



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Génie Electrique
Filière Electrotechnique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologie
Filière : Electrotechnique
Spécialité : Réseaux électriques

Présenté et soutenu par :
Boulegroun Nadhira

Influence de la Fréquence sur l'effet de peau (cas d'une plaque ferromagnétique)

Jury :

M ^{er}	Hammoudi Mohamed yacine	Pr	Université de Biskra	Président
M ^{me}	Becha Habiba	MCA	Université de Biskra	Examinateur
M ^{er}	Rezig Mohamed	MCB	Université de Biskra	Rapporteur

Année universitaire : 2024-2025

République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electrotechnique
Option : Réseaux électriques

Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme :

MASTER

Thème

Influence de la Fréquence sur
l'effet de peau (e cas d'une plaque
ferromagnétique)

Présenté par :

Boulegroun Nadhira

Avis favorable de l'encadreur :

Rezig Mohamed

signature

Avis favorable du Président du Jury

Pr Hammoudi Mohamed Yacine

Signature

Cachet et signature



Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electrotechnique
Option : Réseaux électriques

Influence de la Fréquence
d'une plaque

Thème

sur l'effet de peau (cas
ferromagnétique)

e :

RESUMES (Français et Arabe)

Le chauffage par induction permet d'apporter de la chaleur d'une manière rapide et reproductible pour différents procédés de fabrications qui nécessite d'assembler ou de modifier les propriétés de métaux ou autres matériaux conducteurs électriques. Le procédé est basé sur la génération de courants électriques induits à l'intérieur du matériau pour produire de la chaleur. Vu ses caractéristiques très attrayantes du point de vue technologique, sécuritaire économique et moins polluante. La géométrie de la plaque à des couches en matériaux ferromagnétique, joue un rôle très important dans les systèmes de cuisson par induction ; d'où nous mènent à étudier L'effet de peau ou effet pelliculaire. Cette dernière est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des conducteurs. Ce phénomène d'origine électromagnétique existe pour tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs. D'un point de vue théorique, la résolution numérique des équations de l'électromagnétisme et de la thermique a conduit à une représentation des courants de circulation dans la plaque. On applique une gamme de fréquences afin de tester la profondeur de l'effet de peau par le logiciel MATLAB.

Mots clés : Effet Peau-Ferromagnétique - électromagnétique-thermique-chauffage par induction

يوفر التدفئة الحثية الحرارة بطريقة سريعة وقابلة للتكرار لإجراءات التصنيع المختلفة التي تتطلب تجميع أو تعديل خصائص معدنية أو مواد موصولة كهربائية أخرى. تعتمد هذه العملية على توليد التيارات الكهربائية الناتجة داخل المادة لإنتاج الحرارة. بالنظر إلى خصائصها الجذابة للغاية من وجهة نظر تكنولوجية واقتصادية وأقل تلوئناً. تلعب هندسة اللوحة مع طبقات من المواد المغناطيسية ، دوراً مهماً للغاية في أنظمة الطهي التعريفي ، أين نزدي إلى دراسة تأثير الجلد أو تأثير الفيلم. هذا الأخير هو ظاهرة كهرومغناطيسية مما يعني أنه ، على التردد العالي ، يميل التيار إلى الدوران في سطح السائقين. توجد هذه الظاهرة من الأصل الكهرومغناطيسي لجميع السائقين الذين سافروا بواسطة التيارات البديلة من وجهة نظر نظرية ، أدت الدقة الرقمية للكهرومغناطيسية والمعادلات الحرارية إلى تمثيل التيارات الدورية في اللوحة. يتم تطبيق مجموعة من الترددات لاختبار عمق تأثير الجلد بواسطة برنامج MATLAB .

Remerciements

Tout d'abord merci à Allah, qui m'a accordé la force, la patience pour terminer mon parcours universitaire.

Je remercie mon encadrant Dr REZIG Mohamed pour ses conseils avisés, son accompagnement bienveillant et sa disponibilité tout au long de ce projet et ses années.

Je remercie également l'ensemble des enseignants du département de génie électrique en particulier ceux spécialisés en réseau électrique pour la qualité de leur enseignement et leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Un grand merci à ma famille, en particulier mes parents, pour leurs encouragements constants et leur soutien moral et matériel.

Je n'oublie pas mes amis et camarades de promotion, avec qui j'ai partagé des moments inoubliables.

À toutes et à tous, merci du fond du cœur.

Dédicace

À ce moment si cher à mon cœur, je tiens à exprimer toute ma gratitude et mon amour à ceux qui ont été les piliers de ma vie. Je dédie ce travail à :

*Ma tendre mère **Aïda** symbole d'un amour éternel.*

*Mon cher père **Abderrahmane** qui a su donner fierté à notre nom.*

À vous deux, ce succès est le vôtre avant d'être le mien.

*Mon petit frère **Mohamed Anis**.*

*Mes sœurs, source de joie **Imen, Haifa, Zyada et Hind**.*

*Leurs époux **Imad Eddine, Abderrahim et Hichem**.*

*Mes neveux **Mazen, Omar Nazim, Safouane** et la petite princesse **Mays**.*

*Ma chère tante **Sarah**, son époux **Sadok** et mes cousins **Dina, Rafed, Madyane**.*

Mon oncle, son épouse et ma grand-mère que dieu lui accorde une longue vie.

*Tous les enseignants pour leur guidance et leur soutien, en particulier **Dr REZIG Mohamed**.*

Mes camarades de ces cinq années pour leur amitié, leurs encouragements et leur solidarité.

*Enfin, **Alhamdoullah** et grâce à **Allah** pour cette belle fin. Qu'il me guide, ainsi que vous, vers le bien.*

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE	PAGES
Tableau I.1 : Exemples d'application du chauffage par induction	18
Tableau III.1 : Variation de la résistivité électrique (ρ) para port à la température.....	67
Tableau III.2: les dimensions des trois inducteurs.	73
Tableau III.3: les dimensions des pièces à chauffer	73

LISTE DE FIGURES

CHAPITRE I	PAGES
Figure I.1 : Vue de dessus d'une plaque à induction 4 foyers.....	3
Figure I.2 : Vue intérieure de L'électronique d'une plaque à induction.	3
Figure I.3 : chauffage par induction d'un cylindre.	4
Figure I.4 : Principe d'induction.....	5
Figure I.5 : Courants de Foucault	5
Figure I.6 : Les courants de Foucault induits dans une plaque métallique.....	9
Figure I.7 : Effet joule dans les plaques de cuisson.....	9
Figure I.8 : Chauffages par induction avec des inducteurs de formes différentes.....	12
Figure I.9 : Des inducteurs dans la fusion par induction.....	12
CHAPITRE II	
Figure II.1 : Maillage du domaine d'étude.....	33
Figure II.2 : Discréétisation en volumes finis dans le cas monodimensionnel.....	34
Figure II.3 : Maillage du domaine d'étude.....	36
Figure II.4 : Description d'un volume fini.....	37
Figure II.5 : Interface entre deux éléments d'un volume fini.....	46
Figure II.6 : Demi-volume à côté des nœuds limites.....	49
Figure II.7 : Diagramme de classification des différents modèles du couplage électromagnétique-thermique.....	61
CHAPITRE III	
FigureIII.1 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.106$ Hz	67
FigureIII.2 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.104$ Hz.....	67
FigureIII.3 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.104$ Hz.....	68
FigureIII.4 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.104$ Hz.....	68
FigureIII.5 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.104$ Hz.....	69
FigureIII.6 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.104$ Hz.....	69
FigureIII.7 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.104$ Hz.....	70
FigureIII.8 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.104$ Hz.....	71
FigureIII.9 : Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.104$ Hz.....	72
Figure III.10 : Modèle géométrique du dispositif.....	73
Figure III.11: Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température).....	73
Figure III.12: Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.....	74
Figure III.13: Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.....	74
Figure III.14: Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique.....	75
Figure III.15: Evolution du vecteur potentiel A (une seule couche).....	75
Figure III.16: Evolution de la température (une seule couche).....	76
Figure III.17: Les lignes Equipotentielle (une seule couche)	76
Figure III.18: Modèle géométrique a deux couches adopté pour L'étude électromagnétique.....	78
Figure III.19 : Evolution du vecteur potentiel A (a deux couches).....	77
Figure III.20 : Evolution de la température (a deux couches).....	77
Figure II.21: Les lignes Equipotentielle (épaisseur de la plaque)	78

LISTE DES ABREVIATIONS

B : Induction magnétique[T],

H : Champ magnétique [A/m],

D: Induction électrique[C/m²],

E : Champ électrique [V/m],

JD : densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m²]

: Perméabilité magnétique [H /m],

: Densité volumique de charges électriques [C/m³],

: Réflectivité magnétique [m/H]

: Permittivité diélectrique [F/m],

: Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptibles de ce déplacé [m/s],

σ : Conductivité électrique [S/m],

J_{ex}: Densité du courant d'excitation (source) [A/m²],

σ.E: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²]

(vΛB) : Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

ε_r : Permittivité relative du milieu [USI].

ε₀: Permittivité absolue du vide [F/m],

μ_r : Permeabilité magnétique relative du milieu [USI].

μ₀: Permeabilité magnétique absolue du vide

B_{re}: Vecteur induction magnétique rémanente [T].

q_{cond}: Flux de chaleur transmise par conduction (W.),

T: Température(K).

K: **Conductivité thermique(W)**

qconv: **Flux de chaleur transmise par convection (W),**

h : **Coefficient de transfert par convection(W)**

T_a : **Température ambiante (K).**

T_S : **Température de la surface (K)**

qrad : **Flux de chaleur transmise par radiation (W)**

CS: **Coefficient de transfert de chaleur par radiation(W)**

σ_s: **Constante de Stefan-Boltzmann(W)ou bien β**

ε_{emi}: **Emissivité du matériau**

ρ: **Masse volumique(Kg/m³) ou bien r.**

P_r: **Pression [Pa].**

q: **Source des flux de conduction(W / m²) donnée par la loi de fourrier**

P_s: **Terme source de chaleur correspondant, soit, au travail des forces appliquées au fluide ou à la dissipation visqueuse, soit à une puissance calorifique par unité volumique induite par effet joule où réaction chimique.**

C_p: **Capacité calorifique à pression constante(J/Kg K°)**

: **Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace[m/s],**

q_r: **Pertes radiatives ou chaleur rayonnée**

SOMMAIRE

TITRE	PAGES
DEDICACE	I
REMERCIEMENT	II
LISTE DES TABLEAUX	III
LISTE DES FIGURES	IV
LISTE DES ABREVIATIONS	V
RESUME	VI
SOMMAIRE	X
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction	
I.1.INTRODUCTION	3
I .2.HISTOIRE DE L'INDUCTION MAGNETIQUE	3
I .3. PRINCIPE DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION	6
I .4.LES COMPOSANTS DE SYSTEME DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION	7
I. 5. CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	8
I.5.1. Courants de Foucault	8
I.5.2. Effet joule	9
I.5.3.L'effet De Peau	10

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

I.5.4. Puissance Transmise A La Charge	10
I .6. TYPE D'INDUCTEUR	11
I. 7. UTILISATION DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	12
I. 8. ETUDE COMPARATIVE ENTRE LE CHAUFFAGE PAR INDUCTION ET LE CHAUFFAGE PAR GAZ	13
I.9. TYPE DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION	14
I .10. LES AVANTAGES DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION	14
I. 11. INCONVENIENTS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	14
I.12. CONCLUSION	15
CHAPITRE II : Formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques et méthodes numériques électromagnétique thermique	21
II.1. INTRODUCTION	17
II .2. LES MODELES MATHÉMATIQUE EN ELECTROMAGNETISME	17
II 2.1. Equation générale de MAXWELL	17
II. 2.2. Interprétation physique des équations électromagnétisme	18
II. 2.2.1. équation de couplage électromagnétisme	18
II. 2.2.2. Les équation de conservation	18
II. 2.2.3. Loi de comportement de matériaux (milieux physique)	19
II. 3. FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE	19
II. 3.1. Modèle electrostatique	20
II. 3.2. Modèle électrocinétique	20

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

II. 3.3. Modèle magnétostatique	21
II. 3.3.1. Modèle magnétostatique scalaire	21
II. 3.3.2. Modèle magnétostatique vectoriel	21
II. 3.4. Modèle magnétodynamique	22
II. 4. FORMULATIONS DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE	23
II. 5. MODES DE TRANSMISSION DE CHALEUR	26
II.6. NOTIONS FONDAMENTALES DE CONDUCTION THERMIQUE	26
II.6.1. Le régime non stationnaire (dynamique)	26
II.6.2. La température	27
II.6.3. Conductivité thermique	27
II.7. LES LOIS FONDAMENTALES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR	27
II.7.1. Quantité de chaleur transmise par rayonnement	27
II.7.2. Flux de chaleur transmis par convection	28
II.7.3. Densité de flux de chaleur : flux de chaleur	28
II.8. EQUATION DE LA THERMIQUE	29
II.9. LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN THERMIQUE	30
II.10. DEFERENTES TECHNIQUE DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	33
II.10.1. Méthodes des différences finies (MDF)	33
II.10.2. Méthodes des éléments finis (MEF)	33

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

II.10.3. Méthodes des intégrales de frontières (MIF)	33
II.10.4. Méthodes des circuits couples (MCC)	33
II.10.5. Méthodes des volumes finis (MVF)	33
II.11. METHODES DES VOLUMES FINIS (MVF)	35
II.12. RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE ET DE LA THERMIQUES PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS.	36
II.12.1. Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régimes harmonique	37
II.12.2. Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur	41
II.13. LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE THERMIQUE	54
II.14. CALCUL DES PARAMETRES DU COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE THERMIQUE	54
II.15. LES MODELES DU COUPLAGE EXISTANT	55
II.15.1. Modèle des couplages directs (FORT)	55
II.15.2. Modèle du couplage interne(FAIBLE)	56
II.15.3. Modèle du couplage base sur la technique de la paramétrisation	57
II.15.3.1. principe du modèle de couplage basé sur la technique de la paramétrisation	57
II.16. CONCLUSION	62
CHAPITRE III : Application et Simulation par logiciel MATLAB	64
III.1 INTRODUCTION	64
III.2. L'ALUMINIUM	70
III.3.1. Qu'est-ce que l'aluminium ?	70

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

III.3.2. Principales propriétés de l'aluminium	71
III.3.3. L'utilisation de l'aluminium dans notre quotidien	71
III.3.4. Histoire	71
III.3.5. Propriétés thermiques	73
III.3.5.1. Température de fusion	73
III.3.5.2. Conduction thermique	74
III.3.6. Propriétés électriques	74
III.3.7. Influence de la température	75
III.3.8. Propriétés magnétiques	76
III.3.9. Conclusion	76
III.5. APPLICATION A TROIS CONDUCTEUR	79
III.5.1. représentation du modèle géométrique du dispositif de chauffage	79
III.5.2. modèles des propriétés physiques	80
III.5.3. étude du comportement électromagnétique et thermique	82
. III.5.3.1.1. application variation de l'épaisseur de la plaque (couche Acier inoxydable)	82
III.5.3.1.1. Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique.	85
III.5.3.2.2^{eme} application variation de l'épaisseur de la plaque (couche Acier inoxydable+ couche aluminium)	86
III.5.3.2.1. Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique.	89
CONCLUSION GENERALE	83

INTRODUCTION

GENERAL

INTRODUCTION GENERALE

Récemment le problème de chauffage domestique ou à l'industrielle ce pose depuis toujours, c'est pourquoi l'homme tente d'améliorer sa vie au quotidien ; pour des raisons tel que ; sa fonction est de chauffer des matériaux sans contact avec la source d'énergie, La facilités de réglage et de mise en marche automatique, l'absence de combustion et de dégagement de gaz toxiques, la propreté des appareils, sont autant d'avantages du chauffage par induction. Ainsi ; Les plaques à induction permettent de consommer moins d'énergie, c'est pourquoi nous concentrant sur l'étude du l'effet de peau dans les plaques à induction sont conçus pour servir de chauffage les besoins de l'homme.

Le chauffage par induction est une application directe de deux lois physiques,

- La loi de LENZ
- L'effet JOULE.

La qualité de la transmission de l'énergie dans la pièce à traiter dépend de la disposition des inducteurs ; des plaques, de la fréquence d'alimentation et de l'effet de peau qui caractérisent la répartition des courants induits dans la pièce, en surface ou à cœur.

Plus la fréquence augmente, plus les courants induits se concentrent en surface, ce qui permet de déterminer une profondeur dite « de pénétration » (épaisseur de peau).

Par ailleurs, les propriétés

- Magnétique (perméabilité relative),
- Electrique (résistivité)
- Thermique (conductibilité), des pièces à chauffer variant avec la température et le type d'inducteur (géométrie, nature du conducteur, technologie

Le procédé de la cuisson par induction est présenté les équations aux dérivées partielles (EDP) qui décrivent les phénomènes électromagnétiques et thermiques. Pour le cas de l'électromagnétisme, ce sont les équations de MAXWELL et les caractéristiques électriques (conductivité électrique) et magnétiques (perméabilité magnétique) des matériaux. Et pour le cas de la thermique, ce sont les lois de la thermodynamique et les propriétés thermiques (conductivité thermique, capacité calorifique) de ces matériaux.

Pour la résolution des équations mathématiques ; on utilise les méthodes numériques de discréétisation qui consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, Or deux équations (magnétodynamique et thermique) sont couplées par le fait que les propriétés physiques dépendent à la fois du champ électromagnétique et de la température.

La méthode de couplage par la technique de la paramétrisation, permet ainsi de découpler entièrement les deux phénomènes physiques et de ne s'intéresser plus qu'à un problème thermique après l'exploitation du problème magnétodynamique en termes de densité de puissance, dépendant de la température.

Ainsi, notre travail sera présenté de la manière suivante :

➤ Dans un premier chapitre ; les dispositifs de chauffage par induction, définir l'effet de peau et leur caractéristiques.

➤ Dans le deuxième chapitre sera consacré aux formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques et thermiques ainsi les modèles numériques adoptés pour ce système.

➤ Le chapitre trois En vue de l'importance de l'effet de peau dans les cuissons par induction, nous proposons quelques utilisations dans des plaques (conductrice – ferromagnétique - ferromagnétique +aluminium) ainsi les évolutions des paramétrés électromagnétique thermiques au fond de ces plaques.

Enfin, nous tirons une conclusion générale résumant notre travail et nous proposons quelques suggestions futures.

Chapitre I :

*Généralité sur les Phénomènes de
Chauffage par Induction*

I.1. INTRODUCTION :

L'induction électromagnétique à pour particularité de générer la chaleur directement à l'intérieur du matériau à chauffer. Cette particularité présente de nombreux atouts par rapport aux méthodes de chauffe plus standards, notamment la réduction des temps de chauffe et des rendements élevés, ou encore la possibilité de chauffer de façon très locale.

Le chauffage par induction est une méthode rapide, efficace, précise et reproductible qui permet de chauffer sans contact les métaux et d'autres matériaux conducteurs électriques .Il peut s'agir de métal (par ex. acier, cuivre, aluminium ou laiton) ou de semi-conducteur (par ex. carbone, graphite ou carbure de silicium). Le chauffage par induction à acquit une très grande importance dans l'industrie, vu ces diverses caractéristiques très intéressantes d'un point de vue technologique. [1]. [2].

I.2.HISTOIRE DE L'INDUCTION MAGNETIQUE :

Le phénomène d'induction magnétique fut découvert par le physicien anglais Mickael Faraday en 1831. C'est dans les années 1900 qu'on a commencé d'utiliser l'induction comme procédé de chauffage de pièces en métal, mais il est très limité à cause des faibles puissances disponibles. Les principes de base du chauffage par induction ont été compris et appliqués dans les processus industriels depuis les années 1920[3] et ils sont apparues en Allemagne en 1928.

Dans les années 1980 ; la Compagnie Européenne de l'électroménager France (Société du Groupe Thomson (Allemagne) releva le défi de développer une table à induction puissante (3 kW). Plus d'une vingtaine de brevets furent pris. La première plaque à induction encastrable fut commercialisée au début des années 1990 par des marques du Groupe.

En 2017 et en France par exemple, où le taux d'équipement des ménages en plaques de cuisson est de 61 %, la table à induction représente près de 56 % des plaques de cuisson installées [4]. Il s'agit là, de toute évidence, de la table de cuisson du futur. (Figure I. 1 et I. 2)



Figure I. 1 : Vue de dessus d'une plaque à induction 4 foyers.



Figure I. 2 : Vue intérieure de l'électronique d'une plaque à induction.

