.

Première étape. Trouver le contrôle optimal.

Nous commençons par écrire la fonction hamiltonienne H :

$$\begin{aligned} H(t,x,v,\Phi,Q,\overline{Q},R(\cdot)) &= [A(t)x(t)+C(t)v(t)]\Phi(t)+D(t)Q(t) \\ &\quad + G(t)K(t)+L(t)v^2(t)+\int_\Theta F(t)R(t,\theta)m(d\theta), \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $x(\cdot)$ est la trajectoire optimale, solution de l'équation (3.1) correspondant au contrôle optimal $u(\cdot)$.

D'après le Théorème 2.1 et (3.4), le contrôle optimal $u(\cdot)$ satisfait l'expression suivante :

$$u(t) = -\frac{1}{2}L^{-1}(t)C(t)\mathbb{E}\left[\Phi(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right], \tag{3.5}$$

où $\left(\Phi(\cdot), Q(\cdot), \overline{Q}(\cdot), R(\cdot,\cdot)\right)$ est la solution de la BSDE suivante

$$\begin{cases} -d\Phi(t) = [A(t)\Phi(t)]dt - Q(t)dW(t) \\ \qquad\qquad - \overline{Q}(t)d\widetilde{W}(t) - \displaystyle\int_\Theta R(t,\theta)d\widetilde{N}(d\theta,dt), \\ \Phi(T) = 2M_T x(T). \end{cases} \tag{3.6}$$

Deuxième étape. Donner l'expression explicite du contrôle optimal dans (3.5).

D'après [9, Theorems 8.1] et [23, Lemma 5.4], on peut déduire le système d'équations de filtrage suivant.

$$\begin{cases} d\widehat{x}(t) = \left[A(t)\widehat{x}(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\widehat{\Phi}(t)\right]dt \\ -d\widehat{\Phi}(t) = \left[A(t)\widehat{\Phi}(t)\right]dt - \widehat{\overline{Q}}(t)d\widetilde{W}(t), \\ \widehat{x}(0) = x_0,\ \widehat{\Phi}(T) = 2M_T\widehat{x}(T),\ \widehat{\overline{Q}}(t) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\widehat{\xi}(t) = \mathbb{E}^u\left[\xi(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ est l'estimation filtrée de l'état $\xi(t)$ dépendant de la filtration observable $\mathcal{F}_t^Y$, $\xi = x, \Phi, \overline{Q}$.

Maintenant, pour résoudre l'équation (3.7), ci-dessus, nous conjecturons un processus $\widehat{\Phi}(\cdot)$ de la forme suivante :

$$\widehat{\Phi}(t) = \phi(t)\,\widehat{x}(t) + \psi(t)\,\mathbb{E}[\widehat{x}(t)], \tag{3.8}$$

où $\phi(\cdot), \psi(\cdot)$ sont des fonctions différentielles déterministes

En dérivant l'équation (3.8) et en la comparant avec l'équation (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\{A(t)(\phi(t)\,\widehat{x}(t) + \psi(t)\,\mathbb{E}[\widehat{x}(t)])\} \\
&= \phi(t)\,\widehat{x}(t) + \dot{\psi}(t)\,\mathbb{E}[\widehat{x}(t)] \\
&+ \phi(t)\left\{A(t)\,\widehat{x}(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)\,C^2(t)\,(\phi(t)\,\widehat{x}(t) + \psi(t)\,\mathbb{E}[\widehat{x}(t)])\right\} \\
&+ \psi(t)\left\{A(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)\,C^2(t)\,\mathbb{E}[\phi(t)\,\widehat{x}(t) + \psi(t)\,\mathbb{E}[\widehat{x}(t)]]\right\}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En comparant les coefficients de $\widehat{x}(t)$ et $\mathbb{E}[\widehat{x}(t)]$ dans (3.9), on obtient les EDO suivantes :

$$\begin{cases}
\phi(t) + 2A(t)\,\phi(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)\,C^2(t)\,\phi^2(t) = 0, \\
\phi(T) = 2M_T,
\end{cases} \tag{3.10}$$

et

$$\begin{cases}
\dot{\psi}(t) + 2A(t)\,\psi(t) - L^{-1}(t)\,C^2(t)\,\phi(t)\,\psi(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)\,C^2(t)\,\psi^2(t) = 0, \\
\psi(T) = 0.
\end{cases} \tag{3.11}$$

À noter que les équations (3.10) et (3.11) sont, respectivement, une équation différentielle de Bernoulli et une équation différentielle de Riccati. Pour résoudre (3.10) et (3.11), on peut utiliser une méthode similaire à celle proposée dans [10, Sect. 4].

