



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et de la Technologie
Electrotechnique
Machine Electrique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
BARKAT MOHAMED ZIAD
BENTRCIA SEYF EDDINE

Le : jeudi 5 juin 2025

Résolution analytique et numérique de l'équation thermique

Jury :

Dr	LAALA WIDAD	MCA	Université Mohamed Khider Biskra	Président
Dr	BECHA HABIBA	MCA	Université Mohamed Khider Biskra	Encadreur
Dr	REZIG MED	MCB	Université Mohamed Khider Biskra	Examineur

Année universitaire : 2024 / 2025



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et de la Technologie
Electrotechnique
Machine Electrique

Réf. :

Résolution analytique et numérique de l'équation thermique

Le : jeudi 5 juin 2025

Présenté par :

BARKAT MOHAMED ZIAD
BENTRCIA SEYF EDDINE

Avis favorable de l'encadreur :

Signature Avis favorable du Président du Jury

Cachet et signature

DEDICACE

Je tiens c'est avec un grand plaisir que je dédié ce modeste travail :
A l'être le plus cher de ma vie, ma mère, à celui qui m'a fait de moi un homme,
mon père aussi.
A mes chers frères et ma sœur.
A ma chère encadreuse Dr. BECHA HABIBA.
A BENTRCIA SEYF EDDINE, chère ami avant d'être binôme.
A tous mes amis.

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.
A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte les noms
BARKAT et BENTRCIA, je dédié ce travail à tous ceux qui ont participé à ma
réussite

Remerciements

Après avoir loué Allah, le Tout-Puissant et le Miséricordieux, qui m'a accordé la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des enseignants et du personnel administratif du département de génie électrique de l'Université Mohamed Khider de Biskra, pour la richesse et la qualité de leur enseignement, ainsi que pour les efforts constants qu'ils déploient afin d'assurer une formation actualisée et de haut niveau à leurs étudiants.

J'adresse mes sincères remerciements à Madame Dr. BECHA Habiba, encadrante de ce travail, pour son accompagnement précieux, ses conseils éclairés, ainsi que pour les connaissances qu'elle a su me transmettre tout au long de cette étude.

J'exprime ma plus profonde gratitude au Présidente du jury, Dr. LAALA WIDAD, ainsi qu'à l'éminent examinateur, Dr. REZIG Med, pour avoir aimablement accepté d'évaluer ce travail et d'assister à sa soutenance.

Je tiens également à remercier sincèrement l'ensemble des professeurs de la Faculté des Sciences et Technologies, dont l'engagement et les enseignements m'ont permis d'acquérir une base académique et scientifique solide, grâce à laquelle j'ai pu atteindre ce niveau.

Je n'oublie pas de remercier du fond du cœur ma famille, pour son soutien indéfectible, ses encouragements constants, ainsi que son appui moral, affectif et financier tout au long de mon parcours universitaire.

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I	PAGES
Tableau I.1 Ordre de grandeur de la conductivité thermique pour diverses substances.	11
Tableau I.2 Ordre de grandeur des coefficients d'échange de chaleur par convection.	13
CHAPITRE IV	
Tableau IV.1 variation relatives aux propriétés thermiques k et ρc_p Leurs représentations	
sont données respectivement en figure IV.2 et IV.3.	58
Tableau IV.2 présente la variation de la densité de la puissance moyenne en fonction de la	
température.	60

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I	PAGES
Figure I.1 Courbe de changement d'états d'un corps pur.	10
CHAPITRE II	PAGES
Figure II.1 Maillage du domaine d'étude.	31
Figure II.2 Discrétisation en volumes finis dans le cas mono-dimensionne.	32
CHAPITRE III	PAGES
Figure III.1 Maillage du domaine d'étude.	36
Figure III.2 Description d'un volume fini.	36
Figure III.3 Description d'un volume fini.	37
Figure III.4 Interface entre deux éléments d'un volume fini.	38
Figure III.5 Demi-volume à coté des nœuds limites.	45
Figure III.6 Algorithme de résolution de l'équation de la thermique.	54
CHAPITRE IV	PAGES
Figure IV.1 Modèle géométrique du dispositif.	57
Figure IV.2 Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.	59
Figure IV.3 Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.	59
Figure IV.4 Variation de la densité de la puissance moyenne en fonction de	

La température.	61
Figure IV.5 Modèle géométrique du dispositif adopté pour l'étude thermique.	62
Figure IV.6 Limites du domaine d'étude thermique.	69
Figure IV.7 Evolution radiale de la température (solution analytique).	72
Figure IV.8 Evolution radiale de la température (solution numérique).	72
Figure IV.9 Evolution radiale de la température (solution analytique et numérique).	73
Figure IV.10 Exploitation des résultats au point M.	75
Figure IV.11 Conditions aux limites du problème thermique.	76
Figure IV.12 Distribution radiale de la température passant par le point M.	77
Figure IV.13 Distribution axiale de la température passant par le point M.	78
Figure IV.14 Evolution temporelle de la température au point milieu de la charge (M).	79
Figure IV.15 Evolution temporelle de la température au point milieu de la charge (M) (Zoom).	79

LISTE DES ABRÉVIATIONS

B : Induction magnétique [T].

H : Champ magnétique [A/m].

D : Induction électrique [C/m²].

E : Champ électrique [V/m] .

J_d : densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m²].

J_c : densité du courant électrique de conduction [A/m²].

μ : Perméabilité magnétique [H /m].

ρ : Densité volumique de charges électriques [C/m³].

ϵ : Permittivité diélectrique [F/m].

ν : Réflectivité magnétique [m/H].

v : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptibles de se déplacer [m/s].

σ : Conductivité électrique [S/m].

J_{ex} : Densité du courant d'excitation (source) [A/m²].

$\sigma.E$: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²].

$(v \wedge B)$: Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

ϵ_r : Permittivité relative du milieu [USI].

ϵ_0 : Permittivité absolue du vide [F/m].

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu [USI].

μ_0 : Perméabilité magnétique absolue du vide.

B_r : Vecteur induction magnétique rémanente [T].

T: Température (K).

ϵ : Permittivité diélectrique [F/m].

σ : Conductivité électrique [S/m],

K: Conductivité thermique (W.

h : Coefficient de transfert par convection (W) .

ρ : Masse volumique (Kg/m³) ou bien r.

Pr : Pression [Pa].

ϑ : Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace,
et supposée connue [m/s].

q : Source des flux de conduction(W / m²) donnée par la loi de fourrier.

Ps : Terme source de chaleur correspondant, soit, au travail des forces appliquées
au fluide ou à la dissipation visqueuse, soit à une puissance calorifique par
unité volumique induite par effet joule où réaction chimique.

$\mathbf{v}$: Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace[m/s].

: Constante de Stefan-Boltzmann (W) ou bien σ s.

Qconv : Flux de chaleur transmise par convection (W).

h : Coefficient de transfert par convection (W) .

Cp : Capacité calorifique à pression constante(J/Kg K°).

qr : Pertes radiatives ou chaleur rayonnée.

R_{C1} : rayon interne de la charge.

R_{C2} : rayon externe de la charge.

RESUME

Dans ce mémoire nous avons étudié le transfert de chaleur par conduction thermique, qui est l'un des trois types de transfert de chaleur que l'on trouve dans la nature et dans tous les domaines industriels. Nous avons présenté une modélisation des phénomènes thermiques par conduction par la méthode des volumes finis, comme étant une méthode de discrétisation. Ce modèle a été appliqué sur un dispositif de chauffage par induction. Pour l'exploitation de ce problème thermique, les sources thermiques sont des termes de densités de puissance, dépendante de la température, déduits par le problème magnétodynamique. La résolution analytique et numérique par la méthode des volumes finis de l'équation de la thermique en régime stationnaire et dynamiques dans le cas d'une distribution radiale de la température a été établis.

In this thesis, we studied heat transfer by thermal conduction, which is one of the three modes of heat transfer found in nature and across various industrial fields. We presented a modeling of thermal conduction phenomena using the finite volume method as a numerical discretization technique. This model was applied to an induction heating system. To analyze this thermal problem, the heat sources were represented by temperature-dependent power density terms, derived from the magnetodynamic problem. The analytical and numerical solution of the thermal equation, in both steady-state and transient regimes, was established using the finite volume method, considering a radial temperature distribution.

في هذا البحث، قمنا بدراسة انتقال الحرارة بالتوصيل الحراري، والذي يُعد أحد الأنماط الثلاثة لانتقال الحرارة الموجودة في الطبيعة وفي مختلف المجالات الصناعية. وقد قمنا بعرض نمذجة للظواهر الحرارية الناتجة عن التوصيل باستخدام طريقة الحجوم المنتهية، باعتبارها تقنية عددية للتفكيك (التفصيل العددي). تم تطبيق هذا النموذج على جهاز تسخين بالحث الكهرومغناطيسي. ولتحليل هذه المسألة الحرارية، تم تمثيل مصادر الحرارة من خلال تراكيب لكثافة القدرة تعتمد على درجة الحرارة، والتي تم اشتقاقها من المسألة المغناطوديناميكية. تم إيجاد الحل التحليلي والعددي للمعادلة الحرارية، في النظامين المستقر (الاستاتيكي) والديناميكي، باستخدام طريقة الحجوم المنتهية، وذلك في حالة توزيع حراري شعاعي

TABLE DE MATIERE

TITRE	PAGES
DEDICACE	I
REMERCIEMENT	II
LISTE DES TABLEAUX	III
LISTE DES FIGURES	IV
LISTE DES ABREVIATIONS	VI
RESUME	VIII
INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre I : Analyse Du Transfert De Chaleur	5
Introduction	6
I.1 Chaleur, température et le flux thermique	6
I.1.1 Chaleur	6
I.1.2 Unités de chaleur	6
I.1.3 Flux de chaleur	7
I.2 Analyse du transfert de chaleur	7
I.2.1 Modes de transmission de la chaleur	7
I.2.2 Notions fondamentales de conduction thermique	10
I.2.2.1 Régime non-stationnaire (dynamique)	10
I.2.2.2 Température	10
I.2.2.3 Conductivité thermique	11
I.3 Lois fondamentales de transmission de la chaleur	11
I.3.1 Quantité de chaleur transmise par rayonnement	12
I.3.2 Flux de chaleur transmise par convection	12
I.3.3 Densité de flux de chaleur : flux de chaleur	13
Conclusion	14
Chapitre II : Formulations Mathématiques des Phénomènes Thermiques et électromagnétique	15
Introduction	16
II.1 Modèles mathématiques en électromagnétisme	16
II.1.1 Equations générales de maxwell	16
II.1.2 Descriptions des équations de maxwell	18
II.1.2.1 Loi d'ampère	18
II.1.2.2 Loi de faraday	19
II.1.2.3 Loi de gauss	20
II.1.2.4 Théorème de la divergence de l'induction magnétique B	21
II.1.2.5 Conservation de la densité du courant total	22
II.2 Loi de comportement des matériaux (milieux physiques)	23
II.3 Modèles en électromagnétiques	24
II.3.1 Modèle magnétodynamique	25
II.4 Equation de la thermique	25

II.5 Modèle cylindrique axisymétrique en thermique	28
II.6 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles	29
II.6.1 Méthode des différences finies (MDF)	30
II.6.2 Méthode des éléments finis (MEF)	30
II.6.3 Méthode des intégrales de frontières (MIF)	30
II.6.4 Méthode des circuits couples (mcc)	30
II.6.5 Méthode des volumes finis (MVF)	31
Conclusion	33
Chapitre III : Modèles Numériques	34
Introduction	35
III.1 Résolution des équations de la thermique par la méthode des volumes finis	35
III.1.1 Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur	37
III.2 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques	51
III.2.1 Méthodes directes	51
III.2.2 Méthodes itératives	51
III.2.2.1 Méthode de Jacobi	51
III.2.2.2 Méthode de gauss Seidel	52
III.2.2.3 Méthode de newton Rafeson	52
III.2.2.4 Méthode de relaxation	53
III.3 Présentation des modules du code de calcul développé pour la résolution de l'équation de la thermique	53
Conclusion	55
Chapitre IV : Applications et Validations	56
Introduction	57
IV.1 Application: chauffage par induction d'un tube creux en acier inoxydable (EDF)	57
IV.1.1 Description du dispositif de chauffage EDF	57
IV.1.2 Modèles des propriétés physiques	58
IV.1.3 Densité de la puissance moyenne en fonction de la température	60
IV.1.4 Etude du comportement thermique de la charge	62
IV.1.4.1 Résolution analytique et numérique de l'équation de la thermique en régime stationnaire dans le cas d'une distribution radiale de la température	62
IV.1.4.1.1 Résultats de la solution analytique et numérique	71
IV.1.4.1.2 Comparaison des résultats trouvés analytiquement et numériquement	73
IV.1.4.2 Résolution du problème thermique en régime transitoire du dispositif	75
IV.1.4.2.1 Résultats thermiques	76
Conclusion	80
CONCLUSION GENERALE	82
BIBLIOGRAPHIE	85

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Le transfert de chaleur est un phénomène physique fondamental qui intervient dans une grande variété de domaines scientifiques, techniques et industriels. Il désigne le processus par lequel l'énergie thermique se déplace d'un corps ou d'un système à un autre, en raison d'une différence de température. Cette énergie peut être transférée selon trois mécanismes principaux : la **conduction**, qui se produit à travers les solides ; la **convection**, qui implique le mouvement des fluides ; et le **rayonnement**, qui concerne l'émission d'ondes électromagnétiques. Ces trois mécanismes de transfert de la chaleur peuvent être présents, dans un procédé, d'une manière séparée, combinée deux à deux ou ensemble à la fois ; doit permettre le calcul du flux thermique pour le favoriser au maximum dans la conception des échangeurs et réacteurs, ou le restreindre au maximum dans la conception des isolations thermiques, ainsi le calcul de la distribution des températures pour s'assurer que le champ de températures des dispositifs étudiés reste dans des limites raisonnables compte tenu des propriétés physiques des matériaux qui les constituent. Il s'agit ici d'une opération d'analyse et enfin le calcul des dimensions et des formes géométriques requises des surfaces d'échange pour satisfaire un cahier des charges. Il s'agit là d'une opération de synthèse.

Comprendre et maîtriser ces modes de transfert est essentiel dans la conception et le fonctionnement de nombreux dispositifs, tels que les échangeurs de chaleur, les systèmes de climatisation, systèmes de chauffage/refroidissement, les moteurs thermiques, ou encore les procédés de fabrication industrielle. L'étude du transfert de chaleur permet ainsi d'optimiser les performances énergétiques, de garantir la sécurité des équipements, et de répondre aux exigences croissantes en matière de durabilité et d'efficacité énergétique.

La chaleur la température et le flux thermique c'est la base de l'étude des transferts thermiques ou se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) décrivent les phénomènes thermiques. Le cas de la thermique, ce sont les lois de la thermodynamique et les propriétés thermiques (conductivité thermique, capacité calorifique) de ces matériaux.

Pour la résolution des équations mathématiques, des méthodes numériques de la discrétisation sont utilisées, consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites. Parmi ces méthodes, nous avons sélectionné la méthode des volumes finis (MVF). Cette méthode présente, en plus de son adaptation aux problèmes à traiter, une mise en œuvre et une conception simple que celle aux éléments finis ; de plus, selon plusieurs auteurs **[CHENTOUF 94]**, **[V. PATANKAR]** donne de meilleures convergences pour les équations de conduction avec un terme de vitesse.

La distribution de température est obtenue en résolvant l'équation de diffusion de la chaleur, c'est l'équation de conduction dont les sources thermiques, fonction du potentiel vecteur magnétique et de la conductivité électrique, sont décrites par une loi de dépendance suivant la température. Dans ce travail les sources thermiques, données par le problème magnétodynamique.

Ainsi, notre travail sera présenté de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, l'analyse du transfert de chaleur, modes de transmission de la chaleur, notions fondamentales de conduction thermique en régime non-stationnaire (dynamique) ainsi les lois fondamentales de transmission de la chaleur sont exposés.

Pour le deuxième chapitre sera consacré aux formulations mathématiques des phénomènes thermiques, ainsi les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction.

Pour le troisième chapitre, nous présentons les modèles numériques adoptés pour la résolution des équations thermiques décrivant les phénomènes thermiques. Il s'agit de la méthode des volumes finis (MVF) et une implémentation, sous l'environnement MATLAB, des modèles mathématico-numériques développés.

En vue de vérifier l'efficacité du modèle étudié établi, nous proposons dans un quatrième chapitre, l'application puis la validation de ce modèle sur des dispositifs de chauffage par induction à géométrie cylindrique et à symétrie axiale.

Enfin, nous tirons une conclusion générale résumant notre travail et nous proposons quelques suggestions futures.

Chapitre I :

Analyse Du Transfert De

Chaleur

Introduction

Nous allons considérer la chaleur, la température et le flux thermique car la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température.

