**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Mohamed Khider Biskra**
**Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie**

Département de Mathématiques

Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Statistique

*Mémoire de fin d'étude en Master*

*Intitulé :*

# Estimation de moyenne des distributions à queues lourdes

*Présenté par :* ***Mohammed Ridha KOUIDER***

*Devant le jury*

*Encadreur :* ***Abdelhakim NECIR***
*Président :* ***Brahim BRAHIMI***
*Examinateur :* ***Nour-Eddin SILABDI***

Année Universitaire
2011-2012

# Remerciments

Je glorfie Allah le tout puissant de m'avoir donnée courage et patience qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Le moment est venu pour moi d'exprimer ma plus grande gratitude envers tous celles et ceux qui m'ont aidé et encouragé dans l'accomplissement de cette mémoire dont le prix était l'obtention de diplôme de master.

Ainsi qu'il est d'usage, je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur Monsieur, professeur, Necir Abdelhakim, pour sa disponibilité, son écoute, ses conseils éclairés et ses encouragements. Il a toujours été présent pour m'inculquer sa grande rigueur. Inestimable a été pour moi le privilège de l'avoir pour guide. J'espère que nos relations et nos collaborations continueront longtemps après cette mémoire.

Mon enseignement , merci de m'avoir laissé une grande liberté dans mon travail, merci pour vos relectures. Je garderai toujours avec moi le souvenir de nos discussions, de vos conseils et surtout de votre gentillesse.

Je tiens également à remercier chaleureusement Monsieur, docteur, Meraghni Djamel pour ses hautes qualités humaines et statistiques.

Je remercie Monsieur, docteur, Djabrane Yahia dans les périodes difficiles, il m'a toujours offert du temps et de précieux conseils pour m'aider à avancer

Je remercie aussi Monsieur, docteur, Ben Atia Fateh que je ma enseigne le rigueur et pour leur gentillesse.

Je profite aussi de l'occasion pour remercier tous les membres mon enseigenement, qu'ils sont enseignés moi de cinq année de université. Une attention particulière à : Hafayed Mokhtar, Chighoub Farid, Silabdi Nour-Eddin, Zaghdodi Kadhem, Mansori Bader-Ddine, Lazhar Tamer, Khelil Nacer, Adouane Saida, Yekhlef Samia, Laajal Baya...etc.

Je remercie chaleureusement Monsieur, Docteur, Brahimi Brahim et Monsieur, Docteur, Silabdi Nour-Eddin de m'avoir fait l'honneur de participer gentiment au jury de ma mémoire de fin d'étude en master respectivement comme présidente et examinateur. Je leur suis sincèrement reconnaissant de s'être rendus disponibles pour cette soutenance. Merci pour toutes vos critiques constructives. Vos remarques m'ouvrent de nouveaux horizons et de nouvelles perspectives.

Aussi, je tiens à remercier chef de faculté Monsieur, Melkemi khaled qu'il mettre tout matériel pédagogique, dans de très bonnes conditions.

Je profite aussi de l'occasion pour remercier Monsieur, Docteur, Labde Boubakeur et le chef de partement Monsieur, Docteur, Mokhtari Zouhir pour toutes les blagues et la simplicité.

Je remercie aussi tout les travailleurs dans la scolarité. Une attention particulière à : Monsieur, Laib Mohamed, et Madame, Debabeche Amina.

Je remercie mes amis particulièrement Mohamed Azzouz, Benbrahim Kamal, et mes proches (au sens large) qui m'ont soutenu durant cette aventure, et spécialement à celles ou ceux, elles ou ils se reconnaîtront, qui m'ont aidé lors des préparatifs.

Enfin, je ne saurais terminer cette partie sans exprimer ma gratitude à mes parents, mon grand père, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours soutenu, encouragé et stimulé pendant mes études. Je n'aurais jamais pu arriver ici, d'autant plus que je vis seul depuis 2007, sans l'équilibre, la chaleur, le soutien et le bonheur dans lequel j'ai vécu. Merci !

Si une personne juge qu'elle a été oubliée alors qu'elle m'adresse un courriel argumenté.

# Table des matières

# Introduction

L'objet de ce document est l'approfondissement dans les événements extrêmes ainsi que dans leur modélisation. On comprend par valeurs extrêmes les occurrences maximales d'une variable aléatoire, on étudie donc seulement les cas qui dépassent un certain seuil. Ces événements ont tous des caractéristiques similaires même si on fait l'étude dans des domaines différents. De façon générale, il s'agit d'événements qui ont des impacts considérables, puisque ce sont des cas inusuels et il est généralement difficile de les prédire correctement.

