

GRAND ÉLÉMENT FINI B14 APPROPRIÉ A LA RESOLUTION DES PROBLEMES DE MECANIQUE DES SOLS

Dr M.T. BELARBI* & B. LAHOUEL**

(*) Laboratoire LESIA, Département de Génie Civil, Université de Biskra, Algérie

(**) Département de Génie Civil, Université de Batna, Algérie

RESUME

Les éléments hexaédriques les plus couramment utilisés dans la résolution des problèmes tridimensionnels sont l'élément à huit nœuds et l'élément à vingt nœuds de la famille de *Serendip*. L'analyse des solides montre que, l'élément à huit nœuds peut être tout à fait rigide dans certains modes de déformation, nécessitant le plus souvent un raffinement important du maillage, tandis que l'utilisation de l'élément à vingt nœuds peut être très coûteuse, car elle implique 60 degrés de liberté et un ordre assez élevé de quadrature pour éviter les modes parasites. Dans cet article, nous allons présenter un élément intermédiaire de la famille de *Serendip* à quatorze nœuds nommé B14, ces performances sont évaluées pour des problèmes élastiques et élastoplastiques.

1 INTRODUCTION

La figure 1 montre la pyramide de *Pascal* avec les monômes qui peuvent être utilisés dans la construction des fonctions d'interpolation de la famille des éléments finis tridimensionnels. On remarque que le nombre de termes polynomiaux de l'interpolation des éléments tétraédriques correspond exactement au nombre de monômes présent au dessus de certains plans de la Pyramide (4, 10, 20, 35 nœuds), la construction de l'interpolation de tels éléments devient évidente. Cependant, pour les éléments hexaédriques, l'interpolation est faite en négligeant certains monômes de faible degré en faveur de monômes de degré élevé se trouvant à l'intérieur de la pyramide dans des plans plus profonds. Par exemple, l'élément à vingt nœuds néglige les termes ξ^3, η^3, ζ^3 en faveur des termes $\xi^2\eta^2, \eta^2\zeta^2$ et $\zeta^2\xi^2$.

Kidger [1] a cherché de nouveaux éléments finis qui soient moins encombrants que l'élément à 20 nœuds, mais plus sophistiqués que l'élément à 8 nœuds. Il a proposé des éléments à 14 nœuds (**B14**), 8 nœuds aux sommets de la brique et 6 nœuds aux centres des faces. Pour que ces nouveaux éléments soient attractifs, il faudrait, bien sûr, que leurs interpolations impliquent un degré moins élevé (éviter le recours à l'intégration sélective réduite) et avoir une flexibilité raisonnable (éviter le besoin d'introduire des modes compatibles).

Comme les fonctions d'interpolation de l'élément à 14 nœuds ne peuvent pas être déterminés sous forme de produit de facteurs (obtention directe à partir des polynômes le Lagrange par exemple), nous allons utiliser la méthode numérique générale en coordonnées naturelles. La base polynomiale de l'interpolation est déterminée selon le principe suivant : il est évident d'inclure, dans la base

polynomiale de l'élément **B14**, les termes en dessus du 2^{ème} plan de la pyramide de *Pascal*, c'est-à-dire 1, $\xi, \eta, \zeta, \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta, \eta\zeta, \zeta\xi$, auxquels on ajoute le terme central dans le prochain plan qui est $\xi\eta\zeta$, cela fait 11 des 14 termes nécessaires, Kidger [1] a considéré pour le reste des termes quatre possibilités, qui sont les suivantes :

type	termes à inclure		
1	$\xi^2\eta$	$\eta^2\zeta$	$\zeta^2\xi$
2	$\xi\eta^2$	$\eta\zeta^2$	$\zeta\xi^2$
3	ξ^3	η^3	ζ^3
4	$\xi^2\eta\zeta$	$\xi\eta^2\zeta$	$\xi\eta\zeta^2$

Les quatre types d'éléments ont été tous programmés par Smith et Kidger [2], la motivation qui a été derrière l'utilisation du type 3 et du type 4, c'est que ces éléments respectent la condition de l'isotropie géométrique, cependant, le type 3 a donné des résultats inadmissibles ; dans le cas des types 1 et 2, une dépendance directionnelle évidente a été introduite dans les fonctions de forme (non respect de l'isotropie géométrique), ces deux types ont donné de meilleurs résultats que le type 4, il a été noté aussi que les résultats obtenus, dans l'analyse des problèmes en utilisant le type 1 et le type 2, sont presque identiques.

Par ailleurs, la dépendance directionnelle est inadmissible, Smith et Kidger l'ont simplement éliminé, en faisant la moyenne des fonctions d'interpolation et leurs dérivées des éléments type 1 et type 2, ceci a conduit à un nouvel élément symétrique nommé type 5.

Le type 5 n'a pas pu passer le Patch-test en 3D, de légers défauts dans la représentation de l'état de déformation constant ont été mis en évidence, la robustesse de l'élément a été mise en question.

2 FORMULATION DE L'ÉLÉMENT B14 TYPE 6

Smith et Kidger ont proposé une autre alternative pour la construction des fonctions de forme de l'élément à quatorze nœuds. La raison pour laquelle le type 5 n'a pas pu passer le Patch-test est que le déplacement d'un nœud cause de petits déplacements des faces ne contenant pas ce nœud. Alors, pour respecter la condition de l'influence mutuelle (fonctions prenant la valeur unité à l'ordonnée considérée et nulle ailleurs), les nouvelles fonctions de forme doivent impliquer des produits de fonctions qui prennent la valeur zéro au nœud considéré tout en préservant la compatibilité, par exemple, pour le nœud 12 (nœud central de la face supérieure de la brique de la figure 2), une possible fonction de forme s'écrit comme suit :

$$N_{12} = (\xi + 1)(\xi - 1)(\zeta + 1)(\zeta - 1)(\eta + 1)$$

la fonction doit être nulle aux faces du cube $\xi = 1$, $\xi = -1$, $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ et $\eta = -1$; en utilisant l'autre condition qui est $N_{12} = 1$ pour $\eta = 1$, $\xi = 0$ et $\zeta = 0$, nous obtenons après remplacement :

