

STABILITE ELASTOPLASTIQUE DES BARRES COMPRIME-FLECHIES A IMPERFECTIONS INITIALES

CHEIKH-ZOUAOU M.; CHIKH N.¹ ; ZOUBOVITCH V.²

⁽¹⁾Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions-Université Mentouri

⁽²⁾. Département de Mécanique Générale - Université de Moscou - Russie

1 INTRODUCTION

Les barres comprimées sont des éléments très répons dans les structures de génie civil. Bien que la barre constitue l'élément le plus simple, son étude permet d'obtenir des résultats d'une grande importance pratique qui peuvent servir de base pour le calcul des structures plus complexes (plaques, coques). La vérification de la stabilité des éléments comprimés se présente très fréquemment en pratique. Ce phénomène est très multiforme et bien qu'il soit bien connu depuis environ deux siècles, il continue à faire l'objet de recherches au niveau des notions et de la technologie (les normes ne donnent que peu d'informations).

Dans cet article, on s'intéresse essentiellement à l'étude de la méthodologie générale moderne du calcul des structures à parois minces en tenant compte des particularités liées au phénomène d'instabilité réelle géométrique et mécanique.

2 CRITERES CLASSIQUES DE STABILITE

Le flambage élastique est un phénomène d'instabilité élastique qui se manifeste pour une certaine charge. La théorie montre que la barre reste rectiligne jusqu'à ce la charge atteint une valeur critique au sens d'Euler à partir de laquelle la pièce s'incurve brusquement et s'effondre [1]. On peut dire que Euler a remplacé le problème réel de stabilité par un autre problème mathématique à savoir le problème d'unicité des formes d'équilibre lorsque l'état critique se détermine par bifurcation des formes d'équilibre et le calcul des charges critiques se ramène au problème aux valeurs propres.

En réalité le problème est un phénomène de flexion composée dû essentiellement aux imperfections géométriques inévitables et au fur et à mesure que la charge augmente les déplacements transversaux croissent d'une manière accentuée. Pour les barres réelles ayant une valeur de l'élanement dans un intervalle des valeurs les plus répons les courbes de flambement ont un point limite dont l'existence est normalement liée à l'apparition des déformations plastiques. Finalement l'approche se basant

sur le point de bifurcation ne s'applique pas au comportement réel ayant en vue le caractère irréversible des déformations plastiques.

3 CRITERES DE LA STABILITE INELASTIQUE

Beaucoup de chercheurs ont essayé de porter des modifications à la théorie de flambage élastique. On peut citer *ENGESSER* qui considère qu'au moment de la bifurcation l'état reste homogène et que le processus commence à se dérouler avec un nouveau module appelé module tangent et qui correspond à la valeur de E au voisinage de la limite de proportionnalité $\sigma = \frac{\pi^2 Et}{\lambda^2}$ et

$Et = \frac{d\sigma}{dt}$. Par la suite, *Jasinsky* fait remarquer l'erreur

d'*Engesser* dans sa formulation ou il ne tient pas compte du caractère irréversible des déformations plastiques et du phénomène de déchargement élastique. Dans la même période *Engesser* d'abord et Von Karman ensuite tentèrent de corriger cette formulation et proposèrent la théorie du module réduit dépendant à la fois du module tangent Et et du module de déchargement E . En étudiant le comportement d'un modèle simple de barre idéale en fonction de la variation de la charge de compression *Shenley* [2,3] démontre que la charge critique minimale est celle qui correspond au module tangent et qui déclenche ainsi le processus de flambement, d'où l'existence de tout un spectre de charges critiques. *Zoubtchaninov* [4] examine le phénomène de la vitesse de chargement à montre que si ($\Delta P \cong P' = 0$) la charge critique au sens généralisé d'Euler correspond à la charge de Karman ; que ($\Delta P \cong P' > 0$) c'est le début du processus de flambement avec la charge qui augmente dans le diapason $[P_t, P_k]$, et que dans le cas où ($\Delta P \cong P' < 0$) l'état critique se trouve dans l'intervalle $[P_k, P_E]$.

Il est évident de ce qui précède qu'on ne peut parler d'un critère universel, car dans le cas général il n'est pas suffisant de considérer seulement la stabilité d'un état d'équilibre mais il faut étudier tout le processus de chargement ou de déformation.

4 IMPERFECTIONS

Les imperfections initiales peuvent être considérées comme des perturbations du processus de la déformation de la barre idéale. Le problème consiste donc à déterminer statistiquement la valeur la plus probable pour des ensembles de barres bien définis du moment fléchissant initial c'est à dire de l'excentricité fictive du chargement, de la pré-flèche, tenant compte de tous les aléas. Parmi les paramètres qui sont considérées aussi aléatoires on peut citer les contraintes rémanentes [5] provenant du procédé de fabrication (refroidissement, redressage, soudage, etc). Ces contraintes résiduelles dans une section de la barre constituent un système auto-équilibré.

