

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

MEDDAS Imane

Titre

Résolution numérique des équations intégrales en utilisant les polynômes d'Hermite et de Laguerre

Membres du Comité d'Examen :

Dr. **BELLAGOUNE Abdelghani** UMK Biskra Président

Pr. **BENKHELIFA Lazhar** UMK Biskra Encadreur

Dr. **ZAAMOUNE Faiza** UMK Biskra Examinatrice

Soutenu le : 03 Juin 2025

Dédicace

Avec fierté, je dédie mon graduation et la joie que j'ai attendue longtemps à ceux qui ont toujours été une source de soutien et de don.

À la main invisible, au cœur chaleureux, à la propriétaire de prière sincère et à ma force après Dieu, ma première et éternelle supportrice, à ma chère mère.

À l'être cher dont j'ai porté le nom avec fierté, à celui qui m'a soutenu sans limites et m'a donné sans rien attendre en retour, à mon cher père.

À ma côte inébranlable et à l'assurance de mes journées, à mes chers frères et sœurs.

À mon encadreur, je tiens à exprimer ma sincère appréciation, ma profonde gratitude et mon respect pour votre expertise et votre dévouement au travail.

À tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu un jour.

À tous qui me connaissent de près ou de loin.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie "ALLAH", de me donner la santé, la force et la patience pour achever ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont à mon encadreur **Pr. BENKHELIFA Lazhar** pour avoir dirigé ce travail. Je suis très reconnaissante pour sa disponibilité, son professionnalisme et ses conseils instructifs qui m'ont orientée et aidée à développer mes idées.

J'exprime mes profonds remerciements et ma vive connaissance à **Dr. BELLAGOUN Abdelghani** qui m'a honoré de présider le jury de soutenance de mon mémoire. Aussi, mes remerciements vont à **Dr. ZAAMOUNE Faiza** qui accepte l'examen de mon travail et faire partie du jury.

J'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de ma carrière universitaire.

Mes plus sincères remerciements et ma gratitude vont à mon chère papa, ma chère maman, mes frères et mes soeurs pour leur amour, leurs encouragements et leurs conseils. Merci d'être toujours à mes côtés.

Je ne peux clôturer mes remerciements sans adresser ma profonde gratitude à mes amies, merci de m'encourager et de faire partie de ma vie.

Table des matières

Table des matières	ii
Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les équations intégrales	2
1.1 Définitions	2
1.2 Classification des équations intégrales	3
1.2.1 Équation intégrale linéaire de Volterra	3
1.2.2 Equation intégrale non linéaire de Volterra	4
1.2.3 Equation intégrale linéaire de Fredholm	5
1.2.4 Equation intégrale non linéaire de Fredholm	6
1.2.5 Equations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm	7
1.2.6 Equations intégrales non linéaire de Volterra-Fredholm	8
1.3 Existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm	9
1.3.1 Opérateur contractant	9
1.3.2 Théorèmes d'existence et d'unicité	9
2 Polynômes d'Hermite et de Laguerre	12
2.1 Polynômes d'Hermite	12

2.1.1	Définition	12
2.1.2	Fonction génératrice	14
2.1.3	Orthogonalités des polynômes d'Hermite	14
2.1.4	Relations de récurrence	15
2.2	Polynômes de Laguerre	16
2.2.1	Définition	16
2.2.2	Fonction génératrice	17
2.2.3	Quelques expressions explicites	18
2.2.4	Orthogonalités des polynômes de Laguerre	20
2.2.5	Relations de récurrence	21
2.2.6	Formule de Rodrigues	24
3	Résolution numérique d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm	26
3.1	Méthode de collocation	26
3.1.1	Méthode de collocation-Hermite	28
3.1.2	Méthode de collocation-Laguerre	30
3.2	Exemples	32
3.2.1	Exemple 1	33
3.2.2	Exemple 2	37
	Conclusion	40
	Bibliographie	41

Table des figures

2.1	Les cinq premiers polynômes d’Hermite.	13
2.2	Les cinq premiers polynômes de Laguerre.	16
3.1	Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 8$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 1.	38
3.2	Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 10$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 1.	38
3.3	Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 8$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 2.	39
3.4	Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 10$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 2.	39

Liste des tableaux

3.1	Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=8$, Exemple 1.	35
3.2	Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=10$, Exemple 1.	35
3.3	Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=8$, Exemple 2.	38
3.4	Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=10$, Exemple 2.	38

Introduction

Les équations intégrales font partie des domaines les plus remarquables et significatifs en mathématiques. L'origine de l'évolution systématique de la théorie des équations intégrales dû à la solution des problèmes aux limites. Il y a deux catégories fondamentales : les équations de Fredholm (développées par le mathématicien suédois Ivar Fredholm en 1900) et les équations intégrales de Volterra (proposées par le mathématicien italien Vito Volterra en 1896).

Une équation intégrale linéaires de Volterra-Fredholm combine les caractéristiques des équations intégrales de Volterra et de Fredholm. Elle apparaît dans divers domaines, notamment en physique, en biologie et dans l'étude des systèmes dynamiques pour modéliser des phénomènes complexes. Dans chacun de ces domaines, il est crucial de trouver la solution exacte de cette équation intégrale.

Il est souvent très difficile, voire parfois impossible, de déterminer une solution analytique exacte d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm, c'est pourquoi nous faisons appel à des méthodes numériques. Il y a plusieurs méthodes d'obtenir cette solution approchée. Dans ce mémoire, nous avons utilisé en basant sur la méthode de collocation, les polynômes d'Hermite et de Laguerre pour trouver la solution approchée d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm. Il se compose de trois chapitres :

Chapitre 1 : Ce chapitre introduit la notion et la classification des équations intégrales. Il expose également le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation linéaire de Volterra-Fredholm.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion ainsi que certaines propriétés des polynômes d'Hermite et de Laguerre.

Chapitre 3 : Nous allons exposer la méthode de collocation, ainsi que les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, pour obtenir une solution approchée d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm. Deux exemples seront présentés pour illustrer l'efficacité de ces méthodes et permettre une comparaison entre elles.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégrales

La première section présente le concept d'une équation intégrale, la deuxième est consacrée à la classification des équations intégrales, tandis que la troisième partie expose le théorème, accompagné de sa démonstration, concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Une équation intégrale, comporte une opération d'intégration sur la fonction inconnue ψ , se présente comme suit :*

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_F \tau(x, t, \psi(t)) dt, \quad x \in F, \quad (1.1)$$

où

- F est un ensemble, qui peut être un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une région de $\mathbb{R}^n$.
- h et g sont des fonctions, données à l'avance, définies sur F ,
- λ un paramètre réel ou complexe n'est pas nul,
- τ une fonction connue définie sur F^3 , nommée le noyau de l'équation (1.1).

Remarque 1.1.1 ...

1. La fonction inconnue ψ est une solution de (1.1) si et seulement si elle vérifié l'équation (1.1).
2. L'équation (1.1) est linéaire si $\tau(x, t, \psi(t)) = k(x, t)\psi(t)$, sinon, on la considère comme non linéaire.
3. L'équation (1.1) peut être exprimée comme un opérateur de la façon suivante :

$$h\psi = g + \lambda P\psi,$$

où P représente un opérateur et s'écrit :

$$P\psi(x) = \int_F \tau(x, t, \psi(t)) dt.$$

1.2 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales sont classées en deux branches distinctes, basées sur la classification des équations linéaires par rapport aux équations non linéaires. Cette section explique les équations linéaires et non linéaires les plus connues : les équations intégrales de Volterra, formulées pour la première fois par l'éminent mathématicien italien Vito Volterra en 1896, ainsi que celles de Fredholm, qui ont été formulées par le célèbre mathématicien suédois Ivar Fredholm en 1900.