$$N_{12} = \frac{1}{2} \left[(\xi^2 - 1)(\zeta^2 - 1)(\eta + 1) \right]$$

On remarque qu'il y a potentiellement 26 termes polynomiaux dans cette fonction, cette dernière ne contient pas les trois termes ξ^3 , η^3 et ζ^3 du 3^{ème} plan de la pyramide ainsi que les neuf termes impliquant les degrés 3 et 4 de ξ , η et ζ du 4^{ème} plan de la pyramide, mais elle contient les termes $\xi^2\eta^2\zeta$, $\xi\eta^2\zeta^2$ et $\xi^2\eta\zeta^2$ appartenant au 5^{ème} plan de la pyramide de *Pascal*. C'est, donc, tous les termes de la pyramide impliquant les degrés inférieurs à 3 des variables ξ , η et ζ qui sont présents dans l'interpolation.

Maintenant que les fonctions de forme des nœuds aux centres des faces de la brique sont connues, on applique la méthode classique de *Serendip* pour déterminer les fonctions de forme des nœuds aux sommets, elles s'obtiennent par la soustraction de la fonction de forme de l'élément trilineaire à 8 nœuds (**B8**) du nœud considéré et le quart (la fonction de forme du nœud additionnel influe sur 4 nœuds) des fonctions de forme des nœuds voisins qui se trouvent aux centres des faces. Par exemple pour le nœud 4, on obtient :

$$N_4 = \left[\frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \right] - \frac{1}{4} [N_{12} + N_9 + N_{14}]$$

$$N_4 = -\frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta - 1) - \frac{1}{8}(\xi^2 - 1)(\zeta^2 - 1)(\eta + 1) + \frac{1}{8}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)(\zeta + 1) - \frac{1}{8}(\eta^2 - 1)(\zeta^2 - 1)(\xi + 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta - 1)(\xi\eta - \xi\xi - 2\xi - \eta\zeta - 2\eta + 2\zeta + 2)$$

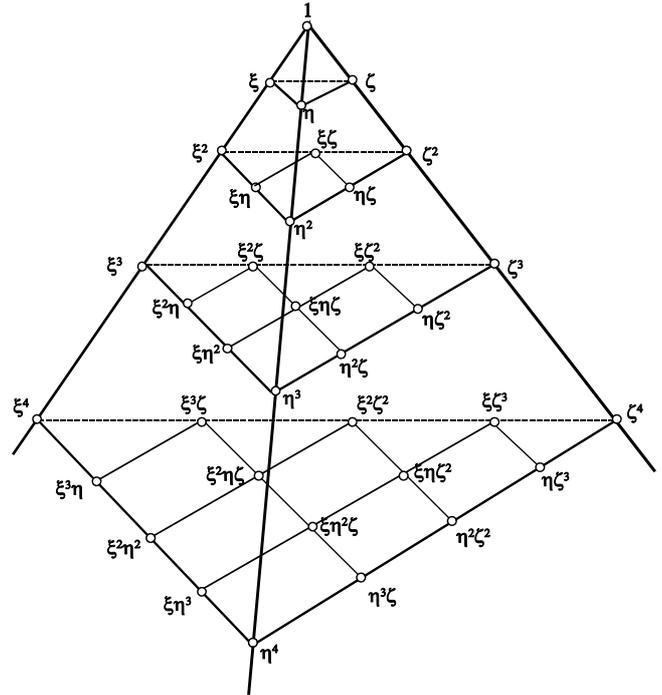


Figure 1 : Pyramide de Pascal

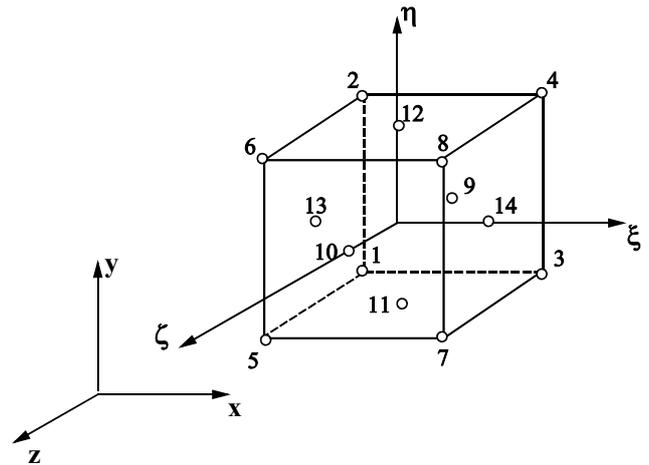


Figure 2 : L'élément à quatorze nœuds

Cette fonction a, potentiellement, le même nombre de termes (26) que la fonction du centre de la face. Les fonctions de forme de ce nouvel élément (type 6) sont exposées en annexe.

La figure 3 montre les forces nodales équivalentes des éléments **B14** type 5 et type 6, ainsi que l'élément conventionnel **B20**. On remarque que les forces surfaciques équivalentes des types 5 et 6 sont tous positives, au contraire l'élément **B20** présente des valeurs négatives (1/3 aux milieux des arêtes et -1/12 aux sommets), ce curieux résultat défie l'intuition et a été toujours une source d'irritation. Similairement, les forces volumiques équivalentes et la matrice masse diagonale (dérivée de la matrice de masse cohérente) de l'élément **B20** ont 1/6 au

centre des arêtes et $-1/8$ aux sommets. Ainsi donc, si un sol élastique est modélisé sous un tel élément, il faudrait s'attendre à des valeurs négatives de la matrice élastique, de même la matrice de masse cohérente ne sera pas définie positive ou semi-définie positive. On peut noter, aussi que l'élément B14 type 5 est particulièrement attractif, parce que toutes les valeurs des forces volumiques équivalentes sont positives.