I.3.PRINCIPE DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

Le chauffage par induction est une application très directe à la fois de la loi de l'induction - la loi de Lenz - et de l'effet Joule : par un dispositif approprié appelé "inducteur" (**Figure I. 3**) on crée un champ magnétique alternatif, donc variable. Tout conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique dont l'intensité est proportionnelle à celle du courant. Conformément à la loi de Lenz, toute substance conductrice d'électricité, si elle se trouve dans ce champ magnétique variable, est le siège de forces électromotrices d'induction, donc de courants induits.

A leur tour, ces courants induits appelés courants de Foucault, dissipent de la chaleur par Effet Joule dans la substance même où ils ont pris naissance.

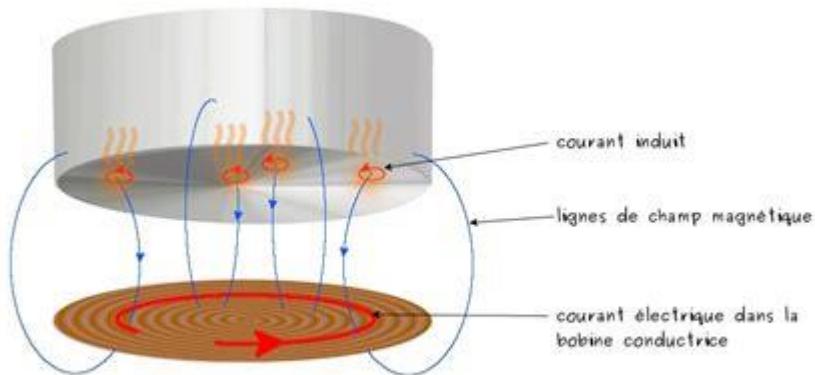


Figure I. 3 : chauffage par induction

L'inducteur est toujours en cuivre et a un profil creux pour être refroidi à l'eau, de l'intérieur. La forme géométrique de l'inducteur est dépendante de la géométrie de la pièce Le chauffage par induction met en jeu trois phénomènes physiques successifs :

- Transfert d'énergie de l'inducteur au corps à chauffer par voie électromagnétique
- Transformation en chaleur dans le corps de l'énergie par effet Joule
- Transmission de la chaleur par conduction, convection et rayonnement thermique [5], [6],

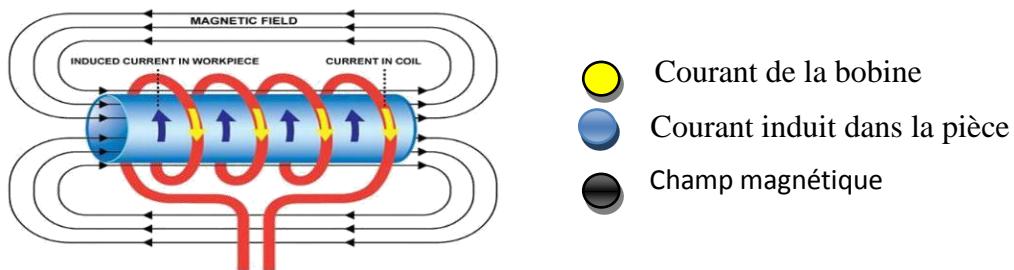


Figure I. 4:Principe d’induction

I.5.CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

I.5.1. Courants de Foucault :

Ces phénomènes physiques sont notés ainsi du nom de Jean Bernard Léon Foucault. Ce physicien d'origine française, a vécu de 1819 à 1868. Récompensé par de nombreuses distinctions. C'est ainsi que nous appelons le courant créé par un champ magnétique alternatif sur un matériau conducteur de courant. (**Figure I. 6**)

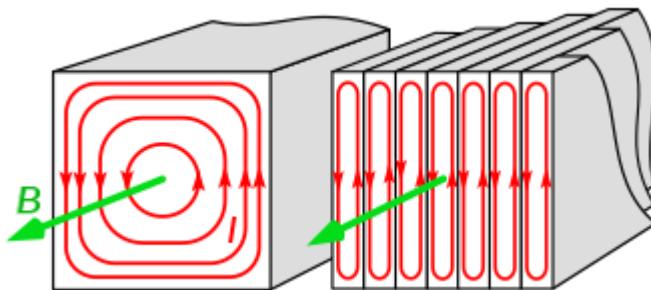


Figure I. 6: Courants de Foucault

Les courants de Foucault sont également appelés (eddy current). Ce sont des courants électriques qui sont, volontairement ou involontairement, induits dans un conducteur (plat). Il s'agit d'un phénomène naturel qui intervient en présence par exemple d'un champ magnétique variable dans une plaque de métal. Il peut s'agir d'un champ variable d'une bobine électrique mais aussi d'un mouvement dans lequel les lignes de champ sont coupées par la plaque. Lorsqu'un conducteur coupe les lignes de champ magnétique, un courant y est induit. Ce courant est court-circuité par la plaque conductrice. [8]

Principe :

Un composant métallique placé dans un champ magnétique variable est parcouru par des courants électriques appelés courants induits ou courants de Foucault.

La circulation de ces courants est influencée par :

- La fréquence du champ magnétique émis.
- La géométrie du composant
- La conductivité électrique du métal
- La présence d'un obstacle (manque matière, fissure, hétérogénéité).
- La perméabilité magnétique du métal. [8]

Les courants de Foucault (I, rouge) induits dans une plaque métallique (C) se déplaçant vers la droite par un aimant stationnaire (N). Le champ magnétique (B , vert) est dirigé vers le bas. Les courants génèrent leur propre champ magnétique (flèches bleues) qui produit une force de traînée.

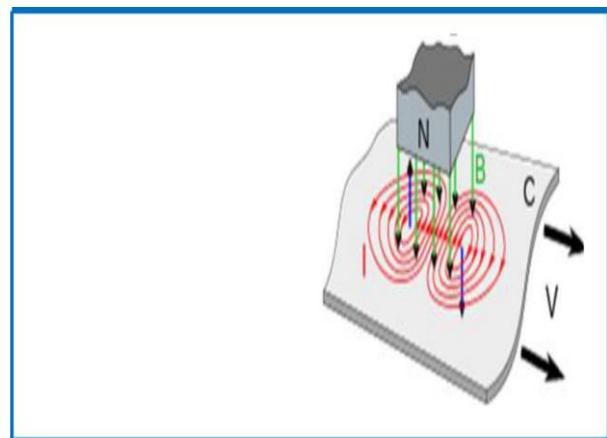


Figure I. 7 : Les courants de Foucault induits dans une plaque métallique.

I.5.2. Effet joule

Le passage du courant électrique dans les récepteurs provoque parfois un fort dégagement de chaleur et de lumière : c'est l'effet Joule. Cet effet porte le nom du physicien anglais James Prescott Joule qui l'a étudié vers 1860 [10].

Lorsqu'on place une pièce conductrice dans un champ magnétique variable, elle sera le siège des courants induits de Foucault. Leur circulation provoque l'échauffement de la pièce d'après l'effet joule. L'énergie calorifique (en joule) dégagée par un conducteur électrique de

résistance (en Ohm) traversée par un courant d'intensité (en Ampère) pendant un temps (en seconde) est donné par la relation : $Q = R \cdot I^2 \cdot T$

Le passage du courant qui porte au rouge les « résistances » des plaques permettant ainsi la cuisson des aliments par l'effet de Joule. La chaleur se propage vers le centre de la pièce par diffusion thermique. **(Figure I.8)**

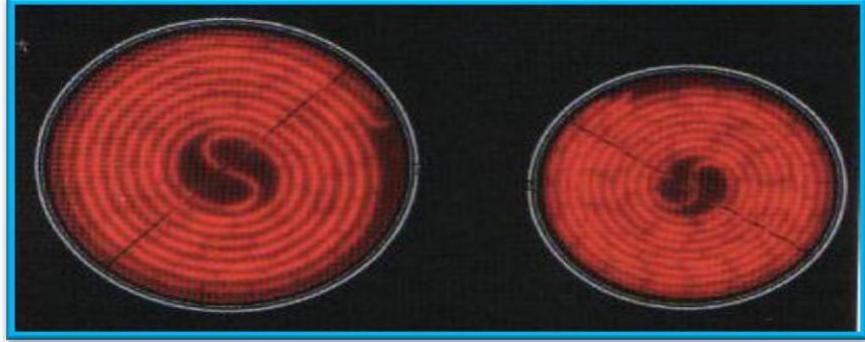


Figure I.8: Effet joule dans les plaques de cuisson

Aussi il y a Deux grandeurs caractérisent fortement l'efficacité thermique et énergétique de l'induction : l'effet de peau et la puissance transmise à la charge à chauffer.

I.5.3.L'effet De Peau :

L'effet de peau caractérise la répartition des courants induits dans la pièce à chauffer. Quand une substance conductrice de l'électricité est soumise à un champ magnétique variable, la densité des courants induits dans la substance décroît, à partir de la surface. C'est ces non uniformités de la densité des courants induits qui est traduite sous l'appellation d'effet de peau, dont la grandeur caractéristique est la profondeur de pénétration du champ magnétique ou épaisseur de peau [11]. [12]

Dans le cas d'un conducteur plan, elle est exprimée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}}$$

Ou :

δ : Epaisseur de peau [m],

σ : Conductivité électrique qui varie en fonction de la température [S/m]

μ_0 : Permeabilité magnétique absolue du vide [H/m],

μ_r : Permeabilité relative du matériau [USI],

F : Fréquence du fonctionnement [Hz].

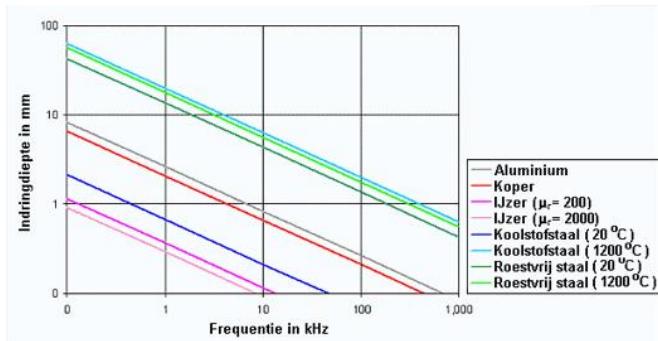
La profondeur de pénétration dépend donc de :

- La fréquence du champ variable

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

- La nature du matériau à chauffer du point de vu perméabilité magnétique (μ), et conductivité électrique (σ)
- La température de la pièce à chauffer ($(T) \sigma$).

En effet, cette profondeur d'après l'équation (I.1), diminue quand la fréquence ou l'une des propriétés physiques du matériau (σ, μ) augmente



Profondeur de pénétration en mm; Fréquence en kHz; Aluminium, Cuivre, Fer, Acier au carbone, Acier au carbone, Acier inoxydable, Acier inoxydable

I.5.4. Puissance Transmise A La Charge :

- Cas d'un système physiquement linéaire :

La puissance de chauffage induite, dans un conducteur plan, a pour expression [12] :

$$P_C = \rho \frac{H_s^2}{\delta} S$$

Ou :

ρ : Résistivité électrique de la charge,

H_s : La valeur efficace du champ magnétique à la surface (S) du conducteur. Si on remplace δ par son expression, on trouve

$$P_C = \rho H_s^2 \sqrt{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma} S$$

Cette formule montre que la puissance dépend du carré du champ magnétique, c'est à dire du carré de l'intensité du courant créant ce champ, de la fréquence, de la perméabilité magnétique, et de la conductivité électrique du milieu à chauffer

- **Influence des paramètres du matériau :** La formule précédente montre que cette puissance augmente avec la résistivité ρ la Perméabilité ($\mu = \mu_0 \mu_r$)et de la fréquence f .
- **Influence de la fréquence :** La fréquence f joue un rôle primordial d'autant plus que c'est un paramètre à la disposition de l'utilisateur. Nous pouvons ainsi, en choisissant bien la valeur de la fréquence entre 50 Hz et 10 MHz, faire varier la profondeur de pénétration. Nous comprenons donc que le choix de la fréquence est essentiel avant toute opération de chauffage inductif [12].

L'augmentation de la fréquence augmente la puissance transmise à la charge. Il faut cependant se rappeler que l'augmentation de la fréquence s'accompagne également d'une diminution de la profondeur de pénétration, ce qui peut conduire alors à un chauffage trop intense dans une épaisseur trop faible. Cette propriété est utilisée pour des chauffages très rapides lors des traitements thermiques superficiels [12].

➤ **Cas général :**

Dans un cas général, la densité volumique de la puissance instantanée dissipée par effet JOULE peut être exprimée, en fonction de la densité des courants induits, par l'expression suivante [12]:

$$p(t) = \frac{1}{\sigma} |J(t)|^2$$

J : est la densité instantanée des courants induits.

Ainsi, la puissance totale dissipée par effet JOULE au niveau de la pièce à chauffer sera :

$$P_{tot} = \iiint_V p(t) dV$$

dV : est l'élément de volume.

I.7. UTILISATION DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

Il y a plusieurs d'applications du chauffage par induction, parmi cette application nous mentionnons :

On trouve principalement des installations de chauffage par induction dans les domaines de la métallurgie et de la mécanique 45% pour la fusion, 45% pour le chauffage avant le formage, 10% pour le traitement thermique et les applications diverses. Cependant, grâce à l'évolution des technologies de l'électronique et à l'apparition de composants de commutation plus rapides, des applications innovantes sont apparues dans d'autre domaines : chimie (fusion directe de verres et d'oxyde...), grand public (plaque chauffante de cuisine).

- Fusion
- Réchauffage Avant Le Formage Et Forgeage
- Traitement Thermique Superficiel
- Industrie Thermique
- Plasma D'induction

On peut citer entre autres :

- Le décapage peinture.
- Les plaques de cuisson.
- La charge d'accumulateurs [14].

Chapitre I : Généralité sur les Phénomènes de Chauffage par Induction

Un autre type d'application qui tend à se développer récemment comme la fusion par induction :

- Fusion de cristal
- Fusion de verres spéciaux ou techniques,
- Fusion d'oxydes réfractaires,
- Vitrification de déchets [15].

I.9.TYPÉ DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

Type de chauffage	Fréquence	Application
Pénétrant	1Hz à quelques kHz pour les métaux. 0.1Hz à 500kHz pour les semi – conducteurs	Forge, fusion
Superficiel	10 à 500kHz pour les métaux	Trempe superficielle, brassage
Pelliculaire	10 à 1000KHz pour les métaux	Soudage des tubes, scellement thermique

Tableau I.1 : Exemples d'application du chauffage par induction

I.10.LES AVANTAGES DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

Certain nombre d'avantages intrinsèques qui expliquent son développement croissant :

- Rapidité de chauffage liée à la possibilité d'obtenir des densités de puissance très élevées.
- Localisation précise de l'effet thermique grâce à une conception d'inducteur et une fréquence de fonctionnement adaptée à la pièce à chauffer.
- Possibilité de chauffer à des températures très élevées avec un rendement pratiquement indépendant de la température.
- Facilité d'automatisation des équipements.
- Absence d'inertie thermique (démarrage rapide).
- Bonne reproductibilité des opérations effectuées.
- Rendement de chauffage souvent très élevé.
- Absence de pollution par la source de chaleur (source froide).
- Bonnes conditions de travail.

- De meilleures conditions de travail sans saleté ni fumée par rapport aux installations traditionnelles de chauffage.
- D'avoir une rentabilité beaucoup plus importante, conditionnée par une moindre perte de chaleur et d'émission(13),(14).

I.11.INCONVENIENTS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION :

- Des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances.
- Des champs électromagnétiques peuvent apparaître ce qui peut alors perturber l'environnement.
- Des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances ; des champs électromagnétiques peuvent apparaître ce qui peut alors perturber l'environnement, lorsque les isolations sont mauvaises ou bien lorsqu'une protection HF (haute fréquence). [13]

I.12.CONCLUSION :

Tout corps conducteur électrique soumis à l'influence d'un champ magnétique variable est le siège de courants induits. C'est le principe du chauffage par induction. L'induction électromagnétique a pour particularité de générer la chaleur directement à l'intérieur du matériau à chauffer. Cette particularité présente de nombreux atouts par rapport aux méthodes de chauffe plus standard, notamment la réduction des temps de chauffe et des rendements élevés, ou encore la possibilité de chauffer de façon très sélective. Le chauffage par induction permet ainsi le traitement thermique des métaux (superficiel où à cœur) et La fusion (les fours à creuset, les fours à canal).

Chapitre II :

**Formulation mathématique des
phénomènes électromagnétique et
méthodes numériques et couplage
électromagnétique thermique**

II.1 INTRODUCTION :

Pour le fonctionnement des systèmes de chauffages par induction nécessitent une connaissance des phénomènes électromagnétiques et thermiques à la fois ; qui régissent l'évolution spatio-temporelle d'un tel phénomène.

Un tel problème, fait appel à deux types d'environnement. Il s'agit de :

- L'environnement magnétique,
- L'environnement thermique.

Ces deux environnements se basent sur des équations sont :

- Les équations de J. C. MAXWELL pour l'électromagnétisme,
- L'équation de diffusion de la chaleur pour la thermique.

Les équations de base à résoudre, pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques, sont les équations de Maxwell. Nous débuterons par un rappel de ces équations et nous en extrairons les équations qui permettent le calcul des grandeurs physiques concernées en magnétodynamique.

La suite de ce chapitre va consister à exposer les différentes formulations mathématiques développées sur la base de ces équations et ce n'est que lorsque ces formulations auront été définies en détail, avec leur principale propriété, que nous présenterons leurs discrétisations afin de les résoudrez numériquement.[39] .[37]

II.2.LES MODELES MATHEMATIQUES EN ELECTROMAGNETISME :

II.2.1. Equation générale de MAXWELL :

Les phénomènes électromagnétiques qui apparaissent dans les dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de MAXWELL, des lois constitutives des matériaux. Nous les résumons comme suit [15].

- Equations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

- Lois constitutives des milieux

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H} \\ \text{Où} \end{array} \right. \quad \vec{H} = v(\vec{B}) \cdot \vec{B} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{II.6})$$

A ces équations, doit être associée la loi d'OHM généralisée

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.7})$$

II.2.2. Interprétation physique des équations électromagnétisme :

II.2.2.1.équation découplage électromagnétique :

- Loi d'induction de FARADAY : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (II.3)

Cette équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}$, mais ceci ne suffit pas pour déterminer complètement \vec{E} .

- Théorème d'AMPERE : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (II.1)

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant total (conduction + déplacement).

Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de variation spatiale du champ en fonction du taux de mouvement des charges.

II.2.2.2.Les équations de conservation :

- Divergence de l'induction magnétique : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (II.2)

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique ; c'est pourquoi

les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

- Théorème de GAUSS : $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ (II.4)

Une charge électrique est source d'un champ électrique ; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques [16].

II.2.2.3. Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques)

- Induction et champ électriques :

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité ϵ , nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{II.6}) \quad \text{Où} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r ;$$

Cette équation d'écrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} . Elle est linéaire si ϵ est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} ; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$$

La détermination de \vec{D} de l'équation (II.6) et $\operatorname{rot} \vec{E}$ de l'équation (II.3) détermine complètement \vec{E} .

- Induction et champ magnétiques : $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ avec $\mu = \mu_0 \mu_r$;

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

\vec{B}_{re} : Vecteur induction magnétique rémanente [T].

L'équation (II.5) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation $B = f(H)$.

Une variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre ; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

II.3.FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE :

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier aux siens des dispositifs électrotechniques sont régis par quatre équations aux dérivées partielles de MAXWELL et par les trois relations du milieu considéré. Nous disposerons alors du système des sept équations. Ces équations décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables ; Les équations se découpent donnant alors des modèles plus simples [15] [37] [39]

Par ailleurs, dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétodynamique sera considéré et détaillé, de fait de son adaptation à la modélisation des systèmes de chauffage par induction.

II.3.1. Modèle electrostatique :

Dans ce modèle, le champ \vec{E} est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en termes de répartition, et de valeur avec le temps. Ce modèle est régi par les équations suivantes [15] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad ; \quad \text{Car } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{II.8}) \\ (\text{II.4}) \end{array}$$

La relation : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ permet de définir une fonction auxiliaire U appelée potentiel scalaire électrique, tel que : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} U$ (II.9)

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante : $\operatorname{div}(\epsilon \vec{\nabla} U) + \rho = 0$

II.3.2. Modèle électrocinétique :

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues [15].

Il est régit par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{II.8}) \\ (\text{II.10}) \end{array}$$

La relation : $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$; implique qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire U (tension électrique), tel que : $\vec{E} = -\vec{\nabla} U$ (II.9)

Le modèle se ramène alors à : $\operatorname{div}(\sigma \vec{\nabla} U) = 0$

II.3.3. Modèle magnétostatique :

Dans ce modèle, le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ de l'équation (III.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps [37].