L'outil approprié pour affronter ce problème, ou les valeurs aléatoires interviennent, est le calcul probabiliste [6] qui permet de procéder en connaissance de cause au choix de la marge de risque qui doit être accordé à l'imprévu.

5 METHODES DE LA RESOLUTION DES PROBLEMES DE FLAMBEMENT

Elles sont nombreuses mais le niveau est insuffisant car il manque toujours la vérification des hypothèses de base et des conclusions de caractère général. On utilise souvent du diagramme de Prandtl (parfaitement élastique) ou le diagramme bilinéaire à écrouissage linéaire ce qui sous estime la charge critique et amène a la notion conventionnelle de l'articulation plastique pour le matériau idéal. Les valeurs des charges critiques calculés d'après le diagramme bilinéaire dépassent de 5 à 7% ceux s d'un matériau idéal [1].

6 EQUATIONS FONDAMENTALES DU PROCESSUS DE FLAMBEMENT DES BARRES ELASTOPLASTIQUES A IMPERFECTIONS:MODELE MATHEMATIQUE

Avant d'élaborer n'importe quel calcul on a besoin de connaître certaines données principales qui sont : la géométrie de la structure; la loi de chargement; le matériau et sa loi de comportement et certaines hypothèses principales.

On considère une barre comprimée fléchié dont le fléchié dont le flambement se dévoile dans le plan xoz.

Les principaux paramètres du processus qui se développent dans le temps généralisé t sont :

$U = U(t, x)$: déplacement axial

$W = W(t, x)$: flèche en un point d'abscisse x

$\Delta(t)$: rapprochement des extrémités de la barre

$P(t)$: force de compression

Si on néglige les effets d'inertie, l'influence de l'effort tranchant à cause la petitesse des déplacements et l'action du fluage ; l'hypothèse des sections planes permet de décrire la déformation axiale par l'expression suivante: $\varepsilon(t, x) = \varepsilon_0 + Z\Phi + \varepsilon_r$,

$\varepsilon_0 = \varepsilon(t, x, 0)$: déformation de l'axe de la barre

$$\Delta(t) = -\int_0^l U_x dx = \int_0^l \varepsilon_0 dx + \frac{1}{2} \int_0^l (W_x'^2 - W_{ox}'^2) dx$$

$\Phi(x)$: courbure de l'axe due au flambement de la barre

$\varepsilon_r(x, z)$: déformation rémanente.

En tenant compte de la non-linéarité géométrique [7], l'expression de la déformation axiale devient :

$$\varepsilon_0(t, x) = -U'_x - \frac{1}{2}(W_x'^2 - W_{ox}'^2).$$

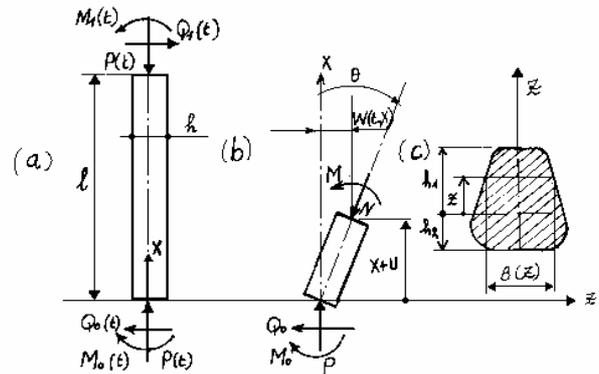


Figure 1 : Schéma de chargement de la barre

Pour la courbure de l'axe on utilise la formule linéarisée qui est valable pour les déplacements assez faibles: $\Phi(t, x) = W_{xx}'' - W_{oxx}''$; où $W_o(x) = W(o, x)$ décrit la forme initiale de la barre correspondante à la non rectitude de son axe. Le raccourcissement des extrémités (mesure du flambement) est donc :

Le diagramme de la Figure 2 décrit les propriétés du matériau, où σ_s et ε_s correspondent à la limite d'élasticité.

En supposant que lors du chargement alterné le principe de Mazing soit valable, les propriétés en compression et en traction sont les mêmes, bien que la méthode proposée admet la généralisation à n'importe quel type de diagramme et de condition de chargement.

$$\delta\sigma(t, x, Z) = -E\delta\varepsilon \text{ déformation élastique (AA}_1, \text{BC)}$$

$$= -E_t(\varepsilon)\delta\varepsilon \text{ chargement continu ABK compression}$$

$$A_1B_1K_1 \text{ traction (déformations plastiques primaires)}$$

$= -E_t(\tilde{\varepsilon})\delta\varepsilon$ plasticité secondaire (CD)

$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{\gamma}\right)$ représentent respectivement le module tangent et la déformation réduite, le terme γ indique le paramètre de chargement cyclique (égale à 2 d'après Mazing).