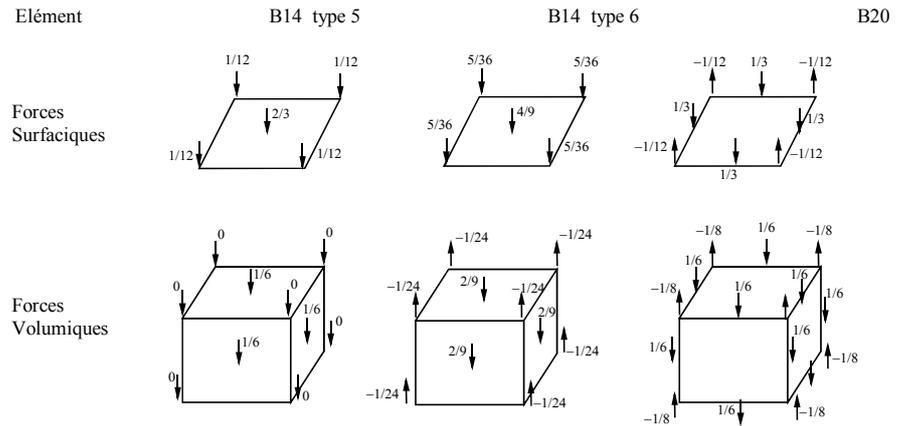


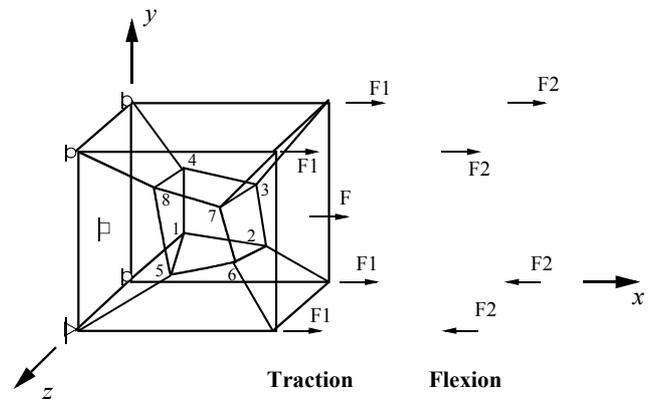
Figure 3 : Forces nodales équivalentes

3 APPLICATIONS NUMERIQUES

Pour montrer les performances de l'élément à quatorze nœuds type 6, nous avons conduit plusieurs tests de validation recommandés dans la littérature, comme le patch-test, tests de la poutre, le problème de Boussinesq ainsi que des tests de la mécanique des sols.

3.1 Patch-test 3D

Le Patch-test 3D réel a été proposé par MacNeal et Harder [3]. La figure 4 montre la configuration du test ainsi que les conditions aux limites. On a appliqué une force de traction unitaire et on a observé que l'élément B14 représente exactement l'état de déformation constante, mais, quand on a appliqué un moment de flexion, le résultat est moins précis, cela est dû aux faces distordues des éléments. Les résultats sont donnés dans le tableau 1.



Conditions aux limites

- \square $u = 0$
- \triangle $u = v = 0$
- \square $u = v = w = 0$

Tableau 1 : Patch-test 3D

	Patch-test (extension)		Patch-test d'ordre supérieur (flexion)	
	Déplacements (u)	Contraintes (σ_{xx})	Déplacements (v)	Contraintes (σ_{xx})
B14	1.0	1.0	10.1	-
théorie	1.0	1.0	12.0	-

Nœud	x	y	z
1	0.249	0.342	0.192
2	0.826	0.288	0.288
3	0.850	0.649	0.263
4	0.273	0.750	0.230
5	0.320	0.186	0.643
6	0.677	0.305	0.683
7	0.788	0.693	0.644
8	0.165	0.745	0.702

Figure 4 : Patch – test 3D réel avec éléments distordus ($F = 4/9$; $F_1 = 5/36$; $F_2 = 1$; $E = 1$; et $\nu = 0.25$)

L'élément fini B14 passe avec succès le Patch-test pour l'état de déformation constante même si la forme des éléments est arbitraire, les caractéristiques élémentaires de l'élément sont exactement intégrés en utilisant seulement 8 ($2 \times 2 \times 2$) points de Gauss et cela sans l'apparition de modes parasites. Toutes ces performances nous amènent à dire que le B14 est un « grand élément fini pour l'élasticité tridimensionnelle ».

3.2 Tests de la poutre élancée de MacNeal

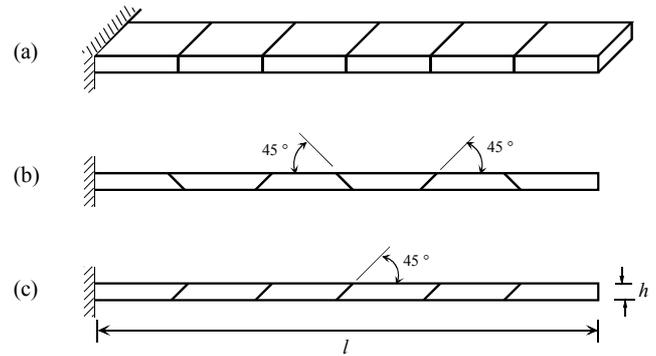
On considère la poutre console élancée de MacNeal qui est modélisé par six éléments hexaédriques prenant respectivement la forme rectangulaire, trapézoïdale et parallélépipédique (figure 5). On a effectué le test de la poutre élancée pour différents chargements qui sont force de traction unitaire, moment de flexion à l'extrémité, force appliquée dans le plan à l'extrémité libre et force appliquée hors plan. MacNeal a utilisé ce test pour des éléments finis membranaires à quatre nœuds et a constaté que la forme trapézoïdale des éléments conduit à un verrouillage même si ces éléments passent le Patch-test. Les résultats obtenus pour l'élément **B14** sont comparés à ceux obtenus avec d'autres éléments connus (tableau 2).