Dans le cas de ce modèle, deux sortes de formes, peuvent l'exprimer. Il s'agit de :

II.3.3.1. Le Modèle Magnétostatique scalaire :

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. D'après les équations (II.1) et (II.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \text{ Courants nuls} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ Induction conservative} \end{array} \right.$$

Avec la loi du milieu, $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

\vec{H} Dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{div} \vec{B}_{re}$$

II.3.3.2 Le Modèle Magnétostatique vectoriel :

Dans le modèle magnétostatique vectoriel, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

Avec la loi du milieu : $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

La relation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, permet de définir une fonction vectoriel \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique [39], tel que :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (\text{II.8})$$

D'où le système d'équations :

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}\right) = \vec{J} + \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_{re}\right)$$

II.3.4. Modèle magnétodynamique :

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources du courant ou tension sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT) [15] [37].

Le potentiel vecteur \vec{A} joue un rôle primordial, où la connaissance de \vec{A} implique la connaissance de tous les autres grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{II.8})$$

En termes d'équations, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

A ces équations, nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite ou implicite de l'espace et du temps.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs, ... etc.

II.4. FORMULATIONS DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE :

Une formulation de potentiel vecteur magnétique : les raisons de ce choix pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles. Les formulations en potentiels en particulier, sont toute fois mieux adaptées aux éléments finis.

Par ailleurs, dans le cadre du chauffage par induction, les avantages présentés par ce type de formulation sont nombreux :

- Elle permet d'imposer des sources électriques proches des procédés réels (densités de courant – différences de potentiels).
- La réaction d'induit est directement prise en compte,
- La grandeur utile pour le chauffage, à savoir, la densité de puissance induite, est directement liée à la variable d'état, bénéficiant ainsi d'un maximum sur la précision.

En se basant sur les équations de J. C. MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale- temporelle des phénomènes électromagnétiques. [39] [37].

Nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Avec : } \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{II.8})$$

On obtient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ Est un champ conservatif, il dérive donc d'un potentiel scalaire électrique U , tel

Que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U\right) \quad (\text{II.9})$$

A partir de l'équation (III.1) et de l'équation (III.5) nous avons :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) = \vec{J}$$

A partir des équations (III.7), (III.8), et (III.9) nous avons :

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}}\vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}}\vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} - \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}U \right) + \sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}}\vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\text{grad}}U - \sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$; on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.).

On ajoute alors la condition $\text{div } \vec{A} = 0$; appelée Jauge de COULOMB [15]. Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}}\vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\text{grad}}U - \sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}} \quad (\text{II.10}) \\ \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

Les termes $-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma (\vec{\vartheta} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{A})$ représentent les densités des courants induits.

Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme $(-\sigma \vec{\text{grad}}U)$ décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs. U peut être considéré comme nul [38]. Nous n'observons que la relation (II.10) définissant une équation locale qui devra être systématiquement adaptée à la région à laquelle s'applique.

Enfin, la définition complète du problème magnétodynamique doit prendre en compte les conditions aux limites du type :

-DIRICHLET dans son cas général : $A = A_0$

-NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Dans le cas où la pièce à chauffer est immobile par rapport à l'inducteur et U est considérée uniformément nulle, l'équation **(II.10)** devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{ex}} \\ \text{div } \mathbf{A} = 0 \end{array} \right. ; \quad \nu = \frac{1}{\mu} : \text{réflectivité magnétique}$$

(II.11)

➤ Cas de dispositifs alimentés en courant harmonique

On suppose que la perméabilité μ ne dépend pas de l'induction magnétique ; si les courants d'excitation sont de nature alternative, on peut utiliser une représentation de FRESNEL pour modéliser leur variation temporelle.

L'utilisation des nombres complexes permet alors de remplacer le terme :

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ Par } i\omega \sigma \mathbf{A}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Avec i : Unité imaginaire ($i^2 = -1$),

ω : Pulsation des sources [rd/s].

D'où l'équation (III.11) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}) + i\omega \sigma \mathbf{A} = \mathbf{J}_{\text{ex}} \\ \text{div } \mathbf{A} = 0 \end{array} \right.$$

➤ Cas de dispositifs alimentés en courant transitoire

Dans le cas d'une alimentation en courant transitoire, le traitement du système d'équations caractéristiques, nécessite une discrétisation en pas à pas dans le temps (échantillonnage temporel).

Si un algorithme du type EULER explicite est adopté, nous aurons : à chaque pas de temps Δt_i

[17] :

$$J_i = \frac{J_i - J_{i-1}}{\Delta t_i}$$

Ainsi :

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta t_i}$$

L'expression de la dérivée ($\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$) doit être alors remplacée dans le système d'équation (II.11)

et, les calculs auront être effectués à chaque pas du temps (Δt_i).

Environnement thermique

II.5.MODES DE TRANSMISSION DE CHALEUR :

Le transfert d'énergie aura lieu à chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système, ou, lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact [18].

Le transfert de chaleur reconnaît généralement trois modes de transmission de la chaleur. Il s'agit de la transmission par conduction, convection et rayonnement [18]. Ces modes de transfert de la chaleur peuvent être présents, dans un procédé, d'une manière séparée, combinée deux à deux ou ensemble à la fois.

❖ Conduction

La conduction est un phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu (solide, liquide ou gazeux) d'une région à haute température vers une autre à basse température ; ou entre différents milieux mis en contact.

❖ Convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu.

En effet, la convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz, donc un fluide dans le cas le plus général.

❖ Rayonnement

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmis d'un corps à haute température vers un autre à basse température, lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou même lorsqu'un vide les sépare.

II.6. NOTIONS FONDAMENTALES DE CONDUCTION THERMIQUE :

II.6.1.Le régime non stationnaire (dynamique) :

Les transferts de chaleur évoluaient au cours du temps, de telle sorte que les températures, les flux et, bien entendu, les propriétés thermiques seraient variables pendant un temps suffisamment long [18][19]

II.6.2.La température :

Si la température reste bien définie en tout point M (repéré par ses coordonnées spatiales (x, y, z)), cette température va évoluer avec le temps de sorte qu'à l' instant t , la température en ce point M est [11] :

$$T_M = f(x, y, z, t) = T(x, y, z, t)$$

Il existe un gradient de température qui fait intervenir les dérivées spatiales de cette fonction température, tel que, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

Où \vec{i}, \vec{j} , et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes de coordonnées cartésiennes.

II.6.3.La Conductivité thermique :

La conductivité thermique des divers matériaux employés dans l'industrie varie d'une manière très sensible d'une substance à une autre [18].

Ainsi k exprimée en [Kcal/(h.m. $^{\circ}$ C)] est de l'ordre de 6×10^{-3} pour les gaz à la pression atmosphérique, de 1.5×10^{-1} pour les liquides et atteint la valeur de 3.5×10^2 pour le cuivre pur.

Les matériaux ayant une conductivité thermique élevée sont appelés les conducteurs tandis que, les matériaux de faible conductivité se rapportent aux isolants thermiques.

En général, la conductivité thermique varie avec la température.(Annexe A)

II.7.LES LOIS FONDAMENTALES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR :

On donnera un aperçu préliminaire des équations fondamentales relatives à chacun des trois modes de transmission de la chaleur.

II.7.1.Quantité de chaleur transmise par rayonnement :

La quantité d'énergie quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de cette surface [18].

L'énergie Q_r rayonnée par unité de temps, par une surface d'un corps noir au radiateur intégral est donnée par :

$$Q_r = \beta \cdot A_r \cdot T_i^4 \quad [\text{Kcal /h}] \quad (\text{II.13})$$

Où :

L'examen de l'équation (II.13) montre que la quantité de chaleur transmise par rayonnement, à partir d'un corps noir, dont la surface est portée à une température supérieure à zéro absolu, est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

La quantité de chaleur effective transmise d'un corps gris (émettent une intensité de rayonnement plus faible que celle des corps noirs) à la température T_1 à un corps noir à T_2 entourant le premier est :

$$Q_r = \beta \cdot A \cdot \varepsilon \cdot (T_i^4 - T_2^4) \quad (\text{II.14})$$

Où ε est le facteur d'émission de la surface grise, égale au rapport de l'intensité rayonnée par le corps gris à celle émise par le corps noir à la même température.

II.7.2. Flux de chaleur transmis par convection :

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation suivante (loi de NEWTON) [18] :

$$Q_c = h_c \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{II.15})$$

La valeur numérique de h_c , dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse, et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température ΔT .

II.7.3. Densité de flux de chaleur : flux de chaleur :

Il est possible de définir une vectrice densité de flux de chaleur en chaque point du corps étudié, qui est la quantité de chaleur (flux de chaleur) par unité de surface, et possède les unités W/m^2 , c'est la loi de FOURIER. Ce vecteur est proportionnel au gradient de la température T , et orienté dans le sens opposé au gradient de la température [18][19] :

$$\vec{q} = -k \vec{\text{grad}}T \quad (\text{II.16})$$

Ce vecteur est maintenant fonction du temps et varie en général avec celui-ci. La conductivité thermique du matériau n'est pas une constante, mais, une fonction de la température pour toutes les phases. Elle dépend de la pression aussi pour les liquides que pour les gaz [19].

Comme le deuxième principe de la thermodynamique [18] implique, nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc positif lorsque le gradient de température est négatif.

Le vecteur \vec{q} permet d'évaluer le flux de chaleur à travers une surface (S) quelconque par la relation suivante [20] :

$$\phi = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{II.17})$$

Où pour une surface élémentaire :

$$\delta\phi = \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{II.18})$$

Où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à (S) en tout point M, centre d'un élément de surface dS . Bien entendu, ce flux de chaleur ϕ ou $\delta\phi$ est lui-même fonction du temps et varie au fur et à mesure que le phénomène qui provoque ce transfert est en évolution.

II.8.EQUATION DE LA THERMIQUE :

Pour un fluide compressible, ou pour un solide, ou dans le cas d'un gaz compressible, on négligeant l'échauffement provoqué par la dissipation visqueuse, l'équation générale de propagation de la chaleur fondée sur l'enthalpie h s'écrit [21][22] :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP_r}{dt} - \operatorname{div}(\vec{q}) + P_s - q_r \quad (\text{II.19})$$

Tels que :

$$\text{Comme } \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T \frac{dP_r}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} \frac{dT}{dt}$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} = c_p \quad \text{c'est la capacité calorifique à pression constante [J/(Kg°K)]},$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta \cdot T)$$

ρ : désigne la masse volumique

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) : \text{c'est la constante de STEPHAN-BOLTZMANN}$$

L'équation (II.19) peut s'écrire :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta T \frac{dP_r}{dt} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + P_s + q_r \quad (\text{II.20})$$

Avec :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \vec{\text{grad}}T$$

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \vec{\text{grad}}P_r$$

L'équation (II.20) peut s'écrire alors de la manière suivante :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \vec{\text{grad}}T \right) = \beta T \left(\frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \vec{\text{grad}}P_r \right) + \text{div}(k \vec{\text{grad}}T) + P_s + q_r \quad (\text{II.21})$$

Dans le cas où le transfert de chaleur serait purement conductivité, ce qui est le cas dans le chauffage par induction, en négligeant la chaleur rayonnée, l'équation (II.21) prenne la forme :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \vec{\text{grad}}T \right) = \text{div}(k \vec{\text{grad}}T) + P_s \quad (\text{II.22})$$

Le champ de température T doit vérifier le modèle classique de diffusion de la chaleur suivant l'équation

A cette dernière relation, doivent être associées, les conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

- Condition de DIRICHLET dans son cas général : T connue sur la frontière,
- Condition de NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$, (pas d'échange avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie),
- Condition de FOURIER : $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = q_0$, (le flux de chaleur échangé est connu),
- Condition de NEWTON : $q = h_c(T_s - T_a)$, (cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante),
- $q = \epsilon \beta (T_s^4 - T_a^4)$ (cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_a , où ϵ , β , T_s et T_a désignent respectivement, l'émissivité du corps, la constante de STEPHAN-BOLTZMANN ($\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$), les températures absolues de la surface rayonnante et celle du milieu ambiant).

II.9.LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN THERMIQUE :

Une grande partie de problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas du problème des systèmes sur lesquels nous appliquerons notre modèle de couplage proposé.

Rappelons brièvement l'existence des deux types de systèmes bidimensionnels : ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (oz), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction ($o\varphi$).

Dans le premier cas, le champ électrique \vec{E} n'a qu'une composante suivant la direction infiniment longue (oz). Le champ magnétique, \vec{B} quant à lui, présente deux composantes suivant (or) et ($o\varphi$) dans le plan perpendiculaire à \vec{J}_{ex} (densité des courants sources), impliquant ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz).

Dans le deuxième cas, les courants \vec{J}_{ex} , sont dirigés suivant l'angle φ du système de coordonnées cylindriques (r, φ, z), le champ magnétique possède alors deux composantes, l'une suivant la direction (or), et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel une seule composante A_φ (désignée par la suite A). Ainsi, les dispositifs de chauffage par induction comportent généralement une symétrie de révolution qui préconise l'utilisation des coordonnées cylindriques axisymétriques. Lorsque les pièces à chauffer présentent une telle symétrie, il arrive fréquemment que le procédé de chauffage consiste à faire tourner la pièce dans un inducteur, de façon à homogénéiser le champ de température sur tout le pourtour.

Dans une telle configuration, l'hypothèse d'une modélisation axisymétrique est séduisante, puisqu'elle suppose que l'inconnue est invariante par rotation et prendre donc en compte, implicitement, l'hypothèse d'homogénéité de la température due à la rotation.

➤ Problème électromagnétique

Rappelons l'équation magnétodynamique (II.11), dans le cas où la pièce à chauffer serait immobile par rapport à l'inducteur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\text{vrot}\vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex} \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (0φ) , il s'agit de la composante azimutale (A_φ) du vecteur \vec{A} . Dans une telle configuration, les courants sont perpendiculaires au plan d'étude, (r, z) .

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \cdot 0 \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Remplaçant la grandeur $rA_\varphi = rA$ par la grandeur A^* l'équation électromagnétique (II.11), prenne la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A^*}{\partial t} = -J_{ex} \quad (\text{II.23})$$

$A^* = A^*(r, z, t)$, est le potentiel vecteur magnétique modifié.

C'est une équation aux dérivées partielles, décrivant le comportement d'un dispositif cylindrique axisymétrique. Sous l'hypothèse que les matériaux sont linéaires, et que les sources d'alimentation sont sinusoïdales, les formulations magnétodynamiques peuvent être résolues en utilisant la notation complexe, permettant ainsi la prise en compte du terme dérivée $\frac{\partial A^*}{\partial t}$ et

son remplacement par l'expression $i\omega A^*$, d'où l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i\omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex} \\ A^* = rA_\varphi \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

➤ **Problème thermique :**

Rappelons le modèle classique de diffusion de la chaleur par conduction (**II.22**), avec une vitesse de la pièce nulle ($\dot{\vartheta} = 0$),

$$\operatorname{div}(k \vec{\operatorname{grad}}T) + P_s = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

La température, indépendante de la variable d'espace (φ), autorise une étude dans le plan de symétrie (r, z) du dispositif.

$$\vec{\operatorname{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{Et } \operatorname{div}(k \vec{\operatorname{grad}}T) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (rk \frac{\partial T}{\partial z}) \right)$$

L'équation de la conduction (**II.22**) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P_s = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.25})$$

Avec $T = T(r, z, t)$.

II.10. DEFERENTES TECHNIQUE DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES :

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'application très difficile dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques [22] [23].

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles-ci font appel à des techniques de discréétisation.

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue

en différant points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discréétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,...etc.

II.10.1Méthodes des différences finies (MDF) [22][24] [25] [37].

II.10.2Méthodes des éléments finis (MEF)[21][17][22] [37].

II.10.3.Méthodes des intégrales de frontières (MIF)[22] [37]..

II.10.4Méthodes des circuits couples (MCC)[26], [22] [37]..

II.10.5.Méthodes des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit à partir de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies).

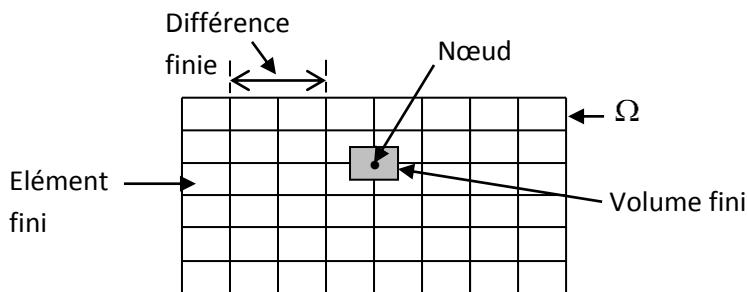


Figure II.1. Maillage du domaine d'étude.

L'EDP est intégrée sur chacun des volumes élémentaires

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discréétisée dans le domaine d'étude [26], [22], [27]. [37]. [39].

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

Exemple Illustratif :

Considérons l'équation de conduction, en régime permanent (stationnaire), mono dimensionnel :

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + P_s = 0 \quad (\text{II.26})$$

Pour discréteriser cette équation, le domaine d'étude est subdivisé en un nombre finis de nœuds. Ce domaine est ensuite divisé en éléments de volume dont chacun contient un nœud, comme il est indiqué sur la figure ci-dessous.

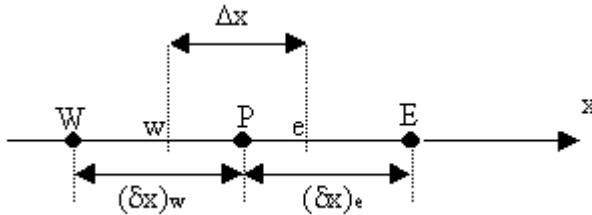


Figure II.2. Discréterisation en volumes finis dans le cas monodimensionnel.

Les lignes en tirés représentent les interfaces entre les éléments. Pour le problème à une dimension, on suppose une épaisseur unité suivant la direction (oy) et (oz).

Ainsi, le volume d'un élément est $\Delta x \times 1 \times 1$. Si on intègre l'équation (II.26) sur l'élément de volume correspondant au nœud P, on obtient :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e P_s dx = 0$$

Soit :

$$(k \frac{dT}{dx})_e - (k \frac{dT}{dx})_w + \int_w^e P_s dx = 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec l'approximation d'une variation linéaire de T entre deux nœuds voisins, l'équation (II.27) s'écrit :

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{(delta x)_e} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{(delta x)_w} + \bar{P}_s \Delta x = 0 \quad (\text{II.28})$$

Où \bar{P}_s est la valeur moyenne de P_s dans l'élément de volume. k_e La conductivité thermique à l'interface (e).

On met l'équation (II.28) sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_w T_W + b$$

Où

$$a_e = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, a_p = a_e + a_w \text{ et } b = \bar{P}_s \Delta x$$

Si la discréétisation du domaine comporte N nœuds, on est alors ramené à un système de N équations à N inconnues. Il s'agit des valeurs nodales de T.

II.11. METHODES DES VOLUMES FINIS (MVF) :

La méthode des volumes finis utilisée pour la résolution des deux équations aux dérivées partielles, Ainsi nous proposons de décrire les modèles numériques optés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction Après les formulations électromagnétiques et thermiques d'un système de chauffage par induction, les modèles du couplage électromagnétique thermique et nous proposons notre propre modèle basé sur la technique de la para métrisation, Il importe, en électromagnétisme, de tenir compte des variations des propriétés physiques en fonction de la température, parmi lesquelles nous citerons :

- La réflectivité magnétique relative,
- La résistivité électrique.

En thermique, on doit tenir compte des variations de la capacité calorifique et de la conductivité thermique en fonction de la température. Ainsi que Les méthodes de résolutions des systèmes algébriques seront aussi présentées.

II.12. RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE ET DE LA THERMIQUE PAR LA METHODES DES VOLUMES FINIS :

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Sa mise en œuvre, par contre est assez compliquée.

Nous avons donc opté pour la méthode des volumes finis (MVF) qui, selon plusieurs auteurs [22], [27] donne de meilleures convergences pour les équations de conduction avec un terme de vitesse.

De plus, elle est moins difficile à réaliser est simple à concevoir que la méthode des éléments finis (MEF).

La méthode des volumes finis à connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique :

transfert thermiques, électromagnétisme...etc. L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis à récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discréétisation performante.