1.2.1 Équation intégrale linéaire de Volterra

Définition 1.2.1 *Toutes les équations intégrales linéaires de Volterra ont la forme :*

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\psi(t)dt, \quad (1.2)$$

où

- $h(x)$, $g(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions connues (k représente le noyau de l'équation (1.2)),
- $\psi(x)$ est la fonction inconnue à déterminer.,

- x est une variable réelle qui se situe dans $[a, b]$,
- λ est un paramètre réel ou complexe qui n'est pas nul.

Remarque 1.2.1 ..

1. Pour $h(x) = 0$, l'équation (1.2) est nommée une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce, et on a

$$g(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\psi(t)dt = 0.$$

2. Si $h(x) = 1$, alors (1.2) est désignée sous le nom d'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce :

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\psi(t)dt.$$

3. Si $h(x)$ est différent de zéro, alors l'équation mentionnée dans (1.2) est qualifiée d'équation intégrale linéaire de Volterra de troisième espèce.
4. Si $g(x)$ n'est pas égal à zéro, alors on qualifie l'équation (1.2) d'équation intégrale linéaire non homogène de Volterra.
5. Lorsque $g(x)$ est nul, l'équation (1.2) se transforme :

$$h(x)\psi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\psi(t)dt,$$

et cette dernière appelée une équation intégrale linéaire homogène de Volterra.

1.2.2 Equation intégrale non linéaire de Volterra

Définition 1.2.2 Une équation non linéaire de Volterra se présente sous la forme suivante :

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \tau(x, t, \psi(t))dt, \quad (1.3)$$

ou

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \psi(t))dt,$$

où ϑ est une fonction non linéaire, donnée à l'avance.

Remarque 1.2.2 ..

1. Pour $h(x) = 0$, alors (1.3) est qualifiée d'équation non linéaire de Volterra de première espèce :

$$g(x) + \lambda \int_a^x \tau(x, t, \psi(t)) dt = 0.$$

2. Si $h(x) = u$, où u est une constante réelle non nulle, alors (1.3) est qualifiée d'équation non linéaire de Volterra de seconde espèce :

$$u\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \tau(x, t, \psi(t)) dt.$$

3. Si $h(x)$ n'est pas égal à zéro, alors (1.3) est dite une équation non linéaire de Volterra de troisième espèce.
4. Si $g(x)$ n'est pas nul, alors l'équation (1.3) est une équation intégrale non linéaire et non homogène de Volterra.
5. Pour $g(x) = 0$, l'équation (1.3) est une équation non linéaire homogène de Volterra, et on a :

$$h(x)\psi(x) = \lambda \int_a^x \tau(x, t, \psi(t)) dt.$$

1.2.3 Equation intégrale linéaire de Fredholm

Définition 1.2.3 Une équation intégrale linéaire de Fredholm se définit de la manière suivante :

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t) dt. \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.3 ..

1. Si $h(x) = 0$, alors l'équation (1.4) devient :

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t) dt = 0,$$

et elle est nommée une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = u$, où u est une constante réelle non nulle, alors (1.4) est qualifiée d'équation linéaire de Fredholm de seconde espèce et on a :

$$u\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt.$$

3. Pour $h(x) \neq 0$, l'équation (1.4) est appelée une équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.
4. Pour $g(x) \neq 0$, l'équation (1.4) est dite une équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm.
5. Si $g(x) = 0$, l'équation (1.4) est une équation linéaire homogène de Fredholm, et on a :

$$h(x)\psi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt.$$

1.2.4 Equation intégrale non linéaire de Fredholm

Définition 1.2.4 Nous disons qu'une équation intégrale non linéaire de Fredholm si :

$$h(x)\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \tau(x, t, \psi(t))dt. \quad (1.5)$$

Remarque 1.2.4 ..

1. Pour $h(x) = 0$, (1.5) est qualifiée d'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce, où on a :

$$g(x) + \lambda \int_a^b \tau(x, t, \psi(t))dt = 0.$$

2. Si $h(x) = u$, où u est une constante réelle non nulle, alors l'équation (1.5) devient :

$$u\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \tau(x, t, \psi(t))dt,$$

et cette dernière est nommée une équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3. Pour $h(x) \neq 0$, (1.5) est dite une équation intégral non linéaire de Fredholm de troisième espèce.
4. Si $g(x) \neq 0$, l'équation (1.5) est dite une équation intégrale non linéaire et non homogène de Fredholm.
5. Pour $g(x) = 0$, alors (1.5) s'écrit :

$$h(x)\psi(x) = \lambda \int_a^b \tau(x, t, \psi(t))dt,$$

et elle est appelée une équation intégrale non linéaire homogène de Fredholm.

1.2.5 Equations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm

Définition 1.2.5 *Il ya deux formes des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm, la première est :*

$$\phi(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds. \quad (1.6)$$

et la forme mixte suivante :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t)\phi(t)dsdt. \quad (1.7)$$

où

- g, k_1, k_2 et k sont des fonctions connues à l'avance (k_1 et k_2 représentent les noyaux de l'équation (1.6) tandis que k le noyau de l'équation (1.7)),
- ϕ est la fonction inconnu à déterminer,
- x est une variable réelle qui se situe dans l'intervalle $[a, b]$,
- λ_1, λ_2 et λ sont des paramètres réels ou complexes non nuls.

Remarque 1.2.5 *Une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de première espèce a la forme suivante :*

$$g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds = 0,$$

tandis que l'équation linéaire de Volterra-Fredholm de seconde espèce a la forme :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \phi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s) \phi(s) ds.$$

1.2.6 Equations intégrales non linéaire de Volterra-Fredholm

Définition 1.2.6 Une équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm se définit de la manière suivante :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x \tau_1(x, t, \phi(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b \tau_2(x, s, \phi(s)) ds, \quad (1.8)$$

ou la forme mixte suivante :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b \tau(s, t, \phi(t)) ds dt. \quad (1.9)$$

où

- g , τ_1 , τ_2 et τ sont des fonctions connues à l'avance (τ_1 et τ_2 représentent les noyaux de l'équation (1.8) tandis que τ le noyau de l'équation (1.9)),
- ϕ est la fonction inconnu,
- $x \in [a, b]$,
- λ_1 , λ_2 et λ sont des paramètres réels ou complexes non nuls.

Remarque 1.2.6 Si la fonction inconnue $\phi(x)$ n'apparaît qu'à l'intérieur des intégrales, alors on dit que l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm de première espèce. Si la fonction $\phi(x)$ se trouve à la fois à l'intérieur et à l'extérieur des signes des intégrales, alors nous avons l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm de seconde espèce.

1.3 Existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm, nous faisons appel au théorème 1.3.1., appelé théorème du point fixe de Banach (ou principe de l'application contractante). Ce théorème a été énoncé pour la première fois en 1922 par le mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945).