Nous allons aussi considérer l'analyse du transfert de chaleur, modes de transmission de la chaleur, notions fondamentales de conduction thermique en régime non-stationnaire (dynamique) ainsi les lois fondamentales de transmission de la chaleur.

I.1 Chaleur, température et le flux thermique

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité c'est le Joule.

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. [Feriel 21]

I.1.1 Chaleur

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. L'unité de température est le degré Kelvin [K] ou encore le degré Celsius [C].

I.1.2 Unités de chaleur

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J). On utilise également la calorie (cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14; 5°C à 15; 5°C sous une pression de 1 atm.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «L'équivalent mécanique de la calorie». On a : 1 Cal = 4,1855 J.

I.1.3 Flux de chaleur

On appelle flux de chaleur, la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps : $\phi = \frac{dQ}{dt}$ en watt. (I.1)

La densité de flux représente la puissance qui traverse l'unité de surface.

Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur, on a

$$\phi = \frac{dQ}{dS}, \quad (I.2)$$

Si le flux est homogène en tout point de la surface, alors $\phi = \frac{Q}{S}$ ou ϕ s'exprime en $W.m^{-2}$

I.2 Analyse du transfert de chaleur

On appelle transfert de chaleur le déplacement de la chaleur d'une région à une autre suite à une différence de température, ce déplacement peut se produire entre deux corps en contact (solide-solide, solide-fluide, fluide-fluide) ou entre deux parties d'un même corps.

[Ferrel 21]

L'énergie interne du système change au cours du déplacement de la chaleur en produisant :

- Le flux thermique transmis.
- La répartition de la température à l'intérieur du milieu considéré.

I.2.1 Modes de transmission de la chaleur

Le transfert d'énergie aura lieu à chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système, ou, lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact. [KREITH 67]

Le transfert de chaleur reconnaît généralement trois modes de transmission de la chaleur. Il s'agit de la transmission par conduction, convection et rayonnement [KREITH 67] Ces

modes de transfert de la chaleur peuvent être présents, dans un procédé, d'une manière séparée, combinée deux à deux ou ensemble à la fois ; doit permettre :

- le calcul du flux thermique pour le favoriser au maximum dans la conception des échangeurs et réacteurs, ou le restreindre au maximum dans la conception des isolations thermiques.
- le calcul de la distribution des températures pour s'assurer que le champ de températures des dispositifs étudiés reste dans des limites raisonnables compte tenu des propriétés physiques des matériaux qui les constituent. Il s'agit ici d'une opération d'analyse.
- le calcul des dimensions et des formes géométriques requises des surfaces d'échange pour satisfaire un cahier des charges. Il s'agit là d'une opération de synthèse.

Conduction

La conduction est un phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu (solide, liquide ou gazeux) d'une région à haute température vers une autre à basse température ; ou entre différents milieux mis en contact.

La conduction est régie par la loi de Fourier :

$$Q_x = -k s \frac{dT}{dx} \quad (I.3)$$

Cette formule donne la valeur du flux de chaleur en direction de x, avec : Le signe(-) intervient puisque la chaleur s'écoule vers le décroissement de la température. On note que

k : La conductivité thermique du milieu considéré [W/m.K], s : La surface d'échange de chaleur [m²],

$\frac{dT}{dx}$: Le gradient de température dans la direction de x[K/m].

Alors, si un corps a la température T1 est raccord a un corps a la température T2 par l'intermédiaire d'un corps thermique de section S et d'épaisseur e :

Le flux de chaleur qui s'écoule entre les deux corps est donné par la relation :

$$Q = -k s \frac{T_1 - T_2}{e} \quad (I.4)$$

Convection

On distingue deux types de convection : la convection naturelle et la convection forcée.

La convection naturelle, qui nous intéresse dans ce travail, est le transfert d'énergie dû à des mouvements macroscopiques du fluide (air) vers le haut. Ce transfert est dû à un gradient de densité dû lui-même à un gradient de température. Les particules de fluide en contact avec un corps chaud deviennent plus légères et montent en cédant leur place à d'autres particules qui ne sont pas encore chaudes. Ces dernières, à leur tour s'échauffent, montent et le cycle recommence. La convection forcée est due à un gradient de pression imposée par une action mécanique externe telle :

- un pompage dans les échangeurs industriels ou dans un chauffage central.
- une ventilation (moteurs électriques, radiateurs de véhicules, sèche-cheveux).
- ou une agitation mécanique dans les réactions chimiques.

La loi de Newton donne le flux échangé entre une surface de valeur S et de température T_s et un fluide de température T_f ; elle s'écrit :

$$Q = h s (T_s - T_f) \quad (I.5)$$

où h : Coefficient d'échange convectif [$W/m^2 \cdot K$] et s : la surface d'échange [m^2] .

Rayonnement

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température vers un autre à basse température, lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou même lorsqu'un vide les sépare.

Transfert de chaleur lors de la condensation

A une pression donnée la température d'un corps reste constante aussi longtemps que dure le changement d'état. Les changements de phase qui peuvent être rencontrés sont présentés dans la figure suivante :

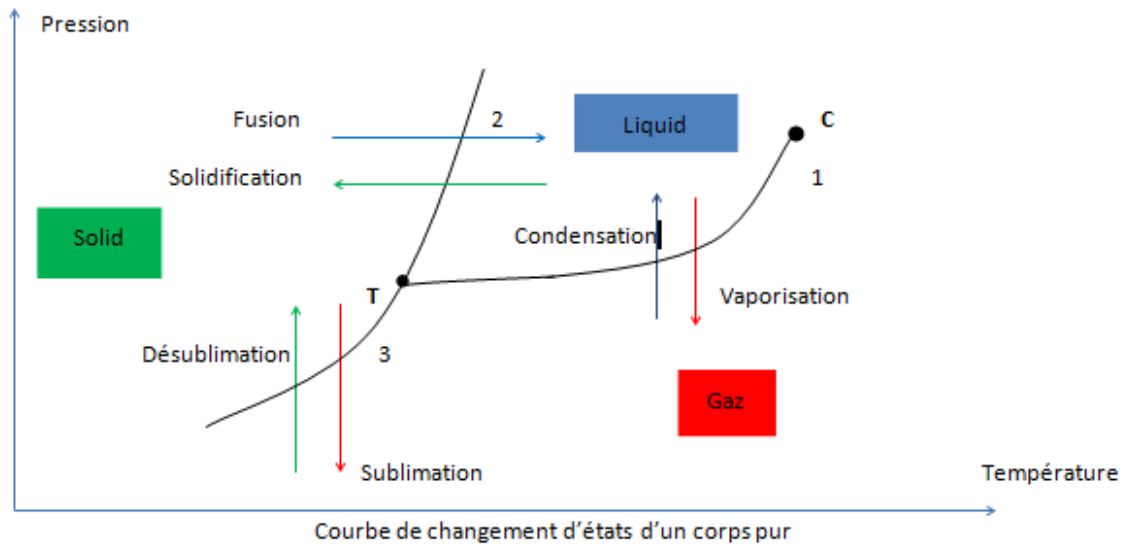


Figure I.1

I.2.2 Notions fondamentales de conduction thermique

I.2.2.1 Régime non-stationnaire (dynamique)

Les transferts de chaleur évoluaient au cours du temps, de telle sorte que les températures, les flux et, bien entendu, les propriétés thermiques seraient variables pendant un temps suffisamment long. [KREITH 67 - KHEZZAR 88]

I.2.2.2 Température

Si la température reste bien définie en tout point M (repéré par ses coordonnées spatiales (x, y, z)), cette température va évoluer avec le temps de sorte qu'à l' instant t, la température en ce point M est : [CRABOL 89]

$$T_M = f(x, y, z, t) = T(x, y, z, t)$$

Il existe un gradient de température qui fait intervenir les dérivées spatiales de cette fonction température, tel que, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

Où $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes de coordonnées cartésiennes.

I.2.2.3 Conductivité thermique

La conductivité thermique des divers matériaux employés dans l'industrie varie d'une manière très sensible d'une substance à une autre. [KREITH 67]

Ainsi k exprimée en [Kcal/(h.m.°C)] est de l'ordre de 6×10^{-3} pour les gaz à la pression atmosphérique, de 1.5×10^{-1} pour les liquides et atteint la valeur de 3.5×10^2 pour le cuivre pur.

Les matériaux ayant une conductivité thermique élevée sont appelés les conducteurs ; tandis que, les matériaux de faible conductivité se rapportent aux isolants thermiques.

En général, la conductivité thermique varie avec la température.

Le tableau I.1 donne, pour diverses substances, l'ordre de grandeur de la conductivité thermique k .

Substance	k en Kcal/(h.m.°C)
Gaz à la pression atmosphérique	0.006 – 0.15
Matériaux isolants	0.030 – 0.18
Liquides non-métalliques	0.075 – 0.60
Solides non-métalliques (briques, pierre à bâtir, béton)	0.030 – 2.2
Métaux liquides	7.50 – 67
Alliages	12.0 – 104
Métaux purs	45.0 – 350

Tableau I.1 Ordre de grandeur de la conductivité thermique pour diverses substances.

Note: 1Kcal/h = 1.163 W

I.3 Lois fondamentales de transmission de la chaleur

On donnera un aperçu préliminaire des équations fondamentales relatives à chacun des trois modes de transmission de la chaleur.

I.3.1 Quantité de chaleur transmise par rayonnement

La quantité d'énergie quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de cette surface. [KREITH 67]

L'énergie Q_r rayonnée par unité de temps, par une surface d'un corps noir au radiateur intégral est donnée par :

$$Q_r = \beta \cdot A_1 \cdot T_1^4 \quad [\text{Kcal/h}] \quad (\text{I.6})$$

Où :

A_1 : L'aire de la surface [m^2].

T_1 : La température absolue [$^{\circ}\text{K}$]

β : La constante de STEPHAN –BOLTZMANN dont la valeur, avec les unités choisis, est de l'ordre de $4.88 \times 10^{-8} \text{ Kcal} / (\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot (^{\circ}\text{K})^4)$.

L'examen de l'équation (I.10) montre que la quantité de chaleur transmise par rayonnement, à partir d'un corps noir, dont la surface est portée à une température supérieure à zéro absolu, est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

La quantité de chaleur effective transmise d'un corps gris (émettent une intensité de rayonnement plus faible que celle des corps noirs) à la température T_1 à un corps noir à T_2 entourant le premier est :

$$Q_r = \beta \cdot A \cdot \varepsilon (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{I.7})$$

Où ε est le facteur d'émission de la surface grise, égale au rapport de l'intensité rayonnée par le corps gris à celle émise par le corps noir à la même température.

I.3.2 Flux de chaleur transmise par convection

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation suivante (loi de NEWTON) : [KREITH 67]

$$Q_c = h_c A \Delta T \quad (\text{I.8})$$

Dans laquelle

Q_c : Le flux de chaleur par convection [Kcal /h].

A : L'aire de la surface de transmission de chaleur [m^2].

ΔT : La différence entre la température de la surface T_s et celle du fluide T_∞ loin de la surface en $^{\circ}\text{C}$.

h_c : L'unité de conductance thermique moyenne de convection (souvent appelé coefficient Superficiel de transmission de chaleur d'échange de chaleur par convection) en $\text{Kcal} / (\text{h.m}^2. ^{\circ}\text{C})$.

La valeur numérique de h_c dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse, et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température ΔT .

Le tableau I.2 donne, à titre d'information générale, l'ordre de grandeur du coefficient moyen d'échange de chaleur par convection qu'on rencontre dans la technique industrielle.

Condition	h_c en $\text{Kcal} / (\text{h.m}^2. ^{\circ}\text{C})$
Air, convection libre	5 - 25
Vapeur d'eau surchauffée à l'air, convection forcée	25 - 250
Huiles, convection forcée	50 - 1500
Eau, convection forcée	250 - 10000
Eau en ébullition	2500 - 50000
Vapeur d'eau, condensation	5000 - 100000

Tableau I.2 Ordre de grandeur des coefficients d'échange de chaleur par convection.

Note: $1\text{Kcal/h} = 1.163\text{W}$

I.3.3 Densité de flux de chaleur : flux de chaleur

Il est possible de définir un vecteur densité de flux de chaleur en chaque point du corps étudié, qui est la quantité de chaleur (flux de chaleur) par unité de surface, et possède les unités W/m^2 , c'est la loi de FOURIER. Ce vecteur est proportionnel au gradient de la température T , et orienté dans le sens opposé au gradient de la température :

[KREITH 67 - KHEZZAR 88]

$$\vec{q} = -k \vec{\text{grad}} T \quad (\text{I.9})$$

k : Conductivité thermique du matériau $[\text{W}/(\text{m.}^{\circ}\text{K})]$.

Ce vecteur est maintenant fonction du temps et varie en général avec celui-ci. La conductivité thermique du matériau n'est pas une constante, mais, une fonction de la température pour toutes les phases. Elle dépend de la pression aussi pour les liquides que pour les gaz. [KHEZZAR 88]

Comme le deuxième principe de la thermodynamique [KREITH 67] implique, nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc positif lorsque le gradient de température est négatif.

Le vecteur $\vec{q}$ permet d'évaluer le flux de chaleur à travers une surface (S) quelconque par la relation suivante : [CRABOL 89]

$$\phi = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (I.10)$$

Où pour une surface élémentaire :

$$\delta\phi = \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (I.11)$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à (S) en tout point M, centre d'un élément de surface dS.

Bien entendu, ce flux de chaleur ϕ ou $\delta\phi$ est lui-même fonction du temps et varie au fur et à mesure que le phénomène qui provoque ce transfert est en évolution.

Conclusion

dans ce chapitre ,nous avons établis l'analyse du transfert de chaleur, notions fondamentales de conduction thermique et les lois fondamentales de transmission de la chaleur pour formuler équation de la thermique dans le prochain chapitre.

Chapitre II :

Formulations Mathématiques des Phénomènes Thermiques et électromagnétique

Introduction

Nous allons considérer les équations de Maxwell et les équations caractéristiques du milieu à étudier car tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques sont régis par ces équations.

Nous allons aussi considérer les phénomènes physiques, les lois fondamentales et les formulations mathématiques importants dans les procédés de transmission de la chaleur dans la matière, et plus particulièrement, ceux fortement présents dans les procédés du chauffage par induction.

II.1 Modèles mathématiques en électromagnétisme

II.1.1 Equations générales de maxwell

C'est J. C. Maxwell (1831-1879), qui a apporté des travaux sur les champs électromagnétiques et qui a fait apparaître, pour la première fois, les quatre équations différentielles qui décrivent l'évolution mutuellement dépendante des champs électriques et magnétiques dans l'espace et dans le temps. Ces équations constituent aujourd'hui la base de l'électromagnétisme [saadallah_19]

Les phénomènes électromagnétiques qui apparaissent dans les dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de MAXWELL, des lois constitutives des matériaux. Nous les résumons comme suit : [SABONNADIERE , COULOMB]

- Equations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

• **Lois constitutives des milieux**

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H} \quad \text{Où} \quad \vec{H} = v(B) \vec{B} \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.5)} \\ \text{(II.6)} \end{array}$$

Où :

$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m²],

$\vec{H}$: Vecteur champ magnétique [A/m].

$\vec{E}$: Vecteur champ électrique [V/m].

$\vec{B}$: Vecteur induction magnétique [T].

$\vec{D}$: Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m²].

$\vec{J}_C$: Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m²].

μ : Perméabilité magnétique [H /m].

ρ : Densité volumique de charges électriques [C/m³].

ϵ : Permittivité diélectrique [F/m].

v : Réluctivité magnétique [m/H].

A ces équations, doit être associée la loi d'OHM généralisée

$$\vec{J}_C = \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{(II.7)}$$

Où :

$\vec{v}$: Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m/s].

σ : Conductivité électrique [S/m].

$\vec{J}_{ex}$: Densité du courant d'excitation (source) [A/m²].

$\sigma \cdot \vec{E}$: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²].

$\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$: Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

II.1.2 Descriptions des équations de maxwell

II.1.2.1 Loi d'ampère

En intégrant le champ magnétique $\vec{H}$ sur le long d'un contour fermé (C) qui est égale au

courant I encercle par le contour (C), [saadallah_19] on obtient :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 8})$$

Donc :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 9})$$

De la loi de stockes :

$$\iint \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} \quad (\text{II. 10})$$

La comparaison entre (II. 9) et (II. 10) donne (II.1)

La formule (II.1) exprime la dépendance du champ magnétique en fonction de la densité de courant total c'est-à-dire le courant de conduction.