La méthode des volumes finis peut être vue comme étant une variante de la méthode de collocation par sous-domaines [22]. Le domaine d'étude (Ω) est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage (**Figure II.3**). L'équation au dérivé partielle (EDP) est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle...) entre deux nœuds consécutifs.

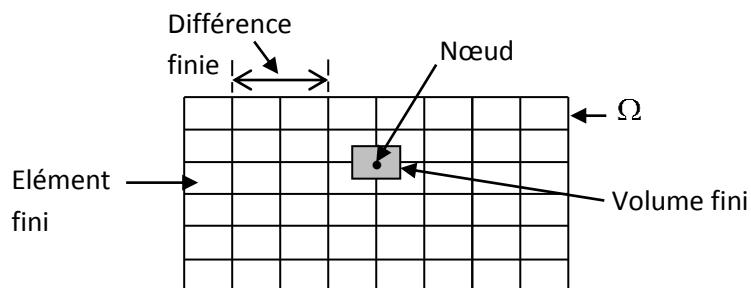


Figure II.3. Maillage du domaine d'étude.

❖ Description d'un volume fini

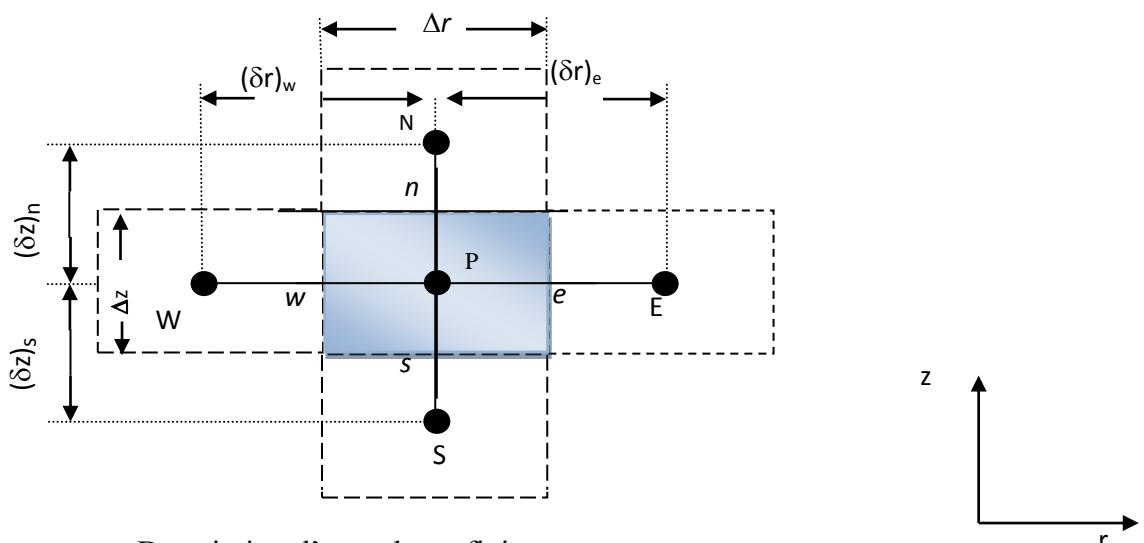


Figure II.4. Description d'un volume fini.

Chaque nœud principal P est entouré par quatre nœuds voisins : celui du nord N, du sud S,

de l'est E et celui de l'ouest W. Le volume fini est délimité par les points (e : est, w : ouest, n : nord, s : sud) [27].

II.12.1.Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régimes harmonique :

Rappelons l'équation magnétodynamique linéaire, en régime harmonique :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex}$$

La projection de cette équation aux dérivées partielles sur une base de fonctions de projection β_i , et son intégration sur le volume fini, correspondant au nœud P, donne :

$$\iint_{zr} \beta_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] r dr dz = \iint_{zr} \beta_i \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] r dr dz \quad (\text{II.29})$$

β_i est la fonction de projection choisie égale à $1/r$

Rappelons que pour la méthode des éléments finis, $\beta_i = \alpha_i / r$, α_i est la fonction d'interpolation dans le cas de la méthode projective de GALERKINE.

Après substitution de l'expression de β_i , L'équation (IV.1), prenne la forme suivante :

$$\iint_{zr} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_{zr} \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz \quad (\text{II.30})$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (IV.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) dr dz + \iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) dr dz \quad (\text{IV.3})$$

Après intégration nous aurons :

$$\left[\left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_n - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_s \right] \Delta r + \left[\left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z$$

Avec :

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}, \quad r_w = r_p - \frac{\Delta r}{2}, \quad \Delta r = r_e - r_w$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, \quad z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2}, \quad \Delta z = z_n - z_s.$$

Un profil linéaire a été choisi exprimant la variation de A^* entre les nœuds voisins.

Le résultat obtenu est constitué uniquement de valeurs nodales. Ainsi, on obtient :

$$\left[\frac{v_n}{r_n} \frac{(A_N^* - A_P^*)}{(\delta z)_n} - \frac{v_s}{r_s} \frac{(A_P^* - A_S^*)}{(\delta z)_s} \right] \Delta r + \left[\frac{v_e}{r_e} \frac{(A_E^* - A_P^*)}{(\delta r)_e} - \frac{v_w}{r_w} \frac{(A_P^* - A_W^*)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z \\ = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} A_N^* + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} A_S^* + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} A_E^* + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} A_W^* - \left(\frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \right) A_P^*$$

Posons :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Rightarrow b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_P^* \quad (\text{II.31})$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation (IV.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\iint_{sw}^{ne} [i\omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex}] dr dz = i\omega \sigma_p (\ln r)_w^e \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ = i\omega \sigma_p (\ln r_e - \ln r_w) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

$$= i\omega \sigma_p \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ = i\omega \sigma_p \ln \left(\frac{(r_p + \frac{\Delta r}{2})}{(r_p - \frac{\Delta r}{2})} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ = i\omega \sigma_p \ln \left(\frac{r_p (1 + \frac{\Delta r}{2r_p})}{r_p (1 - \frac{\Delta r}{2r_p})} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ = i\omega \sigma_p \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_p} \right) - \ln \left(1 + \left(-\frac{\Delta r}{2r_p} \right) \right) \right] \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

or, le développement de la fonction $\ln(1+x)$ est donnée par : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{sw}^{ne} [i\omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex}] dr dz &= i\omega \sigma_p \left[\frac{\Delta r}{2r_p} - (-\frac{\Delta r}{2r_p}) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

La substitution des deux expressions trouvées (II.30), (II.31) dans l'équation (II.32) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_p^* &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ \Rightarrow \left(b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z \right) A_p^* &= b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n(\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s(\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e(\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w(\delta r)_w} \\ b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit alors sous la forme :

$$b_p A_p^* = b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + d_p \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n(\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s(\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e(\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w(\delta r)_w} \\ b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Si la discréétisation du domaine comporte N noeuds, on est amené à étudier un système de N équations à N inconnues.

La forme matricielle de ce système d'équation s'écrit sous la forme :

$$[M+iL]\{A^*\} = \{F\}$$

Où :

$[M+iL]$: Matrice coefficients,

$\{A^*\}$: Vecteur inconnu,

$\{F\}$: Vecteur source.

❖ **Conditions aux limites**

Dans l'étude précédente, nous avons établi les équations des nœuds internes. Pour les limites du domaine d'étude, il existe deux façons d'introduire les conditions aux limites :

- Condition de DIRICHLET : cette condition impose les valeurs de A aux bords du domaine d'étude. Ces valeurs sont prises nulles par la considération de l'infini physique.
- Condition mixte de DIRICHLET-NEUMANN : elles sont utilisées dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie. Le problème mixte de DIRICHLET-NEUMANN impose les valeurs de A nulles aux bords infinies du domaine d'étude (Ω) et celles de $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ au niveau des plans de symétrie (plans de coupes) où n représente la normale au plan de coupe.

❖ **Difficultés liées aux conditions aux limites**

Ce problème se pose essentiellement lors de la définition du domaine d'étude de l'équation électromagnétique.

Mathématiquement, ce domaine est infini puisque tout point de l'espace subit l'influence d'une distribution de courant située dans celui-ci.

Le fait d'imposer des frontières finies pour fermer ce domaine et d'annuler la valeur du potentiel ou du flux sur celles-ci, peut fortement influencer la résolution.

Le test le plus couramment consiste à faire un premier calcul en annulant la valeur du potentiel A sur les frontières de fermeture (conditions de DIRICHLET), puis d'effectuer un second calcul en annulant la valeur du potentiel vecteur magnétique sur ces frontières (condition de NEUMANN homogène).

Si les résultats de ces deux résolutions sont identiques, le domaine d'étude choisi est bien correct.

II.12.2. Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur :

Rappelons l'équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire (non-stationnaire) :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + P_s$$

Pour résoudre cette équation, nous appliquons la méthode des volumes finis.

On intègre cette équation dans le temps et dans l'espace, sur le volume fini, correspondant au nœud P, et délimité par les frontières (e, w, s, n), ((voir figure II.4)), description d'un volume fini, décrite précédemment).

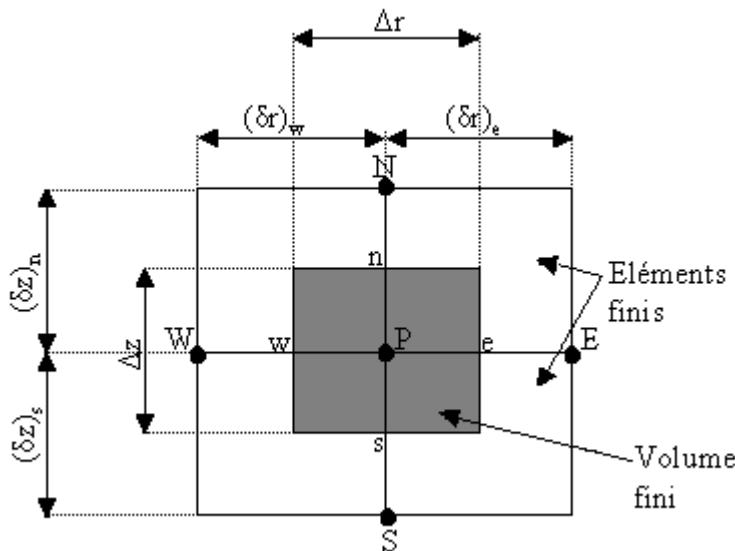


Figure II.4. Description d'un volume fini.

$$\int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt +$$

$$\int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} P_s r dr dz dt$$

Soit :

$$A = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt$$

$$B = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt$$

$$C = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt$$

$$D = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{w}^{e} P_s r dr dz dt$$

$P_s(T)$: est la source de chaleur, fonction de la température T .

Nous intégrons chaque terme (A, B, C, D) dans l'espace :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z)_s^n \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right)_w^e \frac{\partial T}{\partial t} dt \\
 &= \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt \\
 B &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w^e (z)_s^n dt \\
 &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) (z_n - z_s) dt \\
 C &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s^n \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right)_w^e dt \\
 &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) dt \\
 D &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^n \int_w^e P_s r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right)_w^e (z)_s^n dt \\
 &= \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) (z_n - z_s) dt
 \end{aligned}$$

Avec :

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}, r_w = r_p - \frac{\Delta r}{2} \Rightarrow \frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} = r_p \Delta r$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

Avec un profil linéaire, choisi, exprimant ainsi la variation spatiale de la température (T) entre les noeuds voisins. Les termes (A, B, C, D) prennent les formes suivantes :

Terme A :

$$A = \rho c_p r_p \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Terme B :

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_E - T_p)}{(\delta r)_e} - r_w k_w \frac{(T_p - T_w)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) T_w - \left(\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) \right) T_p \right] dt \end{aligned}$$

Posons :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}, \quad a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

Ainsi :

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[a_e T_E + a_w T_w - (a_e + a_w) T_p \right] dt$$

Terme C :

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_N - T_p)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_p - T_s)}{(\delta z)_s} \right] r_p \Delta r dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s} \right) T_s - \left(\left(\frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s} \right) \right) T_p \right] dt \end{aligned}$$

Posons :

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}, \quad a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

Ainsi :

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[a_n T_N + a_s T_s - (a_n + a_s) T_p \right] dt$$

Terme D :

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \Delta r \Delta z dt$$

L'intégration des termes (A, D) dans le temps donne :

Terme A :

$$A = \rho c_p r_p \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt =$$

$$= \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_p - T_p^0)$$

T_p^0 : La température au pas précédent à l'instant $t = t_0$

Terme D :

$$D = P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t$$

Pour l'intégration des termes (B, C) dans le temps, nous appliquons la formule suivante [27] :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} T_p dt = \left[f T_p + (1-f) T_p^0 \right] \Delta t \quad (\text{II.34})$$

Avec :

Δt : Le pas de temps adopté pour la discréétisation temporelle,

f : Le facteur appartenant à l'intervalle $[0,1]$,

T_p^0 : La température au pas de temps précédent à l'instant $t = t_0$

Les termes (B, C) deviennent :

Terme B :

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} [a_e T_E + a_w T_W - (a_e + a_w) T_p] dt$$

$$= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t - (a_e + a_w) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t$$

Terme C :

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} [a_n T_N + a_s T_S - (a_n + a_s) T_P] dt$$

$$= a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - (a_n + a_s) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t$$

D'où l'équation discrète prenne alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_P - T_P^0) &= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t + \\ &\quad a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - \\ &\quad (a_e + a_w + a_n + a_s) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

Pour la simplicité et les satisfactions physiques, une formulation implicitement de l'équation discrète précédente est nécessaire, le facteur f prenne alors la valeur 1 ($f=1$) [27], ainsi l'équation précédente devient :

$$\rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_P - T_P^0) = a_e T_E \Delta t + a_w T_W \Delta t + a_n T_N \Delta t + a_s T_S \Delta t - (a_e + a_w + a_n + a_s) T_P \Delta t +$$

$$P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t$$

$$\Rightarrow [\rho c_p r_p \Delta r \Delta z + (a_e + a_w + a_n + a_s) \Delta t] T_P = [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t +$$

$$\rho c_p r_p \Delta r \Delta z T_P^0$$

La division par le pas de temps Δt , nous permettons d'écrire :

$$\left[\frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} + (a_e + a_w + a_n + a_s) \right] T_P = [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] + P_s r_p \Delta r \Delta z +$$

$$\frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} T_P^0$$

Posons :

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0$$

Ainsi, l'équation algébrique finale peut être écrite sous une forme, et où seules les valeurs nodales apparaissent, son expression, sous forme condensée est donnée par :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_w T_w + a_n T_N + a_s T_s + b \quad (\text{II.35})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0$$

De la même manière que dans le cas électromagnétique, si la discréttisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à résoudre un système de N équations, à N inconnues.

❖ Conductivité thermique à l'interface :

Considérons l'interface (e) entre deux nœuds P et E de la (Figure II.5)

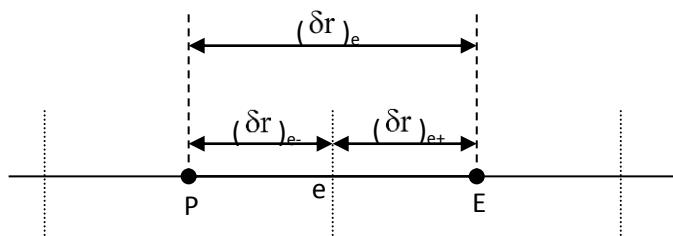


Figure II.5. Interface entre deux éléments d'un volume fini.

Si on suppose une variation linéaire de la conductivité thermique en fonction de la température $k(T)$, entre les nœuds P et E [22], [27], on peut écrire :

$$k_e = \beta_e k_E + (1 - \beta_e) k_P \quad (\text{II.36})$$

Où le facteur d'interpolation β_e est donné par le rapport :

$$\beta_e = \frac{(\delta r)_{e-}}{(\delta r)_e} \quad (\text{II.37})$$

Si $(\delta r)_{e-} = (\delta r)_{e+}$, cas d'un maillage régulier il vient alors que $\beta_e = 0,5$, ainsi, k_e sera la moyenne arithmétique de k_E et k_P , ce qui n'est pas correcte si on est dans une région où la conductivité thermique est fortement variable en fonction de la température. Dans ces conditions cette approximation peut conduire à une mauvaise estimation du flux de chaleur sur cette interface [18] :

$$q_e = -\frac{k_e(T_E - T_P)}{(\delta r)_e} \quad (\text{II.38})$$

Il existe une autre approche plus correcte, pour évaluer la conductivité thermique à l'interface. Cette approche consiste à considérer les deux éléments de volume adjacents comme deux matériaux de conductivités thermiques différentes.

Une analyse à une dimension, sans terme source, conduit à l'expression suivante :

$$q_e = -\frac{(T_E - T_P)}{\frac{(\delta r)_{e-}}{k_P} + \frac{(\delta r)_{e+}}{k_E}} \quad (\text{II.39})$$

La combinaison des équations (IV.9), (IV.10) et (IV.11) donne :

$$k_e = \left(\frac{\beta_e}{k_P} + \frac{1 - \beta_e}{k_E} \right)^{-1}$$

Dans le cas où l'interface (e) serait placé au milieu entre P et E, c'est à dire $\beta_e = 0,5$, nous avons :

$$k_e^{-1} = 0,5 (k_P^{-1} + k_E^{-1}) \text{ D'où } k_e = \frac{2 k_P k_E}{k_P + k_E}$$

De la même manière, et par analogie, nous déduisons pour les autres coefficients : k_e, k_w, k_n, k_s

$$k_e = \frac{2 k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (\text{II.40})$$

$$k_w = \frac{2 k_P k_w}{k_P + k_w} \quad (\text{II.41})$$

$$k_n = \frac{2 k_p k_n}{k_p + k_n} \quad (\text{II.42})$$

$$k_s = \frac{2 k_p k_s}{k_p + k_s} \quad (\text{II.43})$$

❖ Conditions aux limites

L'équation de diffusion de la chaleur, doit être associée aux conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

- Condition de DIRICHLET : la température T est connue sur la frontière.
- Condition de NEUMANN homogène : $k(\frac{\partial T}{\partial n})_s = 0$ (valable dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie)
- Condition de FOURIER : $q = -k(\frac{\partial T}{\partial n})_s$, (valable dans le cas où le flux de chaleur échangé est connu)
- Condition de NEWTON : $q = h_c(T - T_{\text{amb}})$ (valable dans le cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante T_{amb})
- $q = \varepsilon \beta (T^4 - T_{\text{amb}}^4)$, (valable dans le cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_{amb} où h_c , ε et β désignent, respectivement, le coefficient de convection, l'émissivité du corps et la constante de STEPHAN-BOLTZMAN $\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^2 \text{ K}^4$).

❖ L'équation discrète aux points limite

Si la température T est connue sur la frontière, c'est la condition de DIRICHLET (à titre d'exemple la valeur de T_p est connue, voir Figure (II.6), nous n'avons pas besoin d'une équation discrète en ce point (P)).

Nous devrons formuler l'équation discrète aux points limites quand la température en ces points est bien entendue inconnue

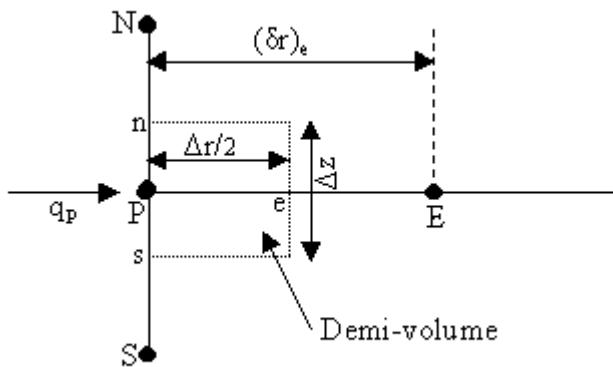


Figure II.6. Demi-volume à côté des nœuds limites.

Pour trouver l'équation discrète au point (P), nous devons intégrer l'équation de diffusion de la chaleur (III.25) sur le demi-volume $\frac{\Delta V}{2}$ de la figure IV.4. Ainsi :

$$\int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{P}^{e} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{P}^{e} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{P}^{e} \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt + \int_{t}^{(t+\Delta t)} \int_{s}^{n} \int_{P}^{e} P_s r dr dz dt$$

Avec :

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}$$

Après intégration, dans l'espace nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_{t}^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e \frac{\partial T}{\partial t} dt &= \int_{t}^{(t+\Delta t)} \left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) (z_n - z_s) dt + \\ \int_{t}^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e dt + \\ \int_{t}^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e (z_n - z_s) dt \end{aligned}$$

Avec :

$$(z_n - z_s) = \Delta z$$

$$\left(\frac{r^2}{2}\right)_P^e = \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_p^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(r_p + \frac{\Delta r}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{r_p^2}{2}\right)$$

$$= r_p \frac{\Delta r}{2} + \frac{\Delta r^2}{8}$$

$$\approx r_p \frac{\Delta r}{2}$$

Puisque $\frac{\Delta r^2}{8}$ est négligeable devant les autres termes, [25].