1.3.1 Opérateur contractant

Définition 1.3.1 (*Opérateur contractant*)

Soit H est un espace métrique complet. Un opérateur borné $T : H \rightarrow H$ est dit contractant ou L -contractant s'il existe une constante $L \in]0, 1[$ telle que pour tous $\eta_1, \eta_2 \in H$, on a :

$$\|T\eta_1 - T\eta_2\| \leq L \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

Théorème 1.3.1 (*Théorème du point fixe de Banach*)

Si $T : H \rightarrow H$ est un opérateur contractant sur un espace métrique complet H , alors, $T\eta = \eta$ admet une solution unique η dans H . Cette solution est un point fixe de T .

Preuve. Voir [5] page 26, pour la démonstration. ■

1.3.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

$$\phi(x) = g(x) + \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds. \quad (1.10)$$

où nous avons les conditions suivantes :

$$1. \quad g \in C([a, b]), \quad k_1 \in C(D_1) \quad \text{et} \quad k_2 \in C(D_2), \quad (1.11)$$

avec

$$D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq x \leq b\}, \quad D_2 = [a, b] \times [a, b],$$

et $C(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I .

$$2. \quad M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x, t)| \quad \text{et} \quad M_2 = \max_{(x,s) \in D_2} |k_2(x, s)|. \quad (1.12)$$

Théorème 1.3.2 [3] *Sous les conditions (1.11) et (1.12) et supposons qu'il existe une constante $\delta > 0$ où*

$$\frac{1}{\delta} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) < 1.$$

Donc, l'équation (1.10) admet une solution unique $\phi \in C([a, b])$.

Preuve. On définit l'opérateur $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ comme suit :

$$T\phi(x) = g(x) + \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds.$$

Pour prouver que l'équation (1.10) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T est contractante. Observe que pour tout $\phi, \psi \in C([a, b])$ et $\forall x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |T\phi(x) - T\psi(x)| &= \left| g(x) + \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds \right. \\ &\quad \left. - g(x) - \int_a^x k_1(x, t)\psi(t)dt - \int_a^b k_2(x, s)\psi(s)ds \right| \\ &= \left| \int_a^x k_1(x, t) [\phi(t) - \psi(t)] dt + \int_a^b k_2(x, s) [\phi(s) - \psi(s)] ds \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |\phi(t) - \psi(t)| dt + \int_a^b |k_2(x, s)| |\phi(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq M_1 \int_a^x |\phi(t) - \psi(t)| e^{-\delta(t-a)} e^{\delta(t-a)} dt + M_2 \int_a^b |\phi(s) - \psi(s)| e^{-\delta(s-a)} e^{\delta(s-a)} ds \\ &\leq \left[\frac{M_1}{\delta} (e^{\delta(x-a)} - 1) + \frac{M_2}{\delta} (e^{\delta(b-a)} - 1) \right] \|\phi - \psi\|_B, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_B : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la norme de Bielecki définie par

$$\|\phi\|_B = \max_{x \in [a, b]} |\phi(x)| e^{-\delta(x-a)}.$$

Donc

$$|T\phi(x) - T\psi(x)| \leq \frac{1}{\delta} (M_1 e^{\delta(x-a)} + M_2 e^{\delta(x+b-a-x)}) \|\phi - \psi\|_B,$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} (M_1 e^{\delta(x-a)} + M_2 e^{\delta(x+b-a-x)}) \|\phi - \psi\|_B &= \frac{1}{\delta} e^{\delta(x-a)} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-x)}) \|\phi - \psi\|_B \\ &\leq \frac{1}{\delta} e^{\delta(x-a)} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) \|\phi - \psi\|_B, \end{aligned}$$

d'où

$$|T\phi(x) - T\psi(x)| \leq \frac{1}{\delta} e^{\delta(x-a)} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) \|\phi - \psi\|_B.$$

Il s'ensuit que

$$|T\phi(x) - T\psi(x)| e^{-\delta(x-a)} \leq \frac{1}{\delta} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) \|\phi - \psi\|_B,$$

c'est-à-dire que

$$\|T\phi - T\psi\|_B \leq \frac{1}{\delta} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) \|\phi - \psi\|_B.$$

Puisque $\frac{1}{\delta} (M_1 + M_2 e^{\delta(b-a)}) < 1$, alors T est un opérateur contractant de $C([a, b])$ en lui-même et d'après le principe de contraction de Banach l'opérateur T admet un point fixe unique ϕ , qui est une solution unique de l'équation (1.10). ■

Exemple

Nous considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\phi(x) = e^x + \int_0^x \frac{\sin(x+t)}{10} \phi(t) dt + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\cos(xs)}{18} \phi(s) ds, \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

Nous avons $g(x) = e^x \in C\left([0, \frac{1}{3}]\right)$, $k_1(x, t) = \frac{\sin(x+t)}{10} \in C(D_1)$ et

$k_2(x, s) = \frac{\cos(xs)}{18} \in C(D_2)$, avec

$$D_1 = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq x \leq \frac{1}{3} \right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Alors, en choisissant par exemple $M_1 = \frac{1}{10}$, $M_2 = \frac{1}{18}$ et $\delta = 2$, la condition du théorème 3.1 est satisfaite et l'équation admet une solution unique $\phi \in C\left([0, \frac{1}{3}]\right)$.

Chapitre 2

Polynômes d'Hermite et de Laguerre

Les polynômes orthogonaux sont largement utilisés dans les applications en mathématiques en ingénierie et en informatique. Il y a plusieurs polynômes orthogonaux importants comme les polynômes de Bernoulli, d'Hermite et d'Euler. Dans ce chapitre, nous allons présenter la définition ainsi que certaines propriétés des polynômes d'Hermite et de Laguerre.

2.1 Polynômes d'Hermite

Nommés d'après le mathématicien français Charles Hermite (1822-1901) en 1864, les polynômes d'Hermite sont la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 *Les polynômes d'Hermite de degré $n \in \mathbb{N}$ sont définis sur $\mathbb{R}$ par :*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ils peuvent aussi être exprimés sous forme de développement polynomial

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k},$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ est la partie entière de $n/2$.

Remarque 2.1.1 *Les cinq premiers polynômes d'Hermite, sont*

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

Les cinq premiers polynômes d'Hermite sont représentés dans la figure 2.1 ci-dessous.

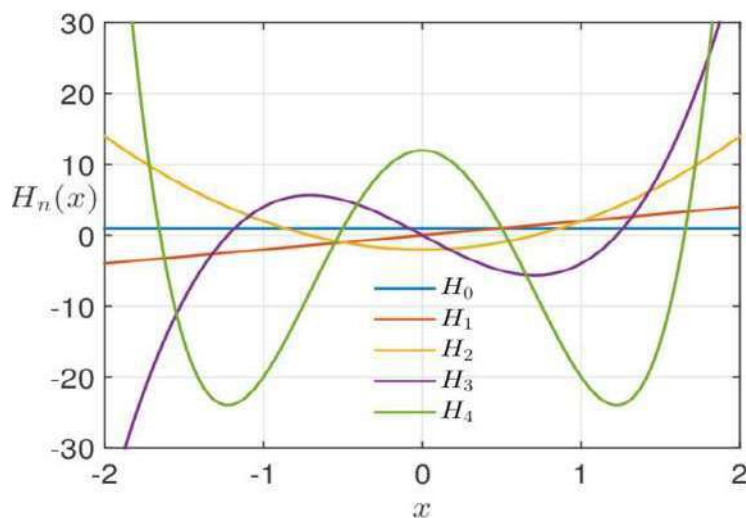


FIG. 2.1 – Les cinq premiers polynômes d'Hermite.

2.1.2 Fonction génératrice

Il est utile de représenter la suite des $H_n(x)$ à l'aide de la fonction génératrice.