II.1.2 .2 Loi de faraday

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (C) placé dans un champ électrique $\vec{E}$

est donnée par l'intégrale curviligne suivante

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II. 11})$$

e : [volt]

La variation du flux magnétique passant à travers une surface quelconque (S) limitée par un contour est égale à la force électromotrice induite [saadallah 19] c'est-à-dire :

$$e = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II. 12})$$

Le flux magnétique à travers une surface (S) est donné par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II. 13})$$

D'après le théorème de stocks, on a :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II. 14})$$

En remplaçant l'équation (II. 13) dans (II. 12), on aura :

$$e = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II. 15})$$

À partir des équations (II. 14) et (II. 15), nous avons :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 16})$$

Finalement, on obtient (II.2), cette équation exprime le couplage électrique magnétique en dynamique ou la variation temporelle de $\vec{B}$ détermine le $\vec{\text{rot}} \vec{E}$ à la variation spatiale vectorielle de $\vec{E}$ ($\vec{\text{rot}} \vec{E}$)

II.1.2.3 Loi de gauss

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$, sortant d'une surface fermée (S), est égale au quotient par ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface (S), [saadallah 19] tel que :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{II. 17})$$

Si les charges libres se repartent uniformément selon une densité volumique (ρ), la relation précédente deviendra :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \text{div} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 18})$$

D'où le théorème de Ostrogradski - Gauss on aura :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dv \quad (\text{II. 19})$$

Dans les deux relations précédentes, on a :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{II. 20})$$

Le vecteur de densité de polarisation $\vec{p}$ le moment électrique d'un petit volume dv on obtient:

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} (\vec{E} \epsilon_0 + \vec{p}) = \iiint_V \rho dv \quad (\text{II. 21})$$

Donc :

$$\text{div } (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}) = \rho \quad (\text{II. 22})$$

Le vecteur d'induction électrique est égal à :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (\text{II. 23})$$

Finalement on trouve la formule précédente (II.4).

II.1.2.4 Théorème de la divergence de l'induction magnétique $\vec{B}$

On constate que le flux magnétique à travers une surface quelconque fermée (s) est

toujours nul, [saadallah 19] c'est-à-dire :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (\text{II. 24})$$

Du théorème d'Ostragradski-Green, on aura :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, dv = 0 \quad (\text{II. 25})$$

En fin on trouve la formule précédente (II.3).

Cette relation, traduit, mathématiquement, que les seules sources de champ sont fermées sur elles-mêmes, elles n'ont ni point ni de départ ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative.

II.1.2.5 Conservation de la densité du courant total

Le champ dépend du temps et la dérivée par rapport au temps de (II. 20) est :

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II. 26})$$

Puis, en tenant compte de l'équation de continuité, on peut écrire :

$$\text{div } \vec{J}_c = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II. 27})$$

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \right) = 0 \quad (\text{II. 28})$$

On a alors :

$$\vec{J}_t = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \quad (\text{II. 29})$$

Finalement, on trouve l'équation (II.1)

II.2 Loi de comportement des matériaux (milieux physiques)

- **Induction et champ électriques**

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité ε , nous avons :

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

Où $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ε_0 : Permittivité absolue du vide [F/m],
 ε_r : Permittivité relative du milieu [USI].

Cette équation d'écrit la relation entre le vecteur induction électrique $\vec{D}$ et le vecteur champ électrique $\vec{E}$. Elle est linéaire si ε est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad ; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ [F /m]}$$

La détermination de $\vec{D}$ de l'équation (II.6) et $\vec{\text{rot}} \vec{E}$ de l'équation (II.3) détermine complètement $\vec{E}$.

- **Induction et champ magnétiques**

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$; μ_0 : Perméabilité magnétique absolue du vide,
 $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]},$
 μ_r : Perméabilité relative du milieu [USI].

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

$\vec{B}_{re}$: Vecteur induction magnétique rémanente [T].

L'équation (II.5) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation $B = f(H)$.

Une variation de $\vec{H}$ conduit à une variation de l'induction $\vec{B}$, on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

II.3 Modèles en électromagnétiques

Les Modèles de J.C MAXWELL décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais, suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables. [SABONNADIÈRE , COULOMB]

La modélisation des systèmes de chauffage par induction fait appel à l'étude du modèle magnétodynamique.

Modèle en électromagnétiques sont :

- LE MODELE ELECTROSTATIQUE
- LE MODELE ELECTRODINAMIQUE
- LE MODELE MAGNETOSTATIQUE

II.3.1 Modèle magnétodynamique

Les sources du courant du chauffage par induction sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT).

Dans ce cas ; le modèle utilisé pour l'étude du chauffage par induction est : le modèle magnétodynamique

La formulation de l'équation magnétodynamique dans le cas où la pièce à chauffer est immobile par rapport à l'inducteur et U (potentiel scalaire électrique) est considérée uniformément nulle, est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} (\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ex}} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{\mu} : \text{rélectivité magnétique} \\ \text{div } \vec{A} = 0 \quad ; \quad \text{telle que } \text{div } \vec{A} = 0 ; \text{ appelée Jauge de COULOMB} \end{array} \right. \quad (\text{II.30})$$

[SABONNADIÈRE , COULOMB]

II.4 Equation de la thermique

Pour un fluide compressible, ou pour un solide, ou dans le cas d'un gaz compressible, on négligeant l'échauffement provoqué par la dissipation visqueuse, l'équation générale de propagation de la chaleur fondée sur l'enthalpie h s'écrit:[MEKIDECHE 93 _ CHENTOUF 94]

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP_r}{dt} - \text{div}(\vec{q}) + P_s - q_r \quad (\text{II.31})$$

tels que :

ρ : Masse volumique [Kg/m³]

P_r : Pression [Pa].

c'est la loi de fourier : $\vec{q} = -k \vec{\text{grad}} T$] donnée par Sources des flux de conduction [W/m² $\vec{q}$]

k : Conductivité thermique [W/(m.°K)].

T : Température [°K].

q_r : Pertes radiatives ou chaleur rayonnée.

P_s : Terme source de chaleur correspondant, soit, au travail des forces appliquées au fluide.

Où à la dissipation visqueuse, soit à une puissance calorifique par unité volumique induite par effet joule où réaction chimique.

$$\text{Comme} \quad \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T \frac{dP_r}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} \frac{dT}{dt}$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} = c_p \quad \text{c'est la capacité calorifique à pression constante [J/(Kg°K)].}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta \cdot T)$$

ρ désigne la masse volumique

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad \text{c'est la constante de STEPHAN-BOLTZMANN}$$

L'équation (II.31) peut s'écrire :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta T \frac{dP_r}{dt} + \text{div}(\vec{k} \text{ grad} T) + P_s + q_r \quad (\text{II.32})$$

Avec :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\mathfrak{V}} \cdot \vec{\text{grad}} T$$

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{\mathfrak{V}} \cdot \vec{\text{grad}} P_r$$

Tels que :

$\vec{\mathfrak{V}}$: Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace, et supposée connue [m/s].

$\beta T \frac{dP_r}{dt}$: Terme qui représente le travail de dilatation.

L'équation (II.32) peut s'écrire alors de la manière suivante :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\mathfrak{V}} \cdot \vec{\text{grad}} T \right) = \beta T \left(\frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{\mathfrak{V}} \cdot \vec{\text{grad}} P_r \right) + \text{div}(\vec{k} \text{ grad} T) + P_s + q_r \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas où le transfert de chaleur serait purement conductif, ce qui est le cas dans le chauffage par induction, en négligeant la chaleur rayonnée, l'équation (II.33) prend la forme :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T \right) = \text{div} (k \vec{\text{grad}} T) + P_s \quad (\text{II.34})$$

Le champ de température T doit vérifier le modèle classique de diffusion de la chaleur suivant l'équation (II.18).

A cette dernière relation, doivent être associées, les conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter.

Qui sont Les conditions initiales temporelles et les conditions aux limites spatiales complètent la description du problème électro magnétothermique. Il s'agit de la :

- 1) condition initiale : la température T_0 à l'instant t_0 est donnée par une relation connue : $T(x,y,z,t_0) = T_0(x,y,z)$
- 2) conditions aux limites spatiales :
 - Condition de DIRICHLET dans son cas général : T connue sur la frontière.
 - Condition de NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$, (pas d'échange avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie).
 - Condition de FOURIER : $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = q_0$, (le flux de chaleur échangé est connu).
 - Condition de NEWTON : $q = h_c(T_s - T_a)$, (cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante).
 - $q = \varepsilon \beta (T_s^4 - T_a^4)$ (cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_a , où ε , β , T_s et T_a désignent respectivement, l'émissivité du corps, la constante de STEPHAN-BOLTZMANN ($\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$), les températures absolues de la surface rayonnante et celle du milieu ambiant).

II.5 Modèle cylindrique axisymétrique en thermique

Une grande partie de problèmes thermiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas du problème des systèmes sur lesquels nous appliquerons notre modèle proposé.

L'hypothèse d'une modélisation axisymétrique est séduisante, puisqu'elle suppose que l'inconnue est invariante par rotation et prendre donc en compte, implicitement, l'hypothèse d'homogénéité de la température due à la rotation.

Problème thermique

Rappelons le modèle classique de diffusion de la chaleur par conduction (II.34), avec une vitesse de la pièce nulle ($\mathcal{V} = 0$).

$$\text{div}(\vec{k} \text{ grad } T) + P_s = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

La température, indépendante de la variable d'espace (φ), autorise une étude dans le plan de symétrie (r, z) du dispositif.

$$\text{Calculant } \vec{k} \text{ grad } T \text{ et } \text{div}(\vec{k} \text{ grad } T)$$

On aura :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$T = f(r, z, t) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

D'où :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{k} \text{ grad } T = k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}; \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{k} \text{ grad } T) &= \text{div} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (kr \frac{\partial T}{\partial z}) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z})$$

L'équation de la conduction (II.38) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + P_s = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.35}) \text{ EDP}$$

avec $T=T(r, z, t)$.

II.6 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes (densité du courant (tension), densité de la puissance dissipée) sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques.
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'applications très difficiles dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques .

[CHENTOUF 94_ SADIKU 92]

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles ci font appel à des techniques de discrétisation.

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue en différenciant points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,...etc.

II.6.1 Méthode des différences finies (MDF)

La MDF consiste à transformer par un développement en série de TAYLOR l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences.[CHENTOUF 94] [PISKOUNOV 80]
[EUVRARD 87]

La méthode aux différences finies permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes comme elle possède la simplicité de la formulation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc, relativement trop simple.

II.6.2 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) surtout dans les géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnements.[MEKIDECHE 93]

II.6.3 Méthode des intégrales de frontières (MIF)

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. [CHENTOUF 94]

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème de d'OSTROGRADSKI- GREEN. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure 3D ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude.

Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

II.6.4 Méthode des circuits couplés (mcc)

La MCC permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale du type loi de BIOT et SAVARD.

Dans ce cas, on associe à la forme intégrale de la solution, une subdivision de l'inducteur en spires élémentaires. [M.COEOET 97] [CHENTOUF 94]

En appliquant les lois de KIRCHOFF à ces circuits élémentaires, on aboutit à un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des densités du courant.

La MCC peut être couplée à une méthode numérique de discrétisation type MEF ou MDF de la charge.

II.6.5 Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit à partir de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies).

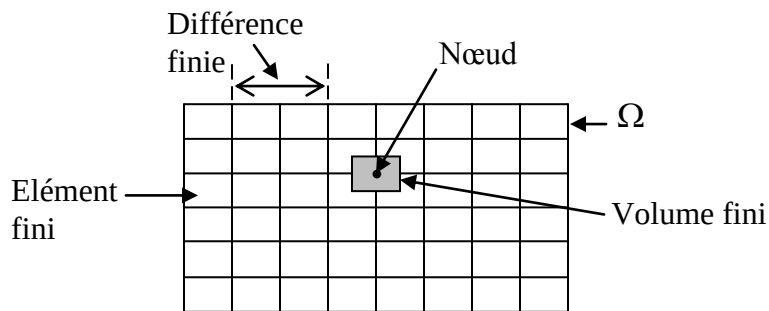


Figure II.1 Maillage du domaine d'étude.

L'EDP est intégrée sur chacun des volumes élémentaires.

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude [M.COEVOET 97] [CHENTOUF 94] [V. PATANKAR]

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

Exemple Illustratif :

Considérons l'équation de conduction, en régime permanent (stationnaire), monodimensionnel :

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + P_s = 0 \quad (\text{II.36})$$

T : Température, k : Conductivité thermique, P_s : Densité de la source de chaleur.

Pour discrétiser cette équation, le domaine d'étude est subdivisé en un nombre finis de nœuds. Ce domaine est ensuite divisé en éléments de volume dont chacun contient un nœud, comme il est indiqué sur la figure ci-dessous.

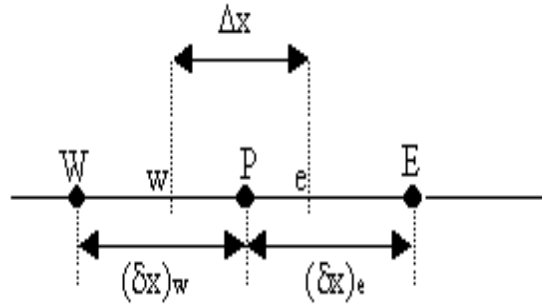


Figure II.2 Discrétisation en volumes finis dans le cas mono-dimensionne

Les lignes en tirés représentent les interfaces entre les éléments. Pour le problème à une dimension, on suppose une épaisseur unité suivant la direction (oy) et (oz).

Ainsi, le volume d'un élément est $\Delta x \times 1 \times 1$. Si on intègre l'équation (II.36) sur l'élément de volume correspondant au nœud P, on obtient :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e P_s dx = 0$$

Soit :

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e P_s dx = 0 \quad (\text{II.37})$$

Avec l'approximation d'une variation linéaire de T entre deux nœuds voisins,

l'équation (II.21) s'écrit :

$$\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{P}_s \Delta x = 0 \quad (II.38)$$

Où $\bar{P}_s$ est la valeur moyenne de P_s dans l'élément de volume. k_e la conductivité thermique à l'interface (e).

On met l'équation (I.44) sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_w T_W + b$$

Où

$$a_e = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, a_p = a_e + a_w \text{ et } b = \bar{P}_s \Delta x$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est alors ramené à un système de N équations à N inconnues. Il s'agit des valeurs nodales de T.

Conclusion

Dans ce chapitre, partant des lois de base caractérisant les phénomènes électromagnétiques et thermiques, des modèles mathématiques ont été établis, dans leurs formes générales. Ensuite, et en liaison avec le type d'applications à traiter, le cas cylindrique axisymétrique considéré comme un cas particulier, a été détaillé. Une fois, ces modèles mathématiques établies, nous proposons, ainsi de décrire dans le prochain chapitre, les modèles numériques optés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques

Chapitre III :

Modèles Numériques

Introduction

Dans ce chapitre Nous présentons un aperçue sur la méthode des volumes finis, utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles établies au chapitre précédent. Il s'agit de l'équation de la condition pour la thermique. Ceci sera suivi par la définition des conditions aux limites et un exposé sur les difficultés rencontrées lors de la définition du domaine d'étude.

Les méthodes de résolutions des systèmes algébriques seront aussi présentées.

III.1 Résolution des équations de la thermique par la method des volumes finis

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Sa mise en œuvre, par contre, est assez compliquée.

Nous avons donc opter pour la méthode des volumes finis (MVF) qui, selon plusieurs auteurs [CHENTOUF 94] , [V. PATANKAR] donne de meilleurs convergences pour les équations de conduction avec un terme de vitesse.

De plus, elle est moins difficile à réaliser est simple à concevoir que la méthode des éléments finis (MEF).

La méthode des volumes finis à connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : transfert thermiques, électromagnétisme...etc. L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis à récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante.

La méthode des volumes finis peut être vue comme étant une variante de la méthode de collocation par sous-domaines [CHENTOUF 94] . Le domaine d'étude (Ω) est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage (Figure III.1). L'équation au dérivé partielle (EDP) est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale sur ce volume

élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle...) entre deux nœuds consécutifs.

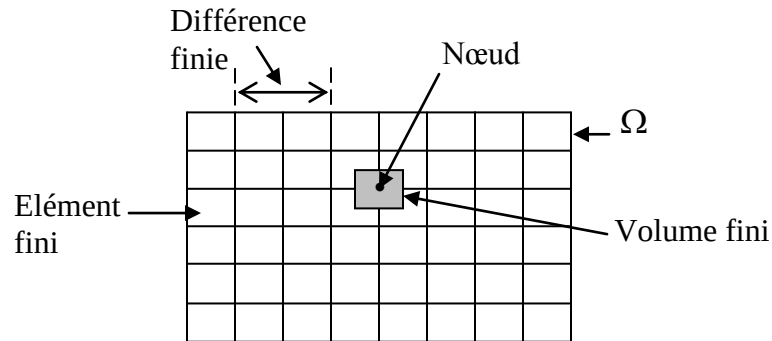


Figure III.1 Maillage du domaine d'étude.