Nous aurons, alors :

$$\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) \Delta z dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) r_p \frac{\Delta r}{2} dt + \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt$$

Avec :

$$q_p = -k_p \frac{\delta T}{\delta r} \quad (\text{Flux de chaleur échangé, connu (condition de FOURIER).})$$

Avec un profil linéaire exprimant la variation de la température T entre les nœuds voisins, nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_e - T_p)}{(\delta r)_e} + r_p q_p \right] \Delta z dt + \\ &\quad \int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_n - T_p)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_p - T_s)}{(\delta z)_s} \right] r_p \frac{\Delta r}{2} dt + \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt \end{aligned}$$

Après intégration, dans le temps, et une formulation implicite de l'équation discrète précédente, nous aurons :

$$\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \left(T_p - T_p^0 \right) = \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_s -$$

$$\left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p +$$

$$r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t$$

Soit les notations suivantes :

$$A_1 = \left[\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p$$

$$A_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_s$$

$$A_3 = r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t + \rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z T_p^0$$

D'où :

$$\Rightarrow A_1 = A_2 + A_3$$

La division de chaque terme (A_1 , A_2 , A_3) par le pas de temps Δt , donne :

$$B_1 = B_2 + B_3$$

Tel que :

$$B_1 = \left[\frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} + \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_s} \right) \right] T_p$$

$$B_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_e + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_n} \right) T_n + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_s} \right) T_s$$

$$B_3 = r_p \Delta z q_p + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} T_p^0$$

Posons :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0 + r_p \Delta z q_p$$

Ainsi, l'équation algébrique prend alors la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{II.44})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0 + r_p \Delta z q_p$$

❖ **Condition de NEUMANN :**

En annulant, la valeur du flux de chaleur q_p , dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur notamment sur les axes de symétrie (condition de NEUMANN homogène : $k \frac{\partial T}{\partial n} = 0$).

Dans ce cas l'équation algébrique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{II.45})$$

où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{op} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{op}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{op} T_p^0$$

❖ **Condition de NEUTON :**

Dans le cas où il y a échangé avec l'extérieur, le flux de chaleur q_p , échangé par convection libre avec une zone de température ambiante (T_{amb}) est spécifié en terme de coefficient d'échange h_c (coefficient de convection) et de la température ambiante.

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb})$$

Après substitution de l'expression de q_p dans l'équation (IV.16), nous obtenons l'équation algébrique discrète suivante :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_n T_n + a_s T_s + b \quad (\text{II.46})$$

où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0P} - r_p \Delta z h_c$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0 - r_p \Delta z h_c T_{amb}$$

Remarque

Dans le cas où la charge à chauffer est pleine et lorsque la fréquence de travail est classée parmi les hautes fréquences, le flux de chaleur est égal à zéro au centre de cette dernière il est à spécifier que :

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb}) \text{ Restera valable qu'aux limites de cette charge.}$$

II .13.LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE THERMIQUE :

La température est la principale variable à déterminer lors de la modélisation d'un système de chauffage par induction, et où les équations électromagnétique et thermique sont couplées.

A première vue, la variable température est obtenue après la résolution de l'équation de la thermique. Or, dans cette équation, la densité de puissance induite dans la charge (induit) est à son tour une fonction de cette même température et bien entendue des caractéristiques électromagnétiques du système, ce qui constitue le lien entre ces deux phénomènes physiques. Ainsi, dans l'étude des systèmes de chauffage par induction, les équations caractérisant l'évolution spatiale-temporelle des phénomènes électromagnétiques et thermiques, ne peut être résolues séparément, et nécessitent absolument un traitement par un modèle mathématique numérique couplé.

Parmi les modèles mathématico-numériques utilisées pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés, nous citons :

- Le modèle de couplage direct,
- Le modèle de couplage alterné,
- Le modèle de couplage utilisant la technique du para métrisation, que nous proposons dans le cadre de ce travail.

Avant d'entamer la présentation de chacun de ces modèles, nous avons jugé utile de présenter tout d'abord un aperçu sur le calcul du paramètre du couplage : la puissance induite

par effet JOULE dans la charge à chauffer. Cette puissance assure d'une part le couplage physique entre l'électromagnétisme et la thermique, et le couplage mathématico-numérique à la base du modèle du couplage alterné et celui basé sur la technique de la paramétrisation d'autre part.[37]

II .14.CALCUL DES PARAMETRES DU COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE THERMIQUE :

Si les équations électromagnétique et thermique, physiquement couplés, sont résolues indépendamment dans les méthodes utilisant le couplage alterné ou la technique de paramétrisation que nous allons les décrire par la suite, leur interdépendance est rappelée par l'estimation d'un terme de contribution.

Dans le cadre d'un couplage électromagnétique-thermique, ce terme est désigné par la densité de puissance induite $p(t)$, qui représente un apport d'énergie en thermique dû aux courants induits. Cette densité de puissance induite se calcule selon la relation suivante :

$$p(t) = \frac{1}{\sigma(T)} J_{ind}^2 \quad (\text{II.47})$$

Où J_{ind} est la densité du courant induit créé dans le matériau conducteur. Il s'exprime en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} , en régime harmonique, comme suit :

$$\vec{J}_{ind} = - i \sigma(T) \omega \vec{A} \quad (\text{II.48})$$

Le terme de couplage des deux phénomènes physiques, représentant la densité de la puissance moyenne dissipée sur une période, s'écrit alors comme suit :

$$p = \frac{1}{2} \sigma(T) \omega^2 A A^* \quad (\text{II.49})$$

A^* Est le conjugué du potentiel vecteur magnétique A dans un espace complexe.

Il est clair que le terme source thermique dépend de façon indirecte de la température par le biais de la conductivité électrique σ . [39]

II .15.LES MODELES DU COUPLAGE EXISTANT :

Les phénomènes physiques couplés aboutissent à des équations que généralement l'on ne sait pas résoudre analytiquement. Pour leur analyse, nous faisons alors appel à des méthodes de résolution numérique, citées précédemment, telle la méthode des volumes finis que nous avons sélectionnés pour notre étude.

Jusqu'à présent, la résolution des systèmes couplés a été réalisée en particulier à l'aide de deux méthodes : l'une dite de couplage direct dit fort, l'autre dite de couplage alterné dit faible.

II .15.1.Modèle des couplages directs (FORT) :

Dans ce modèle du couplage, le problème est considéré dans sa globalité : l'ensemble des équations le régissant est résolu dans un même et unique système d'équations, où le couplage apparaît sous forme de termes croisés dans la matrice issue de la formulation numérique [28][29].

Cette méthode s'appuie sur un maillage unique, décrivant l'ensemble du problème et réalisé pour que toutes les particularités physiques, comme celles du fort gradient, soient considérées.

Cette technique de couplage présente l'avantage de ne pas nécessiter de transfert de données ni d'interpolation, donc moins d'erreurs et une grande précision sur les résultats.

Toutefois, plusieurs facteurs sont à l'origine du temps de calcul très longs et d'une occupation mémoire importante. Ainsi, l'usage d'un maillage unique, adapté simultanément aux différents domaines physiques, conduit très vite à un système global de taille importante : l'affinage d'un maillage, par exemple, peut être nécessaire dans un domaine mais correspondre à un sur-maillage dans un autre. Par ailleurs, le système étant global, une seule base de temps doit être utilisée pour résoudre le système, mais l'emploi d'une base de temps définie à partir de la plus petite des constantes de temps du système conduit à des calculs prohibitifs si celles-ci diffèrent fortement : de l'ordre de la seconde en électromagnétique et de la milliseconde en thermique.

Le modèle du couplage direct (MCD) peut être avantageusement utilisé dans le cas de problèmes fortement couplés [28]

II .15.2.Modèle du couplage interne (FAIBLE) :

La modélisation qui utilise ce modèle de couplage alterné (MCA) permet de résoudre séparément les problèmes électromagnétique et thermique. Le couplage se fait alors par le transfert des données de l'un des deux problèmes vers l'autre [28][30].

Cette technique de couplage permet l'usage de plusieurs maillages adaptés à chaque domaine physique. De cette façon, il est possible d'ignorer ou de conserver des régions en fonction

de leur influence et d'affiner des zones du maillage où le gradient peut être important, sans pour autant surcharger les autres. Ainsi, dans une modélisation électromagnétique-thermique, le maillage thermique doit être suffisamment affiné pour décrire une forte évolution du gradient de température, le maillage électromagnétique, quant à lui, ne nécessite pas autant de soin : sachant que les grandeurs électromagnétiques évoluent lentement, peu d'éléments sont nécessaires.

Toutefois, une attention égale doit être portée à la réalisation des différents maillages, en vue d'approximer de manière correcte les grandeurs du couplage ; Ainsi, dans un couplage électromagnétique-thermique, le maillage de la partie thermique doit permettre une approximation convenable non seulement de la température, mais aussi de la densité de puissance induite.

La décomposition du problème complet, permettant ainsi l'emploi de plusieurs maillages adaptés, conduit à des systèmes d'équations de tailles raisonnables.

Cependant, l'inconvénient majeur de ce modèle est lié au transfert des informations de couplage. Ainsi, dans les zones où la variation des propriétés physiques est rapide (voisinage de la température de Curie), le pas de temps de discréttisation doit être relativement petit, l'utilisation du MCA nécessite alors un transfert fréquent des données de l'un des problèmes électromagnétiques ou thermiques vers l'autre, ce qui n'est pas une opération aisée. Aussi, dans le cas de fortes non-linéarités, le MCA nécessite l'emploi d'un superviseur permettant d'automatiser le couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques.

Enfin, le MCA ne tient pas compte du couplage réel qui existe entre les deux phénomènes physiques, et par le transfert fréquent des informations, ce couplage engendre des erreurs d'interpolation et des pertes au niveau de la précision.

Pour surmonter ce problème, nous devons, à titre d'exemple, diminuer considérablement le pas de calcul, ceci nous convergera vers le modèle du couplage direct avec tous ses avantages et ses inconvénients.

En vue de palier les inconvénients de chacun des modèles précédents, nous envisageons d'élaborer un troisième modèle de couplage dont l'originalité est d'appliquer la technique de la paramétrisation utilisée jusque-là dans le couplage électromagnétique-mécanique [31], donc, pour le traitement des équations à caractère global.

II .15.3. Modèle du couplage base sur la technique de la paramétrisation :

Le modèle de couplage des équations électromagnétique et thermique que nous proposons dans le cadre de ce travail est un modèle basé sur la technique de la paramétrisation. Cette méthode consiste à calculer des valeurs de paramètres à l'aide de la méthode des volumes finis.

L'objectif de ce modèle de couplage est de considérer, comme terme source de l'équation thermique, la fonction $P_s(T, J_{ex})$ décrivant les variations de la densité de la puissance moyenne dissipée par effet JOULE suivant la température T et la densité de courant d'excitation J_{ex} .

Le couplage électromagnétique-thermique basé sur la technique de la paramétrisation, reste entièrement invisible pour l'utilisateur qui n'est tenu d'effectuer qu'une seule opération de création de dépendance $P_s(T, J_{ex})$ permettant de résoudre le problème électromagnétique-thermique couplé.

II .15.3.1.Principe du modèle de couplage basé sur la technique de la paramétrisation :

La résolution du système d'équations électromagnétique et thermique nécessite la connaissance de la densité volumique de puissance moyenne P_s fonction du potentiel vecteur magnétique \vec{A} et de la densité du courant d'excitation J_{ex} .

La méthode utilisant la technique de la paramétrisation consiste alors à paramétriser le terme de couplage P_s à partir de la résolution de l'équation électromagnétique en utilisant la méthode des volumes finis pour une série de valeurs discrètes de la température T , et du courant d'excitation J_{ex} , extraites de leurs plages de variation physique.

Démarche

Le couplage électromagnétique-thermique par la technique de la paramétrisation peut être effectué dans trois principales étapes. Ces étapes sont :

➤ **Première étape : Etude électromagnétique**

Pour une valeur de température donnée, les propriétés électromagnétiques $\sigma(T)$ et $\mu(T)$ sont parfaitement définies par l'expérience.

Dès lors, pour une valeur de la densité du courant d'excitation préalablement fixée. La résolution de l'équation électromagnétique, exprimée en terme de potentiel vecteur magnétique \vec{A} , est effectuée pour une température donnée T en utilisant la méthode des volumes finis. De ce

premier résultat, est alors extraite la puissance totale P_{tot} , évaluée sur toute la charge à chauffer. Ce dernier résultat intervient ensuite directement dans l'évaluation des sources de chaleur.

En rappelant qu'à haute fréquence, la densité de puissance reste presque entièrement localisée dans l'épaisseur de peau où se développent les courants induits, notre démarche dans le traitement du problème magnétodynamique consiste seulement à estimer la densité de puissance moyenne dissipée dans la charge à chauffer, relative à une température donnée T .

La même démarche est à répéter pour différentes valeurs discrètes de la température T appartenant à l'intervalle $[T_{amb}, T_{max}]$. Ces deux bornes de la température (T_{amb}, T_{max}) sont choisies conformément à la réalité physique.

Si nous prenons à titre d'exemple, le cas de chauffage par induction du cuivre, tout en gardant ces caractéristiques de l'état solide, la borne inférieure T_{amb} peut être choisie comme étant la température ambiante, tandis que T_{max} ne peut dépasser la température de curie et à la limite $T=T_{curie}=708^{\circ}C$.

➤ **Deuxième étape : Evaluation des paramètres du couplage**

Il est alors possible, à partir des couples (T, P_s) , de construire une courbe $P_s=f(T)$ donnant la densité de puissance moyenne dissipée, comme étant une fonction de la température T , pour une valeur de densité de courant d'excitation donnée J_{ex} , tel que f est une fonction d'interpolation dont l'ordre est à déterminer en se basant sur le critère de différence minimale absolue ou relative entre les points issus de la paramétrisation et ceux des résultats d'interpolation. Pour utiliser les résultats de la paramétrisation $P_s(T)$, donc les injecter dans l'équation de la thermique et calculer par la suite la distribution de la température, une interpolation numérique s'impose pour donner une expression analytique adéquate à la variation de la puissance en fonction de la température. Ceci nous permet de déterminer avec grande précision et haute qualité la valeur de la densité de la puissance induite moyenne P_s pour n'importe quelle valeur de la température T appartenant bien entendue à l'intervalle $[T_{amb}, T_{max}]$.

Ces deux étapes peuvent être réitérées pour différentes valeurs de la densité du courant d'excitation J_{ex} , appartenant à une plage de variation donnée.

Cette technique permet ainsi de générer un réseau de courbes $P_s = f(T, J_{ex})$ rendant compte, pour différentes valeurs du courant d'excitation, de l'évolution de la densité de puissance moyenne en fonction de la température.

➤ **Troisième étape : Partie thermique**

Suite à la réalisation des deux précédentes étapes, il suffit de résoudre l'équation de la thermique au terme source $P_s = f(T, J_{ex})$. Une combinaison de différentes méthodes et techniques numériques de pas à pas dans le temps sera nécessaire au traitement de problèmes transitoires

Constatations

- Le modèle du couplage utilisant la technique de la paramétrisation est basé sur la détermination d'une densité de puissance moyenne P_s localisée dans l'épaisseur de peau de la charge à chauffer. Dans le cadre de notre travail, cette fonction est calculée à partir de la résolution, en utilisant la méthode des volumes finis, de l'équation électromagnétique pour une gamme de températures données et correspondant à une alimentation électrique fixée (courant d'excitation). Ensuite, la fonction P_s servira de terme source pour l'équation de la thermique. Ainsi, une modification des propriétés thermiques (capacité calorifique c_p , conductivité thermique k ,...etc.) ne concerne que le problème thermique et ne nécessite pas un nouveau calcul électromagnétique.
- Dans le cas de la méthode utilisant le couplage alterné, où chaque équation du système est résolue indépendamment de l'autre, le report des valeurs des termes de couplage entre les équations se fait par tabulation, directe ou indirecte. En effet, la propriété à reporter peut être directement tabulée et reprise dans le problème suivant ou bien calculée dans le problème suivant comme fonction d'autres propriétés tabulées.
- L'avantage de la technique de la paramétrisation envisagée réside dans le fait de pouvoir s'affranchir de la précédente démarche, qui consiste à tabuler, au niveau de l'équation de la magnétodynamique, les grandeurs σ (conductivité électrique) et \vec{A} (potentiel vecteur magnétique) pour être ensuite introduites dans l'équation de la thermique comme propriétés ne dépendant plus que de l'espace.
- La méthode de couplage par la technique de la paramétrisation permet ainsi de découpler entièrement les deux phénomènes physiques et de ne s'intéresser plus qu'à un problème thermique

après l'exploitation du problème magnétodynamique en termes de densité de la puissance, dépendante de la température.

- La technique de couplage par la paramétrisation autorise l'utilisation de maillages différents et adaptés à chacun des problèmes, magnétiques et thermiques, il s'agit d'une souplesse non-permise dans le modèle du couplage direct [31], ou encore le modèle du couplage alterné qui nécessite alors un processus réversible. Le couplage paramétrique est simple à utiliser.
- Ainsi, et en se basant sur ce qu'à été présenté dans ce chapitre, nous pouvons illustrer les algorithmes du couplage, et classer les différents modèles du couplage électromagnétique-thermique : le direct, l'alterné, et celui basé sur la technique de la paramétrisation, du point de vue, lenteur, précision absolue et complexité d'une part et rapidité, précision relative aux problèmes à traiter et simplicité d'autre part, par le diagramme suivant (**Figure III.7**) [37]

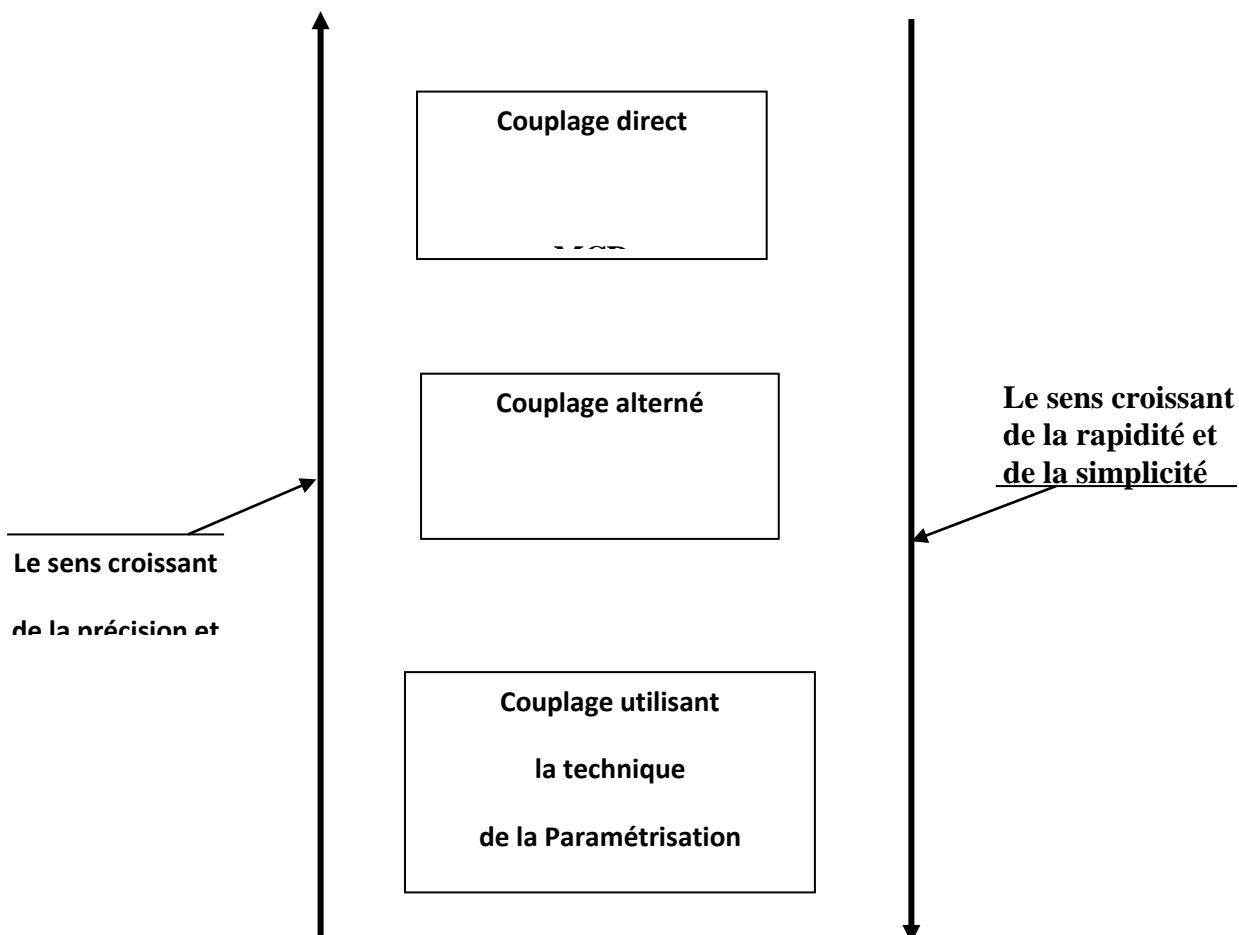


Figure II.7.Diagramme de classification des différents modèles

du couplage électromagnétique-thermique.