Théorème 2.1.1 *Les polynômes d'Hermite, $H_n(x)$, ont la fonction génératrice suivante*

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

Preuve. En utilisant le développement de Taylor de e^{tx} et $e^{-\frac{t^2}{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{tx - \frac{t^2}{2}} &= e^{tx} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(tx)^s}{s!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^r}{r!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^s}{2^r s! r!} t^{s+2r}. \end{aligned}$$

En posant $n = s + 2r$, on obtient $s = n - 2r$ et alors

$$\begin{aligned} e^{tx - \frac{t^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \frac{x^{n-2r}}{2^r (n-2r)! r!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.1.3 Orthogonalités des polynômes d'Hermite

Théorème 2.1.2 *Les polynômes d'Hermite sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids $e^{-x^2/2}$:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = n! \sqrt{2\pi} \delta_{nm},$$

où $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et 0 si $m > n$, (δ_{nm} est le symbole de Kronecker).

Preuve. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) H_n(x) dx.$$

Par n intégrations par parties (en utilisant, pour chacune, la nullité en $\pm\infty$ d'un polynôme multiplié par $e^{-\frac{x^2}{2}}$), on a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx &= (-1)^{m-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) H_n^{(n)}(x) dx \\ &= (-1)^{m-n} n! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ n! \sqrt{2\pi} & \text{si } n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.1.4 Relations de récurrence

Théorème 2.1.3 *Les polynômes d'Hermite satisfont les relations de récurrence suivante :*

$$(i) \quad H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

$$(ii) \quad H'_n(x) = nH_{n-1}(x).$$

Preuve. ...

(i) D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} = -(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\ &= x(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

(ii) En dérivant $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on obtient le résultat désiré. ■

2.2 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre, nommés en 1872, d'après le mathématicien français Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886). Ils sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0. \quad (2.1)$$

2.2.1 Définition

Définition 2.2.1 Les polynômes de Laguerre de degré n sont les polynômes définis sur $[0, +\infty[$ par :

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r. \quad (2.2)$$

Remarque 2.2.1 Les cinq premiers polynômes de Laguerre, sont

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= -x + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\ L_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24). \end{aligned}$$

Les cinq premiers polynômes de Laguerre sont représentés dans la figure 2.2 ci-dessous.

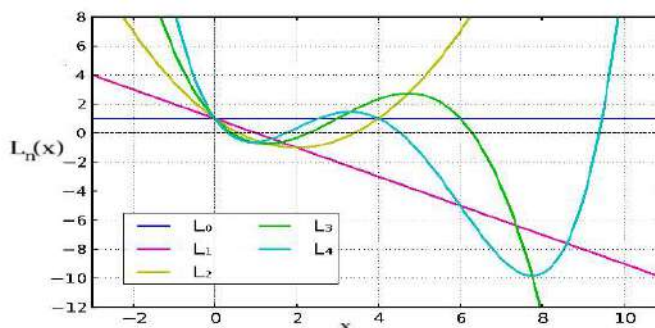


FIG. 2.2 – Les cinq premiers polynômes de Laguerre.

2.2.2 Fonction génératrice

Théorème 2.2.1 *La fonction génératrice des polynômes de Laguerre, $L_n(x)$, est*

$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n. \quad (2.3)$$

Preuve. D'après le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) &= \frac{1}{1-t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{r!} \left(\frac{1}{1-t}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{r+1}} &= \frac{1}{0!} + \frac{(r+1)}{1!}t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}t^3 + \dots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}t^s, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}t^s.$$

En posant $n = r + s$, on obtient $s = n - r$ et

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.2.3 Quelques expressions explicites

Le théorème suivant donne quelques expressions des polynômes de Laguerre.

Théorème 2.2.2 ..

- (i) $L_n(0) = 1.$
- (ii) $L'_n(0) = -n.$
- (iii) $\int_0^\infty e^{-tx} L_n(x) dx = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n.$
- (iv) $L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1).$

Preuve.

(i) On substitue $x = 0$, dans (2.3) :

$$\frac{e^0}{1-t} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0) t^n, \quad (2.4)$$

et d'autre part, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(0) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

d'où

$$L_n(0) = 1.$$

(ii) On a $L_n(x)$ est la solution de l'équation de Laguerre (2.1), alors

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n(x) + (1-x) \frac{d}{dx} L_n(x) + n L_n(x) = 0. \quad (2.5)$$

en posant $x = 0$ dans (2.5) on a

$$L'_n(0) + n L_n(0) = 0,$$

et d'après (i) on obtient

$$L_n(0) = 1,$$

donc

$$L'_n(0) + n = 0,$$

alors

$$L'_n(0) = -n.$$

(iii) En remplaçant l'expression de $L_n(x)$ (2.2) dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} L_n(x) dx &= \int_0^\infty e^{-tx} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r dx \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \int_0^\infty x^r e^{-tx} dx. \end{aligned}$$

En posant $tx = z \Rightarrow dz = tdx$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} L_n(x) dx &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \int_0^\infty \left(\frac{z}{t}\right)^r e^{-z} \frac{dz}{t} \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \cdot \frac{1}{t^{r+1}} \int_0^\infty z^r e^{-z} dz \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \cdot \frac{1}{t^{r+1}} \cdot \Gamma(r+1) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{(r!) (n-r)!} \left(\frac{1}{t}\right)^r, \text{ car } \Gamma(r+1) = r! \\ &= \frac{1}{t} \sum_{r=0}^n C_n^r \left(\frac{-1}{t}\right)^r \\ &= \frac{1}{t} \left[C_n^0 + C_n^1 \left(\frac{-1}{t}\right)^1 + C_n^2 \left(\frac{-1}{t}\right)^2 + \dots + C_n^n \left(\frac{-1}{t}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n. \end{aligned}$$

(iv) Seul le terme en x^2 continue à $L_n''(0)$, dans (2.2), donc

$$L_n''(0) = \frac{n!}{4(n-2)!} 2 = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.6)$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.2.4 Orthogonalités des polynômes de Laguerre

Théorème 2.2.3 *Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur $[0, +\infty[$ par rapport à la fonction de poids e^{-x} :*

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm},$$

où $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et 0 si $m \neq n$, (δ_{nm} est le symbole de Kronecker).

Preuve. Nous avons de la fonction génératrice :

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \quad t \neq 0, \quad (2.7)$$

et

$$\frac{1}{1-s} \exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m, \quad s \neq 0. \quad (2.8)$$

Donc on peut déduire que

$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} \frac{\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-s} = \sum_{n,m=0}^{\infty} L_n(x) L_m(x) t^n s^m,$$

en multipliant les deux côtés par e^{-x} et en intégrant, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} \frac{\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-s} dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = I.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) \exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-t} dx \\
 &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty \exp\left(-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)\right) dx \\
 &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[-\frac{1}{1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}} e^{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \frac{1}{1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}} \\
 &= \frac{1}{(1-t)(1-s) + t(1-s) + s(1-t)} \\
 &= \frac{1}{1-st} = \sum_{n=0}^\infty t^n s^n.
 \end{aligned}$$

Donc, on peut déduire que

$$t^n s^m \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = t^n s^n.$$

Alors, $\int_0^\infty e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = 1$ si $n = m$ et $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0$ si $n \neq m$. ■

2.2.5 Relations de récurrence

Théorème 2.2.4 *Les polynômes de Laguerre satisfont les relations de récurrence suivante :*

$$(i) \quad (n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x).$$

$$(ii) \quad x L'_n(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x).$$

Preuve.