Description d'un volume fini

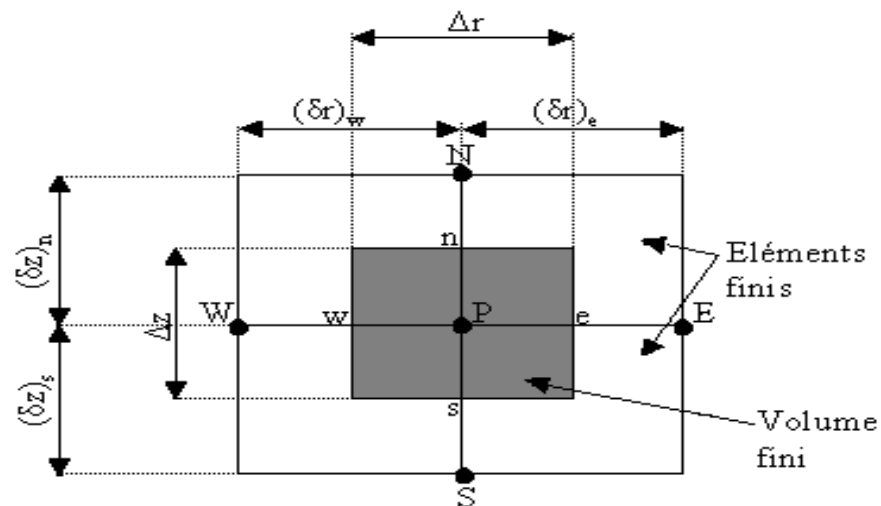


Figure III.2 Description d'un volume fini.

Chaque nœud principal P est entouré par quatre nœuds voisins : celui du nord N, du sud S, de l'est E et celui de l'ouest W.

Le volume fini est délimité par les points (e : est, w : ouest, n : nord, s : sud) [V. PATANKAR] .

III.1.1 Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur

Rappelons l'équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire (non-

$$\text{stationnaire}) : \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + P_s$$

Pour résoudre cette équation, nous appliquons la méthode des volumes finis.

On intègre cette équation dans le temps et dans l'espace, sur le volume fini, correspondant au nœud P, et délimité par les frontières (e, w, s, n), ((voir figure III.2), description d'un volume fini, décrite précédemment).

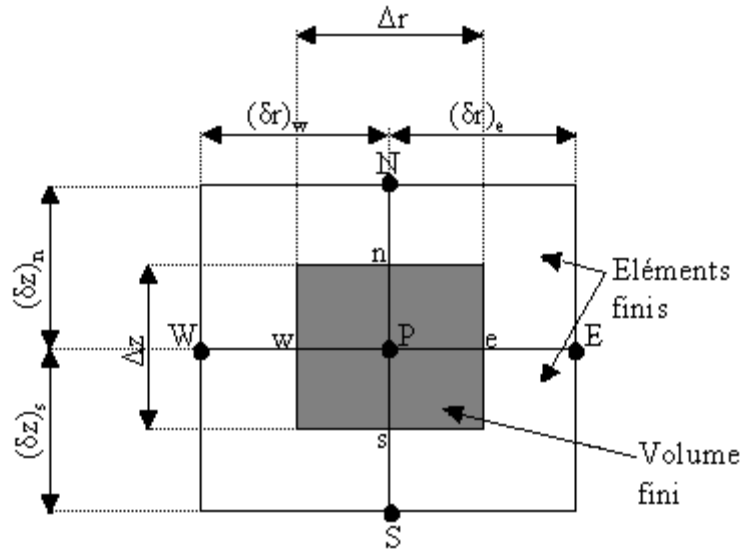


Figure III.3 Description d'un volume fini.

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^e \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^e P_s r dr dz dt \quad (III.1)$$

Soit :

$$A = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt$$

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt$$

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt$$

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e P_s r dr dz dt$$

$P_s(T)$: est la source de chaleur, fonction de la température T .

Nous intégrons chaque terme (A, B, C, D) dans l'espace :

$$\begin{aligned} A &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z)_s^n \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w^e (z)_s^n dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) (z_n - z_s) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s^n \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) dt \end{aligned}$$

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e P_s r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e (z)_s^n dt$$

$$= \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) (z_n - z_s) dt$$

Avec :

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}, r_w = r_p - \frac{\Delta r}{2} \Rightarrow \frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} = r_p \Delta r$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

Avec un profil linéaire, choisi, exprimant ainsi la variation spatiale de la température (T) entre les nœuds voisins. Les termes (A, B, C, D) prennent les formes suivantes :

Terme A :

$$A = \rho C_p r_p \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Terme B :

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_E - T_P)}{(\delta r)_e} - r_w k_w \frac{(T_P - T_W)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) T_W - \left(\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) \right) T_P \right] dt \end{aligned}$$

Posons :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}, a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

Ainsi :

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} [a_e T_E + a_w T_W - (a_e + a_w) T_P] dt$$

Terme C :

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_N - T_P)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_P - T_S)}{(\delta z)_s} \right] r_p \Delta r dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s} \right) T_S - \left(\left(\frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s} \right) \right) T_P \right] dt \end{aligned}$$

Posons :

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}, \quad a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

Ainsi :

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} [a_n T_N + a_s T_S - (a_n + a_s) T_p] dt$$

Terme D :

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \Delta r \Delta z dt$$

L'intégration des termes (A, D) dans le temps donne :

Terme A :

$$\begin{aligned} A &= \rho c_p r_p \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \\ &= \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_p - T_p^0) \end{aligned}$$

T_p^0 : La température au pas précédent à l'instant $t = t_0$

Terme D :

$$D = P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t$$

Pour l'intégration des termes (B, C) dans le temps, nous appliquons la formule suivante [V. PATANKAR] :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} T_p dt = \left[f T_p + (1-f) T_p^0 \right] \Delta t \quad (\text{III.2})$$

Avec :

Δt : Le pas de temps adopté pour la discrétisation temporelle,

f : Le facteur appartenant à l'intervalle $[0,1]$,

T_p^0 : La température au pas de temps précédent à l'instant $t = t_0$

Les termes (B, C) deviennent :

Terme B :

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} [a_e T_E + a_w T_W - (a_e + a_w) T_p] dt \\ &= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t - (a_e + a_w) [f T_p + (1-f) T_p^0] \Delta t \end{aligned}$$

Terme C :

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} [a_n T_N + a_s T_S - (a_n + a_s) T_p] dt \\ &= a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - (a_n + a_s) [f T_p + (1-f) T_p^0] \Delta t \end{aligned}$$

D'où l'équation discrète prenne alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho C_p r_p \Delta r \Delta z (T_p - T_p^0) &= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t + \\ &\quad a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - \\ &\quad (a_e + a_w + a_n + a_s) [f T_p + (1-f) T_p^0] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

Pour la simplicité et les satisfactions physiques, une formulation implicitement de l'équation discrète précédente est nécessaire, le facteur f prenne alors la valeur 1 ($f = 1$) [V. PATANKAR] , ainsi l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \rho C_p r_p \Delta r \Delta z (T_p - T_p^0) &= a_e T_E \Delta t + a_w T_W \Delta t + a_n T_N \Delta t + a_s T_S \Delta t - (a_e + a_w + a_n + a_s) T_p \Delta t + \\ &\quad P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \\ \Rightarrow [\rho C_p r_p \Delta r \Delta z + (a_e + a_w + a_n + a_s) \Delta t] T_p &= [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \\ &\quad + \rho C_p r_p \Delta r \Delta z T_p^0 \end{aligned}$$

La division par le pas de temps Δt , nous permettons d'écrire :

$$\left[\frac{\rho C_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} + (a_e + a_w + a_n + a_s) \right] T_p = [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] + P_s r_p \Delta r \Delta z + \frac{\rho C_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} T_p^0$$

Posons :

$$a_{0p} = \frac{\rho C_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0p} T_p^0$$

Ainsi, l'équation algébrique finale peut être écrite sous une forme, et où seules les valeurs nodales apparaissent, son expression, sous forme condensée est donnée par :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{III.3})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho C_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0p} T_p^0$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à résoudre un système de N équations, à N inconnues.

Conductivité thermique à l'interface

Considérons l'interface (e) entre deux nœuds P et E de la figure (III.4)

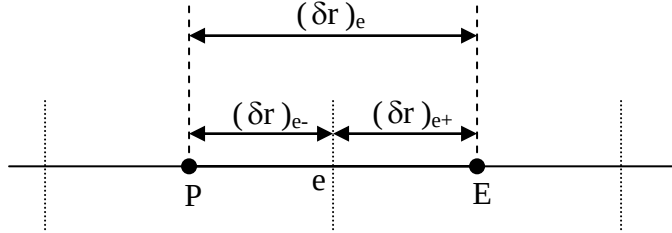


Figure III.4 Interface entre deux éléments d'un volume fini.

Si on suppose une variation linéaire de la conductivité thermique en fonction de la température $k(T)$, entre les nœuds P et E [CHENTOUF 94] , [V. PATANKAR] , on peut écrire :

$$k_e = \beta_e k_E + (1 - \beta_e) k_P \quad (III.4)$$

Où le facteur d'interpolation β_e est donné par le rapport :

$$\beta_e = \frac{(\delta r)_{e-}}{(\delta r)_e} \quad (III.5)$$

Si $(\delta r)_{e-} = (\delta r)_{e+}$, cas d'un maillage régulier il vient alors que $\beta_e = 0,5$, ainsi, k_e sera la moyenne arithmétique de k_E et k_P , ce qui n'est pas correcte si on est dans une région où la conductivité thermique est fortement variable en fonction de la température. Dans ces conditions cette approximation peut conduire à une mauvaise estimation du flux de chaleur sur cette interface [V. PATANKAR]:

$$q_e = - \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta r)_e} \quad (III.6)$$

Il existe une autre approche plus correcte, pour évaluer la conductivité thermique à l'interface. Cette approche consiste à considérer les deux éléments de volume adjacents comme deux matériaux de conductivités thermiques différentes.

Une analyse à une dimension, sans terme source, conduit à l'expression suivante :

$$q_e = - \frac{(T_E - T_P)}{\frac{(\delta r)_{e-}}{k_p} + \frac{(\delta r)_{e+}}{k_E}} \quad (\text{III.7})$$

La combinaison des équations (III.5), (III.6) et (III.7) donne :

$$k_e = \left(\frac{\beta_e}{k_p} + \frac{(1-\beta_e)}{k_E} \right)^{-1}$$

Dans le cas où l'interface (e) serait placée au milieu entre P et E, c'est à dire $\beta_e = 0,5$, nous avons :

$$k_e^{-1} = 0,5 (k_p^{-1} + k_E^{-1}) \quad \text{D'où} \quad k_e = \frac{2 k_p k_E}{k_p + k_E}$$

De la même manière, et par analogie, nous déduisons pour les autres coefficients : k_e, k_w, k_n, k_s

$$k_e = \frac{2 k_p k_E}{k_p + k_E} \quad (\text{III.8})$$

$$k_w = \frac{2 k_p k_w}{k_p + k_w} \quad (\text{III.9})$$

$$k_n = \frac{2 k_p k_N}{k_p + k_N} \quad (\text{III.10})$$

$$k_s = \frac{2 k_p k_S}{k_p + k_S} \quad (\text{III.11})$$

Conditions aux limites

L'équation de diffusion de la chaleur, doit être associée aux conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

- Condition de DIRICHLET : la température T est connue sur la frontière.

- Condition de NEUMANN homogène : $k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$

(valable dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie)

- Condition de FOURIER : $q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s$

(valable dans le cas où le flux de chaleur échangé est connu)

- Condition de NEWTON : $q = h_c (T - T_{amb})$

(valable dans le cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante T_{amb})

- $q = \varepsilon \beta (T^4 - T_{amb}^4)$

(valable dans le cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_{amb} où h_c , ε et β désignent, respectivement, le coefficient de convection, l'émissivité du corps et la constante de STEPHAN-BOLTZMAN $\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^2 \cdot \text{K}^4$).

L'équation discrète aux points limites

Si la température T est connue sur la frontière, c'est la condition de DIRICHLET (à titre d'exemple la valeur de T_p est connue, voir Figure III.5), nous n'avons pas besoin d'une équation discrète en ce point (P).

Nous devons formuler l'équation discrète aux points limites quand la température en ces points est bien entendue inconnue.

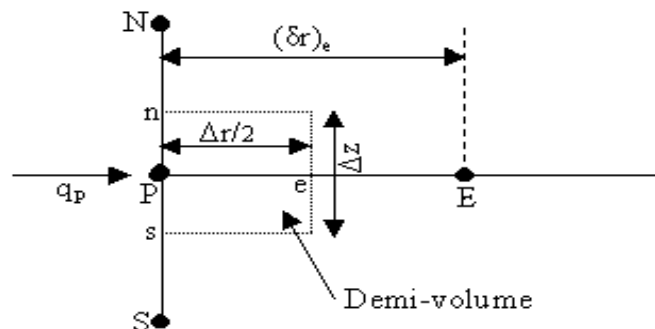


Figure III.5 Demi-volume à coté des nœuds limites.

Pour trouver l'équation discrète au point (P), nous devons intégrer l'équation de diffusion de la chaleur (II.19) sur le demi-volume $\frac{\Delta V}{2}$ de la figure III.4. Ainsi :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r dr dz dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e P_s r dr dz dt$$

Avec :

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}$$

Après intégration, dans l'espace nous aurons :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) (z_n - z_s) dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e dt + \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e (z_n - z_s) dt$$

Avec :

$$(z_n - z_s) = \Delta z$$

$$\left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e = \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_p^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\left(r_p + \frac{\Delta r}{2} \right)^2}{2} - \left(\frac{r_p^2}{2} \right)$$

$$= r_p \frac{\Delta r}{2} + \frac{\Delta r^2}{8}$$

$$\approx r_p \frac{\Delta r}{2}$$

Puisque $\frac{\Delta r^2}{8}$ est négligeable devant les autres termes, [EUVRARD 87].

Nous aurons, alors :

$$\begin{aligned} \rho C_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) \Delta z dt \\ + \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) r_p \frac{\Delta r}{2} dt &+ \\ \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt & \end{aligned}$$

Avec :

$$q_p = -k_p \frac{\delta T}{\delta r} \quad (\text{flux de chaleur échangé, connu (condition de FOURIER)}).$$

Avec un profil linéaire exprimant la variation de la température T entre les nœuds voisins, nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho C_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_e - T_p)}{(\delta r)_e} + r_p q_p \right] \Delta z dt + \\ \int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_n - T_p)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_p - T_s)}{(\delta z)_s} \right] r_p \frac{\Delta r}{2} dt &+ \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt \end{aligned}$$

Après intégration, dans le temps, et une formulation implicite de l'équation discrète précédente, nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho C_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z (T_p - T_p^0) &= \\ \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_s - \\ \left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p &+ \\ r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t & \end{aligned}$$

Soit les notations suivantes :

$$A_1 = \left[\rho \quad c_p \quad r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p$$

$$A_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_s$$

$$A_3 = r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t + \rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z T_p^0$$

D'où :

$$\Rightarrow A_1 = A_2 + A_3$$

La division de chaque terme (A_1, A_2, A_3) par le pas de temps Δt , donne :

$$B_1 = B_2 + B_3$$

Tel que :

$$B_1 = \left[\frac{\rho \quad c_p \quad r_p \quad \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} + \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2}}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2}}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p$$

$$B_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2}}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2}}{(\delta z)_s} \right) T_s$$

$$B_3 = r_p \Delta z q_p + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} T_p^0$$

Posons :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2}}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2}}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + a_{0p} T_p^0 + r_p \Delta z q_p$$

Ainsi, l'équation algébrique prend alors la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_n T_n + a_s T_s + b \quad (\text{III.11})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + a_{0p} T_p^0 + r_p \Delta z q_p$$

Condition de NEUMANN :

En annulant, la valeur du flux de chaleur q_p , dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur notamment sur les axes de symétrie (condition de NEUMANN homogène : $k \frac{\delta T}{\delta n} = 0$).

Dans ce cas l'équation algébrique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_n T_n + a_s T_s + b \quad (\text{III.12})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + a_{0p} T_p^0$$

Condition de NEUTON :

Dans le cas où il y a échange avec l'extérieur, le flux de chaleur q_p , échangé par convection libre avec une zone de température ambiante (T_{amb}) est spécifié en terme de coefficient d'échange h_c (coefficient de convection) et de la température ambiante.