L'intérêt de cette modélisation est d'arriver à des conclusions à partir de donnés courantes et usuelles. Dans la plupart des cas, on fait la prévision statistique d'événements qu'on n'a jamais pu observer auparavant ; on est donc obligé de traiter les seules données dont on dispose, qui sont, en fait, des données qui justement ne dépassent pas ce seuil d'événement extrême. Ceci provoque davantage d'incertitude, puisque on travaille sur des événements qui n'ont jamais eu lieu ou que l'on ne connaît pas trop.

L'application de la modélisation des valeurs extrêmes concerne plusieurs domaines, parmi lesquels se trouvent les finances, les assurances et le génie civil. Dans ce dernier domaine, on l'utilise notamment dans l'hydrologie et pour l'ingénierie maritime et côtière. Des accidents provoqués par des faits environnementaux ont déclenché l'intérêt par l'étude des événements extrêmes,qui a commencé à se développer dans les années 1950. Dans certains cas, comme celui de la rupture des digues des Pays Bas, ce sont des accidents majeurs qui à l'époque étaient totalement imprévisibles.

A partir de ces l'accidents catastrophiques on peut se poser quelques questions.

D'abord on voudrait trouver le seuil pour le quelle la probabilité de ce que le seuil soit dépassé vaille une valeur $q$ imposée. On voudrait aussi connaître la probabilité pour que la valeur annuelle, la plus haute, soit supérieure à un certain seuil avec une probabilité $q$ donnée. Et le plus intéresant de cet rapport est cherche un estimateur de la moyenne de distribution à queue lourde dans le cas de moment d'ordre deux infinie est par définition est estimé l'espérance de la lois à queue lourde.

L'objet de cette étude est de pouvoir répondre ces trois questions. Pour cela, on va analyser plusieurs méthodes. Dans ce projet, on divise le travail on deux chapitres le premier chapitre est de recherche la réponse de deux premier questions et le deuxiême chapitre est de recherche la réponse le troisème question.

Donc on va étudier, tout d'abord, les propriétés des statistiques d'ordre. Ensuite, on va étudier les distributions d'extrêmes généralisées (DEG), dont quelques propriétés. D'aprés on définit la fonction à variation régulière et la condition de second ordre. Et dans le chapitre deux on a d'abord définit la distribution à queue lourde et Weibull. Ensuite on lence d'estimateur de l'indice (Hill,1975) de distribution à queue lourde et leur estimateur de quantile (Weissman,1978). Enfin on donne l'estimateur de moyenne de distribution à queue lourde.

Par définition, les événements rares sont des événements ayant une faible probabilité d'apparition. Lorsque le comportement de ces événements est dû au hasard on peut étudier leur loi. Ils sont dits extrêmes quand il s'agit des valeurs beaucoups plus grandes ou plus petites que celles observées habituellement.

# Chapitre 1

# Notations sur la théorie des valeurs extrêmes (E.V.T.)

## 1.1 Statistique d'ordre :

### 1.1.1 Définitions et notations :

**Définition 1.1.1** *: Soit un échantillon $X = (X_1, ..., X_n)$, des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec une distribution de probabilité $F$ (une densité $f$ les caractérises également). On définit aussi la fonction de répartition empirique par :*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i \leq x), \tag{1.1.1}$$

*où $\mathbf{1}(X_i \leq x)$ : c'est la fonction indicatrice, elle est définie par :*

$$\mathbf{1}(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 & si \quad X_i \leq x, \\ 0 & si \quad X_i \geq x. \end{cases}$$

D'aprés Glivenco-Cantelli (1933), nous avons que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mid F_n(x) - F(x) \mid$ converge presque sûrement vers 0. Alors on dit que $F_n(x)$ est un estimateur de la fonction de répartition $F$.

**Définition 1.1.2** *: La statistique d'ordre de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est le ré-arrangement croissant (aléatoire) de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ telleque $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n$,* *que l'on note* $\left(X_{(1,n)}, X_{(2,n)}, \ldots, X_{(n,n)}\right)$ *. En particulier, on note :* $X_{(1,n)} = \min\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$ *et* $M_n = X_{(n,n)} = \max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$*.*

On va s'intéresser à cette variable aléatoire $M_n$ dans le suivant.