(i) En dérivant la fonction génératrice (2.3), par rapport à la variable t , on obtient

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) - \frac{x}{(1-t)^2} \frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t}.$$

La relation (2.3) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \frac{x}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

En multipliant les deux côtés de l'équation précédente par $(1-t)^2$, on obtient

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n,$$

et donc

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \end{aligned}$$

On peut écrire la relation précédente comme suit

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{\infty} L_{n+1}(x) (n+1) t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) (n-1) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=-1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \end{aligned} \tag{2.9}$$

l'égalisation entre les deux cotés de l'équation ci-dessus donne

$$(n+1) L_{n+1}(x) - 2n L_n(x) + (n-1) L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) + x L_n(x), \quad n \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x).$$

(ii) En dérivant la fonction génératrice (2.3), par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n &= -\frac{t}{(1-t)^2} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) \\ &= -\frac{t}{(1-t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'équation précédente par $(1-t)$, on obtient

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n = -t \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^{n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1},$$

qui est

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L'_{n-1}(x) t^n = - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n,$$

On a $L_0(x) = 1$, ceci implique que $L'_0(x) = 0$. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} [L'_n(x) - L'_{n-1}(x)] t^n = \sum_{n=1}^{\infty} -L_{n-1}(x) t^n,$$

donc

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.10)$$

En dérivant la relation (i), par rapport à la variable x on obtient

$$(n+1) L'_{n+1}(x) = (2n+1-x) L'_n(x) - L_n(x) - n L'_{n-1}(x). \quad (2.11)$$

En changeant l'indice n en $n+1$ on obtient

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x). \quad (2.12)$$

De (2.10) on a

$$L'_{n-1}(x) = L'_n(x) + L_{n-1}(x). \quad (2.13)$$

En remplaçant (2.12) et (2.13) dans (2.11) on obtient

$$(n+1)[L'_n(x) - L_n(x)] = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - n[L'_n(x) + L_{n-1}(x)],$$

c'est-à-dire

$$-nL_n(x) = -xL'_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Donc

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.2.6 Formule de Rodrigues

Théorème 2.2.5 (*Formule de Rodrigues*) Les polynômes de Laguerre sont définis comme suit

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Preuve. En utilisant la formule de Leibniz suivante

$$\frac{d^p}{dx^p} (x^q) = q(q-1)(q-2) \cdots (q-p+1) x^{q-p} = \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p},$$

on obtient

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \frac{e^x}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} x^n \frac{d^r e^{-x}}{dx^r},$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} x^n = \frac{n!}{r!} x^r \text{ et } \frac{d^r e^{-x}}{dx^r} = (-1)^r e^{-x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r! (n-r)!} \frac{n!}{r!} x^r (-1)^r e^{-x} \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n! x^r}{(r!)^2 (n-r)!} = L_n(x).\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Chapitre 3

Résolution numérique d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm

La résolution analytique des équations intégrales de Volterra-Fredholm peut être très difficile, voire impossible dans certains cas. Mais, grâce à des méthodes numériques, il est possible d'obtenir des approximations précises de la solution exacte. Dans ce chapitre, nous avons utilisé en basant sur la méthode de collocation les polynômes d'Hermite et de Laguerre pour trouver la solution numérique (approchée) des équations intégrales de Volterra-Fredholm.

3.1 Méthode de collocation

La méthode de collocation est une technique numérique vise à trouver une solution approchée par une fonction d'un problème mathématique dans un sous-espace de dimension finie. Le but est de trouver les paramètres de la fonction d'approximation qui rendent la solution approximative aussi proche que possible de la solution exacte aux points spécifiques, appelés points (ou nœuds) de collocation. En d'autres termes, la méthode de collocation consiste à rendre le résidu, la différence entre la solution exacte et la solution approchée, nul en un certain nombre de points (points de collocation).

La convergence et la stabilité de collocation sont très importants. La convergence collocation signifie que lorsque le nombre de points de collocation augmente (ou lorsque la discrétisation devient plus fine), la solution approchée tend vers la solution exacte du problème (plus on utilise de points de collocation, plus la solution numérique est proche de la vraie solution). La stabilité concerne la sensibilité de la solution numérique aux petites perturbations, comme les erreurs d'arrondi ou les variations dans les données du problème.

Dans ce mémoire, le problème mathématique est une équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\phi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s)\phi(s)ds, \quad x \in [a, b]. \quad (3.1)$$

Soit E un sous espace de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a; b])$ ou de $L^2([a; b])$ et soit $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ une base de E , alors d'après la méthode de collocation, la solution approchée de l'équation (3.1) dans E est

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.2)$$

où a_i sont des coefficients réels inconnus et pour déterminer a_i , en substituant, $\phi_n(x)$ dans l'équation (3.1) (car ϕ_n est une solution de (3.1)). On peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= a_0 \varphi_0(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donc, comme ϕ_n est une solution de (3.1), nous avons :

$$\phi_n(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\phi_n(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s)\phi_n(s)ds, \quad x \in [a, b]. \quad (3.4)$$

En remplaçant (3.2) dans (3.4), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s) \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(s) ds, \quad x \in [a, b]. \quad (3.5)$$

En utilisant (3.3), alors on peut écrire l'équation (3.5) sous la forme :

$$\mathbf{FA} = g(x_j) + \lambda_1 \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) \mathbf{GA} dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x_j, s) \mathbf{HA} ds, \quad (3.6)$$

où $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \dots, n$, sont les points de collocation,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_j) & \varphi_2(x_j) & \cdots & \varphi_n(x_j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Donc, l'équation intégrale de Volterra-Fredholm (3.1) converti en un système linéaire de $(n+1)$ équations algébriques à $(n+1)$ inconnues $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Ce système peut être résolu facilement en utilisant la "méthode d'élimination de Gauss" ou d'autre méthode, c-à-d : obtenir les valeurs inconnues de $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Ces valeurs sont substituées dans (3.2) pour trouver la valeur approximée de la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm (3.1).

Le choix des points de collocation est très important, car il peut avoir un impact significatif sur la précision et l'efficacité de la méthode. On peut utiliser les points de Chebyshev ou les points de Gauss-Lobatto, voir [4] pour plus détails. Dans ce mémoire, nous utilisons :

$$x_j = a + \frac{b-a}{n}j, \quad j = 0, \dots, n.$$

3.1.1 Méthode de collocation-Hermite

La méthode de collocation avec des polynômes d'Hermite sont utilisés pour résoudre des équation intégrale de Volterra-Fredholm. Cette méthode est appelée la méthode de collocation-Hermite. Elle utilise des polynômes de Hermite comme base pour approcher la solution et impose que cette approximation satisfasse l'équation à des points de collocation.