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb})$$

Après substitution de l'expression de q_p dans l'équation (III.11), nous obtenons l'équation algébrique discrète suivante :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_n T_n + a_s T_s + b \quad (III.13)$$

où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0p} - r_p \Delta z h_c$$

$$b = P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + a_{0p} T_p^0 - r_p \Delta z h_c T_{amb}$$

Remarque

Dans le cas où la charge à chauffer est pleine et lorsque la fréquence de travail est classée parmi les hautes fréquences, le flux de chaleur est égal à zéro au centre de cette dernière et il est à spécifier que :

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb}) \text{ restera valable q'aux limites de cette charge.}$$

III.2 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux grandes catégories de méthodes [M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN] :

- Les méthodes directes
- Les méthodes itératives

III.2.1 Méthodes directes

Ces méthodes conduisent à une solution en un nombre fini d'étapes (éventuellement grand), cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limité de digits, les méthodes directes sont précises mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

III.2.2 Méthodes itératives

Pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), on utilise les méthodes itératives qui font passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $X^{(k+1)}$ de cette solution, s'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons :

III.2.2.1 Méthode de Jacobi

Elle est basée sur la transformation du système $[A][X]=[B]$ en

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; (i \neq j), i=1, \dots, n \quad (\text{III.14})$$

On estime une valeur arbitraire initiale X_i^0 pour $(k=0)$, le calcul sera arrêté si

$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision absolue et $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision relative.

ε : précision imposée par l'utilisateur.

III.2.2.2 Méthode de gauss Seidel

Cette méthode se considère l'une des plus simple des méthodes itérative, à savoir que la méthode la plus efficace est la méthode de Newton-raphson, mais la méthode de Gauss Seidel s'intervient pour les raisons suivantes :

1-qui possède une valeur scientifique sur à cause de simplicité.

2-et qui utilise dans le système à faible puissance, comme le nôtre, dans laquelle les programmes sont simples.

3-Elle s'utilise dans des nombreux cas des grands systèmes pour obtenir une solution approximative.

Cette méthode consiste à transformer le système $[A][X]=[B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad : i=1, \dots, n \quad (\text{III.15})$$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 (pour $k = 0$)

Le processus sera arrêté si :

$$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon \text{ Dans le cas d'une précision absolue et } \frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon \text{ Dans le cas d'une}$$

précision relative.

ε : Précision imposée par l'utilisateur

III.2.2.3 Méthode de newton Rafeson

La technique itérative de Newton Raphson converge avec une même vitesse, mesurée par le nombre d'itérations, pour les larges et courts systèmes, en moins de quatre à cinq itérations en général. C'est pour cette raison que la méthode de N-R est la plus utilisée pour l'étude des larges systèmes.

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \left[J^{(k)} \right]^{-1} - f(X^{(k)}) \quad (\text{III.16})$$

III.2.2.4 Méthode de relaxation

Pour améliorer la rapidité de la convergence, si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation α tel que :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^k + \alpha (X_i^{(k+1)} - X_i^k) \quad (\text{III.17})$$

Conclusion sur les méthodes itératives

Les méthodes itératives sont généralement préférées par rapport aux méthodes dites directes, pour les grands systèmes $[A][X]=[B]$ à matrice creuse parce qu'elles ne modifient pas la matrice de rigidité $[A]$ et que dans un grand nombre d'application, cette matrice $[A]$ est creuse et présente une structure particulière (triangulaire) ce qui lui permet de ne pas être mémoriser explicitement et assurer pratiquement la convergence.

Dans les méthodes élémentaires, la méthode de GAUSS-SEIDEL est préférée à celle de JACOBI, parce qu'elle consomme moins de mémoire et converge souvent plus vite.

La méthode de relaxation est généralement beaucoup plus rapide que celle de GAUSS-SEIDEL, même si le facteur optimal α est réglé expérimentalement selon l'aspect physique du problème à traiter.

III.3 Présentation des modules du code de calcul développé pour la résolution de l'équation de la thermique

Nous présentons l'algorithme utilisé pour résolution de l'équation de la thermique.

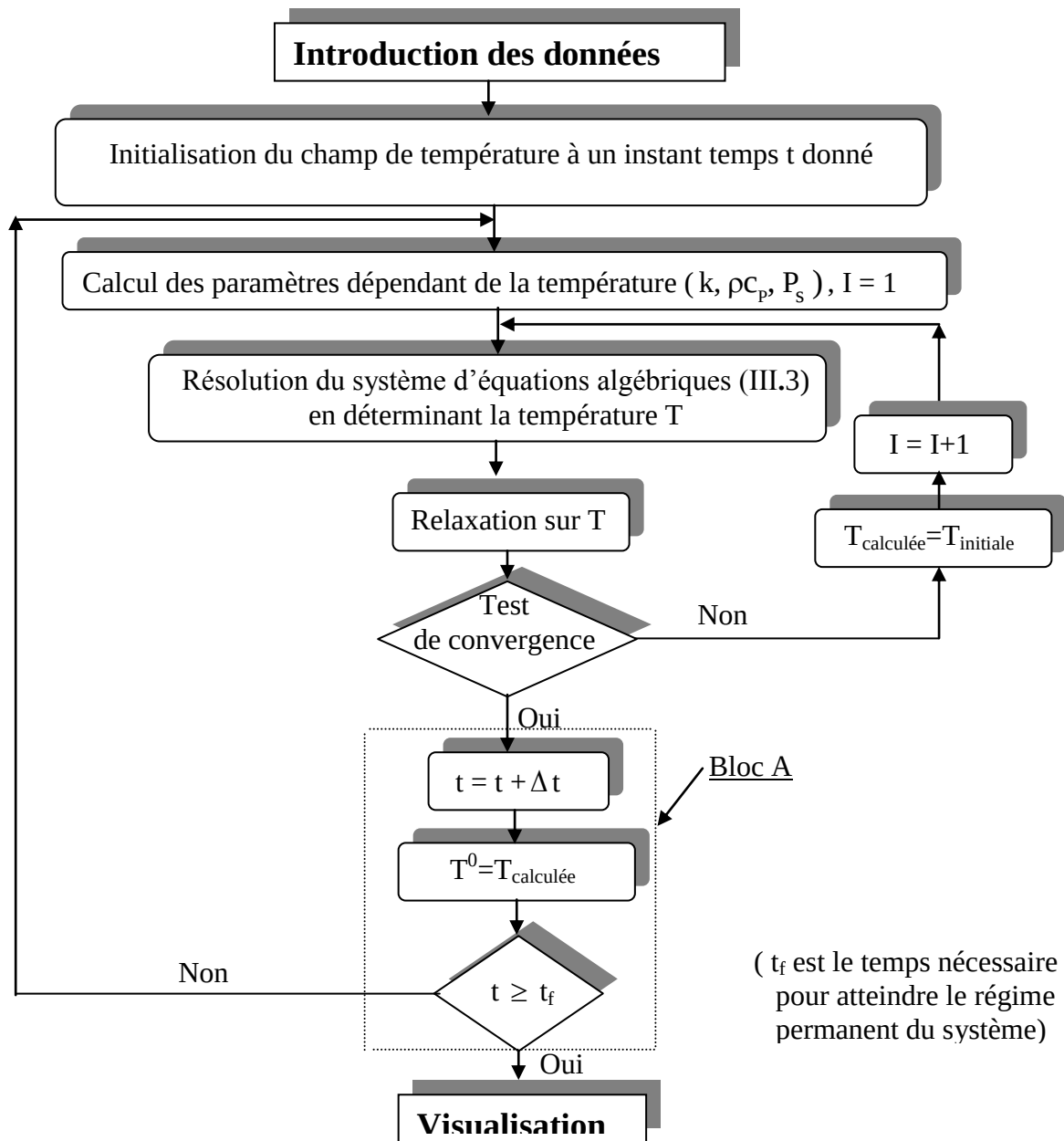
Algorithme de résolution de l'équation thermique

Figure III.6 Algorithme de résolution de l'équation de la thermique.

Conclusion

La modélisation numérique des systèmes à induction (chauffage) constitue l'outil de base pour la conception de ces systèmes.

Dans le cadre de notre travail, pour la résolution des systèmes d'équations algébriques en thermique établis dans ce chapitre, nous avons choisi la méthode de GAUSS-SEIDEL couplé à la méthode de RELAXATION.

Dans le prochain chapitre, nous présentons l'implémentation sous l'environnement MATLAB des modèles mathématico-numériques développés.

Chapitre IV :

Applications et Validations

Introduction

Nous étudions dans le présent chapitre les comportements thermiques de la pièce à chauffer à l'arrêt, soumise à des sources thermiques fonctions de la température.

Nous intéressons à un dispositif de chauffage par induction dont la charge est un tube creux en acier inoxydable, mis en œuvre dans le cadre d'un travail expérimental réalisé sur le site de l'entreprise Electricité de France (EDF) [FELIACHI 91].

IV.1 Application: chauffage par induction d'un tube creux en acier inoxydable (EDF)

IV.1.1 Description du dispositif de chauffage EDF

Le système étudié comporte un inducteur en cuivre de diamètre intérieur = 104 mm, diamètre extérieur = 124 mm, hauteur = 3000 mm et des nombre de spires égale 20.

La pièce à chauffer (charge), de forme cylindrique (tube creux) de diamètre extérieur = 30 mm, diamètre intérieur = 26 mm, épaisseur = 4 mm et hauteur = 2700 mm.

En raison de la symétrie axiale du dispositif, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée.

Le schéma ci-dessous présente le dispositif en coupe, dans le plan (r, z).

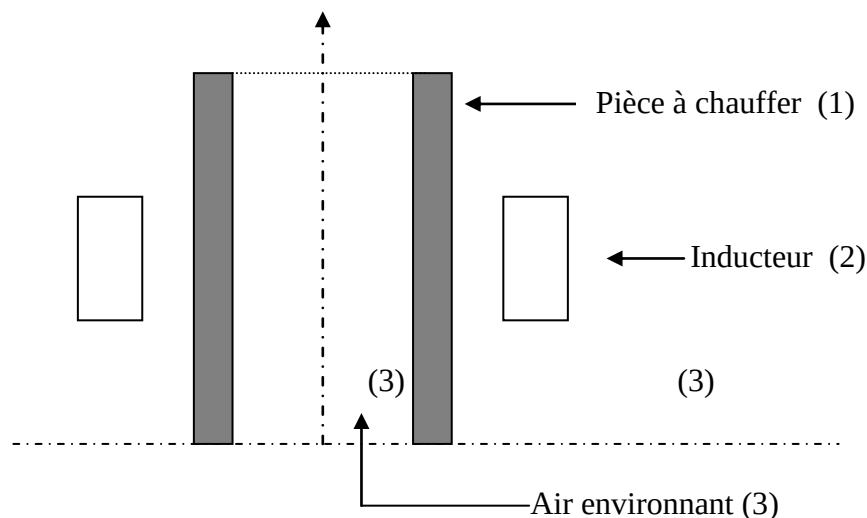


Figure IV.1 Modèle géométrique du dispositif.

Le phénomène thermique ne s'applique qu'à la pièce à chauffer (région 1).

IV.1.2 Modèles des propriétés physiques

Les modèles de variation de chaque propriété en fonction de la température, désignée par l'inconnue T sont définis à partir des relevés expérimentaux dont nous disposons sur un échantillon du matériau constituant la pièce à chauffer.

Données thermiques

Les lois de variation relatives aux propriétés thermiques k et ρc_p ont été décrites par des expressions analytiques, fonctions de l'inconnue T

$T (^{\circ}\text{C})$	20	93	149	204	260	316	371	427	482	538
$K (\text{W}/(\text{m}.\text{^{\circ}\text{C}}))$	63.70	60.20	58.10	54.60	52.40	49.60	46.80	43.90	41.80	39.00
$\rho c_p \times 10^6 (\text{J}/(\text{m}^3.\text{^{\circ}\text{C}}))$	3.666	3.869	4.025	4.181	4.337	4.485	4.703	4.953	5.140	5.413

$T (^{\circ}\text{C})$	593	649	704	760	816	871	927	982
$K (\text{W}/(\text{m}.\text{^{\circ}\text{C}}))$	36.80	34.70	32.60	30.50	28.40	26.20	26.90	27.60
$\rho c_p \times 10^6 (\text{J}/\text{m}^3.\text{^{\circ}\text{C}})$	5.632	5.881	7.800	7.800	4.859	4.797	4.797	4.797

Tableau IV.1 variation relatives aux propriétés thermiques k et ρc_p

Leurs représentations sont données respectivement en figure IV.2 et IV.3.

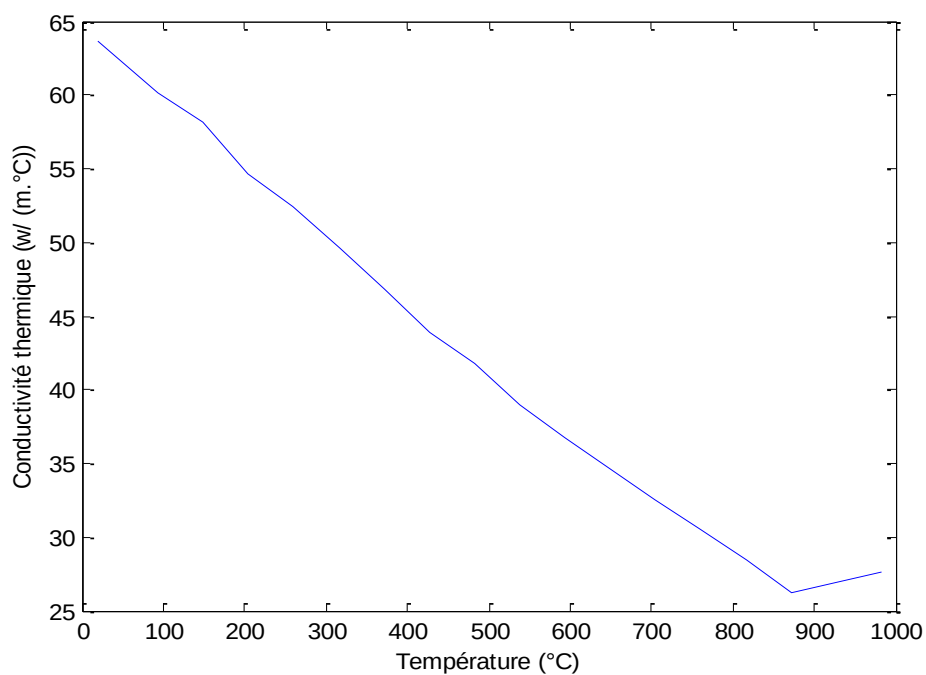


Figure IV.2 Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

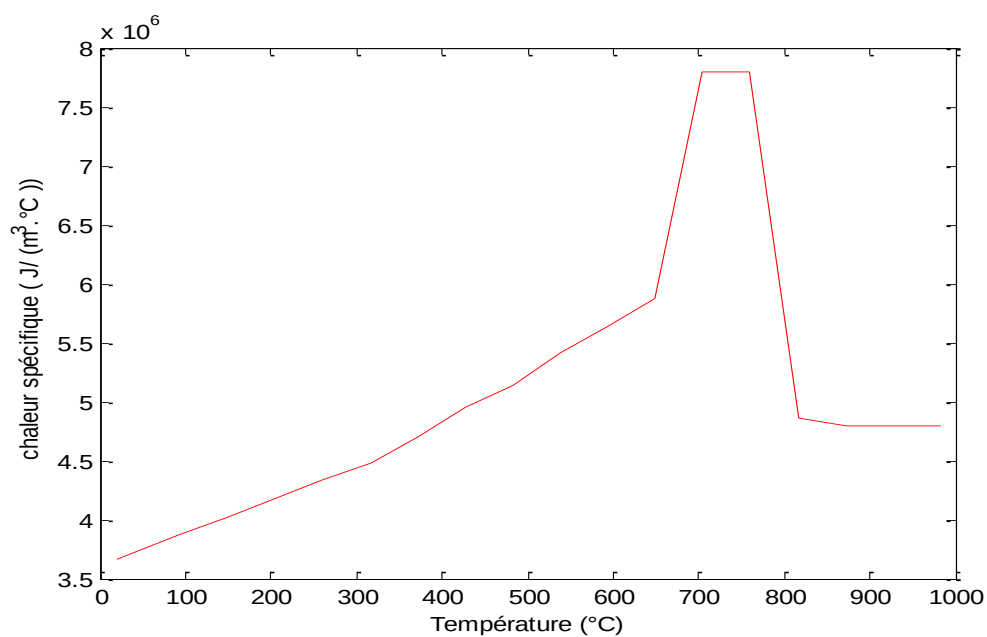


Figure IV.3 Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

IV.1.3 Densité de la puissance moyenne en fonction de la température

Lors de l'exploitation du problème magnétique, les sources de chaleur ont été évaluées pour différentes valeurs discrètes de température, et pour une valeur de densité de courant inducteur, fixe : $J_s = J_{s0} = J_{ex} = 2.33 \times 10^6 \text{ A/m}^2$, et une fréquence de travail égale à 7500 Hz, cette démarche a pour objectif de créer un fichier de points ($P_s(T)$, T) faisant correspondre à chaque valeur de température T , extraite de la plage de variation $[T_{amb}, T_{max}]$, préalablement fixée, une densité de puissance $P_s(T)$ [Becha H 01].

Le tableau ci-dessous présente la variation de la densité de la puissance moyenne $P_s(T)$ en fonction de la température établie lors de l'étude des phénomènes électromagnétiques, où la pièce est à l'arrêt.