Tableau 2 : Tests de la poutre élancée de MacNeal (déplacements normalisés)

Forme de l'élément	Type de chargement	Déplacements normalisés à l'extrémité libre					
		B14	ANSYS	HEX20	SS18β	PS5β	théorie
Régulière	Traction	0.989	-	0.992	-	-	0.6^E-06
	Flexion	0.249	-	-	-	1.000	0.2700
	Cisaillement dans p.	0.191	0.979	0.970	0.981	0.993	0.1081
	Cisaillement hors p.	0.044	0.973	0.961	0.981	-	0.4321
Trapézoïdale	Traction	0.989	-	0.994	-	-	0.6^E-06
	Flexion	0.055	-	-	-	0.022	0.2700
	Cisaillement dans p.	0.049	0.047	0.886	0.047	0.056	0.1081
	Cisaillement hors p.	0.022	0.030	0.920	0.031	-	0.4321
parallélépipédique	Traction	1.001	-	0.994	-	-	0.6^E-06
	Flexion	0.206	-	-	-	0.726	0.2700
	Cisaillement dans p.	0.147	0.624	0.967	0.625	0.632	0.1081
	Cisaillement hors p.	0.040	0.529	0.941	0.587	-	0.4321

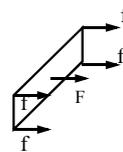
HEX20 [3] SS18β [4] PS5β [5]

Les résultats obtenus pour l'élément fini **B14** montrent qu'il est sujet au verrouillage signalé par MacNeal quand le chargement est de type flexion ou cisaillement, mais pour le cas de la traction l'élément reste insensible au blocage.

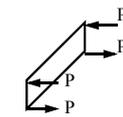


Chargement a l'extrémité de la poutre

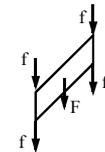
Traction



Flexion



Cisaillement dans le plan



Cisaillement hors plan

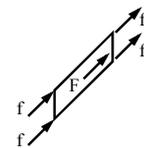


Figure 5 : Tests de la poutre élancée de MacNeal.

(a) maillage régulier, (b) trapézoïdal, (c) et parallélépipédique.

Chargements : traction unitaire, moment de flexion, force de cisaillement dans le plan et hors plan ($F = 0.0088$, $f = 0.0027$, $P = 25$, $l = 6.0$, $h = 0.2$, épaisseur = 0.1 , $E = 10^E7$ et $\nu = 0.3$).

3.3 Tests de Cheung et Chen [CHE 88]

Ces tests comprennent sept configurations différentes, de A1 à A7, ils mettent en évidence l'effet de la distorsion géométrique des éléments sur la précision des résultats. La figure 6 montre les sept configurations avec les dimensions des éléments et les conditions aux limites, on a utilisé deux cas de charges, le premier est un moment de flexion à l'extrémité et le second est une force concentrée à l'extrémité libre de la poutre. Les flèches à l'extrémité de la poutre sont comparées à celles obtenues par l'élément Q_{S11-2} de Cheung et Chen [6] et l'élément FCB de Chandra et Prathap [7]. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 3.

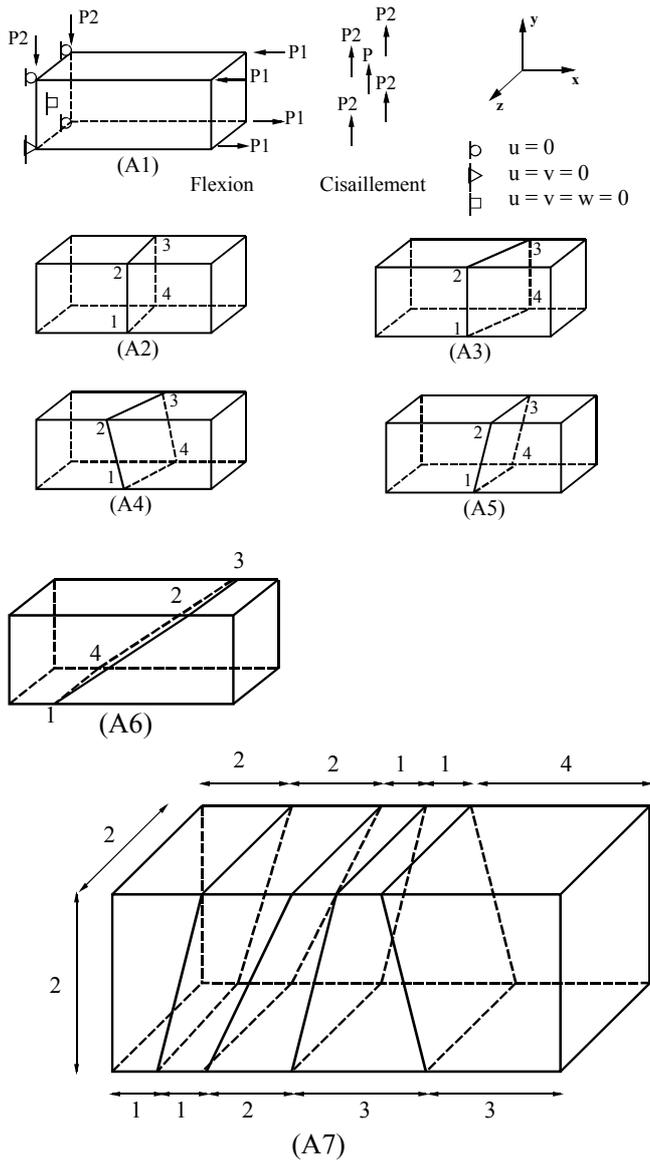


Figure 6 : Tests de Cheung et Chen

($P1 = 1000$, $P = 266.67$, $P2 = 83.33$, $E = 1500$ et $\nu = 0.25$)

Tableau 3 : Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés (ν)

Maillage	Flexion			Cisaillement		
	B14	QS11-2	FCB	B14	QS11-2	FCB
A1	1.000	1.000	1.000	0.739	0.759	0.760
A2	1.000	1.000	1.000	0.838	0.940	0.930
A3	0.853	0.922	0.953	0.693	0.873	0.890
A4	0.904	0.814	0.907	0.767	0.794	0.860
A5	0.853	0.770	0.883	0.696	0.764	0.830
A6	0.569	0.370	0.788	0.538	0.439	0.870
A7	0.964	0.929	0.983	0.972	0.925	0.980

Les résultats obtenus pour le cas de la flexion sont généralement proches de la valeur théorique sauf pour la configuration A6 qui présente un maillage très distordu. Par ailleurs, pour le cas de la force de cisaillement les résultats sont moins bons, exception faite pour la configuration A7 où le maillage est plus raffiné.