Donc, d'après (3.2), on peut écrire la solution approchée de l'équation (3.1) comme suit :

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(x), \quad (3.7)$$

où b_k sont des coefficients réels inconnus et H_k sont les polynômes d'Hermite. On peut écrire la solution approchée (3.7) comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= b_0 H_0(x) + b_1 H_1(x) + \cdots + b_n H_n(x) \\ &= \begin{pmatrix} H_0(x) & H_1(x) & \cdots & H_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0n} \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où β_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$) sont des valeurs connues qui sont utilisées pour trouver les polynômes d'Hermite. Par exemple, si $n = 2$, on a

$$\phi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

et si $n = 3$, on a

$$\phi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\phi_n(x)$ est une solution de (3.1), nous avons

$$\sum_{k=0}^n b_k H_k(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \sum_{k=0}^n b_k H_k(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s) \sum_{k=0}^n b_k H_k(s) ds.$$

Donc

$$\mathbf{XPB} = g(x_j) + \lambda_1 \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) \mathbf{TPB} dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x_j, s) \mathbf{SPB} ds,$$

où $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \dots, n$, sont les points de collocation,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & \cdots & x_j^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0n} \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Donc, nous obtenons un système linéaire de $(n + 1)$ équations algébriques à $(n + 1)$ inconnues $(b_0, b_1, \dots, b_n)$. Les valeurs de $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ sont substituées dans l'équation (3.7) pour trouver la valeur approximée de la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm (3.1).

3.1.2 Méthode de collocation-Laguerre

La méthode de collocation-Laguerre utilise les polynômes de Laguerre comme base pour approcher la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm. Donc, nous

avons

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x), \quad (3.8)$$

où c_k sont des coefficients réels inconnus et L_k sont les polynômes de Laguerre. On peut écrire la solution approchée comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \cdots + c_n L_n(x) \\ &= \begin{pmatrix} L_0(x) & L_1(x) & \cdots & L_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{00} & \theta_{01} & \theta_{02} & \cdots & \theta_{0n} \\ 0 & \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1n} \\ 0 & 0 & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où θ_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$) sont des valeurs connues qui sont utilisées pour trouver les polynômes de Laguerre. Par exemple, si $n = 2$, on a

$$\phi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

et si $n = 3$:

$$\phi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\phi_n(x)$ est une solution de (3.1), nous avons

$$\sum_{k=0}^n c_k L_k(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \sum_{k=0}^n c_k L_k(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, s) \sum_{k=0}^n c_k L_k(s) ds.$$

Donc

$$\mathbf{XQC} = g(x_j) + \lambda_1 \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) \mathbf{TQC} dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x_j, s) \mathbf{SQC} ds,$$

où $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \dots, n$, sont les points de collocation,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & \cdots & x_j^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \theta_{00} & \theta_{01} & \theta_{02} & \cdots & \theta_{0n} \\ 0 & \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1n} \\ 0 & 0 & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons un système linéaire de $(n+1)$ équations algébriques à $(n+1)$ inconnues $(c_0, c_1, \dots, c_n)$, où on choisit x_j ($j = 0, 1, \dots, n$) dans $[a, b]$. Ces valeurs sont substituées dans (3.8) pour trouver la valeur approximée de la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm (3.1).

3.2 Exemples

Dans cette partie, nous présentons deux exemples avec la solution exacte des équations intégrale linéaires de Volterra-Fredholm et nous cherchons la solution approchée en utilisant la méthode de collocation-Hermite et la méthode de collocation-Laguerre, puis nous comparons la solution exacte avec la solution approximée à différentes degrés et nous comparons les deux méthodes étudiées à travers l'erreur absolue. Pour les calculs, on utilise le logiciel **Matlab**.

3.2.1 Exemple 1

Nous considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\phi(x) = e^x - 1 - x + \int_0^x \phi(t) dt + \int_0^1 s\phi(s) ds, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Le théorème (1.3.2) confirme que, l'équation (3.9) admet une solution unique qui est $\phi(x) = xe^x$, voir [1].

Nous résolvons l'équation (3.9) par les méthodes de collocation-d'Hermite et de collocation-Laguerre pour $n = 8, 10$. Par exemple pour $n = 2$ avec la méthode de collocation-d'Hermite on a

$$\mathbf{XPB} = g(x_j) + \lambda_1 \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) \mathbf{TPB} dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x_j, s) \mathbf{SPB} ds,$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_j & x_j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Pour déterminer les valeurs inconnues de (b_0, b_1, b_2) , on choisit les points de collocation x_j ($j = 0, 1, 2$) dans $[0, 1]$ comme suit

$$x_j = \frac{j}{2}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Donc, pour $x_0 = 0$, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{3}{4}b_2 = 0,$$

pour $x_1 = 0.5$, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{24}b_2 - e^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} = 0,$$

et pour $x_2 = 1$, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{11}{12}b_2 + 2 - e = 0.$$

Alors, nous obtenons le système suivant pour déterminer b_0 , b_1 et b_2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{3}{4}b_2 = 0 \\ \frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{24}b_2 - e^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{11}{12}b_2 + 2 - e = 0 \end{cases}$$

En substituant les valeurs de b_0 , b_1 et b_2 qui sont la solution le système précédent, on obtient la solution approchée de l'équation (3.9) pour $n = 2$. En suivant les mêmes étapes, on obtient la solution approchée de l'équation (3.9) pour $n = 2$ avec la méthode de collocation-Laguerre où, au lieu $\mathbf{B}$ et $\mathbf{P}$ on utilise :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Les tableaux 3.1 et 3.2 donnent la solution exacte, l'erreur absolue par la méthode de collocation-Hermite et l'erreur absolue par méthode de collocation-Laguerre pour $n = 8, 10$ aux points de collocation $x_j \in [0, 1]$.

A partir des tableaux 3.1 et 3.2, nous remarquons que la solution approximative se rapproche de la solution exacte quelque soit la méthode ceci montre l'efficacité des méthode présentées. Aussi, nous remarquons que l'erreur absolue par la méthode de collocation-Hermite est inférieure à l'erreur absolue par méthode de collocation-Laguerre pour $n = 8$ et $n = 10$. Donc, la méthode collocation-Hermite est plus précise que la méthode collocation-Laguerre. Ces résultats ont été confirmé par les figures 3.1 et 3.2.

TAB. 3.1 – Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour n=8, Exemple 1.

x_j	Solution exacte	Erreur absolue par collocation-Hermite	Erreur absolue par collocation-Laguerre
0.000	0.0000000	2.7300×10^{-6}	3.0287×10^{-6}
0.125	0.1416436	5.4612×10^{-8}	4.5061×10^{-7}
0.250	0.3210064	2.994×10^{-8}	2.3348×10^{-7}
0.375	0.5456218	3.1077×10^{-7}	4.1099×10^{-7}
0.500	0.8243606	3.0017×10^{-7}	7.2599×10^{-7}
0.625	1.1676537	2.9898×10^{-6}	8.6088×10^{-6}
0.750	1.5877500	1.9981×10^{-7}	7.1070×10^{-7}
0.875	2.0990159	1.7885×10^{-7}	4.9900×10^{-7}
1.000	2.7182818	2.8545×10^{-7}	5.0857×10^{-5}

TAB. 3.2 – Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour n=10, Exemple 1.

x_j	Solution exacte	Erreur absolue par collocation-Hermite	Erreur absolue par collocation-Laguerre
0.0	0.0000000	3.7348×10^{-7}	1.0230×10^{-6}
0.1	0.1105171	6.4632×10^{-9}	5.4004×10^{-7}
0.2	0.2442806	3.5960×10^{-9}	3.3289×10^{-7}
0.3	0.4049576	1.9525×10^{-7}	4.9380×10^{-7}
0.4	0.5967299	2.0440×10^{-7}	8.3413×10^{-7}
0.5	0.8243606	1.7791×10^{-7}	9.6040×10^{-7}
0.6	1.0932713	1.6898×10^{-7}	8.4951×10^{-7}
0.7	1.4096269	1.2672×10^{-7}	5.2245×10^{-7}
0.8	1.7804327	2.5954×10^{-7}	4.1285×10^{-8}
0.9	2.2136428	4.7925×10^{-8}	4.9974×10^{-8}
1.0	2.7182818	1.1737×10^{-7}	9.8771×10^{-7}