$M_n$ représente la plus grande observée sur les $n$ observées. Comme les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, on obtient :

1. La distribution du maximum $F_{X_{(n,n)}}$ de la statistique d'ordre extrême $M_n$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} F_{M_n}(x) := P\left(X_{(n,n)} \leq x\right) := [F(x)]^n, \\ f_{X_{(n,n)}}(x) := n\,[F(x)]^{n-1} f(x). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

2. La distribution du minimum $F_{X_{(1,n)}}$ de la statistique d'ordre extrême $X_{(1,n)}$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P\left(X_{(1,n)} \leq x\right) := 1 - [1 - F(x)]^n, \\ f_{X_{(1,n)}}(x) := n\,[1 - F(x)]^{n-1} f(x). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

où $F(x)$ est la fonction de distribution des $X_i$ et $f$ est la densité des $X_i$.

**Démonstration** :

Preuve de l'égalité (1.1.2).

Si on définie l'ensemble $A_i = \left\{w : X_{(i,n)}(w) \leq x, i = 1, \ldots, n\right\}$,

$$\begin{aligned} P\left(X_{(n,n)} \leq x\right) &= P\left(w : X_{(n,n)}(w) \leq x\right), \\ &= P\left(w : X_{(1,n)}(w) \leq x, X_{(2,n)}(w) \leq x, \ldots, X_{(n,n)}(w) \leq x\right), \\ &= P\left(w : \bigcup_{i=1}^{n} A_i(w)\right), \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_{(i,n)} \leq x\right) = [F(x)]^n \neq F(x). \end{aligned}$$

et en on déduit que :

$$\begin{aligned} f_{X_{(n,n)}}(x) &= \left([F(x)]^n\right)', \\ &= n\,[F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

Nous remarquons que la loi du maximum n'égale pas la loi de l'échantillon.

Preuve de l'égalité (1.1.3).

Considérons l'ensemble $B_i = \left\{ w : X_{(i,n)}(w) \geq x, i = 1, \ldots, n \right\}$,

$$\begin{aligned}
P\left(X_{(1,n)} \leq x\right) &= 1 - P\left(X_{(1,n)} \geq x\right), \\
&= 1 - P\left(w : X_{(1,n)}(w) \geq x, X_{(2,n)}(w) \geq x, \ldots, X_{(n,n)}(w) \geq x\right), \\
&= 1 - P\left(w : \bigcup_{i=1}^{n} B_i(w)\right), \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(X_{(i,n)} \geq x\right), \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n \neq F(x).
\end{aligned}$$

et en on déduit que :

$$\begin{aligned}
f_{X_{(1,n)}}(x) &= \left([1 - F(x)]^n\right)', \\
&= n\,[1 - F(x)]^{n-1} f(x).
\end{aligned}$$

Nous remarquons que la loi du minimum n'égale pas la loi de l'échantillon. ■

Donc les $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n$ ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées. Pour ce la on va cherché la loi de $X_{(k,n)}$ ?

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Les variables aléatoires $\left(1_{(X_i \leq x)}, i \geq 1\right)$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i \leq x) = p$.

La variable aléatoire $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i \leq x)}$ suit donc la loi binomial de paramètre $(n, p)$. Remarquons enfin que l'on a $S_n(x) \geq k$ si et seulement si $X_{(k,n)} \leq x$. Ainsi il vient :

$$\left\{X_{(k,n)} \leq x\right\} = \{S_n(x) \geq k\}.$$

On en déduit que :

$$P\left(X_{(k,n)} \leq x\right) := P(S_n(x) \geq k) := \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} F(X)^r (1 - F(X))^{n-r}. \qquad (1.1.4)$$

**Corollaire 1.1.3** *: Si la loi de $X_1$ possède une densité $f$, alors, la statistique d'ordre $\left(X_{(1,n)}, X_{(2,n)}, ..., X_{(n,n)}\right)$ possède une densité :*

$$f(x_1, \ldots, x_n) := n! 1_{\{x_1 < \cdots < x_n\}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i),$$

*où $f$ est la densité de l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$.*

Le résultat suivant donne la distribution de la statistique d'ordre

**Proposition 1.1.4** *: La fonction de répartition de $X_{k,n}$ est donné par : Intuitivement, d'aprés (1.1.4) et corollaire (1.1.3) pour que $X_{(k,n)} \in [y, y+dy]$, est on avec le changement de variable $t = F(y)$ il faut :* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P\left(X_{(k,n)} \leq x\right) := \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^{F(X)} t^{k-1} (1-t)^{n-k},$$

$$f_{X_{(k,n)}}(x) := \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} f(x)\, F(X)^k (1-F(X))^{n-k}.$$

*où $F(x)$ est la fonction de distribution des $X_i$ et $f$ est la densité des $X_i$.*

## 1.2 Estimation des quantiles :

### 1.2.1 Quantile d'ordre $p$ :

**Définition 1.2.1** *: Soit $X$ une variable aléatoire d'une distribution $F$. On suppose que $F$ est continue. Le quantile d'ordre $p$ est vérifié :*

$$F(x_p) := P(X \leq x_p) := p \text{ où } p \in [0,1],$$

*$x_p$ : est un le quantile d'ordre $p$.*

Par définition le quantile d'ordre $p$ c'est la fonction inverse de $F$, c'est-à-dire $x_p = F^{-1}(p)$.