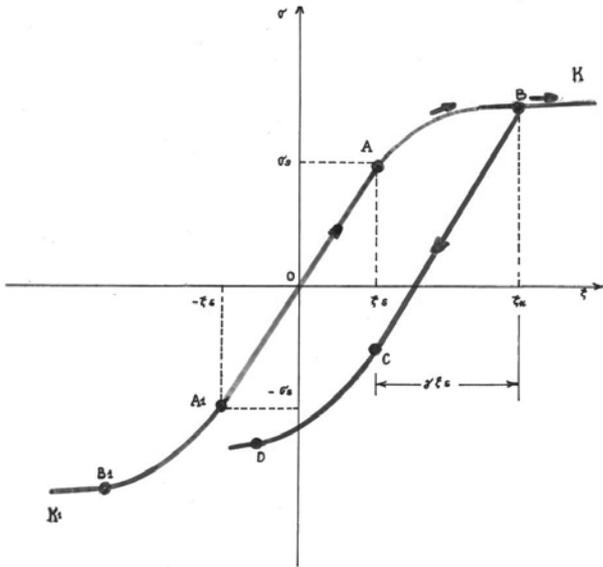


Figure 2 : Diagramme de comportement du matériau

7 DEVELOPPEMENT DES ZONES D'ELASTOPLASTICITE

Au stade initial du processus de flambement tous les points se trouvent en état élastique, puis du côté concave ($Z \sin \phi > 0$) apparaît la zone des déformations actives de compression Z_2 où $\varepsilon(t, x, Z_2) = \varepsilon_0 + Z_2 \Phi = \varepsilon_s$. Par la suite cette frontière s'étend vers le côté convexe pour les barres assez courtes possédant de petites imperfections initiales et dans certaines sections elle peut franchir l'axe de la barre. Comme il peut y avoir de ce côté convexe ($Z \sin \phi < 0$) une zone dite de déchargement avec la frontière Z_1 où $\varepsilon(t, x, Z_1) = \varepsilon_0 + Z_1 \Phi = 0$. Il y a lieu de mettre en évidence cette zone uniquement pour le déchargement à partir du domaine inélastique.

Au cours du développement du déchargement, sa frontière peut rencontrer celle de la zone de compression dont la position extrême Z_2 définit un domaine $(Z_1 - Z_2) \text{signe } \phi \geq 0$, où l'apparition des déformations plastiques secondaires de traction est toujours possible. Dans le cas où la section n'a pas été totalement plastifiée, du côté convexe de la barre, la formation de la zone de

déformation plastique primaire de traction avec la frontière Z_3 reste possible.

$\varepsilon(t, x, Z_3) = -\varepsilon_s$ si $(Z_3 - Z_2) \text{signe } \phi \leq 0$

$\varepsilon(t, x, Z_3) = \varepsilon^*(x, Z_3) - \gamma \varepsilon_s$ si $(Z_3 - Z_2) \text{signe } \phi \geq 0$

$\varepsilon^*(x, Z_3)$: déformation correspondant au début du déchargement

Pour le calcul des rigidités on utilise un bloc-schéma de l'algorithme «frontières» on introduisant un indicateur k_1 .

$k_1 = 0$ état élastique

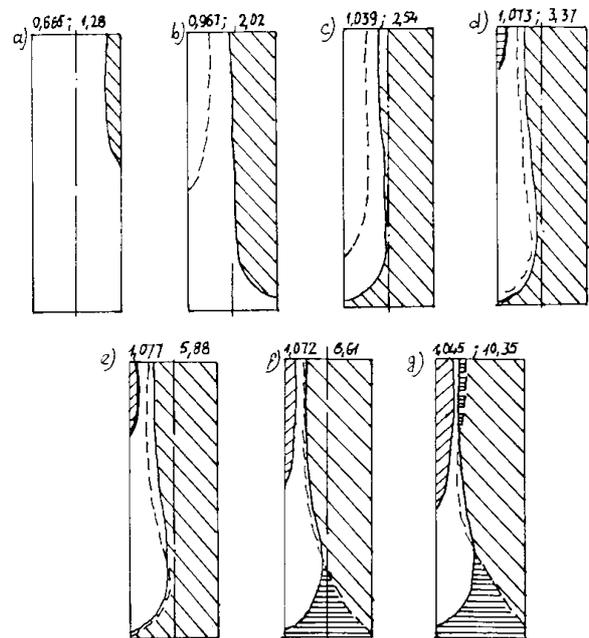
$k_1 = 1$ plasticité primaire des deux côtés (compression, éventuellement traction) pas de déchargement

$k_1 = 2$ il y a une zone de déchargement et une partie seulement de la section est plastifiée

$k_1 = 3$ il y a une zone de déchargement et toute la section est plastifiée

$k_1 = 4$ il y a une zone de plasticité secondaire

A titre illustratif, on présente sur la figure suivante les résultats de développement des zones pour le cas de l'acier 1 avec $\lambda = 20.4$ et $f_0 = 0.125$.