II.16.CONCLUSION :

A partir des lois de base caractérisant les phénomènes électromagnétiques et thermiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction, des modèles mathématiques ont été établis, dans leurs formes générales. Ensuite, et en liaison avec le type d'applications à traiter, le cas cylindrique axisymétrique considéré comme un cas particulier, a été détaillé. Une fois, ces modèles mathématiques établies.

La modélisation numérique des systèmes de chauffage à induction constitue l'outil de base pour la conception de ces systèmes. Cette modélisation passe par la résolution numérique des équations des champs décrivant les phénomènes physiques et leur couplage.

Le modèle du couplage utilisant la technique de la paramétrisation est simple à utiliser par rapport aux deux autres modèles du couplage, le direct et l'alterné. Son principal avantage réside dans le découplage mathématique des deux problèmes électromagnétique et thermique physiquement couplés

Chapitre III :
*Application et Simulation par
logiciel MATLAB*

III.1.INTRODUCTION

Nous proposons dans le présent chapitre des applications de l'effet de peau en utilisant des différents matériaux en vue de la validation du modèle de couplage électromagnétique-thermique basé sur la technique de la paramétrisation. Nous traitons la variation de l'épaisseur les matériaux de la plaque de la cuisson par induction pour des matériaux différents (1 et 2 couches/ une couche ferromagnétique puis ferromagnétique et aluminium), pour une gamme de fréquences $f = [20-90]$ KHz

Nous étudions les comportements électromagnétique et thermique de la pièce à chauffer, soumise à une source de courant constante en régime permanent.

On commence par une étude du matériau qui est aluminium qui présente une idée primordiale dans notre système.

III.2. L'ALUMINIUM :

L'aluminium est un élément métallique, parmi les métaux les plus abondants dans la croûte terrestre, c'est un élément du troisième groupe de la classification de Mendeleïev juste après le silicium et l'oxygène, dont le numéro atomique 13, la masse atomique 2698.7 kg/m³ (environ 27) et la structure cristalline de type cubique à faces centrées. La seule source de ce métal c'est les bauxites qui sont des roches riches en aluminium (45 à 60%), La bauxite est le mineraï le plus utilisé pour obtenir de l'alumine, matière intermédiaire nécessaire à la fabrication de l'aluminium et être la production d'aluminium par électrolyse d'alumine dans la cryolithe (Na₃AlF₆) fondu, à environ 1000°C dans une cuve comportant un garnissage intérieur en carbone. [1]

L'aluminium dès l'un des métaux les plus utilisés par l'industrie moderne, cela tient à la combinaison des nombreuses propriétés optimales qui le constitue.

- Légèreté :
- Aptitude au formage :
- Usinabilité
- Durée de vie et tenue en corrosion
- Conductivité électrique et thermique
- Non-toxicité
- Recyclable à vie

III.2.1. Qu'est-ce que l'aluminium ?

L'aluminium est un métal qui provient d'un minéral, la bauxite rouge, aussi appelé « alu » familièrement, défini par l'élément chimique numéro 13 (Al), et est un type de métal mou. Dérivé du latin ALUMENI il provient du minéral connu depuis l'antiquité (sulfate de potassium et aluminium). C'est en 1827 qu'un chimiste allemand Friedrich Wöhler obtient la substance d'aluminium pur qu'on connaît aujourd'hui dans de nombreux produits du quotidien, notamment le pour le plus connu le papier d'aluminium. [35]

III.2.1. Propriétés thermiques :

III.2.1.1. Température de fusion :

Pour casser la liaison métallique de l'aluminium, il faut fournir une énergie qui est atteinte à Température de fusion qui dépend de la pureté de l'aluminium.

Celle-ci varie suivant les mesures de 657 à 660 °C :

- 657 °C pour un aluminium « commercial »
- 659 °C et 660 °C pour le métal dont le titre est de 99,99 %.

La valeur maintenant admise de l'enthalpie de fusion de l'aluminium (encore couramment appelée chaleur latente de fusion) est de : 397 J. g⁻¹

Même pour le métal très pur, la fusion commence toujours aux joints de grain car les liaisons au niveau des défauts sont moins énergétiques.

Lors de la fusion, l'aluminium (pur ou allié) subit une augmentation de volume d'un peu plus de 6,26% qui, à l'inverse, se traduit à la solidification par une contraction de volume dont il faut impérativement tenir compte lors du moulage de pièces en fonderie.

Le coefficient de dilatation thermique linéaire de l'aluminium est de 23x10⁻⁶/°C entre +20°C et +100°C et varie en fonction de la température.

Ce coefficient de dilatation thermique est donné par la formule :

$$\alpha_T = \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right) = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dT} \quad \text{III-1}$$

III.2.1.2. Conduction thermique :

L'aluminium a une conductivité thermique très élevée environ 66 % de celle du cuivre, celle des Alliages d'aluminium, étant plus faible car les électrons dans l'aluminium ont une grande mobilité de mouvement (électrons libres), donc la structure de l'aluminium permet une grande diffusion de l'énergie cinétique par chocs de particule et ainsi transmettre rapidement la chaleur. La diffusivité Thermique de l'aluminium est du même ordre de grandeur que celle du cuivre. La diffusivité thermique α exprimé l'aptitude d'un métal à transmettre la chaleur plutôt qu'à l'absorber. Une diffusivité élevée signifie que la chaleur y transite rapidement, ce qui est le cas pour l'aluminium.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad \text{III.2}$$

Avec : λ Conductivité thermique.

ρ La masse volumique.

c_p La capacité thermique massique à pression constante.

D'une manière générale, à température ambiante, cette propriété est peu affectée par l'état métallurgique du métal. Les déformations plastiques et élastiques, même importantes, ne réduisent que de 2 à 3 % la conductivité thermique. Dans le cas d'un aluminium de haute pureté à l'état recuit (état zéro) et présentant une résistivité résiduelle p_0 de 5,94. 10–12 Ω.m et à température ambiante, la valeur de la conductivité thermique de l'aluminium non allié est de 237 W.m-1.K-1.

Remarque : sa conductivité thermique est à son maximum entre 6 et 12k. [35]

III.2.3. Propriétés électriques :

L'aluminium conduit très bien l'électricité puisqu'il se place immédiatement après le cuivre dans les Métaux communs. Cela est dû au fait que l'aluminium a une électronégativité de 1.61< 2 donc possède des liaisons métalliques, donc il s'agit d'un conducteur par conséquent ses électrons de valence sont délocalisés, sont libres de se déplacer à travers le métal, et peuvent monter très facilement d'un niveau d'énergie à un autre dans la même bande d'énergie.

La conductivité électrique, inverse de la résistivité électrique, mesure l'aptitude d'un matériau à conduire l'électricité. Elle est généralement exprimée en pourcentage IACS (International Copper Annealed Standard) d'un échantillon standard de cuivre recuit dans des conditions normalisées.

La valeur de la conductivité électrique de l'aluminium recuit (état O), à 20 °C, généralement admise est de : 37,66.106 S.M. -1 (64,94 % IACS)

Soit une résistivité de : $2,6545 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ \Rightarrow conducteur

III.2.5. Influence de la température :

La résistivité augmente d'autant plus que la température du métal est élevée ainsi que l'illustrent les données du tableau concernant l'aluminium.

Si la température augmente, sa résistivité augmente car les électrons sont gênés dans leur déplacement par les chocs des particules qui vibrent (vibration thermique).

$$\lambda = \chi LT \quad \text{III.3}$$

Avec : $\lambda (W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$ Conductivité thermique.

$\chi (\Omega^{-1} \cdot m^{-1})$ Conductivité électrique.

T (K) Température.

L Coefficient de Lorenz $= 2,3 \times 10^{-8} V^2 \cdot K^{-2}$ pour l'aluminium pur, pouvant atteindre $2 \times 10^{-8} V^2 \cdot K^{-2}$ pour les alliages d'aluminium.

Température (°C)	Résistivité électrique ρ (en nΩ-m)
0	25.0
100	36.2
200	47.8
300	60.0
400	72.9

500	86.3
600	101
650	109

Tableau III.1 : Variation de la résistivité électrique (ρ) para port à la température

III.2.6. Conclusion

L'aluminium, sous sa forme pure ou dans des alliages, est l'un des métaux les plus utiles sur la planète de par sa polyvalence, sa légèreté, son faible cout de production et son esthétique.

Le succès de l'industrie de l'aluminium repose en grande partie sur sa capacité d'innovation et de sa Capacité à se positionner comme le métal par excellence dans le domaine du développement durable. Ces propriétés ont fait de ce métal l'un des plus utilisé dans le monde, mais grâce à la grande quantité de ressources encore disponible, et son recyclage presque illimité, son utilisation devrait devenir proéminente dans le futur. Toute porte à croire que l'aluminium ne nous a pas encore livré tous ses secrets. [36]

III.3. APPLICATIONS

III.3.1. Les tests de l'effet de Peau

L'effet de peau (effet Kelvin) ou effet pelliculaire est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des plaques. Ce phénomène d'origine électromagnétique existe pour tous les plaques parcourus par des courants alternatifs.

Fréquence= 1.10^6 (Hz)

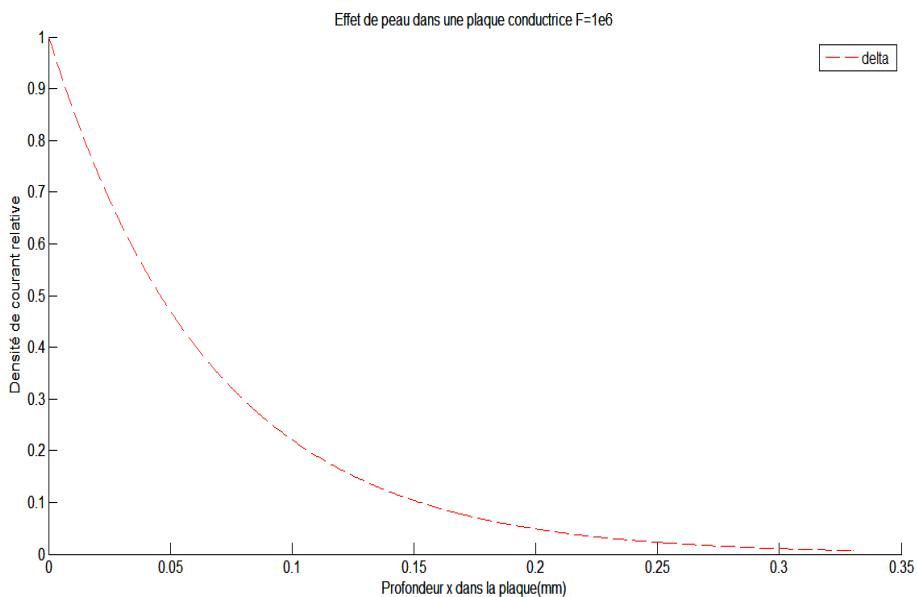
$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}$, perméabilité du vide (H/m)

$\mu_r = 1$, perméabilité relative (cuivre ou aluminium)

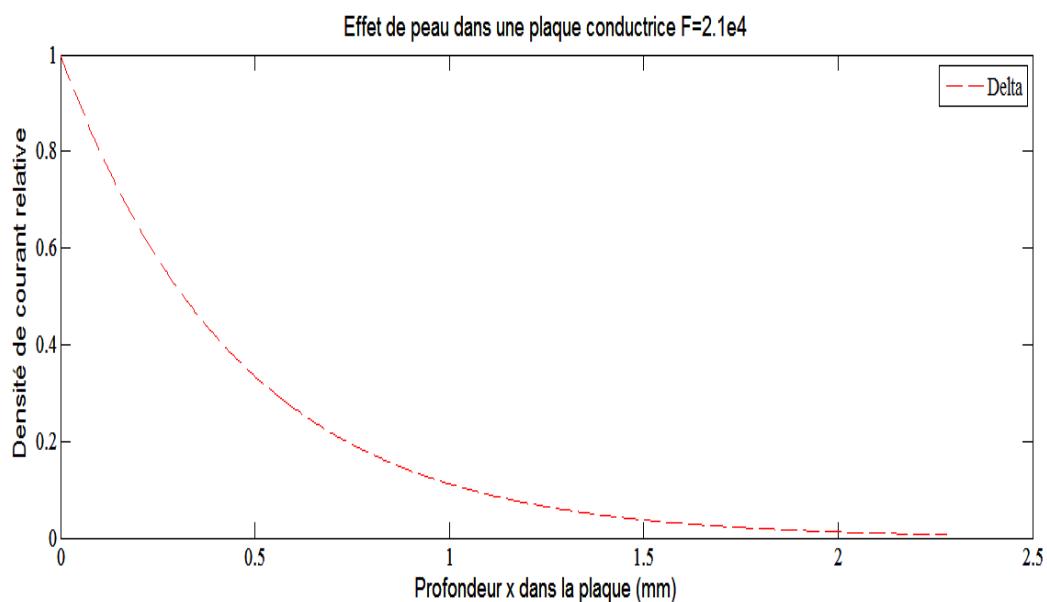
$\mu = \mu_0 * \mu_r$; perméabilité absolue

III.3.1.1 test d'une plaque conductrice

On fait varie la densité de courant en fonction de la variation de la profondeur (mm) pour différents fréquences.



FigureIII.1 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.10^6$ Hz



FigureIII.2 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.10^4$ Hz

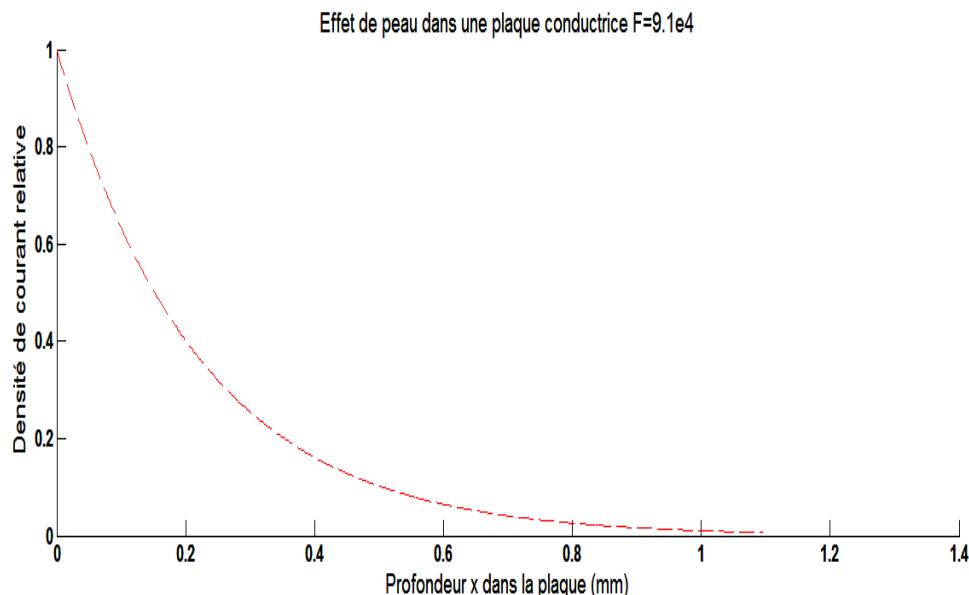


Figure III.3 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.10^4$ Hz

III.3.1.2 test d'une plaque ferromagnétique

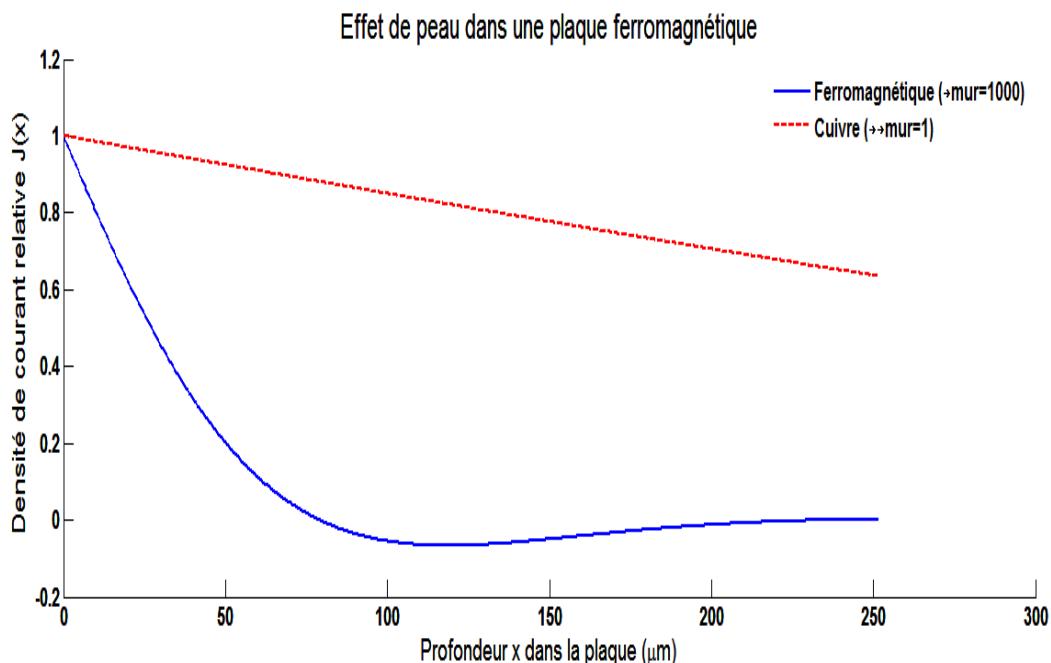
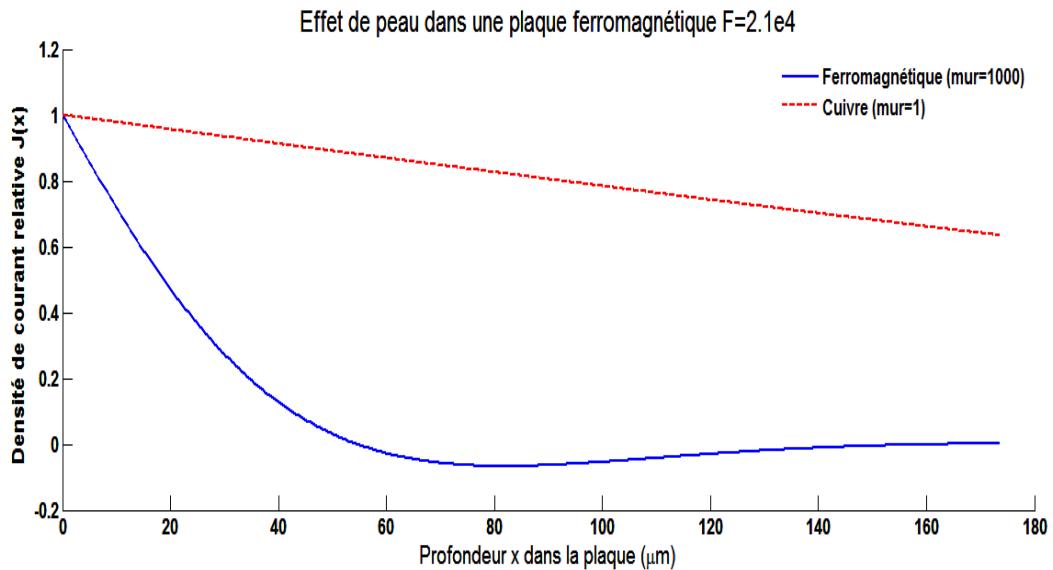
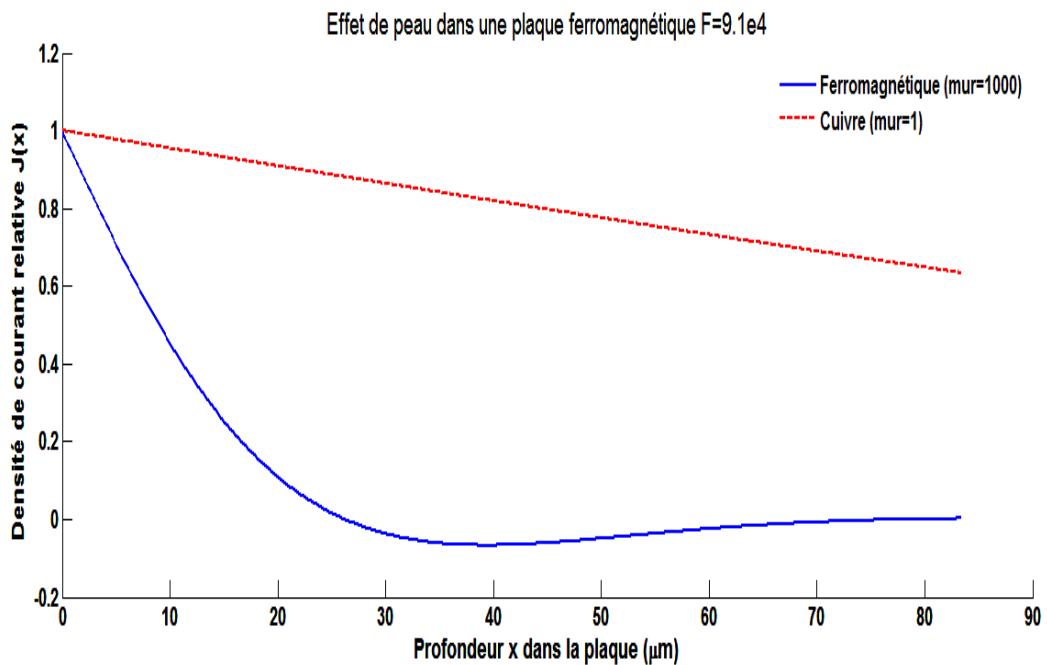