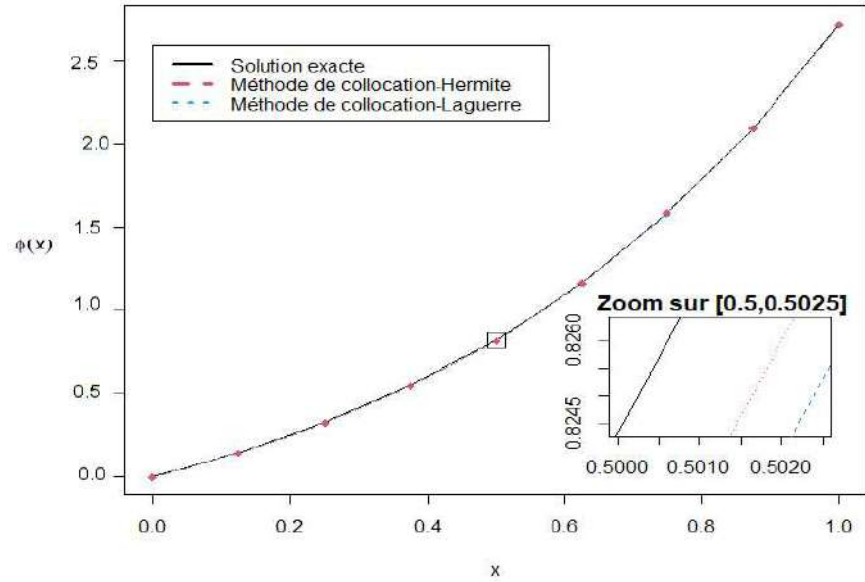


FIG. 3.1 – Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 8$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 1.

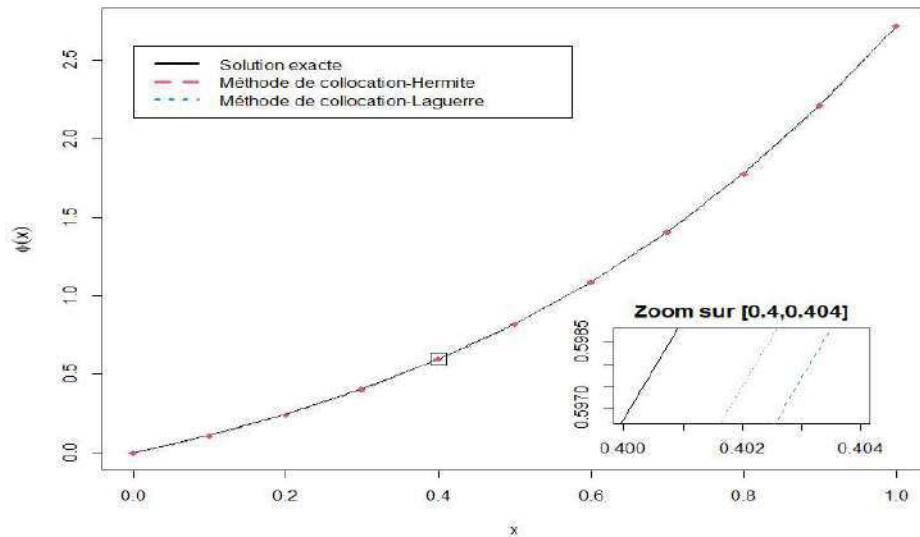


FIG. 3.2 – Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 10$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 1.

3.2.2 Exemple 2

Soit l'équation intégrale suivante :

$$\phi(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \phi(t) dt + \int_0^\pi (x-s) \phi(s) ds, \quad x \in [0, \pi]. \quad (3.10)$$

D'après le théorème (1.3.2), notre équation a une solution unique qui est

$$\phi(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi].$$

En suivant les mêmes étapes précédentes (voir exemple 1), on obtient la solution approchée par la méthode de collocation-Hermite et la solution approchée par la méthode de collocation-Laguerre de l'équation (3.10). Les tableaux 3.3 et 3.4 présentent la solution exacte, l'erreur absolue par la méthode de collocation-Hermite et l'erreur absolue par la méthode de collocation-Laguerre pour $n = 8, 10$ aux points de collocation $x_j \in [0, \pi]$.

Nous remarquons que la solution approximative se rapproche de la solution exacte quelque soit la méthode ceci montre l'efficacité des méthode présentées. Aussi, nous remarquons que l'erreur absolue par la méthode de collocation-Hermite est inférieure à l'erreur absolue par méthode de collocation-Laguerre pour $n = 8$ et $n = 10$. Donc, la méthode collocation-Hermite est plus précise que la méthode collocation-Laguerre. Ces résultats ont été confirmé par les figures 3.3 et 3.4.

TAB. 3.3 – Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=8$, Exemple 2.

x_j	Solution exacte	Erreur absolue par collocation-Hermite	Erreur absolue par collocation-Laguerre
0.0000000	1.000000	1.0002×10^{-6}	4.7201×10^{-5}
0.3926991	0.9238795	2.8813×10^{-6}	2.2098×10^{-5}
0.7853982	0.7071068	3.9622×10^{-6}	4.8884×10^{-6}
1.1780972	0.3826834	1.2206×10^{-5}	2.8720×10^{-5}
1.5707963	6.123032×10^{-17}	1.4845×10^{-4}	3.7802×10^{-4}
1.9634954	-0.3826834	9.7978×10^{-6}	7.9155×10^{-5}
2.3561945	-0.7071068	6.5822×10^{-6}	2.0564×10^{-5}
2.7488936	-0.9238795	2.5551×10^{-6}	5.0611×10^{-5}
3.1415927	-1.000000	7.9870×10^{-6}	3.5575×10^{-5}

TAB. 3.4 – Solution exacte, l'erreur absolue par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre pour $n=10$, Exemple 2.

x_j	Solution exacte	Erreur absolue par collocation-Hermite	Erreur absolue par collocation-Laguerre
0.0000000	1.000000	0.0909×10^{-6}	3.8542×10^{-5}
0.3141593	0.9510565	2.6259×10^{-6}	2.7977×10^{-5}
0.6283185	0.8090170	3.2360×10^{-6}	5.5501×10^{-6}
0.9424778	0.5877853	1.8511×10^{-6}	2.0855×10^{-6}
1.2566371	0.309017	1.0946×10^{-5}	1.5544×10^{-5}
1.5707963	6.123032×10^{-17}	1.2330×10^{-5}	2.2458×10^{-5}
1.8849556	-0.309017	1.1896×10^{-5}	2.8974×10^{-5}
2.1991149	-0.5877853	9.5981×10^{-6}	3.5201×10^{-5}
2.5132741	-0.809017	5.4841×10^{-6}	2.7891×10^{-5}
2.8274334	-0.9510565	2.5731×10^{-7}	4.8888×10^{-5}
3.1415927	-1.000000	7.2157×10^{-6}	3.9894×10^{-5}

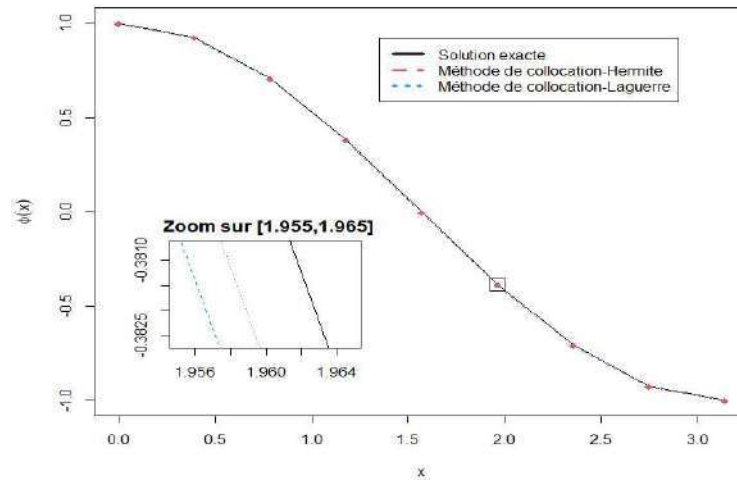


FIG. 3.3 – Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 8$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 2.