T(°K)	293	298	400	500	600	700	800	900
P_s (MW/m ³)	10.252	10.290	10.987	11.525	12.019	12.405	12.729	12.516

T(°K)	950	960	970	980	1000	1100	1200	1255
P_s (MW/m ³)	13.019	13.048	13.078	13.108	13.169	13.501	13.877	14.101

Tableau IV.2 présente la variation de la densité de la puissance moyenne $P_s(T)$ en fonction de la température.

La figure IV.4 présente la caractéristique $P_s(T)$ décrivant l'évolution de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température.

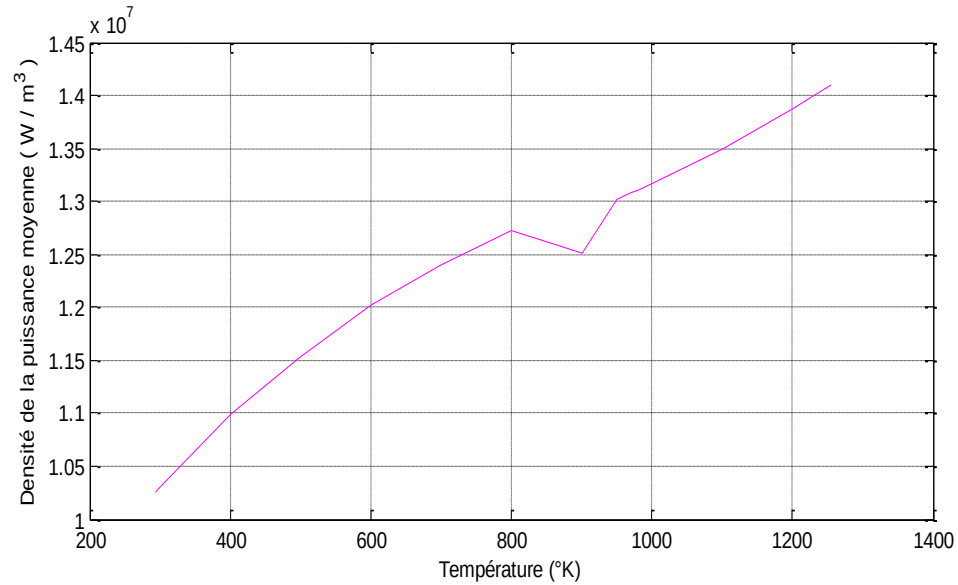


Figure IV.4 Variation de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température.

Par interpolation numérique, la loi de variation, effectuée à partir du logiciel ORIGIN a été définie comme suit :

- $T \leq 800 \text{ °K}$

$$P_s(T) = 6.7399e6 + 18034.9756 \times T - 27.62503 \times T^2 + 0.0272 \times T^3 - 1.14361e-5 \times T^4$$

- $800 \text{ °K} < T \leq 950 \text{ °K}$

$$P_s(T) = 3.462e6 + 10060 \times T$$

- $950 \text{ °K} < T \leq 1255 \text{ °K}$

$$P_s(T) = 6.19936e6 + 21024.6215 \times T - 28.53515 \times T^2 + 0.01877 \times T^3 - 4.29189e-6 \times T^4$$

- $T > 1255 \text{ °K}$

$$P_s(T) = 14.101 \times 10^6$$

IV.1.4 Etude du comportement thermique de la charge

La définition du terme source $P_s(T)$, établie lors de l'étude du phénomène électromagnétiques, où la pièce est à l'arrêt, est nécessaire pour la résolution de l'équation de la thermique.

Rappelons que le domaine d'étude thermique est limité à la pièce à chauffer (charge), siège de courants de FOUCAUT.

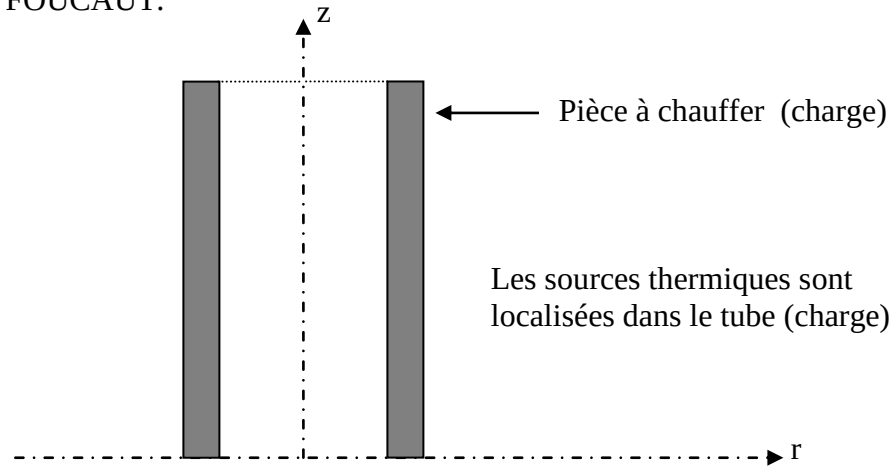


Figure IV.5 Modèle géométrique du dispositif adopté pour l'étude thermique.

IV.1.4.1 Résolution analytique et numérique de l'équation de la thermique en régime stationnaire dans le cas d'une distribution radiale de la température

On exposera la solution analytique et numérique de l'équation thermique en régime stationnaire, dans le but de les comparées pour valider le logiciel développé pour la résolution de l'équation de la thermique du dispositif de chauffage EDF. Une fois notre outil de calcul validé, son exploitation pour d'autre application devient valable.

Méthode analytique

Rappelons l'équation de la thermique :

$$\text{div} (k \vec{\text{grad}} T) + P_s = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

En régime stationnaire, nous avons :

$$\text{div}(\vec{k} \text{ grad } T) + P_s = 0$$

P_s : est le terme source

$\text{div}(\vec{k} \text{ grad } T)$ à été calculé comme suit :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$T = f(r, z, t) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

D'où :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{k} \text{ grad } T = k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{F}$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}; \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{k} \text{ grad } T) &= \text{div} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) \end{aligned}$$

r et z sont respectivement la coordonnée radiale et axiale, des variables indépendantes l'une de l'autre.

$$\text{D'où : } \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + P_s = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Dans le cas d'une distribution radiale de la température (solution analytique selon r), nous avons :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + P_s = 0$$

Cas où le terme source est nul : ($P_s = 0$)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) = 0 \Rightarrow$$

$$(kr \frac{\partial T}{\partial r}) = C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{kr} \Rightarrow$$

$$T_r = \frac{C_1}{k} \ln r + C_2 \quad (IV.2)$$

Pour $r = R_{C1} \Rightarrow T = T_1$ R_{C1} : rayon interne de la charge.

Pour $r = R_{C2} \Rightarrow T = T_2$ R_{C2} : rayon externe de la charge.

Nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{C_1}{k} \ln(R_{C1}) + C_2 = T_1 \\ \frac{C_1}{k} \ln(R_{C2}) + C_2 = T_2 \end{cases} \quad (IV.3)$$

Les coefficients d'intégration, C_1 et C_2 sont déterminées après résolution du système d'équations (V.3) :

$$C_1 = k \frac{(T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{R_{C2}}{R_{C1}} \right)} \quad (IV.4)$$

$$C_2 = T_1 - \left(\frac{(T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{R_{C2}}{R_{C1}} \right)} \right) \ln(R_{C1}) \quad (IV.5)$$

La substitution des équations (IV.4) et (IV.5) dans (IV.2) donne :

$$T_r = \left(\frac{(T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{R_{C2}}{R_{C1}} \right)} \right) \ln r + \left(T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{R_{C2}}{R_{C1}} \right)} \ln(R_{C1}) \right) \quad (IV.6)$$

Ainsi, on voit bien que la température T_r est indépendante de la conductivité thermique k .

Cas où le terme source est non nul : ($P_s \neq 0$)

On a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + P_s = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) = -P_s \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) = -P_s r \Rightarrow$$

Si le terme source est fixe (constant), nous aurons :

$$kr \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2} P_s r^2 + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2k} P_s r + \frac{C_1}{kr} \Rightarrow$$

$$T_r = -\frac{P_s}{4k} r^2 + \frac{C_1}{k} \ln r + C_2 \quad (IV.7)$$

Pour $r = R_{C1} \Rightarrow T = T_1$ R_{C1} : rayon interne de la charge.

Pour $r = R_{C2} \Rightarrow T = T_2$ R_{C2} : rayon externe de la charge.

Ainsi, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\frac{P_s}{4k} R_{C1}^2 + \frac{C_1}{k} \ln(R_{C1}) + C_2 = T_1 \\ -\frac{P_s}{4k} R_{C2}^2 + \frac{C_1}{k} \ln(R_{C2}) + C_2 = T_2 \end{cases} \quad (IV.8)$$

Les coefficients d'intégration, C_1 et C_2 sont déterminées après résolution du système d'équations (IV.8) :

$$C_1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{C1}}{R_{C2}}\right)} \left(k(T_1 - T_2) + \frac{P_s}{4} (R_{C1}^2 - R_{C2}^2) \right) \quad (IV.9)$$

$$C_2 = T_1 + \frac{P_s}{4k} R_{C1}^2 - \frac{\ln(R_{C1})}{k} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{C1}}{R_{C2}}\right)} \left(k(T_1 - T_2) + \frac{P_s}{4} (R_{C1}^2 - R_{C2}^2) \right) \quad (IV.10)$$

Le signe de C_1 et C_2 dépend de R_{C1} , R_{C2} , T_1 et T_2 , il vient donc que :

Si $P_s = \text{cte} \neq 0$

$$T_r = -\frac{P_s}{4k} r^2 + \frac{C_1}{k} \ln r + C_2$$

Avec

$$C_1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{C1}}{R_{C2}}\right)} \left(k(T_1 - T_2) + \frac{P_s}{4} (R_{C1}^2 - R_{C2}^2) \right)$$

$$C_2 = T_1 + \frac{P_s}{4k} R_{C1}^2 - \frac{\ln(R_{C1})}{k} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{C1}}{R_{C2}}\right)} \left(k(T_1 - T_2) + \frac{P_s}{4} (R_{C1}^2 - R_{C2}^2) \right)$$

La conductivité thermique k ne peut intervenir que dans le cas où le terme source est non nul ($P_s \neq 0$) sinon, la propagation de la température se fait indépendamment de la nature du milieu à chauffer.

Application numérique

Soit les données numériques suivantes :

Pour $r = R_{C1} = 0.026 \text{ m} \Rightarrow T = T_1 = 800^\circ\text{K}$. R_{C1} : rayon interne de la charge.

Pour $r = R_{C2} = 0.030 \text{ m} \Rightarrow T = T_2 = 400^\circ\text{K}$. R_{C2} : rayon externe de la charge.

$$P_s = 14.28 \times 10^6 \text{ W/m}^3.$$

$$k = 49.04 \text{ W/(m}^\circ\text{K)}.$$

Nous avons :

$$T_r = -\frac{P_s}{4k}r^2 + \frac{C_1}{k} \ln r + C_2$$

Avec les données numériques choisies, les équations ((IV.9) et (IV.10)) donnent respectivement :

$$C_1 = -131489.93^\circ\text{K}$$

$$C_2 = -8936.5427^\circ\text{K}$$

On remplace C_1 et C_2 dans l'équation (IV.7), on obtient :

$$T_r = -72797.716 r^2 - 2681.2792 \ln r - 8936.5427 \quad (\text{IV.11})$$

Méthode numérique 2D

Nous allons maintenant appliquer la méthode des volumes finis décrite précédemment (chapitre III), pour trouver une solution approximative de l'équation de la thermique en régime stationnaire, et en utilisant les mêmes données numériques précédentes.

On intègre l'équation (IV.1) dans l'espace sur le volume fini correspondant au nœud P (voir figure III.2), délimité par les frontières (e, w, n, s)

$$\int_{s_w}^n \int_{s_w}^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz + \int_{s_w}^n \int_{s_w}^e \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz = - \int_{s_w}^n \int_{s_w}^e P_s r dr dz$$

On aura :

$$\left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) \Delta z + \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) r_p \Delta r = -P_s r_p \Delta r \Delta z$$

Ou encore :

$$\left[r_e k_e \frac{(T_E - T_P)}{(\delta r)_e} - r_w k_w \frac{(T_P - T_W)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z + \left[k_n \frac{(T_N - T_P)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_P - T_S)}{(\delta z)_s} \right] r_p \Delta r = -P_s r_p \Delta r \Delta z$$

Ainsi l'équation finale s'écrit alors sous la forme :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b$$

Où :

$$a_E = \frac{k_E r_E \Delta z}{(\delta r)_E}$$

$$a_W = \frac{k_W r_W \Delta z}{(\delta r)_W}$$

$$a_N = \frac{k_N r_P \Delta r}{(\delta z)_N}$$

$$a_S = \frac{k_S r_P \Delta r}{(\delta z)_S}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z$$

Conditions aux limites

On présente ci-dessous les limites du domaine

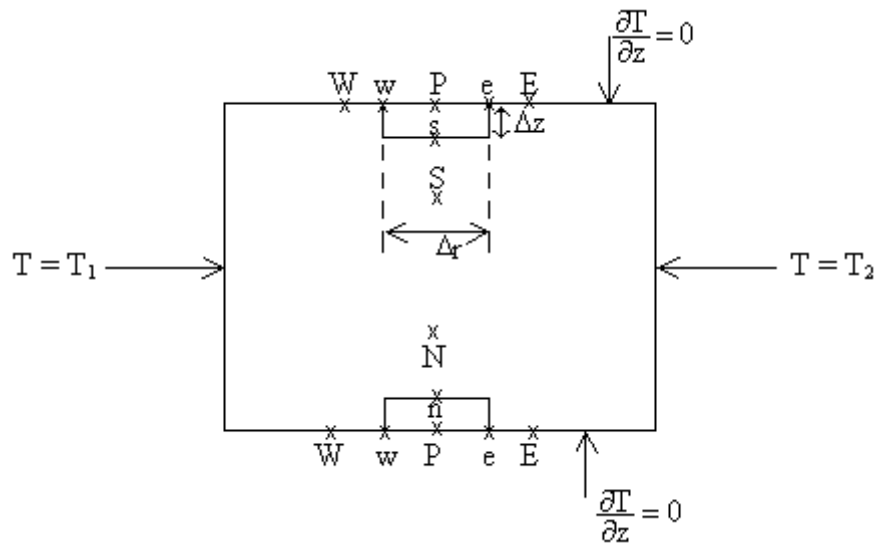


Figure IV.6 Limites du domaine d'étude thermique.

On général, il y a deux types de conditions :

- DIRICHLET : T est constante sur les deux limites (EST, et WEST)

A $r = Rc_1$ (rayon interne de la charge) $\Rightarrow T = T_1 = 800^\circ K$

A $r = Rc_2$ (rayon externe de la charge) $\Rightarrow T = T_2 = 400^\circ K$

- NEUMANN : $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ sur les deux autres limites (NORD, et SUD)

On cherche l'équation algébrique qui régit de l'évolution phénomène physique où la condition de NEUMANN est satisfaite.

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P_s = 0$$

Formulation intégrale :

- Cas où le point voisin est le point N :

$$\int_{p_w}^n \int_{\epsilon}^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) r dr dz + \int_{p_w}^n \int_{\epsilon}^e \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r dr dz = - \int_{p_w}^n \int_{\epsilon}^e P_s r dr dz$$

On aura :

$$\left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) \frac{\Delta z}{2} + \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_p \right) r_p \Delta r = - P_s r_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

En utilisant la condition de NEUMANN $\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_p = 0$ on aura l'équation suivante :

$$\left[r_e k_e \frac{(T_e - T_p)}{(\delta r)_e} - r_w k_w \frac{(T_p - T_w)}{(\delta r)_w} \right] \frac{\Delta z}{2} + \left[k_n \frac{(T_n - T_p)}{(\delta z)_n} \right] r_p \Delta r = - P_s r_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

Soit :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{2(\delta r)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{2(\delta r)_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n$$

$$b = P_s r_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

Ainsi, l'équation algébrique sera :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + a_n T_n + b$$

- Cas où le point voisin est le point S :

Dans le cas où le point voisin est le point SUD (S), l'équation algébrique s'écrit :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + a_s T_s + b$$

Avec :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{2(\delta r)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{2(\delta r)_w}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_s$$

IV.1.4.1.1 Résultats de la solution analytique et numérique

Les figures (IV.7, et IV.8) présentent respectivement la distribution radiale de la température T_r obtenue en utilisant la méthode analytique et numérique, on voit bien que pour un rayon égale au rayon interne de la charge ($r = R_{C1} = 0.026m$), la température égale à :

$T = T_1 = 800^\circ K$, puis elle décroît au fur et à mesure que la valeur du rayon augmente jusqu'à la valeur limite $T = T_2 = 400^\circ K$ ce qui correspond à un pour un rayon $r = R_{C2} = 0.03m$ (rayon externe de la charge).