Figure III.4 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.10^4$ Hz

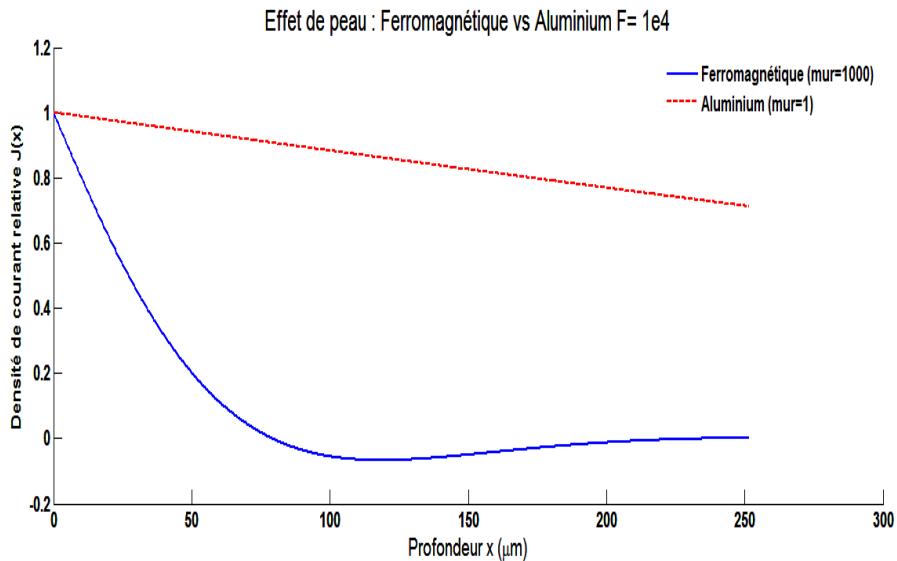


FigureIII.5 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.10^4$ Hz

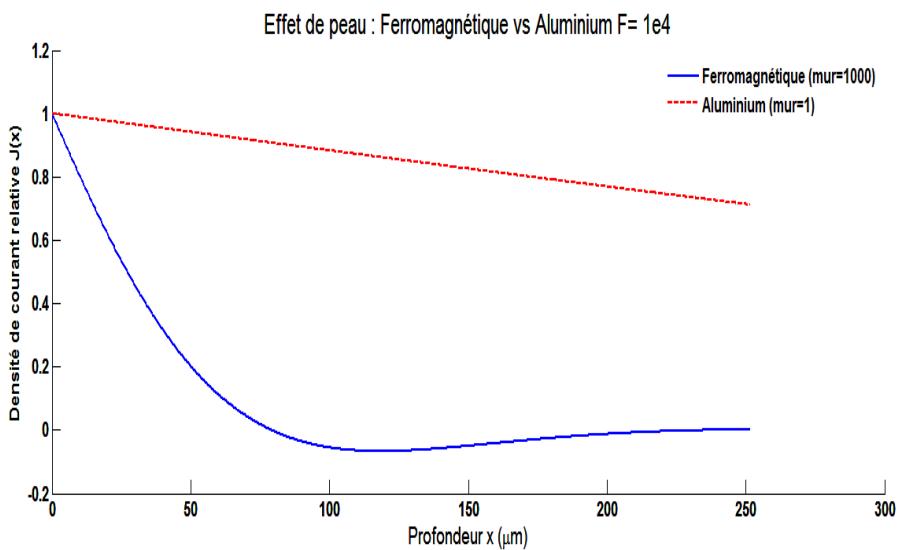


FigureIII.6 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.10^4$ Hz

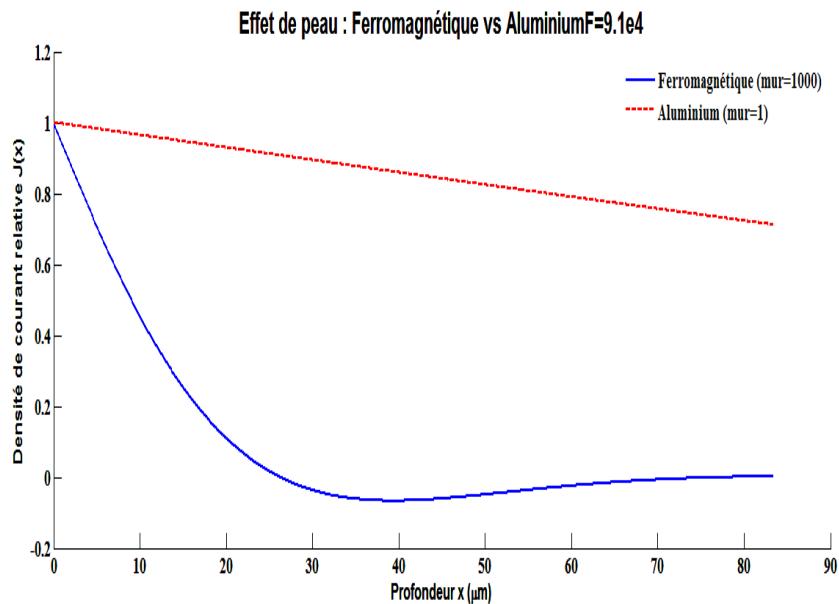
III.3.1.3 test d'une plaque ferromagnétique- Aluminium



FigureIII.7 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=1.10^4$ Hz



FigureIII.8 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=2.10^4$ Hz



FigureIII.9 Variation de la densité de courant pour une fréquence $f=9.10^4$ Hz

Interprétation

Après ces tests sur les plaques de différents métaux, on constat que L'effet de peau est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des plaques et part ailleurs l'aluminium c'est le métal qui fournit plus de d'énergie thermique pour chauffer qui donne des valeurs la profondeur comme suit :

Pour la plaque amagnétique : qui varie entre 0,34-2,3 mm

Pour la plaque ferromagnétique qui varie entre 85-250 μm

Pour la plaque ferromagnétique + aluminium qui varie entre 85-250 μm et des valeurs de températures plus élevées

III.4 DESCRIPTION DE LA CUISSON PAR INDUCTION

Le système étudié comporte :

Des inducteurs

Caractéristiques	Dimensions
Inducteur1	0.0200 m
Inducteur2	0.0200 m
Inducteur3	0.0200 m
Epaisseur	0.0006 m

Tableau III.2 : les dimensions des trois inducteur.

- La pièce à chauffer (charge) :

Caractéristiques	Dimensions
Diamètre	0.0950 m
Epaisseur de la plaque	0.0012 m
Epaisseur Aluminium	0.0006 m

Tableau III.3 : les dimensions des pièces à chauffer

III.4.1. REPRESENTATIO DU MODELE GEOMETRIQUE DU DISPOSITIF DE CHAUFFAGE :

En raison de la symétrie axiale du dispositif, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée. Ainsi que le modèle géométrique adopté comprend trois régions surfaciques :

- La charge (1 couches)
- La source de chaleur (inducteur)
- L'air environnant.

Le schéma ci-dessous présente le dispositif en coupe, dans le plan (r, z).

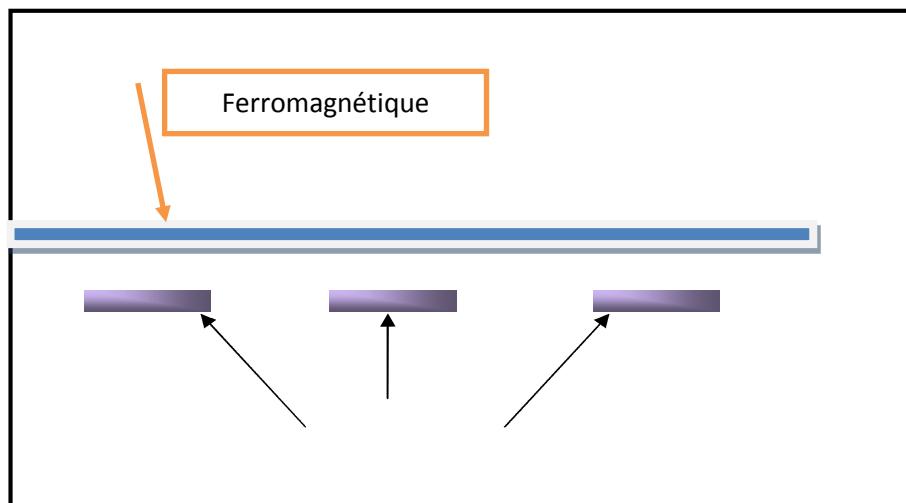


Figure III.10.Modèle géométrique du dispositif.

III.4.2. MODELES DES PROPRIETES PHYSIQUES

Les modèles de variation de chaque propriété en fonction de la température, désignée par l'inconnue T sont définis à partir des relevés expérimentaux dont nous disposons sur un échantillon du matériau constituant la pièce à chauffer.

Dans le cas particulier d'un matériau amagnétique tel que l'inox, $\mu_r=1$. La variation, de l'induction B en fonction du champ magnétique H est ici linéaire et $B = \mu H$.

➤ Résistivité électrique

La représentation de la résistivité électrique en fonction de la température est donnée par la Figure III.11. La loi de variation de la résistivité électrique a été décrite par des expressions analytiques, fonctions de l'inconnue T .

➤ Données thermiques

Les lois de variation relatives aux propriétés thermiques k et ρC_p ont été décrites par des expressions analytiques, fonctions de l'inconnue T

Leurs représentations sont données respectivement en(Figure III.12 et III.13.)

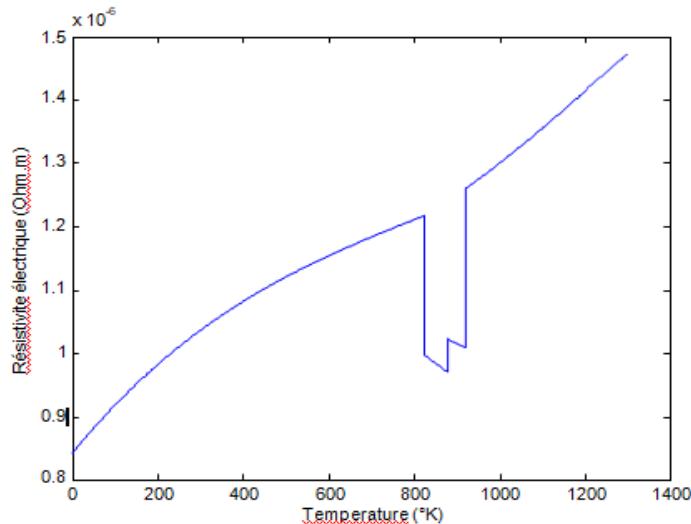


Figure III.11.Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

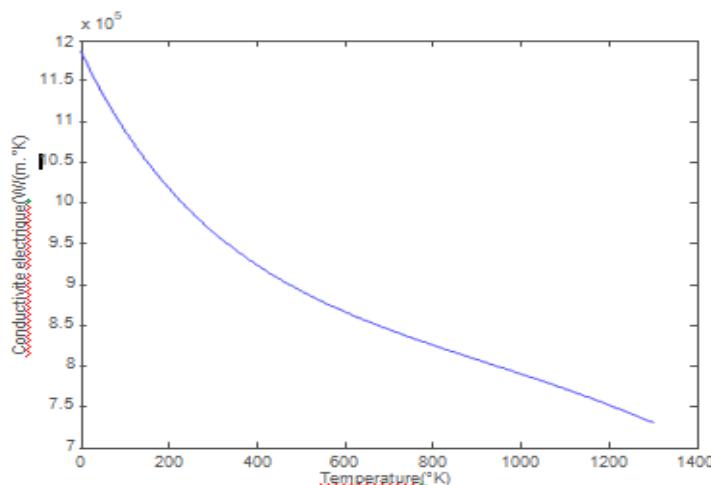


Figure III.12. Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

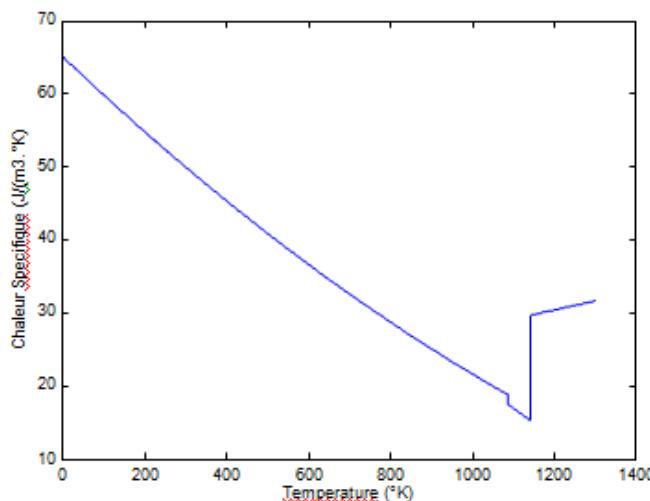


Figure III.13. Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

III.4.3. ETUDE DU COMPORTEMENT ELECTROMAGNETIQUE ET THERMIQUE :

III.4.3.1 1^{er} application variation de l'épaisseur de la plaque (couche Acier inoxydable)

Le dispositif de chauffage comporte un inducteur travaillant à une gamme de fréquence $f = [20-50-90]$ KHz, constitué trois inducteurs, celui-ci est alimenté par un courant d'excitation sinusoïdal d'amplitude $J = 20A$, soit une densité $J_{ex} = 2.5 \cdot 10^3 A/mm^2$. Pour la même raison de symétrie physique et géométrique du système, seule la notation du modèle sera considérée (Figure III.14).

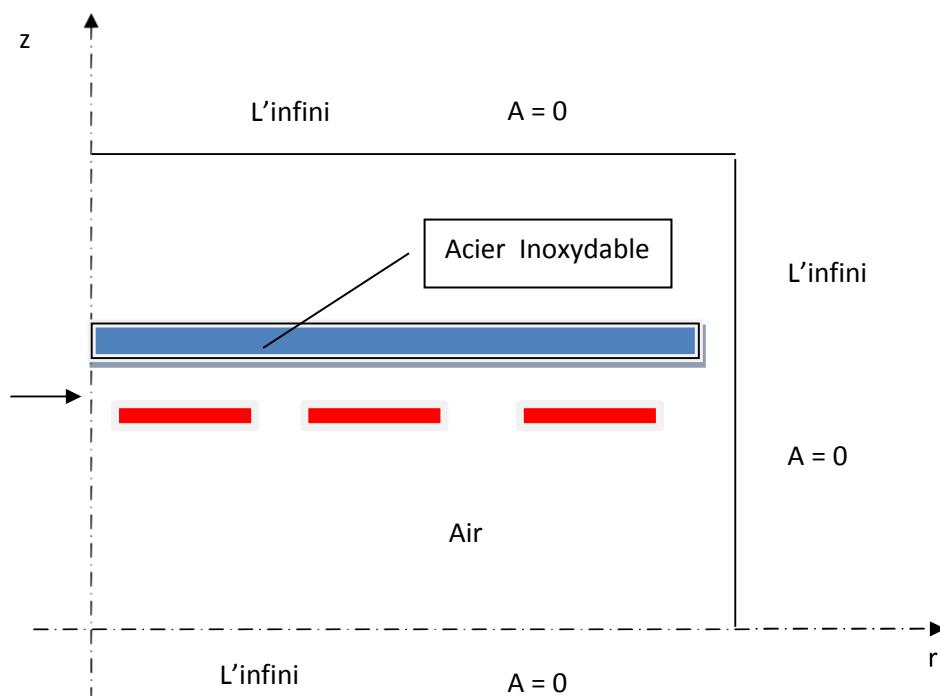


Figure III.14.Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique.

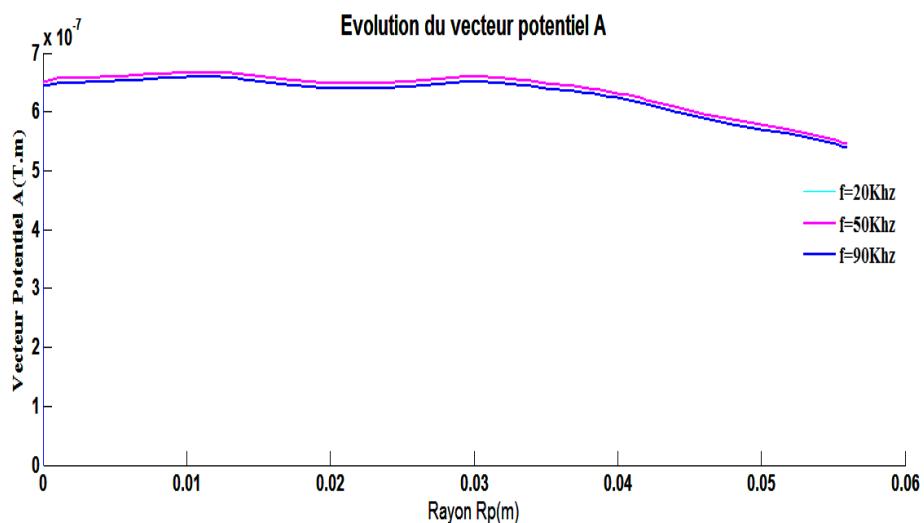


Figure III.15.Evolution du vecteur potentiel A (une seule couche)

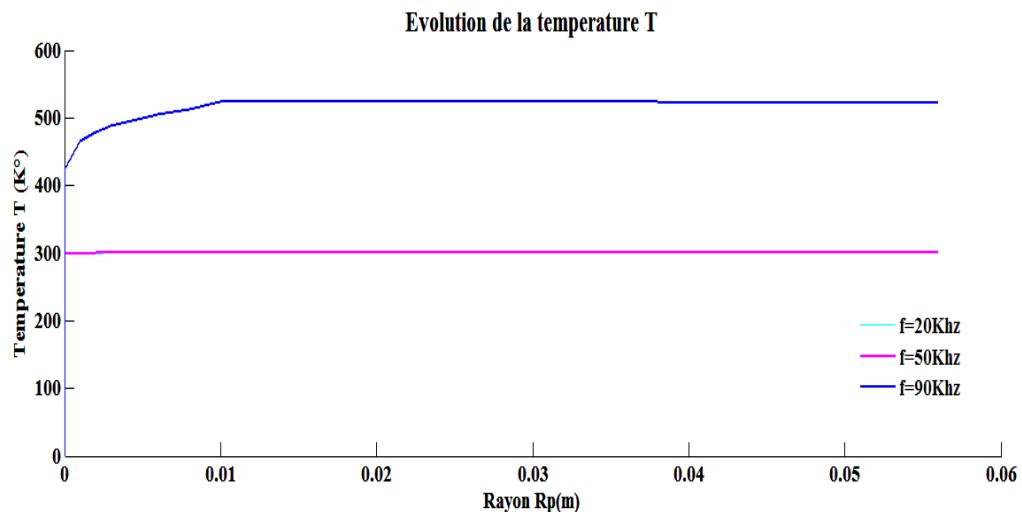


Figure III.16.Evolution de la température (une seule couche)

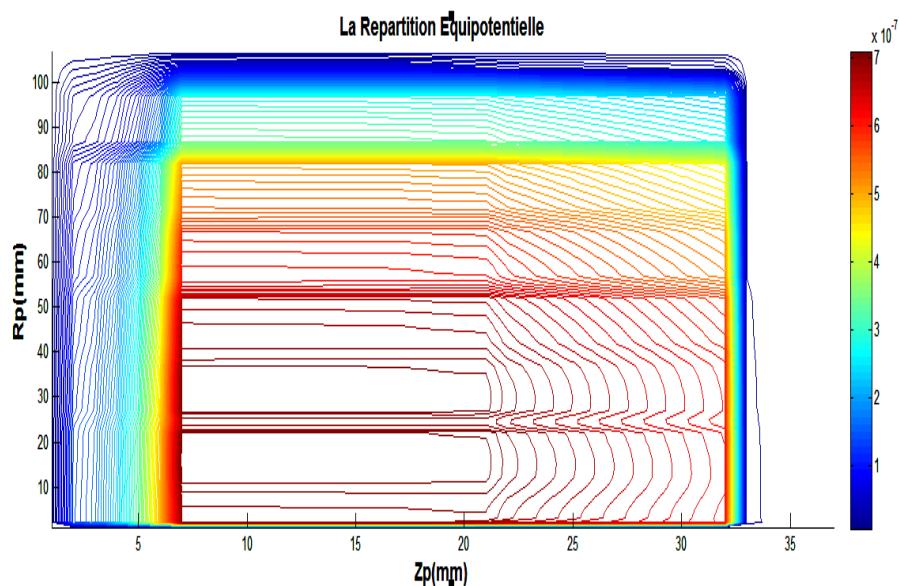


Figure III.17.Les lignes Equipotentielle (une seule couche)

III.5.3.1.1.Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique :

Pour une température T de qui varie entre 300 - 400 °K, pour une gamme de fréquence de fonctionnement $f = [20-50-90]$ KHz, pour une densité du courant d'excitation $J_{ex} = 2.5 \cdot 10^3$ A/mm², les résultats du problème électromagnétiques sont déterminés.