3.4 Test de sensibilité à l'élancement (rapport d'aspect)

Le test, proposé par Robinson [8], est utilisé pour estimer la sensibilité d'un élément au phénomène de verrouillage quand l'élancement (rapport d'aspect) devient élevé, il s'agit d'une poutre encastree, modelisée par un seul élément et soumise à un chargement qui genere un état de flexion pure sans l'influence du cisaillement. On effectue une variation de la longueur de la poutre de maniere à obtenir des élancements (longueur sur hauteur) allant de 1 à 8. L'élément B14 n'a pas subi de verrouillage, même pour les élancements les plus élevés, les déplacements verticaux obtenus pour tous les élancements sont exactement égaux aux valeurs théoriques. Voir la figure 7 pour la configuration du test et le tableau 4 pour les résultats.

Tableau 4 : Test de sensibilité à l'élancement

Élancements	Déplacements normalisés à l'extrémité de l'élément (ν)				théorie
	B14, ANSYS ^c	FC [7]	CSA/ NASTRAN ^a	ASKA 8.5 ^b	
1	1.0	0.938	0.938	0.933	3.33 ^E -6
2	1.0	0.937	0.937	-	13.33 ^E -6
4	1.0	0.937	0.937	-	53.33 ^E -6
8	1.0	0.937	0.937	0.755	213.33 ^E -6

^a Source: [9], ^b Source: [7], ^c Source: [10]

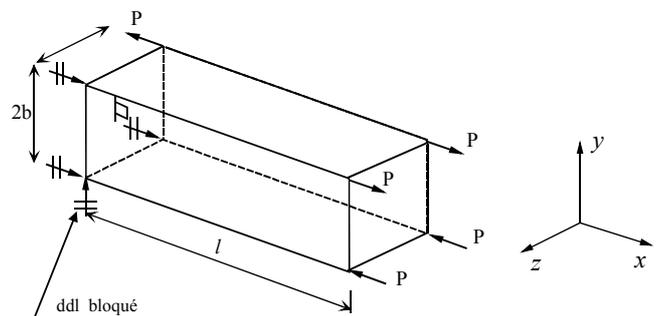


Figure 7 : Test de sensibilité à l'élancement

($E = 207^E9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.25$; $a = b = 0.06 \text{ m}$; $P = 6900 \text{ N}$)

3.5 Test d'incompressibilité

Ce test permet d'étudier le comportement d'un élément

sous l'effet d'une variation asymptotique du coefficient de Poisson ν ($\nu = 0.45$ à 0.499995). La figure 8 montre la configuration de la barre encastrée qui est constituée de deux éléments. On étudie la réponse, de la barre, induite par l'application d'une force de traction (d'extension) à l'extrémité libre. D'après les résultats obtenus (tableau 5), on peut dire que l'élément fini B14 n'est pas sujet au verrouillage dû à l'incompressibilité (stabilité des résultats). On peut remarquer d'autre part que l'élément FI [7] est atteint par le verrouillage (divergence des résultats).

Tableau 5 : Test d'incompressibilité

Coeff. de Poisson ν	Déplacement axial u		
	B14	FC [7]	FI [7]
0.0	0.1000^{E-05}	0.1000^{E-05}	0.1000^{E-05}
0.45	0.9373^{E-06}	0.8876^{E-06}	0.7735^{E-05}
0.495	0.9102^{E-06}	0.8607^{E-06}	0.3106^{E-06}
0.4995	0.9072^{E-06}	0.8577^{E-06}	0.4551^{E-06}
0.49995	0.9069^{E-06}	0.8574^{E-06}	0.4775^{E-06}
0.499995	0.9069^{E-06}	0.8574^{E-06}	0.4800^{E-09}

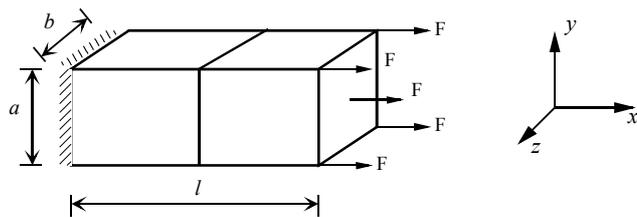


Figure 8 : Test d'incompressibilité pour une barre soumise à une traction ($a = 1$; $b = 1$; $L = 1$; $E = 10^6$; $\nu = 0.0$ à 0.499995)

3.6 Flexion d'une plaque encastrée sous une charge uniforme

Soit une plaque carrée de côté $L = 10$ et d'une épaisseur variable $h = 1.0, 0.5$ et 0.1 , encastrée sur les quatre côtés et soumise à une charge transversale uniformément distribuée (CUD) d'une valeur unité. De part la symétrie de la géométrie, du chargement et des conditions aux limites, seul le quart de la plaque est considéré (figure 9).

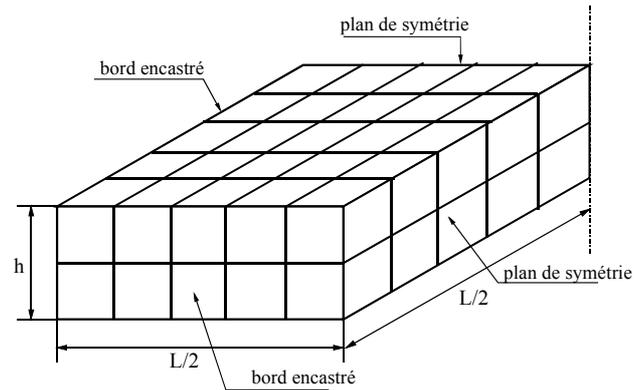


Figure 9 : Maillage du quart de la plaque encastrée sous une CUD ($L = 10$; $E = 1$; $\nu = 0.49$; $h = 1.0, 0.5, 0.1$)

Le quart de la plaque est modélisé dans le plan par 5×5 éléments égaux et à travers l'épaisseur une ou deux couches d'éléments sont utilisées. Le module d'Young E est pris égal à 1 et le coefficient de Poisson $\nu = 0.49$ (valeur proche à celle des matériaux incompressibles). On a effectué une série d'analyses (différents schémas d'intégration, différents épaisseurs) pour avoir la flèche au centre de la plaque. Les éléments utilisés pour la comparaison sont l'élément standard brique à 8 nœuds, le même élément avec des modes incompatibles et l'élément standard brique à 20 nœuds de Serendip. Les résultats de cette analyse sont donnés dans le tableau 6.