8 EQUATIONS DU PROCESSUS DE FLAMBEMENT

Les équations d'équilibre en termes de paramètres finis permettent d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} N(t,x) &= P(t) \\ M(t,x) &= M_o(t) + Q_o(t).X + P(t)W(t,x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les relations entre les efforts internes et les contraintes sont comme suit :

$$N = \int_A \sigma dA \quad ; \quad M = \int_A \sigma Z dA \quad (2)$$

En passant à l'équilibre entre les variations de ces paramètres on aura :

$$\delta N = \int_A \delta \sigma dA \quad ; \quad \delta M = \int_A \delta \sigma Z dA \quad (3)$$

Il est plus commode de considérer les conditions d'équilibre écrites en terme de variations des paramètres du problème ce qui permet de passer aux problèmes mathématiques bien connus tel que par exemple le problème de Cauchy.

Considérons les équations (1) sous la forme variationnelle, ce qui correspond physiquement à l'étude des prolongations du processus de flambement à partir d'un état fixe:

$$\delta N = \delta P \quad \text{et} \quad \delta M = \delta M_o + X \delta Q_o + W \delta P + P \delta W \quad (4)$$

En se servant des équations du type (1) la plupart des chercheurs négligent d'habitude le terme $W \delta P$ Ceci entraîne la perte de certaines particularités du comportement de la barre liés à la variation de la charge ; surtout s'il s'agit d'étudier le comportement de la barre au voisinage des points limites ou de bifurcation. En remplaçant (1) dans (2) on a:

$$\delta N = \int_A (\delta \sigma_o + Z \delta \phi) E_t dA = \delta \varepsilon_o \int_A E_t dA + \delta \phi \int_A E_t Z dA$$

$$\delta M = \varepsilon_o \int_A E_t Z dA + \delta \phi \int_A E_t Z^2 dA$$

$$\left. \begin{aligned} \delta N &= F_o \delta \varepsilon_o + F_1 \delta \phi \\ \delta M &= F_1 \delta \varepsilon_o + F_2 \delta \phi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$F_o = \int_A E_t dA \quad F_1 = \int_A E_t Z dA \quad F_2 = \int_A E_t Z^2 dA \quad (6)$$

Pour les sections symétriques

$$F_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_t(z) Z^n dz \quad , \quad (n=0,1,2) .$$

F_n définissent les rigidités généralisées de la section de la barre. Dans le cas de l'élasticité, les équations (6) deviennent

$$F_o = EA \quad (\text{rigidité à la compression-traction})$$

$$F_1 = ES \quad (\text{S moment statique/cdg qui est nul})$$

$$F_2 = EI \quad (\text{rigidité flexionnelle})$$

La prolongation réelle du processus de flambement est prise en considération en passant des variations aux dérivées;

$$\delta \varepsilon_o = \dot{\varepsilon}_o \delta t \quad , \quad \delta \phi = \dot{\phi} \delta t = \dot{W}'' \delta t \quad , \quad \delta P = \dot{P} \delta t \quad \text{etc...}$$

En substituant (4) dans (5) et en résolvant le système d'équations obtenu par rapport aux paramètres principaux de flambement $\delta \varepsilon_o$ et $\delta \phi$ on arrive aux équations régissant le processus de flambement :

$$\dot{W}''' = \frac{[F_o(\dot{M}_o + \dot{Q}_o X + P \dot{W}) + \dot{P}(F_1 + F_o W)]}{F_o F_2 - F_1^2} \quad (7a)$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \frac{[F_1(\dot{M}_o + \dot{Q}_o X + P \dot{W}) + \dot{P}(F_2 + F_1 W)]}{F_o F_2 - F_1^2} \quad (7b)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité nous avons $\dot{\varepsilon}_o = \frac{\dot{N}}{EA}$,

$\dot{W}''' = -\frac{\dot{M}}{EI}$ qui résultent des équations bien connues

$$\varepsilon_o = \frac{N}{EA} \quad , \quad W''' = -\frac{M}{EI} \quad \text{l'équation (7a) décrit l'axe}$$

déformé de la barre et peut être considérée comme principale cependant l'équation (7b) comme auxiliaire.

9 METHODE DE RESOLUTION

Les coefficients des équations ne peuvent être déterminés que sous forme algorithmique, les équations du processus n'étant pas classifiées on ne peut donc appliquer directement les méthodes mathématiques traditionnelles. L'approche la plus commode consiste à résoudre en premier lieu les problèmes aux limites par les méthodes connues telle que Boubnov Galerkin ou la méthode des approximations successives, puis résoudre le problème de Cauchy par une méthode se basant sur l'algorithme Rung Kutta [8].