Il s'agit de :

- La variation radiale, et la répartition du module du potentiel vecteur magnétique A,
- La variation radiale, et la répartition du module de la température T,
- Lignes équipotentielles A,

On augmentant la température, la résistivité augmente qui aboutit à une diminution de la conductivité électrique, l'augmentation du potentiel vecteur A augmentent, la densité des courants induits diminue et la densité de la puissance induite augmente.

III.4.3.2. 2^{eme} application variation de l'épaisseur de la plaque (couche Acier inoxydable+ couche aluminium)

Le dispositif de chauffage comporte un inducteur travaillant à une gamme de fréquence $f = [20-40-60-80]$ KHz, constitué trois inducteurs, celui-ci est alimenté par un courant d'excitation sinusoïdal d'amplitude $J = 20\text{A}$, soit une densité $J_{ex} = 2.5 \cdot 10^3 \text{A/mm}^2$.

Pour la même raison de symétrie physique et géométrique du système, seule la notation du modèle sera considérée ; couche Acier inoxydable= 0.0012m et couche aluminium= 0.0006m (**figure III.16**).

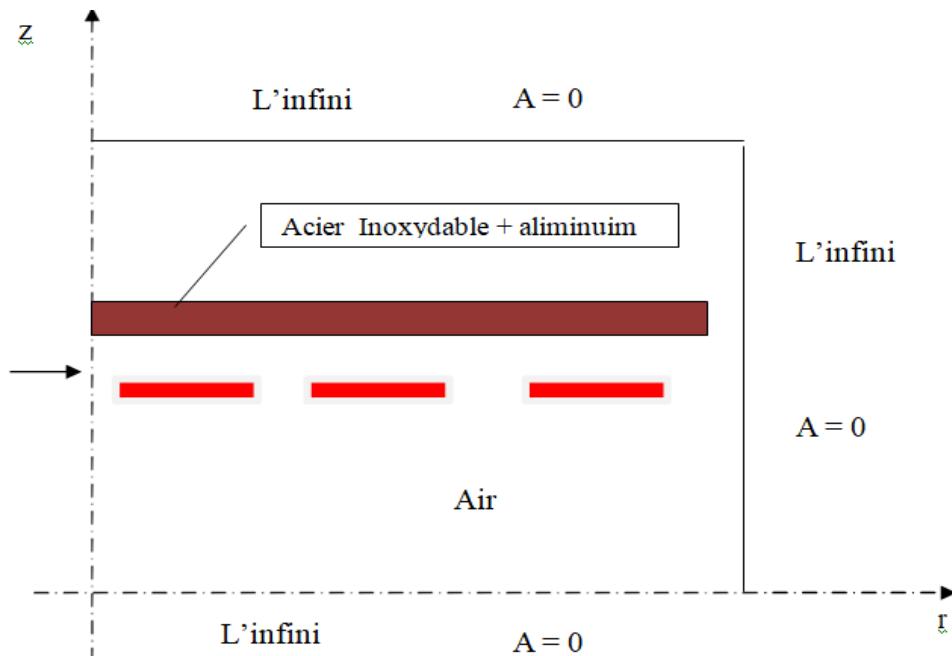


Figure III.18 Modèle géométrique à deux couches adopté pour L'étude électromagnétique.

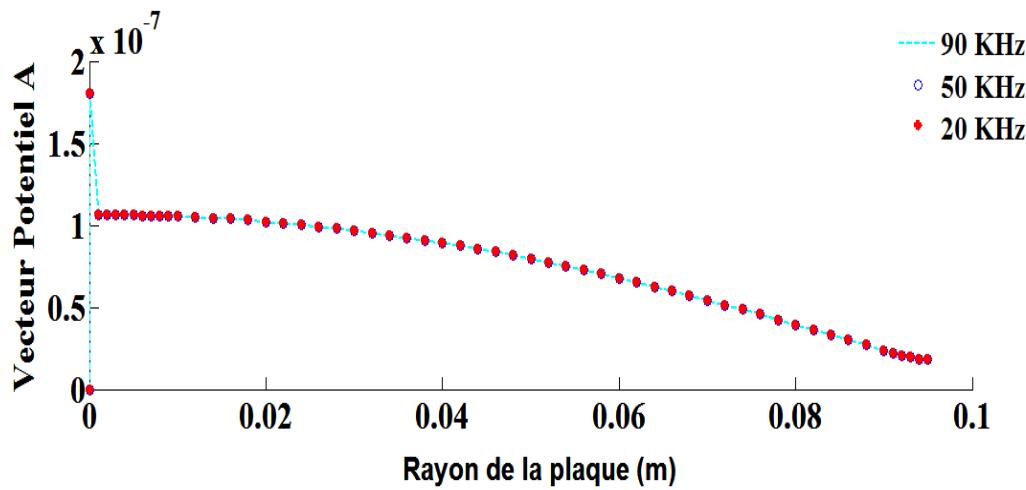


Figure III.19 : Evolution du vecteur potentiel A (a deux couches)

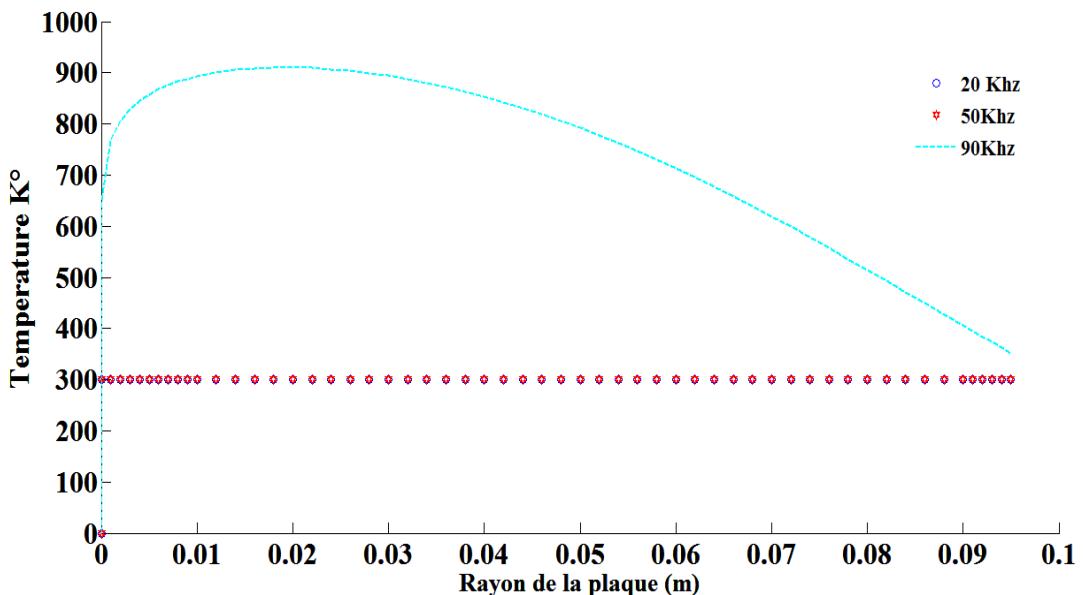


Figure III.20. Evolution de la température (a deux couches)

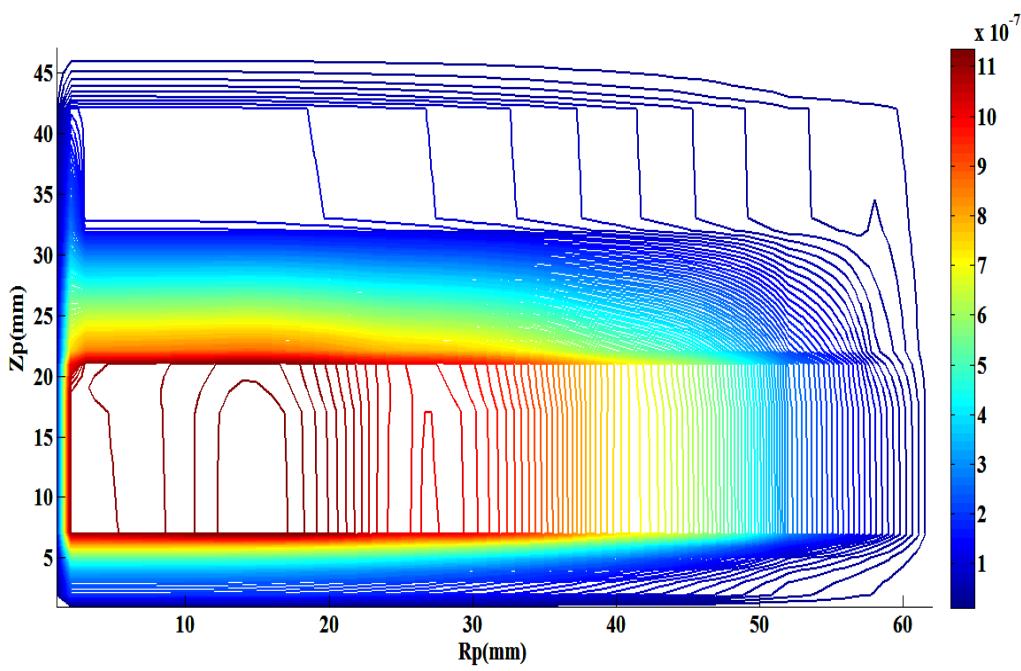


Figure II.21: Les lignes Equipotentielle (épaisseur de la plaque)

III.5.3.2.1. Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique

Pour une température T qui varie entre $300 - 2000^{\circ}\text{K}$, pour une gamme de fréquence de fonctionnement $f = [20-50-80] \text{ KHz}$, pour une densité du courant d'excitation $J_{\text{ex}} = 2.5 \cdot 10^3 \text{ A/mm}^2$, les résultats du problème électromagnétiques sont déterminés.

Il s'agit de :

- La variation radiale, et la répartition du module du potentiel vecteur magnétique A ,
- La variation radiale, et la répartition du module de la température T ,
- Lignes équipotentielles A ,

On remarque par les courbes de la température est uniforme au fond de la plaque ; d'où pour ce modèle de plaque notre système ne doit pas dépasser 0.0060m d'épaisseur de la plaque

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans notre travail ; nous avons présenté, une étude sur la modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans le couplage de la méthode des volumes finis et celle de la paramétrisation comme étant une méthode de discréétisation qui a permis de réaliser des modèles économiques et suffisamment précis des adaptateurs pour la cuisson par inductions.

Ces modèles mathématico-numériques développés en électromagnétisme et en thermique ont été implémentés sous l'environnement MATLAB, les caractéristiques électriques et magnétiques (conductivité électrique, perméabilité magnétique) en électromagnétisme , les lois de la thermodynamique et les propriétés thermiques (conductivité thermique, capacité calorifique) des matériaux en thermique mènent à l'obtention de modèles mathématiques représentant les phénomènes physiques qui régissent le comportement des systèmes de chauffage par induction.

Les résultats obtenus on testant les différents matériaux du plaque pour visualiser la variation de l'effet de peau puis nos on avant utiliser deux modèles géométriques deux application sur la plaque pour une couche et deux couches (ferromagnétique et aluminium) dans une gamme de fréquence du dispositif de chauffage en régime permanent.

Le modèle géométrique à trois inducteurs et deux couches choisi qui présente sur une bonne répartition et uniformité de la température dans plaque chauffante en utilisant une couche en ferromagnétique 500K° et deux couche d'aluminium pour 900 K°(420 C°).

En perspective , l' utiliser Les nouveaux alliages FeNi permet l'autorégulation en température du fond de récipient chauffé par induction, les premiers travaux de caractérisations électromagnétique -thermiques qui permis de mieux approcher l'évolution du champ, des pertes locales et de l'induction moyenne qui s'établissent à différents endroits d'un récipient en fonction de la puissance injectée.

Bibliographie

- (1) <https://www.ambrell.com/fr/technologie-du-chauffage-par-induction>
- (2) **BAZZINE AMINA-BOUANANE NOURIA.** Contribution à l'étude des Phénomènes de Chauffage par Induction/ Mémoire master/2015-univOuargla.
- (3) https://fr.wikipedia.org/wiki/Plaque_à_induction
- (4) **REINKE, F.H.; GEISEL, H.; SPRINGOB, L.**: Die magnetische Permeabilitat als Einflussgrosse bei der Berechnung von Induktoren mit ferromagnetischem Einsatzgut für Induktionsenv&rmungsanlagen. Fonschrittberichte der VDI-Zeitschriüten, Reihe 9, Nr.11, Düsseldorf, 611975
- (5) **ANCELLE, B.; CALLAGHER, E.; MASSE, PH.**: Entrée: A fully parametric preprocessor for computer aided design of magnetic devices. IEEE Trans. Mag., Vol. 18, No. 2, pp. 630-632, 311982.
- (6) <https://www.ambrell.com/fr/technologie-du-chauffage-par-induction>
- (7): <https://www.goudsmitmagnets.com/fr/wiki/149/courant-de-foucault>
- (8): <https://www.qualisco.com/lexique/courants-foucault>
- (9) https://www.collegedestcyr.net/blogs/physique_chimie/wp.../ch-3-act-2-effetjoule.pdf
- (10) **PHILIPPE AURIOL, NOEL BURAIS**, “ La Compatibilité Electromagnétique en Chauffage par Induction, Partie A : Corps Humain ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- (11) **G. DEVELEY**, “ L’Induction : Effets Thermiques et Mécaniques. Rappel des Bases Théoriques ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- (12) **A. BAZZINE, N. BOUANANE, A. BELKEBIR** Contribution à l’Etude des Phénomènes de Chauffages par Induction Faculté des Sciences Appliquées , Département de génie électrique, Université de Ouargla
- (13) **BAHAMMA HACENE/** Etude géométrique des inducteurs utilisés dans une cuisson par induction/ Mémoire master/ UNIV -BISKRA/2014

- (14) **VALERIE LABBE.** Modélisation numérique du chauffage par induction : approche éléments finis et calcul parallèle. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002. Français. ffNNT : 2002ENMP1085ff. fftel-00443740f
- (15) **J. C. SABONNADIERE, J. L. COULOMB,** “ Calcul des Champs Electromagnétiques ”, Technique de l'ingénieur D.3020.pp.I-20
- (16) **ANDRE VANDER VORST,** “ Electromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d'Hyperfréquences CABAY, Librairie-Editeur, Louvain-La-Neuve, 1985.
- (17) **G. D. G.TOUZOT,** “ Une Présentation de la Méthode des Eléments Finies ”, Maloine S.A. Editeur Paris, France,1984.
- (18) **FRANK KREITH ,** “ Transmission de la Chaleur et Thermodynamique ”, Edition MASSON et SIE Editeur, Paris, France, 1967.
- (19) **LYES KHEZZAR ,** “ Procèdes de Transfert de Chaleur et de Masse ” , Collection de Cour de Physique, Université de Constantine, 1988.
- (20) **JEAN CRABOL,** “ Transfert de Chaleur ”, tome1- Les Principes, tome2- Applications Industrielles, MASSON, Paris, 1989.
- (21) **MOHAMED RACHID MEKIDECHE,** “ Contribution à la Modélisation Numérique de Torches à Plasma d'Induction ” Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1993.
- (22) **ABDELLAH CHENTOUF,** “ Contribution à la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d'un Applicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1994.
- (23) **N. O. MATHEW SADIKU,** “Numerical Techniques in Electromagnetics”, CRC, London, 1992.
- (24) **N. PISKOUNOV,** “ Calcul Différentiel et Intégral ”, Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.
- (25) **DANIEL EUVRARD,** “ Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles Différences Finies Elément Finis ”, Masson, Paris, France, 1987.
- (26) **M.COEVOET,** “ La Place de l'Induction dans l'Industrie ”, Congrès International,” L'induction dans les procédés industriels” Paris France Mai 1997

BIBLIOGRAPHIE

- (27) **SUHAS V. PATANKAR**, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences.
- (28) **M. FELICHI**, “ La Modélisation Numérique des Phénomènes Couplés ”, Congres International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- (29) **M. FELIACHI, G. DEVELEY**, “ Magneto-Thermal Behavior Finite Element Analysis for Ferromagnetic Materials in Induction Heating Devices ”, IEEE Transaction on magnetic Vol.27, N°6, p : 5235-5237, November 1991.
- (30) **M. MOLFINO**, “ Non Linear Coupled Thermomagnetic Problems Under Pulsed Conditions- Comparison of Different Finite Element Analysis Strategies ” March 1990.
- (31) **K. SRAIRI, M. FELIACHI** “ Numerical Coupling Modes for Analyzing Dynamic Behaviors of Electromagnetic Actuators ”, IEEE transaction on magnetics, Vol.34, No.5, September 1998.
- (32) **CHATORT. Aciers Inoxydables** : Généralités et Vitesses de Fissuration. Copyright EDF1993ISSN 1161-0611.
- (33) Matériaux N° 4.06. **INOX • Acier inoxydable**. Fiche éditée par la SPW - DGO6. Octobre 2010.
- (34) **OUCHEN MOHAMED**. Effet du ph du milieu sur la corrosion de l’acier inoxydable 304 L. Mémoire Magistère en Mécanique, Université Hadj Lakhdar Batna 2013.
- (35) **I. GRINBERG**, L’aluminium. Un si léger métal, Découvertes Gallimard, 2
- (36) **CHRISTIAN VARGEL** Propriétés générales de l’aluminium et de ses alliages. TECHNIQUES DE L’INGENIEURL’EXPERTISE TECHNIQUE ET SCIENTIFIQUE Réf : M4661 v1. 10 déc. 2005.
- (37) **HABIBA .BECHA**, “Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Thermiques Couplés par la Méthode des Volumes Finis et de la Paramétrisation dans les Systèmes Amagnétiques de Chauffage par Induction”, Mémoire de Magister, Spécialité électrotechnique, Université de Biskra, 2001.
- (38) **L. ALLOUI, F. BOUILLAULT AND S.M. MIMOUNE**., “Modélisation 3D par la méthode des volumes finis des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique”, Publisher in Revue internationale de Génie électrique, RIGE, 2009.
- (39) **LOTFI ALLOUI**, “Modélisation tridimensionnelles par la méthode des volumes finis des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les dispositifs de chauffage par induction», Thèse de magister 2002-2003 , Université de Biskra.

BIBLIOGRAPHIE