Tableau 6 : Flèche au centre de la plaque

Elément	Couches	Ordre de l'intégration	h=1.0	h=0.5	h=0.1
B8	1	2x2x2 Gauss	31.7	114.5	3746
	1	2x2x2/1x1x1 ISR*	236.7	860.1	5976
	2	2X2X2 Gauss	44.5	201.5	4822
	2	2x2x2/1x1x1 ISR*	122.3	570.4	5789
B8 avec modes incompatibles	1	2x2x2 Gauss	130.2	886.1	88885
B14	1	3x3x3 Gauss	74.18	413.5	10704
		2x2x2 Gauss	63.60	251.3	11612
		3x3x3/2x2x2 [D] _{modifié}	74.69	422.7	13361
		2x2x2 Gauss	136.92	878.9	15234
B20	1	3x3x3 Gauss	111.88	747.8	71784
		3x3x3/2x2x2 ISR*	111.92	748.0	71821
		2x2x2 Gauss	112.88	761.5	88895
Sol. P. mince			115.35	922.8	115353

*ISR : Intégration Sélective Réduite

La première conclusion qu'on peut tirer des résultats de cette analyse c'est que l'utilisation d'une couche de l'élément fini **B14** est meilleur que deux couches de l'élément **B8** avec une intégration sélective réduite. La deuxième conclusion, peut être la plus importante, est la bonne performance de l'élément **B14** (plaques épaisses) avec seulement 2x2x2 points d'intégration de Gauss, cela s'avère d'une grande importance dans les applications non linéaire. Par ailleurs, on a remarqué que l'élément **B14** se bloque à cause du cisaillement transverse **CT** pour les plaques minces et cela en dépit de l'utilisation de l'intégration sélective réduite et l'introduction des constantes de contraintes planes avec le coefficient correctif ($k=5/6$) dans la matrice constitutive du matériau [D].

3.7 Problème de Boussinesq

Le fameux problème de Boussinesq est un problème purement tridimensionnel (3D), il consiste à étudier la déformation dans un massif élastique semi-infini sous l'action d'une force ponctuelle appliquée à la surface du massif. De part la symétrie, on a considéré un quadrant du massif semi-infini comme la montre la figure 10. On a complètement bloqué les degrés de liberté des nœuds se trouvant sur la limite circulaire et la face inférieure à $y = -45$, tous les nœuds se trouvant sur les plans xy et yz sont bloqués dans les directions z et x respectivement et cela pour permettre de représenter la symétrie. La valeur de la charge ponctuelle appliquée est de $P/4$ unités.

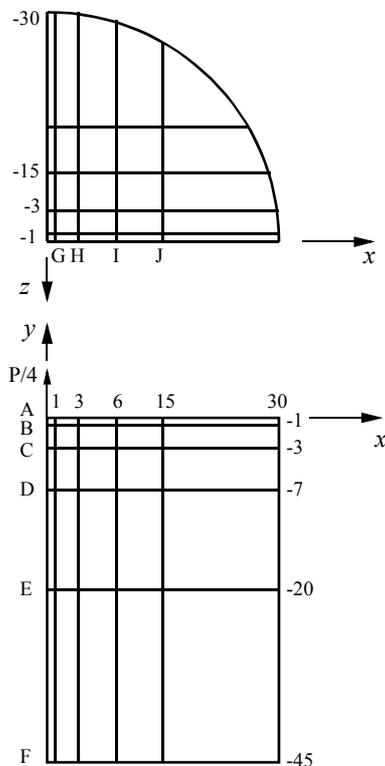


Figure 10 : Problème de Boussinesq
($P = 10000$; $E = 10^E7$; $\nu = 0.3$)

Le maillage adopté (plus raffiné autour de la charge ponctuelle) implique 100(5x5x4) éléments avec 545 nœuds, ce nombre important de nœuds nous a conduit à l'utilisation d'un programme automatique de génération de données (coordonnées et connectivités des nœuds). Les déplacements calculés sont assez proches des valeurs théoriques, l'élément **B14** donne de meilleurs résultats que les éléments **ADJ** (soft) [11] et l'élément **OHB** [12]. Les résultats sont reportés dans le tableau 7.

Tableau 7 : Problème de Boussinesq (déplacements v)

Éléments	Déplacements le long de l'axe y $\times 10^E-5$				Déplacement le long axe $x \times 10^E-5$		
	A	B	C	D	G	H	I
Théorie	∞	49.60	16.06	7.09	29.00	9.66	4.83
B14	190.19	40.52	13.77	5.04	16.63	8.12	3.16
ADJ (soft)	148.00	47.30	7.81	4.95	9.60	7.16	3.01
OHB	162.01	43.04	8.77	5.50	12.14	7.88	2.89

3.8 Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent [13]

Il s'agit du poinçonnement d'une semelle continue souple et lisse sur un sol purement cohérent, c'est un problème de rupture classique de la mécanique des sols, ce cas est traité en déformation plane par la méthode visco-plastique en utilisant le critère de rupture de Von-Mises (matériau cohérent saturé). La figure 11 montre la semelle continue flexible reposant sur une couche uniforme d'argile non drainée. La semelle transmet au sol une charge uniforme q , qui croît par incrémentation jusqu'à la rupture. Le comportement élasto-plastique du sol est caractérisé par trois paramètres, qui sont les propriétés élastiques $E = 10^E5$ KN/m², $\nu = 0.3$ et la cohésion non drainée $C_U = 100$ KN/m². La rupture dans ce problème survient quand q atteint la charge donnée par Prandtl : $q_u = (2+\pi)C_U = 5.14C_U$.