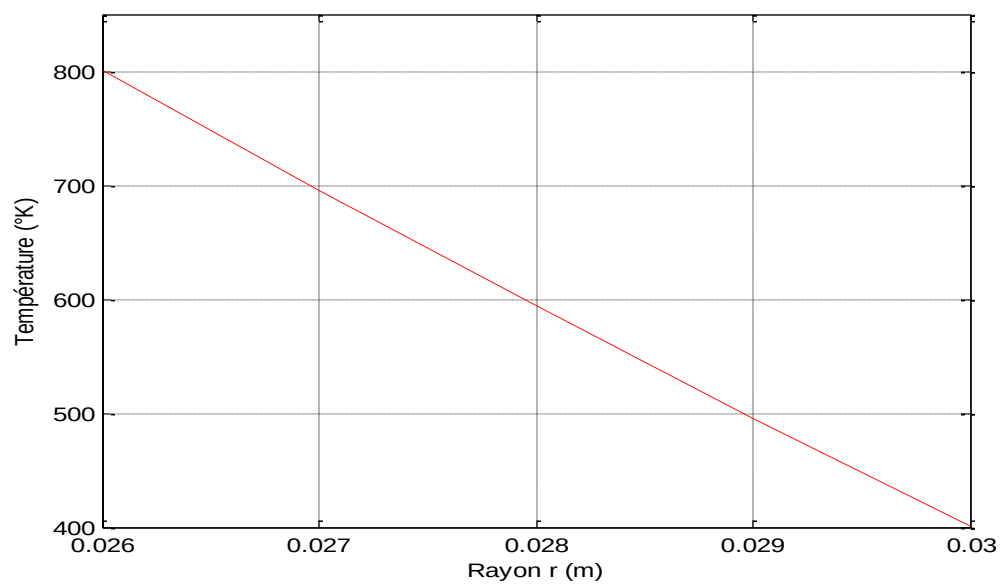


Figure IV.7 Evolution radiale de la température (solution analytique).

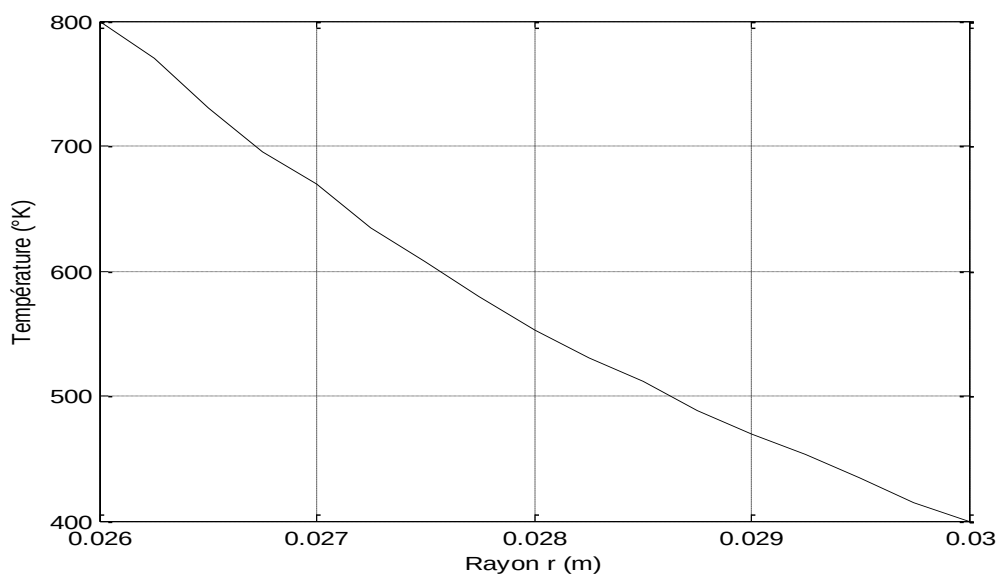


Figure IV.8 Evolution radiale de la température (solution numérique).

IV.1.4.1.2 Comparaison des résultats trouvés analytiquement et numériquement

La figure IV.9 présente la distribution radiale de la température calculée par résolution analytique et numérique pour les données numériques précédentes.

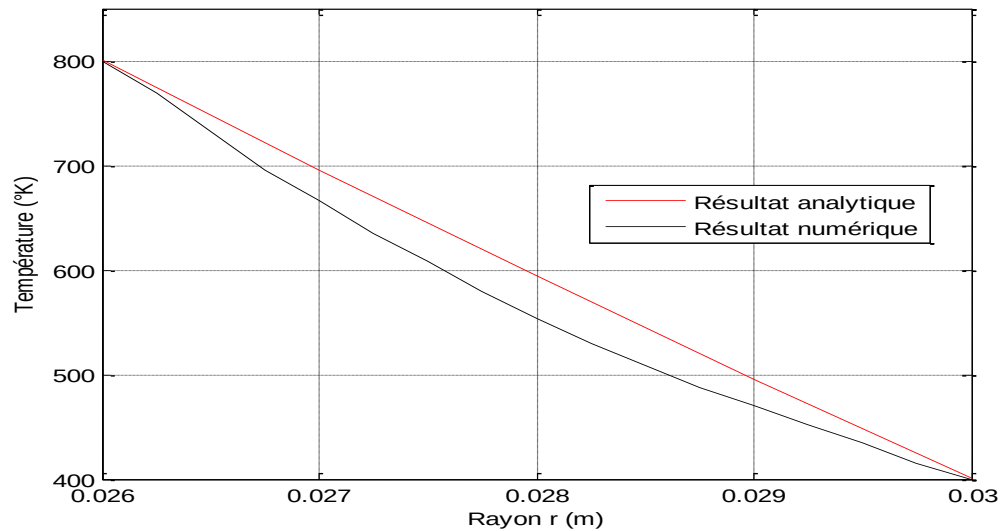


Figure IV.9 Evolution radiale de la température (solution analytique et numérique).

On voit bien que pour un rayon $r = 0.028\text{m}$, ce qui correspond d'un côté au point milieu, et d'autre côté, c'est le point où l'écart entre la solution analytique et numérique est maximal, la température $T(r)$ est égale à :

Analytiquement :

D'après la formule analytique (IV.11), où la figure IV.8

$$T_{ra} = 593.4338^\circ\text{K}$$

Numériquement :

D'après la figure IV.9

$$T_{rn} = 552^\circ\text{K}$$

Erreur absolue

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a_{\max}} &= | \Delta T | \\ &= | T_{ra} - T_{rn} | \\ &= 41.4338^{\circ}\text{K}\end{aligned}$$

tel que :

$\varepsilon_{a_{\max}}$: Erreur absolue maximale,

T_{ra} : Température calculée analytiquement,

T_{rn} : Température calculée numériquement.

Erreur relative

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r_{\max}} &= \frac{T_{ra} - T_{rn}}{T_{ra}} \\ &= 6.98204 \%\end{aligned}$$

tel que :

$\varepsilon_{r_{\max}}$: Erreur relative maximale.

Ainsi :

$$\varepsilon_{r_{\max}} < 7\% \quad \forall r \in [0.026, 0.03]$$

D'après cette erreur, on peut dire que le logiciel utilisé pour la résolution de l'équation du thermique est donc validé.

IV.1.4.2 Résolution du problème thermique en régime transitoire du dispositif

Exploitation :

Nous allons traiter, dans cette partie, en régime transitoire, l'évolution temporelle au point M (ce soit le point le plus éloigné de la source de refroidissement) du tube. Nous tenons aussi d'étudier et analyser la distribution de la température le long de chemin radial (A_1 - B_1) et axial (C_1 - D_1) passant par le point M.

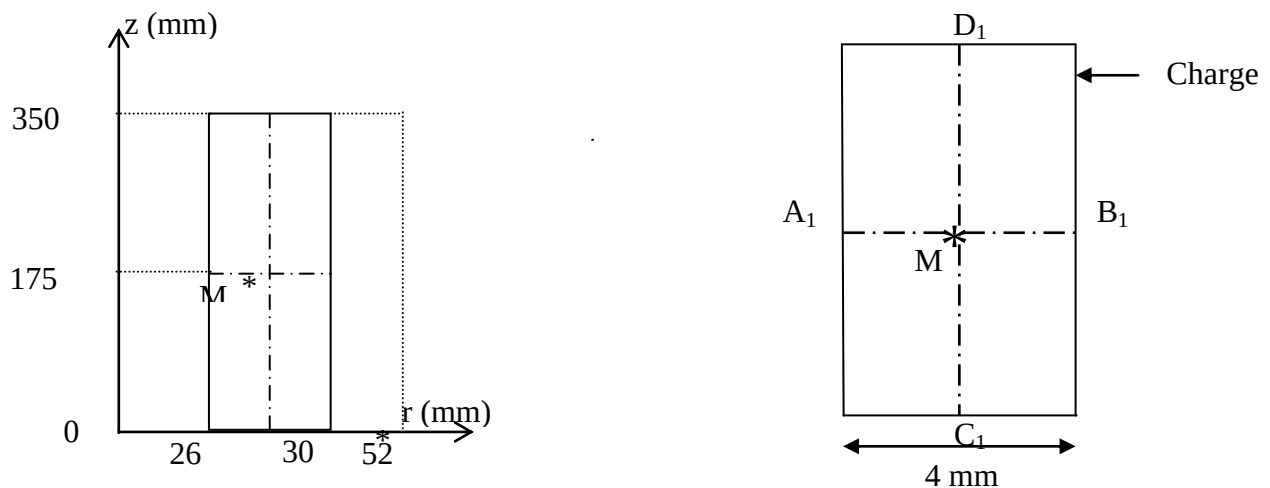


Figure IV.10 Exploitation des résultats au point M.

L'organigramme de la résolution de l'équation thermique en régime transitoire a été exposé au chapitre III, ici la seule inconnue du problème est la température T qui a été définie sur l'unique région concernée : la pièce à chauffer

Conditions aux limites :

Les conditions aux limites du modèle géométrique étudié sont représentées sur la figure suivante (Figure IV.11)

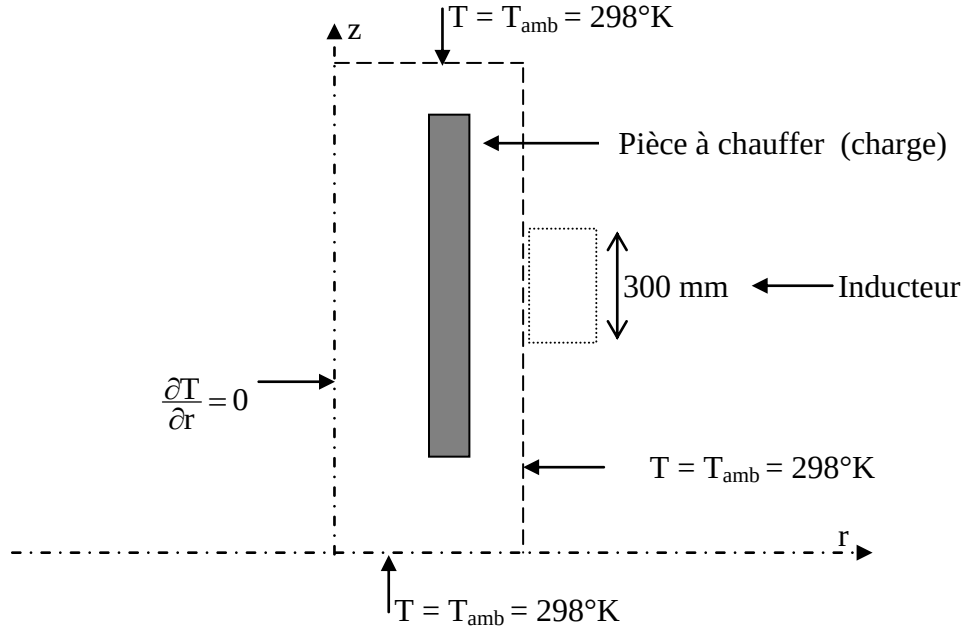


Figure IV.11 Conditions aux limites du problème thermique.

IV.1.4.2.1 Résultats thermiques

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus après résolution de l'équation de la thermique en régime transitoire. Ces résultats portent sur l'évolution temporelle de la température au point M de la pièce à chauffer. La distribution radiale et axiale de la température sera aussi explorée.

Distribution spatiale et évolution temporelle de la température

Les figures (IV.12, IV.13) représentent la distribution radiale et axiale de la température relevée en fin de chauffage de la pièce. Ensuite, Evolution temporelle de la température au point milieu de la charge (M) situés dans la région entourée par l'inducteur, l'évolution temporelle de la température est présentée (figures (IV.14)

La figure IV.12 présente la variation de la variable température en fonction de la coordonnée radiale r pour une hauteur fixe, $z = 175\text{mm}$.

Dans ce cas particulier, nous avons choisi de tracer cette variation au milieu de la pièce à chauffer passant par le point M : M (r = 28mm, z = 175mm)

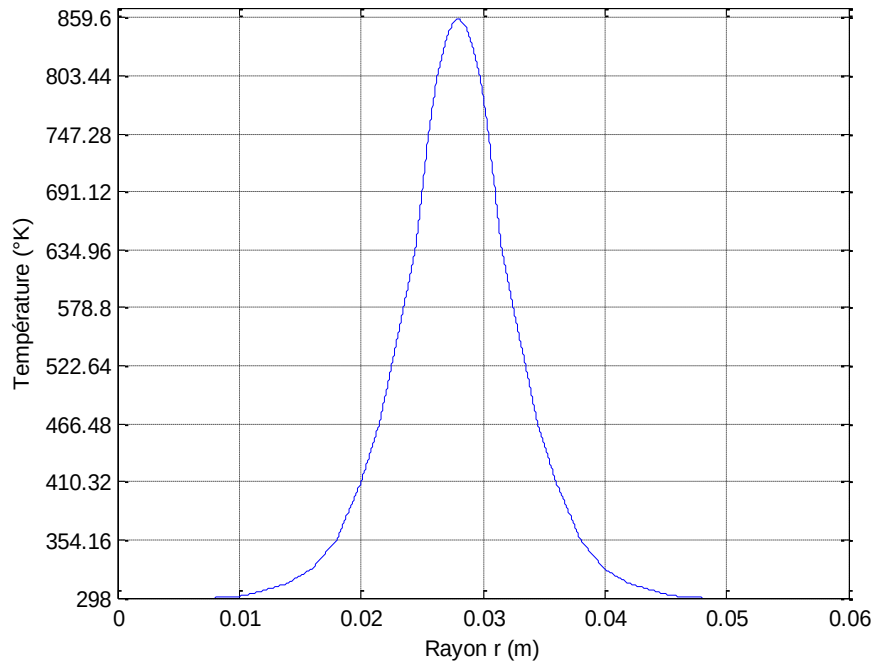


Figure IV.12 Distribution radiale de la température passant par le point M.

Nous remarquons qu'au voisinage de l'axe de symétrie du système modélisé, la température reste pratiquement constante, égale à la température ambiante ($T = T_{\text{amb}} = 298^{\circ}\text{K}$).

Au fur à mesure qu'on s'éloigne de l'axe de symétrie et on s'approchant du milieu de la charge la température augmente, cette augmentation d'une forme parabolique, croissante bien entendue, ce qui s'explique par la forme elliptique de l'équation de la température (une équation au EDP dans l'espace), (présence du terme de second ordre exprimant la variation de la température en fonction de la coordonnée radiale r ($\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$) dans l'équation de la thermique).

Cette température atteint la valeur $T = T_{r = 26\text{mm}} = 775.36^{\circ}\text{K}$ à l'entrée au niveau de la paroi gauche. Elle continue l'augmentation et atteint son maximum $T_{\text{max}} = 859.6^{\circ}\text{K}$ au centre de la charge (r = 28mm z = 175mm).

Par la suite, la fonction $T(r)$ décroît d'une manière symétrique par rapport à l'axe médium à la charge définie par la droite ($r = 28\text{mm}$). Elle atteint la valeur

$T = T_{r=30\text{mm}} = 761.32^\circ\text{K}$ à la sortie de la charge (paroi droite) et continue sa décroissance de la même forme elliptique jusqu'à ce qu'elle atteigne la température ambiante à l'extrémité droite du domaine d'étude thermique.

La figure VI.13 illustre la distribution axiale de la température passant par le même point M, milieu de la pièce, pour un rayon fixe égale à $r = 28\text{mm}$.