Alors, le contrôle optimal $u(\cdot) \in U_{ad}$ pour le problème (3.3) est donné sous forme de rétroaction (feedback) :

$$u(t, \widehat{x}(t)) = -\frac{1}{2} L^{-1}(t) C(t) [\phi(t) \widehat{x}(t) + \psi(t) \mathbb{E}[\widehat{x}(t)]],$$

où $\phi(\cdot), \psi(\cdot)$ sont déterminées respectivement par les équations (3.10) et (3.11).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons développé les conditions nécessaires pour un problème de contrôle optimal stochastique partiellement observé, où le processus d'état contrôlé est régi par des équations différentielles stochastiques avec saut. Nous utilisons le théorème de Girsanov ainsi que la technique variationnelle standard pour transformer notre problème de contrôle optimal partiellement observé en un problème complètement observable. À titre d'illustration, nous étudions un problème de contrôle linéaire-quadratique partiellement observé, où le domaine de contrôle est supposé convexe.

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1983) : Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions. Stoch. Int. J. Probab. Stoch. Process. 9(3), 169-222.

[2] Bensoussan, A. (1983) : Lectures on stochastic control. In Lect. Notes in Math. 972,Springer-Verlag, 1-62.

[3] Bensoussan, A. (1992). Stochastic Control of Partially Observable Systems. Cambridge University Press.

[4] Bismut, J.-M. (1979). Un problème de contrôle stochastique avec observation partielle. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 47, 165–184.

[5] Djehiche, B., Tembine, H. (2016) : Risk Sensitive Mean-Field Type Control Under Partial Observation. Stochastics of Environmental and Financial Economics, pp. 243–263. Springer, Cham.

[6] Fleming, W.H. (1968) : Optimal control of partially observable diffusions. SIAM J. Control. 6(2), 194-214.

[7] Hafayed, M., Meherrem. S., Eren, Ş., Guçoglu, D.H. (2018) : On optimal singular control problem for general Mckean–Vlasov differential equations : necessary and sufficient optimality conditions. Optim. Control App. Methods 39(3), 1202-1219.

[8] Korichi, F., & Hafayed, M. (2024). Lions's partial derivatives with respect to probability measures for general mean-field stochastic control problem. Journal of Mathematical Modeling (JMM), 12(3).

[9] Liptser, R.S., Shiryayev, A.N. (1977) : Statistics of Random Process. Springer, New York.

[10] Lakhdari, I.E., Miloudi, H., & Hafayed, M. (2020) Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean–Vlasov differential equations. Bull. Iran. Math. Soc. DOI 10.1007/s41980-020-00426-1.

[11] Meherrem, S., & Hafayed, M. (2019). Maximum principle for optimal control of McKean-Vlasov FBSDEs with Lévy process via the differentiability with respect to probability law. Optimal Control Applications and Methods, 40(3), 499-516.

[12] Miloudi, H., Meherrem, S., Eddine Lakhdari, I., & Hafayed, M. (2021). Necessary conditions for partially observed optimal control of general McKean–Vlasov stochastic differential equations with jumps. International Journal of Control, 1-12.

[13] Øksendal, B. (2003). Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications (6th ed.). Springer.

[14] Saranya, G., Muthukumar, P., & Hafayed, M. (2025). Maximum Principle for Optimal Control of Fully Coupled Mean-Field Forward-Backward Stochastic Differential Equations With Teugels Martingales Under Partial Observation. Optimal Control Applications and Methods, 46(2), 747-765.

[15] Sun, J., & Xiong, J. (2022). Stochastic Linear-Quadratic Optimal Control with Partial Observation. arXiv preprint.

[16] Shi, J., Wu, Z. (2010) : Maximum principle for partially-observed optimal control of fully-coupled forward–backward stochastic systems. J. Optim. Theory Appl. 145(3), 543-578

[17] Tang, M., Meng, Q.X. (2017) : Maximum principle for partial observed zero-sum stochastic differential game of mean-field SDEs, IEEE pp. 1868-1875.

[18] Wang, G., Wu Z. (2009) : General maximum principles for partially observed risksensitive optimal control problems and applications to finance. J. Optim. Theory Appl. 141(3), 677-700.

[19] Wang, H., Wu, Z. (2014) : Partially observed time-inconsistency recursive optimization problem and application. J. Optim. Theory Appl. 161(2), 664–687.

[20] Wang, G., Wu, Z., Zhang, C. (2014) : Maximum principles for partially observed mean-field stochastic systems with application to financial engineering, IEEE, pp. 5357-5362.

[21] Wu, Z. (2010). A maximum principle for partially observed optimal control of forward–backward stochastic control systems. Sci . China Inf. Sci. 53(11), 2205-2214

[22] Wu, Z, Zhuang, Y. (2018) : Partially observed time-inconsistent stochastic linearquadratic control with random jumps. Optim. Control Appl. Methods 39(1), 230- 247.

[23] Xiong, J. (2008) An introduction to stochastic filtering theory, vol. 18. Oxford University Press on Demand.

[24] Yong, J. , Zhou, X.Y. (1999). Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations, Springer Verlag, Berlin.