Les résultats de cette analyse sont donnés sous forme d'un graphique dans la figure 12.

Avec la même configuration du problème et le même maillage, notre but est de faire une comparaison avec l'élément **Q8** qui est un très bon élément pour les problèmes bidimensionnels de mécanique des sols, l'élément **B8** et surtout l'élément **B20** qui est beaucoup plus exigeant en préparation de données et temps machine que l'élément **B14**. D'après les résultats de la figure 6.14, on constate que la différence entre l'élément **B14** d'une part et les «éléments **Q8** et **B20** d'autre part, est presque insignifiante, il en est de même avec la solution théorique. Cela démontre que l'élément **B14** est très bon élément, son application dans le domaine non linéaire ne pose aucun problème et il parvient à obtenir des résultats aussi meilleurs que ceux donnés par l'élément **B20**.

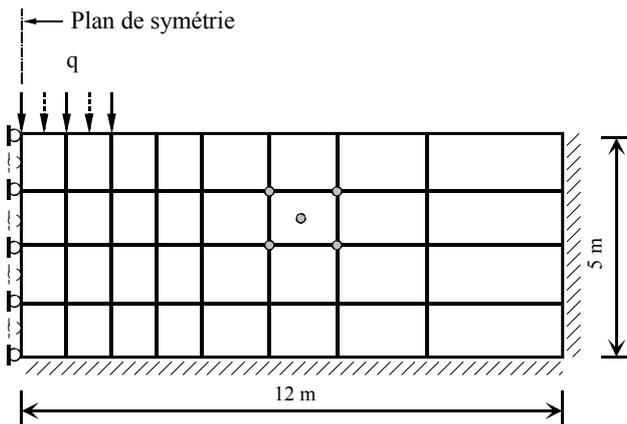


Figure 11 : Analyse de la capacité portante d'un sol (configuration du problème et maillage)

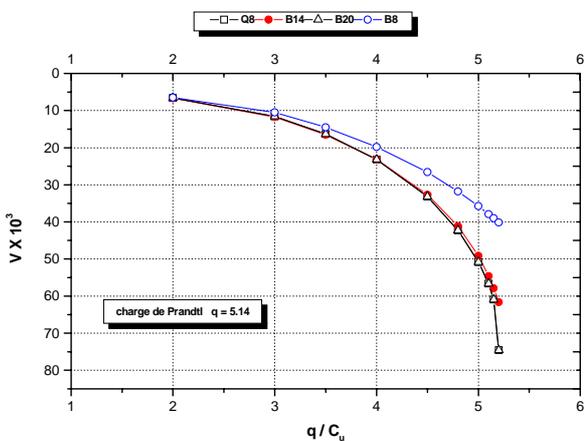


Figure 12 : Analyse de la capacité portante d'un sol (tassement des points de la surface situés sur la ligne de symétrie)

3.9 Analyse de la stabilité d'un talus [13]

Le problème consiste à étudier la stabilité d'un talus soumis à un chargement gravitationnel, il est traité en déformation plane par la méthode visco-plastique en utilisant le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Il s'agit de déterminer le coefficient de sécurité F_S (rapport des moments résistants aux moments moteurs) qui est défini au moyen d'une proportion dans laquelle la cohésion c et la tangente de l'angle de frottement $tg\phi$ doivent être réduites afin de causer la rupture du talus. La boucle de l'incrément de charge est remplacée par la boucle du coefficient de sécurité, chaque entrée dans cette boucle correspond à un coefficient de sécurité différent, de manière à obtenir une diminution des valeurs des paramètres c et $tg\phi$.

$$c_f = \frac{c}{F_S} \quad ; \quad tg\phi_f = \frac{tg\phi}{F_S}$$

Le chargement gravitationnel est donné par la relation :

$$P_a = \gamma \sum \int \int N^T dv$$

où γ est le poids volumique du sol.

La figure 13 montre la configuration du problème et le maillage adopté, les caractéristiques du milieu sont l'angle de frottement $\phi = 40^\circ$, la cohésion $c = 1 \text{ KN/m}^2$, angle de dilataance $\psi=0$, et le poids volumique $\gamma = 20 \text{ KN/m}^3$. La solution de ce problème ($F_S = 2.505$) a été donnée par Bishop et Morgenstern (1960) qui ont utilisés la technique de la surface de glissement circulaire. Les résultats de cette analyse sont donnés sous forme d'un graphe dans la figure 14.

Dans cette analyse l'élément **B20** a présenté une instabilité numérique (blocage) due au chargement gravitationnel, car ce dernier génère des forces équivalentes négatives qui seraient la source de l'instabilité. Par ailleurs, l'élément **B14**, a encore une fois donné des résultats qui sont pratiquement les mêmes que ceux de l'élément **Q8**, cela conforte sa place en tant qu'élément très efficace an analyse membranaire dans le domaine non linéaire.

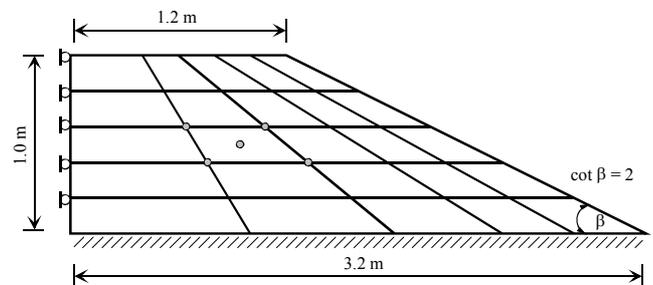


Figure 13 : Analyse de la stabilité d'un talus (configuration du problème et maillage)