La méthode de Boubnov-Galerkin est l'une des méthodes les plus efficaces pour la résolution des problèmes aux conditions aux limites [9,10]. Elle se base sur la représentation de la solution sous forme d'une combinaison linéaire d'un système de fonctions de coordonnées dont le choix peut être approuvé par exemple par l'analyse des données expérimentales. On représente la solution de l'équation principale (7 a) sous la forme :

$$\dot{W}(t, X) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \dot{\varphi}_i(X) \quad (8)$$

Où les fonctions de coordonnées φ_i satisfaisant aux conditions aux limites peuvent être choisies par exemple comme étant les fonctions du problème élastique alors :

$$\dot{W}(t, X) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \dot{\varphi}_i(X) \quad (9)$$

En substituant (8) et (9) dans (7) et en réalisant la procédure de BOUBNOV-GALERKINE on obtient :

$$\sum_{i=1}^N A_i [D_{mi} - PK_{mi}] - P [C_m + \sum_{i=1}^N K_{mi} A_i] \quad (10)$$

Où $m = 1, 2, \dots, N$. C'est un système d'équations différentielles non – linéaire par rapport aux paramètres A_i et P ou les non – linéaire figurent d'une façon implicite dans les coefficients K_{mi} , C_m , et D_{mi} .

$$K_{mi} = \int_0^l \frac{\varphi_m \varphi_i dX}{F_1^2 / F_0 - F_2} ; D_{mi} = \int_0^l \varphi_m \varphi_i'' dX ; C_{mi} = \int_0^l \frac{M_0 + Q_0 X + F_1 / F_0}{F_1^2 / F_0 - F_2} \varphi_m dX \quad (11)$$

Dans le stade initial du processus de flambement on peut poser $t = P$ d'où l'équation (3,1,3) devient :

$$\sum_{i=1}^N A_i [D_{mi} - PK_{mi}] = C_m + \sum_{i=1}^N K_{mi} A_i \quad (12)$$

$m = 1, 2, \dots, N$. Ces équations peuvent être résolues par rapport aux A_i d'une façon algorithmique. Les conditions initiales sont :

$$A_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

On est donc amené au problème de CAUCHY, dont la solution peut être obtenue par une des méthodes pas à pas en combinaison avec les approximations successives.

La déformation axiale et le rapprochement des extrémités se déterminent d'après les relations suivantes :

$$\varepsilon_0(P, X) = \int_0^l F_0^{-1} dP - \sum_{i=1}^N \varphi_i'' \int_0^l A_i F_1 F_0^{-1} dP + \varepsilon_{00}(X)$$

$$\Delta = \int_0^l \varepsilon_0 dX + \frac{1}{2} \int_0^l [(\sum_{i=1}^N A_i \varphi_i')^2 - (\sum_{i=1}^N A_{0i} \varphi_i^2)] dX$$

Lors de réalisation des équations (12) à l'approche du point limite il apparaît des particularités liées à l'augmentation des dérivées par rapport à P ce qui amène à une interruption de la solution et ne permet pas de fixer l'état limite et de passer au stade post – critiques. Dans cette situation Vorovitch [11] recommande de procéder au changement de la variable indépendante. Il devient plus commode de prendre dans la suite en qualité de paramètre de temps généralisé la mesure de flambement de barre Δ , alors $\tau = \Delta$,

$P = P(\Delta)$, et pour fermer les équations (10) on ajoute la relation pour Δ dérivée par rapport à Δ :

$$1 = \int_0^l \varepsilon_0 dX + \int_0^l w_x' w_x' dX$$

La déformation axiale sera :

Ou Δ_r ; ξ_0 correspond au moment de passage à $t = \Delta$ avec les conditions initiales

$$A_i(\Delta_r) = A_{ri}, \quad P(\Delta_r) = Pr.$$

$$\varepsilon_0(\Delta, X) = \int_0^l \dot{P} F_0^{-1} d\Delta - \sum_{i=1}^N \varphi_i'' \int_{\Delta_r}^{\Delta} A_i F_1 F_0^{-1} d\Delta + \varepsilon_{0r}(X)$$

10 RESULTATS NUMERIQUES :

On considère les résultats numériques obtenus sur la base de la réalisation des algorithmes des barres articulées de section rectangulaire. Les paramètres dimensionnels suivants sont utilisés :

$$P^* = \frac{P}{P_s}, \quad P_s = \sigma_s A = E \varepsilon_s A ; \quad \xi = \frac{X}{L} \quad (0 < \xi < 1)$$

$$W^* = \frac{W}{h} ; \quad \Delta^* = \frac{\Delta}{L} ; \quad M^* = \frac{M}{P_s L} ; \quad F_n^* = \frac{F_n}{[b(0)h^{n+1}]E}$$