[25] Zhou, X.Y. (1993) : On the necessary conditions of optimal controls for stochastic partial differential equations. SIAM J. Control Optim. 31(6), 1462-1478.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Espace de probabilité filtré.
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$: Filtration.
- $\mathbb{R}$: Nombres réels.
- $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble de toutes les parties nulles pour $\mathbb{P}$.
- $\mathcal{B}(\Theta)$: tribu borélienne.
- $k(\cdot)$ un processus ponctuel $\mathcal{F}_t$-Poisson stationnaire de mesure caractéristique $m(d\theta)$.
- $N(d\theta, dt)$ la mesure de comptage ou mesure de Poisson induite par $k(\cdot)$.
- $\widetilde{N}(d\theta, dt) = N(d\theta, dt) - m(d\theta)\,dt$ un bruit de Poisson compensé, satisfaisant :

$$\int_{\Theta} (1 \wedge |\theta|^2) m(d\theta) < \infty \text{ and } m(\Theta) < +\infty.$$

- Θ est un sous-ensemble fixe non vide de $\mathbb{R}$.
- $L^2_{\mathcal{F}}(r, s, \mathbb{R}^n)$: L'espace de la fonction déterministe $\eta(t)$ à valeurs $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\int_r^s |\eta(t)|^2 dt < +\infty$$

- $L^2(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$: L'espace des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$ mesurables φ à valeurs $\mathbb{R}^n$, telles que

$$E|\varphi|^2 < +\infty.$$

- $L^2_{\mathcal{F}}(r, s, \mathbb{R}^n)$: l'espace des processus $\psi(t)$ $\mathcal{F}_t$ adaptés à $\mathbb{R}^n$, tels que

$$E\int_r^s |\psi(t)|^2 dt < +\infty$$

- $\mathbb{M}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right)$ désigne l'espace des processus $g(\cdot)$ $\mathbb{R}$-valués, mesurables et adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, tels que

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_\Theta |g(t,\theta)|^2\, m\,(d\theta)\, dt < +\infty.$$

- $f_x, \frac{\partial f}{\partial x}$: Les dérivées par rapport à x.
- $E(.)$: Esperance
- PMS : Principe du maximum stochastique.
- σ : σ-algèbre générée par A.
- E^v : désigne l'espérance sur $(\Omega, \mathcal{F}, F, P^v)$.
- EDS : Équations différentielles stochastiques.
- $\mathcal{F}_t$: désigne la filtration engendrée par le processus X.
- $W(.)$: Mouvements browniens.
- $\mathcal{F}_t^W$: filtration naturelle générée par le mouvement brownien $W(.)$.
- EDO : Équation différentielle ordinaire.

Abstract

In this thesis we are interested by study a partially observed optimal control problems for SDE, which are the type of partially observed control problems whose state process cannot be observed directly, but the controller can observe an associated noise process. This class of problems have a large number of applications in the fields of economics and finance. By applying Girsanov's theorem with a standard convex variation technique, we develop the principle of the stochastic maximum to partially observed stochastic control problems for the stochastic differential equations (SDE) where the control domain is convex .

Keys words. Partially observed optimal control, Stochastic maximum principle, stochastic differential equations (SDE).

Résumé

Dans ce mémoire, nous intéressons à l’étude de problèmes de contrôle optimal partiellement observés pour des équations différentielles stochastiques (EDS). Il s’agit de problèmes dans lesquels le processus d’état ne peut pas être observé directement, mais le contrôleur peut observer un processus bruité associé.
Cette classe de problèmes trouve de nombreuses applications dans les domaines de l’économie et de la finance. En appliquant le théorème de Girsanov ainsi qu’une technique variationnelle convexe classique, nous développons le principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle stochastique partiellement observés associés aux équations différentielles stochastiques (EDS), dans le cas où le domaine de contrôle est convexe.

Mots-clés : contrôle optimal partiellement observé, principe du maximum stochastique, équations différentielles stochastiques (EDS).

خاتمة

في هذه الرسالة، نهتم بدراسة مشاكل التحكم الأمثل ذات الملاحظة الجزئية للمعادلات التفاضلية التصادفية تتمثل هذه المشاكل في الحالات التي لا يمكن فيها ملاحظة عملية الحالة مباشرة، لكن يمكن للمتحكم ملاحظة عملية ضوضاء مرتبطة بها.
تجد هذه الفئة من المشاكل العديد من التطبيقات في مجالات الاقتصاد والمالية من خلال تطبيق مبرهنة غيرسانوف وتقنية تغايرية تقليدية محدبة، نقوم بتطوير مبدأ الحد الأقصى التصادفية للمشاكل ذات التحكم التصادفي مع ملاحظة جزئية، المرتبطة بالمعادلات التفاضلية التصادفية(EDS) ، في حالة كون مجال التحكم محدباً.

الكلمات المفتاحية: التحكم الأمثل مع ملاحظة جزئية، مبدأ الحد الأقصى التصادفي، المعادلات التفاضلية التصادفية