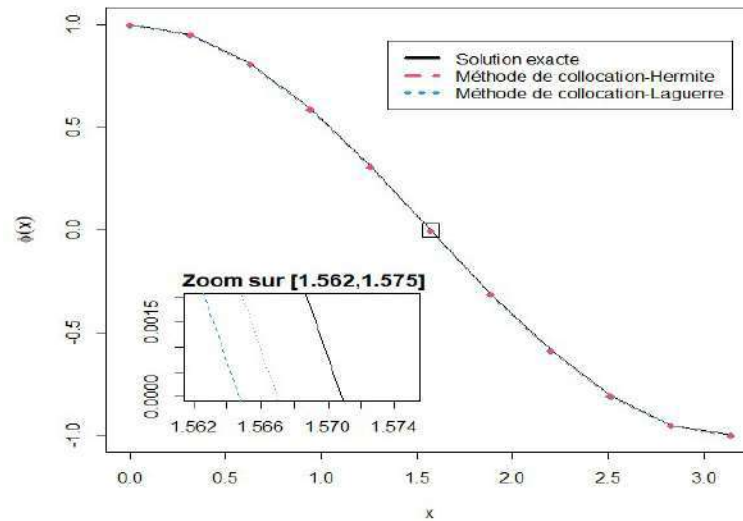


FIG. 3.4 – Solution exacte et les solutions approchées pour $n = 10$ par les méthodes de collocation-Hermite et de collocation-Laguerre, Exemple 2.

Conclusion

Nous avons utilisé la méthode de collocation avec des polynômes d'Hermite et de Laguerre pour trouver la solution approchée d'une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm. La représentation matricielle transforme cette équation qui est complexe en un système d'équations algébriques où la résolution devient plus facile. Nous avons donné deux exemples pour comparer entre la méthode de collocation-Hermite et la méthode de collocation-Laguerre et pour démontrer l'efficacité ces méthodes. Nous avons obtenu que la solution numérique est très proche de la solution exacte quelque soit la méthode, ceci confirme l'efficacité des méthode présentées. La comparaison, à travers d'erreur absolue, a prouver que la méthode de collocation-Hermite est plus précise que la méthode de collocation-Laguerre.

Le développement des nouvelles approches numériques de la résolution des équation intégrale de Volterra-Fredholm est toujours en cours. J'espère que les étudiants des années prochaines présenter d'autres méthodes.

Bibliographie

- [1] Atkinson K. E. (2010). The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge University Press.
- [2] Brezis H. (1992). Analyse fonctionnelle : Théorie et application. Masson, Paris, .
- [3] Calio F., Marchetti E., Mure V. (2006). On some Volterra-Fredholm integral equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics 31, 174-184.
- [4] Fang C., He G., Xiang S. (2019). Hermite-type collocation methods to solve Volterra integral equations with highly oscillatory Bessel kernels. Symmetry, 11(2) :11020168.
- [5] Hochstadt H. (1973). Integral equations. Wiley, New York.
- [6] Junghanns P., Mastroianni G., Notarangelo I. (2021) . Weighted Polynomial Approximation and Numerical Methods for Integral Equations. Birkhäuser Cham.
- [7] Kharab A. (2019). An introduction to numerical methods : A MATLAB Approach. 4th edition, CRC Press Taylor & Francis Group.
- [8] Krasnov M., Kissélev A. Makarenko G. (1977). Equations intégrales. problèmes et exercices. Traduction française, éditions Mir, Moscou.
- [9] Nadir M. (2022). Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev. Mémoire de master en Mathématiques, Université Mohamed Boudiaf-M'sila
- [10] Nemati S. (2015). Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations using Legendre collocation method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 278 : 29-36.
- [11] Rahman A. (2007) . Integral equations and their applications. Dalhousie University, Canada.

- [12] Seghiri Imene (2021). Quelques méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales non linéaires de Volterra et de Fredholm. Mémoire de Master en Mathématiques, Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi.
- [13] Wang Z., Hu X., Hu B. (2023). A collocation method based on roots of Chebyshev polynomial for solving Volterra integral equations of the second kind. Applied Mathematics Letters, 146 : 108804.
- [14] Wang K. Y., Wang Q. S. (2013). Lagrange collocation method for solving Volterra-Fredholm integral equations. Applied Mathematics and Computation 219, 10434-10440.
- [15] Wazwaz A. (2015) . A first course in integral equations. Second edition : Hackensack, N.J, World Scientific.
- [16] Ziad D. (2022) . Résolution numérique des équations intégrales-différentielles par les polynômes de Touchard et de Laguerre. Mémoire de Master en Mathématiques Appliquées, Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi.

ملخص

تحظى المعادلات التكاملية باهتمام كبير بفضل تطبيقاتها الواسعة في العديد من المجالات مثل البيولوجيا، الفيزياء والاقتصاد. غالبًا ما يكون من الصعب جدًا، إن لم يكن مستحيلًا، إيجاد حل دقيق لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية. لذا يلجأ إلى الطرق العددية للحصول على حلول تقريبية لهذه المعادلات. في هذه المذكرة نستخدم كثيرات حدود هيرميت و لاغيربالاعتماد على طريقة التجميع لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية.

كلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية ، كثيرات الحدود المتعامدة، كثيرات حدود هيرميت، كثيرات حدود لاغير، التقارب العددي

Résumé

Les équations intégrales ont un grand intérêt grâce au large éventail d'applications dans plusieurs domaines comme la biologie, la physique et l'économie. Il est souvent très difficile, voire impossible, d'obtenir une solution exacte d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm en raison de sa complexité. Nous utilisons alors des méthodes numériques pour obtenir des approximations précises de la solution exacte. Dans ce mémoire, nous utilisons en basant sur la méthode de collocation les polynômes d'Hermite et de Laguerre pour trouver la solution approchée d'une équation intégrale de Volterra-Fredholm.

Mots-clés: Équations intégrales, Polynômes orthogonaux, Polynômes d'Hermite, Polynômes de Laguerre, Approximation numérique.

Abstract

The integral equations have a great interest thanks due to their wide range of applications in several fields such as biology, physics and economy. It is often very difficult or even impossible to obtain an exact (analytical) solution for a Volterra-Fredholm integral equation due to the complexity. Then, we use numerical methods to obtain the approximate solution. In this work, we use the Hermite and Laguerre polynomials based on the collocation method to find the approximate solution of a Volterra-Fredholm integral equation.

Keywords: Integral equations, Orthogonal polynomials, Hermite polynomials, Laguerre polynomials, Numerical approximation.