P_s : charge qui correspond à la limite d'élasticité

L : longueur de la barre

W : flèche de la barre

h, b : dimensions de la section transversale de la barre

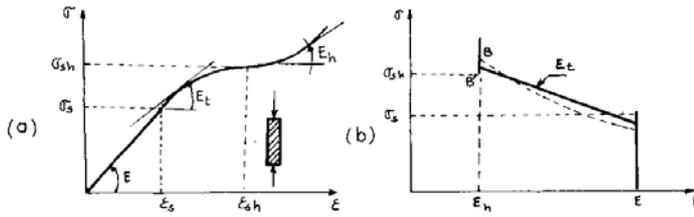
Δ : rapprochement des extrémités de la barre

Les paramètres de l'algorithme ont été choisis d'après les résultats des essais numériques

$\Delta P = 0.01$, $\gamma = 10^{-4}$, $\beta = 0.017$; Dans la dernière étape du processus après le changement du paramètre d'intégration on a choisi le pas initial d'après la flèche $\Delta F = 10^{-6}$ que l'on a augmenté après le passage du point limite jusqu'à la valeur $\Delta F = 10^{-4}$.

10.1 Approximation du diagramme Contrainte-Déformation

Cette approximation du diagramme $\sigma - \varepsilon$, concerne celle du module tangent. Pour la plupart des matériaux ductiles on a les diagrammes suivants.



10.2 Comportement des barres lors du processus de flambement

Les principaux types d'imperfections géométriques initiales des barres sont l'écart de la rectitude idéale de son axe et l'excentricité du point d'application de la charge de compression. Il est raisonnable de considérer la première harmonique seulement, ce qui correspond au niveau énergétique minimal. Pour la barre bi articulée on prend $W_o = f_o \cdot \sin \pi \xi$

Les courbes de flambement de ces deux types d'aciers sont élaborées et représentées en coordonnées P-F (a) et P-Δ (b) ; dans l'ordre de l'augmentation de l'élongement. A titre d'illustration on présente sur les figures 3 et 4 les résultats obtenus pour le cas de l'acier type 1 avec $\lambda=20.4$ et $\lambda=43.3$. Les courbes numérotées de 1 à 5 correspondent respectivement aux valeurs $f_o = 10^{-4}, 0.01, 0.125, 0.05$ et 0.333 . Les lignes continues illustrent les résultats tenant compte du déchargement du matériau et de la plasticité secondaire, cependant celles en pointillés n'en tiennent pas compte. Les symboles (Δ, +, O) utilisés sur les courbes fixent les moments d'apparition dans la barre respectivement des déformations plastiques barre de compression, de traction (primaire et secondaire) et de déchargement à partir du domaine inélastique.

$$E_t(\epsilon) = \begin{cases} E & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_s \\ -k\epsilon + C & \epsilon_s < \epsilon \leq \epsilon_{sh} \\ E_h & \epsilon > \epsilon_{sh} \end{cases}$$

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} k\epsilon & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_s \\ -\frac{1}{2}k\epsilon^2 + C\epsilon & \epsilon_s \leq \epsilon \leq \epsilon_{sh} \\ \sigma_{sh} + E_h(\epsilon - \epsilon_{sh}) & \epsilon > \epsilon_{sh} \end{cases}$$

Les paramètres de départ $E, \epsilon_s, \sigma_h, \epsilon_h, E_h$ se déterminent à partir du diagramme expérimental. Le triplé $(\sigma_h, \epsilon_h, E_h)$ correspond au point de passage au tronçon d'écroutissage les coefficients k, C, D se déterminent à partir des conditions :

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\epsilon_s) &= E \cdot \epsilon_s & E_t(\epsilon_s) &= E \\ \sigma(\epsilon_{sh}) &= \sigma_h + E_h(\epsilon_{sh} - \epsilon_h) & E_t(\epsilon_{sh}) &= E_h \end{aligned} \right\}$$

$$k = \frac{E - E_h}{\epsilon_{sh} - \epsilon_s}, \quad C = \frac{E \cdot \epsilon_{sh} - E_h \cdot \epsilon_s}{\epsilon_{sh} - \epsilon_s},$$

$$D = -\frac{(\epsilon - \epsilon_{sh}) \cdot \epsilon_s^2}{2(\epsilon_{sh} - \epsilon_s)}, \quad \epsilon_{sh} = -\frac{(\sigma_h - \epsilon_h \cdot E_h)}{E - E_s} - \epsilon_s$$

Les données concernant les matériaux utilisés sont regroupées dans le tableau suivant :

Matériaux	$\epsilon_{sh} \cdot 10^3$	Paramètres d'approximation				
		E_h/E	$k \cdot 10^{-3}/E$	C/E	$-D \cdot 10^7 / E$	$\epsilon_{sh} \cdot 10^3$
Acier type I	1.75	0.0265	0.573	2.002	0.877	3.450
Acier type II	1.30	0.0104	0.546	1.710	0.461	3.113

Le choix du matériau est dû aux considérations de la variation de la classe, du module d'écroutissage E_h . Les calculs ont été effectués pour les 5 valeurs de l'élongement suivantes : $\lambda = 20.4, 86.6, 57.7, 43.3, 28.9$.