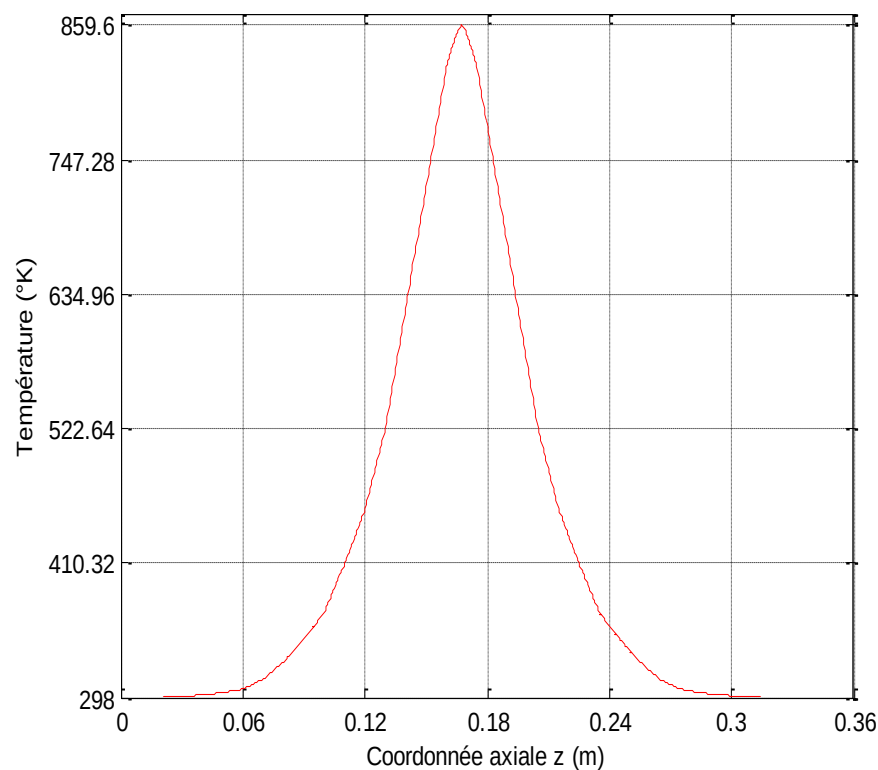


Figure IV.13 Distribution axiale de la température passant par le point M.

Nous constatons que la température au voisinage de l'axe de symétrie du modèle est pratiquement égale à la température ambiante ($T_{\text{amb}} = 298^\circ\text{K}$).

La fonction $T(z)$ croît avec une forme parabolique et atteint son maximum

$T_{\text{max}} = 859.6^\circ\text{K}$ au centre de la charge ($r = 28\text{mm}$, $z = 175\text{mm}$) puis décroît jusqu'à ce qu'elle atteigne la température ambiante à l'extrémité droite du domaine d'étude thermique.

Nous remarquons aussi que la distribution de la température le long du chemin axial passant par le point M, milieu de la pièce à chauffer, démontre une concentration de la chaleur dans la région du tube à hauteur de voisinant celle de l'inducteur. Ceci s'explique par la concentration du potentiel vecteur magnétique, origine de cette chaleur dans cette région particulière.

La figure IV.14 présente l'évolution de la température dans le temps en un point de la charge. Dans ce cas particulier, il s'agit du point centre de la charge M (28mm, 175mm).

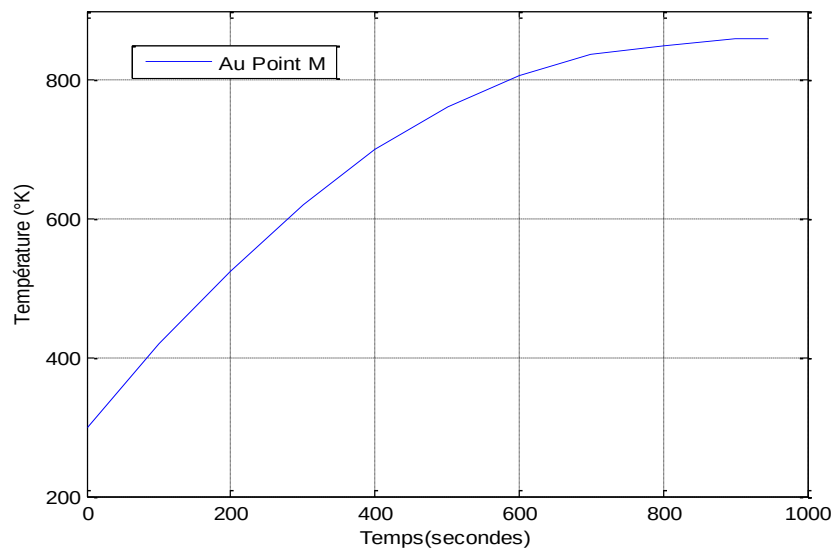


Figure IV.14 Evolution temporelle de la température au point milieu de la charge (M).

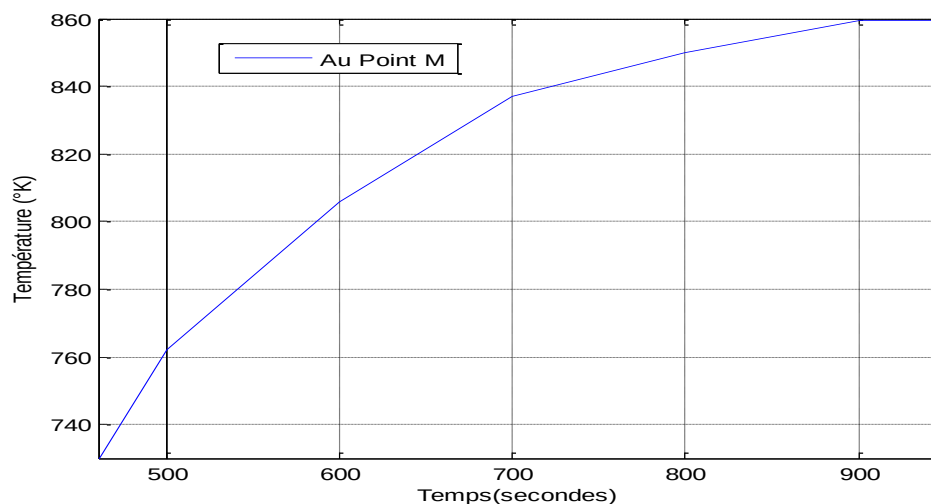


Figure IV.15 Evolution temporelle de la température au point milieu de la charge (M) (Zoom).

On voit bien que la température atteigne son maximum $T_{\max} = 859.6^{\circ}\text{K}$ à $t = 947$ s au point M et se stabilise en ce point, en atteignant ainsi le régime permanent. Cette température représentée la température maximale en tout point de la pièce et à tout instant.

L'analyse de ces courbes nous permet de constater que :

1. A $t = t_0$, le processus thermique est à l'état initial ce qui correspond à une densité de puissance $P_s = 0$, donc à une température égale à la température ambiante $T_{\text{amb}} = 298^{\circ}\text{K}$.

2. Avec l'évolution du temps, la température en ces points augmente ceci s'explique par l'augmentation de la densité de puissance moyenne induite P_s injecté en ces points. Cette température atteint son maximum : $T_{\max} = 859.6^{\circ}\text{K}$ à $t = 947$ s et se stabilise, en atteignant ainsi le régime permanent.

L'évolution de la température T en fonction du temps t présente une allure non linéaire croissante (forme elliptique). Ceci s'explique par le fait que, l'équation de la thermique est non-linéaire, combinant le temps et l'espace en même temps.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un cas pratique de chauffage par induction électromagnétique appliqué à un tube creux en acier inoxydable, dans le cadre d'une expérimentation réalisée avec l'entreprise EDF. L'analyse a porté sur le comportement thermique de la pièce à chauffer, à l'arrêt, en prenant en compte des sources de chaleur dépendant de la température.

Une double approche a été adoptée : analytique d'une part, et numérique à l'aide de la méthode des volumes finis (FVM) d'autre part. Cette démarche a permis d'évaluer la distribution spatiale de la température dans la pièce, tant en régime stationnaire qu'en régime transitoire. La comparaison entre les solutions analytiques et numériques a montré un très bon accord, avec une erreur relative maximale inférieure à 7 %, validant ainsi la précision du modèle numérique développé.

En régime transitoire, l'évolution temporelle de la température au point le plus critique (point M) a été suivie, révélant une montée progressive de la température jusqu'à un maximum de 859,6°K atteint en 947 secondes, avant de se stabiliser. Ce comportement illustre bien la transition vers un état permanent sous l'effet de la source thermique induite.

Ainsi, le modèle thermique présenté constitue un outil fiable et robuste pour la simulation du chauffage par induction. Il ouvre également la voie à des perspectives d'application sur des géométries plus complexes ou dans des conditions thermiques variées.

Conclusion Générale

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire nous avons étudié le transfert de chaleur par conduction thermique, qui est l'un des trois types de transfert de chaleur que l'on trouve dans la nature, par conséquent on le retrouve dans tous les domaines industriels, qui nous intéressent en tant qu'ingénieurs des machines électriques.

Nous avons présenté une modélisation des phénomènes thermiques par conduction par la méthode des volumes finis, comme étant une méthode de discrétisation a permis de réaliser des modèles économiques et suffisamment précis.

La résolution analytique et numérique par la méthode des volumes finis de l'équation de la thermique en régime stationnaire et dynamiques dans le cas d'une distribution radiale de la température a été établis.

Pour l'exploitation du problème thermique, les sources thermiques sont des termes de densités de puissance, dépendante de la température, déduits par le problème magnétodynamique.

Les équations de MAXWELL en électromagnétisme, les lois de la thermodynamique et les propriétés thermiques (conductivité thermique, capacité calorifique) en fonction de la température des matériaux en thermique mènent à l'obtention de modèles mathématiques représentant les phénomènes physiques qui régissent le comportement des systèmes électriques.

Notre modèle permet de considérer la résolution d'une équation de conduction dont les sources thermiques, fonction du potentiel vecteur magnétique et de la conductivité électrique, sont décrites par une loi de dépendance suivant la température. Dans ce travail les sources thermiques, données par le problème magnétodynamique.

La conductivité thermique k ne peut intervenir que dans le cas où le terme source est non nul ($P_s \neq 0$) sinon, la propagation de la température se fait indépendamment de la nature du milieu à chauffer.

Les dispositifs électromagnétiques modélisés présentent une symétrie de révolution ce qui a permis leurs traitements en bidimensionnel. L'hypothèse d'une modélisation cylindrique axisymétrique est séduisante, l'inconnue est invariante par rotation, elle prend en compte l'homogénéité de la température due à la rotation.

Dans ce travail, l'utilisation de la méthode des volumes finis, comme étant une méthode de discrétisation a permis de réaliser des modèles économiques et suffisamment précis ; ces modèles mathématico-numériques développés en thermique ont été implémentés sous l'environnement MATLAB ,qui présentent de nombreux avantages, tels que, le calcul matriciel, l'interface graphique, la technique des matrices creuses, ...etc.

On peut dire que le logiciel utilisé pour la résolution analytique et numérique de l'équation de la thermique en régime stationnaire dans le cas d'une distribution radiale de la température est donc validé

Les résultats obtenus en appliquant notre modèle sur le dispositif de chauffage par induction sélectionné sont concluant concernant l'étude du comportement d'un acier inoxydable, en régime permanent. Ce dernier est atteint pour une température inférieure au point de Curie.

L'examen attentif des courbes précédentes nous permet de constater que la valeur maximale de la température se situe au centre de la charge au point M (28mm, 175mm)]. Ceci s'explique par le fait qu'il s'agit du point physique et géométrique le plus éloigné des sources de refroidissement ou des points les moins chauds du domaine d'étude. Il s'agit dans ce cas des limites gauche et droite du domaine d'étude et où les températures sont pratiquement constantes, égale à la température ambiante.

En perspective, il serait intéressant de :

Utiliser ce modèle tout en se basant sur les valeurs moyennes de la densité de puissance (les sources thermiques) dissipée par zones.

Etudier le chauffage au défilé de la pièce permettant ainsi d'élever la température à des hautes valeurs

BIBLIOGRAPHIE

Le Chauffage par Induction : Conception et Applications Industrielles, note EDF HE 122 W 2242.

[AURIOL, BURAI 97] PHILIPPE AURIOL, NOEL BURAI, “ La Compatibilité Electromagnétique en Chauffage par Induction, Partie A : Corps Humain ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés industriels ”, Paris, France, Mai 1997.

[DEVELEY 97] G. DEVELEY, “ L’Induction : Effets Thermiques et Mécaniques. Rappel des Bases Théoriques ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.

[NUNS 93] J.NUNS, “ Le Chauffage par Induction Appliqué aux Industries Agro-alimentaires ”, Note EDF, Avril 1993.

[M.COEVOET 97] M.COEVOET, “ La Place de l’Induction dans l’Industrie ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.

[SABONNADIÈRE , COULOMB] J. C. SABONNADIÈRE, J. L. COULOMB , “ Calcul des Champs Electromagnétiques ”, Technique de l’ingénieur D.3020.pp.I-20

[EDMINISTER 85] JOSEPHA. EDMINISTER, “ Electromagnétisme ”, Série Schaum, 1985.

[VANDER VORST 85] ANDRE VANDER VORST, “ Electromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d’Hyperfréquences CABAY, Librairie-Editeur, Louvain-la-Neuve, 1985.

[TOUZOT 84] G. D. G.TOUZOT, “ Une Présentation de la Méthode des Eléments Finies ”, Maloine S.A. Editeur Paris, France,1984.

[**KREITH 67**] **FRANK KREITH** , “ Transmission de la Chaleur et Thermodynamique ”, Edition MASSON et SIE Editeur, Paris, France, 1967.

[**CRABOL 89**] **JEAN CRABOL**, “ Transfert de Chaleur ”, tome1- Les Principes, tome2- Applications Industrielles, MASSON, Paris, 1989.

[**KHEZZAR 88**] **LYES KHEZZAR** , “ Procèdes de Transfert de Chaleur et de Masse ” , Collection de Cour de Physique, Université de Constantine, 1988.

[**MEKIDECHE 93**] **MOHAMED RACHID MEKIDECHE**, “ Contribution à la Modélisation Numérique de Torches à Plasma d’Induction ” Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1993.

[**CHENTOUF 94**] **ABDELLAH CHENTOUF**, “ Contribution à la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d’un Appicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1994.

[**SADIKU 92**] **N. O . MATHEW SADIKU**, “ Numerical Techniques in Electromagnetics ”, CRC, London, 1992.

[**PISKOUNOV 80**] **N. PISKOUNOV**, “ Calcul Différentiel et Intégral ”, Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.

[EUVRARD 87] **DANIEL EUVRARD**, “ Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles Différences Finies Elément Finis ”, Masson, Paris, France, 1987.

[**V. PATANKAR**] **SUHAS V. PATANKAR**, “ Numerical Heat Transfer and Fluid Flow ”, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences.

[**BOUMAH RAT, GOURDIN**] **M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN**, “ Méthode Numériques Appliquées ”, (O.P.U).

[**FELICHI 97**] **M. FELICHI**, “ La Modélisation Numérique des Phénomènes Couplés ”, Congres International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.

[**MOLFINO 90**] **M. MOLFINO**, “ Non Linear Coupled Thermomagnetic Problems Under Pulsed Conditions-Comparison of Different Finite Element Analysis Strategies ” March 1990.

[**FELIACHI, DEVELEY 91**] **M. FELIACHI, G. DEVELEY**, “ Magneto-Thermal Behavior Finite Element Analysis for Ferromagnetic Materials in Induction Heating Devices ”, IEEE Transaction on magnetic Vol.27, N°6, p : 5235-5237, November 1991.

[**SRAIRI, FELIACHI 98**] **K. SRAIRI, M. FELIACHI** “ Numerical Coupling Modes for Analyzing Dynamic Behaviors of Electromagnetic Actuators ”, IEEE transaction on magnetics, Vol.34, No.5, September 1998.

[**FELIACHI 91**] **M. FELIACHI**, “ Modélisation du Chauffage par Induction de Pièce Ferromagnétiques en Mouvement, 1^{ère} Partie : Equations et Lois Locales de Comportement, 2^{ème} Partie : Modélisation et validation, formulation du couplage fort ”, Contrat EDF, IUT St, Nazaire, DT2I , 1991

Reference Guide, “MATLAB”, “High-Performance Numeric Computation and Visualization Software ”, October, 1992.

[DEVELEY D 5 935] GERARD DEVELEY « technique de l'ingénieur », D 5 935.

[CALLBAUT 07] JEANT CALLBAUT « Guide Power Quality, section 7 : Efficacité Energétique », www.leonardo-energy.org/france. Aout (2007).

[Ferial 21] BESSGHIR FERIEL, “L'équation de la chaleur”, “ mémoire de master ” , “ Université de Mostaganem”, “ 2020-2021”

[Salaalah 19] SAADALLAH Houssam Eddine, “étude théorique de la méthode des éléments finis Application : calcul de l'induction magnétique ”, “ mémoire de master ” , “ Université de Biskra”, “6 juillet 2019”

[Becha H 01] Becha Habiba “ Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Thermiques Couplés par la Méthode des Volumes Finis et de la Paramétrisation dans les Systèmes Amagnétiques de Chauffage par Induction”, thèse de magister, spécialité : électrotechnique, option : électricité industrielle à l'Université de Biskra, 24 / 07 / 2001