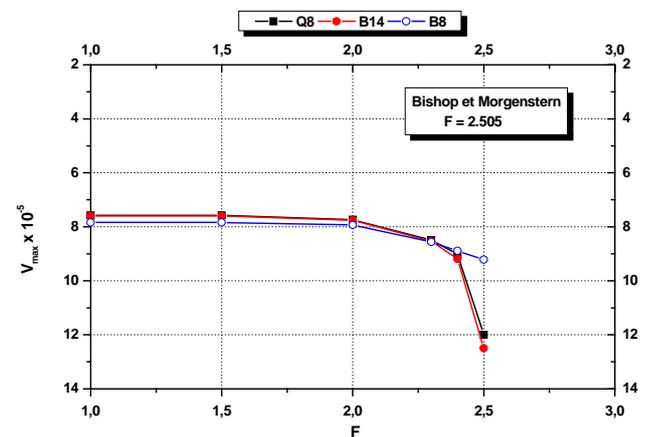


Figure 14 : Analyse de la stabilité d'un talus (coefficient de sécurité et déplacement maximal)

4 CONCLUSION

Plusieurs fonctions de forme de la famille de l'élément brique à quatorze nœuds ont été imaginées et testées, seule la version dite «type 5» était intéressante et a donnée des réponses acceptables à certains problèmes pratiques, mais, l'élément **B14** type 5 n'a pas pu passer le Patch-test. D'autres investigations ont conduit à une nouvelle version

(type 6) dont les fonctions de forme ont été construites en utilisant la méthode classique de *Serendip*. L'élément fini **B14** type 6 a réussi le Patch-test, en plus, ses caractéristiques élémentaires sont exactement intégrés en utilisant seulement 8(2x2x2) points d'intégration de Gauss et cela sans l'apparition de modes supplémentaires indésirables ou modes parasites. Cette étude montre que l'élément **B14** type 6 a des avantages par rapport à l'élément trilineaire **B8** qui est trop rigide et aussi par rapport à l'élément fini **B20** qui donne des résultats presque identiques, mais très coûteux d'utilisation. Nous recommandons l'élément fini **B14** dans les problèmes impliquant un comportement de type membranaire dans lesquels il a montré des qualités et des performances irréprochables. Il serait, donc, un très bon élément pour la mécanique des sols dont les problèmes sont de type membranaire et souvent dans le domaine non linéaire.

Annexe : Expressions des fonctions de forme de l'élément B14 type 6

$$N_1 = -1/8 (\xi+1)(\eta-1)(\zeta+1)(\xi\eta-\xi\zeta+2\xi+\eta\zeta-2\eta+2\zeta-2)$$

$$N_2 = -1/8 (\xi-1)(\eta-1)(\zeta+1)(\xi\eta-\xi\zeta+2\xi-\eta\zeta+2\eta-2\zeta+2)$$

$$N_3 = -1/8 (\xi-1)(\eta+1)(\zeta+1)(\xi\eta+\xi\zeta-2\xi-\eta\zeta+2\eta+2\zeta-2)$$

$$N_4 = -1/8 (\xi+1)(\eta+1)(\zeta+1)(\xi\eta+\xi\zeta-2\xi+\eta\zeta-2\eta-2\zeta+2)$$

$$N_5 = 1/8 (\xi+1)(\eta-1)(\zeta-1)(\xi\eta+\xi\zeta+2\xi-\eta\zeta-2\eta-2\zeta-2)$$

$$N_6 = 1/8 (\xi-1)(\eta-1)(\zeta-1)(\xi\eta+\xi\zeta+2\xi+\eta\zeta+2\eta+2\zeta+2)$$

$$N_7 = 1/8 (\xi-1)(\eta+1)(\zeta-1)(\xi\eta-\xi\zeta-2\xi+\eta\zeta+2\eta-2\zeta-2)$$

$$N_8 = 1/8 (\xi+1)(\eta+1)(\zeta-1)(\xi\eta-\xi\zeta-2\xi-\eta\zeta-2\eta+2\zeta+2)$$

$$N_9 = 1/2[(\eta^2-1)(\zeta^2-1)(\xi+1)]$$

$$N_{10} = 1/2[(\xi^2-1)(\eta^2-1)(\zeta+1)]$$

$$N_{11} = -1/2[(\eta^2-1)(\zeta^2-1)(\xi-1)]$$

$$N_{12} = -1/2[(\xi^2-1)(\eta^2-1)(\zeta-1)]$$

$$N_{13} = -1/2[(\xi^2-1)(\zeta^2-1)(\eta-1)]$$

$$N_{14} = 1/2[(\xi^2-1)(\zeta^2-1)(\eta+1)]$$

RÉFÉRENCES

- [1] Kidger DJ. The fourteen node brick element. Finite elements Anal. Des., Vol. 6, 1990.
- [2] Smith IM, Kidger DJ. Elastoplastic analysis using the 14-node brick element family. Int J Numer Meth Engng 1992; 35:1263-75.
- [3] MacNeal RH, Harder RL. A proposed set of problems to test finite element accuracy. Finite Element Anal Des 1985; 1:3-20.
- [4] Sze KY, Ghali A. Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. Int J Numer Meth Engng 1993; 36:1519-40.
- [5] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. Int J Numer Meth Engng 1984; 20:1685-95.
- [6] Cheung YK, Chen W. Isoparametric hybrid hexahedral elements for three stress analysis. Int J Numer Meth Engng 1988; 26:677-93.
- [7] Chandra S, Prathap G. A field-consistent formulation for the eight-noded solid finite element. Comput Struct 1989; 33:345-55.
- [8] Robinson J. New FEM user project – single element test for aspect ratio sensitivity for solids (Part I). Finite Element News 1986; 1:26-32.
- [9] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Generation of an eight node brick element using Papcovitch-Neuber functions. Comput Struct 1995; 54:1077-84.
- [10] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, exactly representing linear stress fields. Comput Struct 2000; 74:147-65.
- [11] Bretl JL, Cook RD. A new eight-node solid element. Int J Numer Meth Engng 1979; 14:593-615.
- [12] Bachrach WE. An efficient formulation of hexahedral element with high accuracy in bending and incompressibility. Computers & Structures 1987; 26:453-67.
- [13] Smith IM, Griffiths DV. Programming the finite element method. Second edition, University of Manchester UK. John Wiley & Sons, 1988.