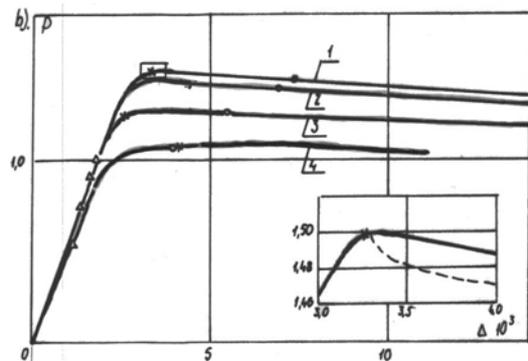
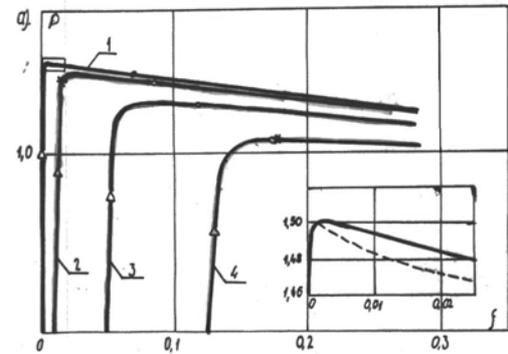


Figure 3 : $\lambda=20.4$

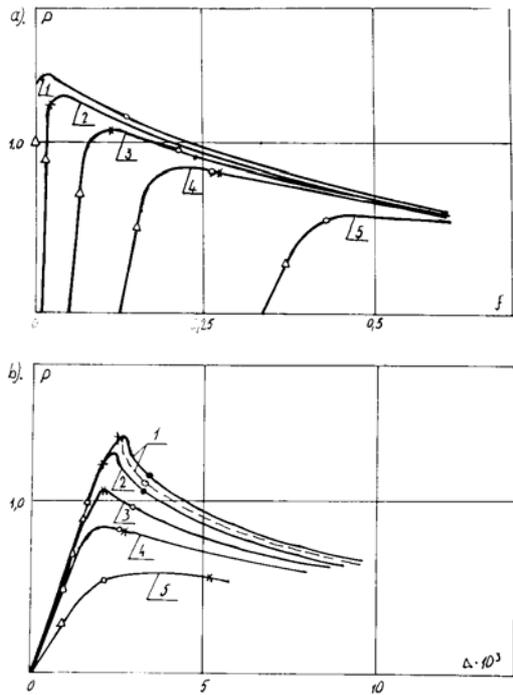


Figure 4 : $\lambda=43,3$

On présente à titre illustratif sur les Figures 5 et 6 Les résultats courbes pour le cas de charges excentrées sur les barres d'acier type 1 avec $\lambda=28,9$ et $43,3$. Les courbes numérotées 1 à 3 correspondent respectivement aux valeurs d'excentricité (e) = 10^{-4} , 10^{-1} , 10^{-2} . Le caractère du processus reste ici le même que pour les barres ayant des déformations initiales ; ce qui peut être considéré comme la démonstration de la possibilité de réduire dans les calculs pratiques un type d'imperfection à un autre.

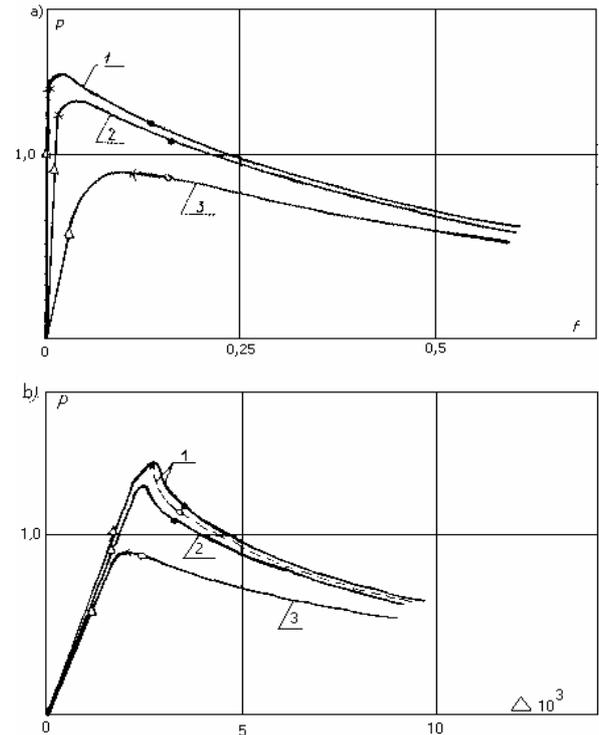


Figure 6 : $\lambda=43,3$

CONCLUSION

Actuellement le problème de la théorie de stabilité des systèmes élastoplastiques dicte la nécessité de la considération de tout le processus qui se développe dans le temps. Une des particularités des barres élastoplastiques, c'est la possibilité de l'existence du déchargement élastique du matériau dans certains domaines. La prise en compte de ce phénomène ramène à une augmentation de la rigidité instantanée de la barre ce qui nous amène en même temps à l'apparition des zones de déformations plastiques secondaires anticipées.

L'étude qualitative du comportement des barres comprimées fléchies compte tenu du développement des zones de déformations élastoplastiques n'est possible que sur la base des équations du processus lorsque la charge sur la barre varie d'une façon continue (ce qui n'exclut pas une discrétisation pendant la réalisation numérique).

Même une légère augmentation de la charge sur la barre pendant son processus de flambement peut donner une variation finie de la position des frontières des zones, par conséquent une variation essentielle des rigidités de la barres caractérisant sa résistance au flambement. On a étudié indépendamment deux paramètres principaux d'imperfection, à savoir la non rectitude initiale et l'excentricité de la charge pour une barre d'acier du type I ayant différents élancements; et on a constaté que le caractère du processus de flambement pour les barres chargées excentriquement reste le même que celui des barres à non rectitude initiale. Ceci peut être considéré comme la démonstration pour de la possibilité de réduire

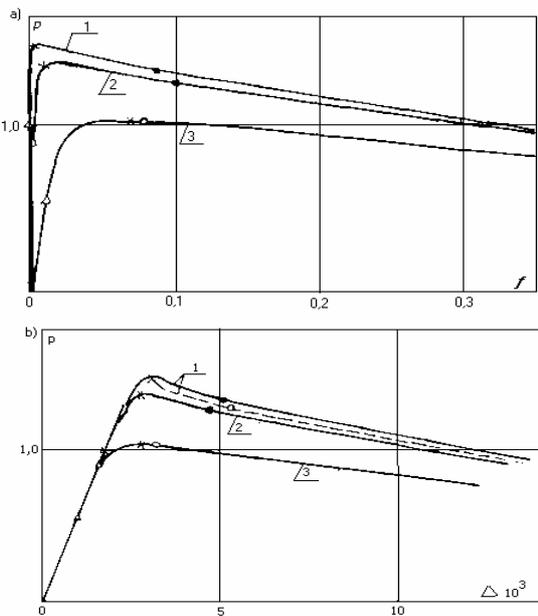


Figure 5 : $\lambda=28,9$

dans les calculs pratiques un type d'imperfection à l'autre.

La divergence maximum des valeurs des charges critiques en tenant compte du déchargement élastique et de la plasticité secondaire et sans en tenir compte est de 1.7%. En même temps dans certains cas la différence d'après le déplacement est plus considérable avec cela le calcul d'après le modèle du corps élastique linéaire sous estime dans une certaine mesure la rigidité de la barre.

Dans les calculs pratiques des barres comprimées fléchies dans la classe des chargements monotones on recommande de se servir du modèle du matériau élastique non linéaire sans tenir compte du déchargement et de la plasticité secondaire.

REFERENCES

1. **L'Hermit** : ' flambage et stabilité. Le flambage élastique des pièces droites '1974
2. **Shanley F.R** ; 'The column paradox' .Journal of Aeronautique Sciences Vol 13, N°12, 1946
3. **Shanley F.R** ;' Inelastic column theory.' Journal of Aeronautic Sciences Vol 14, N°5, 1947
4. **Zoubtchaninov. V.G** : 'Stabilité élasto-plastique des barres dans les systèmes déchargables : Elasticité et Inélasticité', M KGU, pp 146-158, 1991
5. **Djalaly .H** : 'Etude de la résistance ultime des barres comprimées. Flambement simple' Construction métallique N°1, 1977
6. **AUGUST. G., BARATTA A.** : 'Théorie probabiliste de la résistance des barres comprimées'. Construction métallique N°2 1971
7. **Zoubovitch V.F** 'Equations principales du Processus de flambement des barres élasto-plastiques : Recherche dans le domaine de plasticité et de Traitement des métaux à la pression ' TOULA IPI, pp 98-104, 1980
8. **Cheikh-Zouaoui M.** ; 'Stabilité Elasto-Plastique des Barres Comprimées Fléchies à Imperfections Initiales'.
9. **Davis A.M.** : 'A Numirical Investigation of Errors Arising in Applying the Galerkin Method of the Solution of Nonlinear Differential Equations. Comput. Math. Appl. Mech. Eng. Vol 11,N°3 pp341-350, 1977
10. **Burden R.L** : 'Numerical Analysis', Wadsworth International, pp 598, 1977
11. **Vorovitch I.** , 'Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires de la théorie d'Elasticité par la Méthode du Passage au Problème de Cauchy. Maths et Mécanique Appliquée Vol. 29, N°5, p p894-901, 1965.