### 1.2.2 Fonction des quantiles :

Si on a que $F$ est continue et monotone alors $F$ est bjective donc $F^{-1}$ existe.

**Définition 1.2.2** *: Soit $X$ une variable aléatoire et $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de $X$. La fonction des quantiles est définie par :*

$$Q(p) := F^{-1}(p) := \inf\{x : F(x) \geq p\} \text{ avec } p \in [0,1]$$

*"la fonction des quantiles s'appelle la fonction inverse générale".*

L'estimateur de $Q(p)$ est la fonction des quantiles empirique :

$$Q_n(p) := \inf\{x : F_n(x) \geq p\} \;\; avec\; p \in [0,1]$$

où $F_n$ est la distribution empirique. Il est défini par la statistique d'ordre :

$$Q_n(p) := X_{i,n} \; où \; \frac{i-1}{n} \leq p < \frac{i}{n}. \tag{1.2.1}$$

Une façon de trouver le quantile théorique $x_p$, $p \in [0,1]$, est de chercher la solution de l'équation $F(x) = p$. Mais dans notre cas, nous disposons plutôt d'un échantillon $X$, dont à priori il n'est pas évident que nous en connaissions la loi $F$.

Alors, comment faire ?. On donne par la suite une proposition qui nous permettra de calculer les quantiles à partir de notre statistique d'ordre.

**Proposition 1.2.3** *: Soit $p \in ]0,1[$. Supposons que $F$ est continue et qu'il existe une seule solution $x_p$ à l'équation $F(x) = p$. Soit $(k(n), n \geq 1)$ une suite d'entiers telle que $1 \leq k(n) \leq n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = p$. Alors, la suite des quantiles empirique données par la statistique d'ordre $\left(X_{(k(n),n)}, n \geq 1\right)$ converge presque sûrement vers $x_p$.*

### 1.2.3 Intervalles de confiance des quantiles empirique :

Pour estimer, de plus, les intervalles de confiance on donne aussi les propositions suivantes :

**Proposition 1.2.4** ***(Intervalles de confiance 1) :*** *Soit $p \in ]0,1[$, Supposons que la loi de $X_1$ possède une densité $f$ continue en $x_p$ et telle que $f(x_p) > 0$. On suppose de plus que $k(n) = np + o(\sqrt{n})$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = p$. Alors, on à la convergence en loi suivante :*

$$\frac{\sqrt{n}\left(X_{(k(n),n)} - x_p\right) f(x_p)}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1).$$

Alors soit $\alpha > 0$, pour calculer l'intervalle de confiance $1-\alpha$ on procède de la façon suivante : on veut

$$1 - \alpha = P(|N(0,1)| \leq \delta).$$

Donc l'intervalle de confiance de $x_p$, de niveau asymptotique$1-\alpha$ est l'intervalle aléatoire :

$$\left[X_{(k(n),n)} \overset{+}{-} \delta \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{f\left(X_{(k(n),n)}\right)\sqrt{n}}\right],$$

où $\delta$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $N\,(0,1)$.

**Remarque 1.2.5** *: Si la loi ne possède pas de densité, ou si la densité est irrégulière, la vitesse de convergence du quantile empirique vers le quantile peut être beaucoup plus rapide que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. En revanche, si la densité existe, est continue et si $f\,(x_p)=0$, alors la vitesse de convergence peut être plus lente que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

En général, si on cherche à estimer un quantile, il est rare que l'on connaisse la densité. On peut construire un autre intervalle de confiance pour $x_p$ sous des hypothéses plus générales, qui ne fait pas intervenir la densité. Si les hypothéses de la proposition (1.2.4) sont vérifiées, alors la largeur aléatoire de cet intervalle de confiance est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Proposition 1.2.6** ***(Intervalles de confiance 2) :*** *Soit $p\in\,]0,1[$. Soit $\delta$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$. On considère par suite que on a les entiers $i_n=\left[np-\sqrt{n}\delta\sqrt{p\,(1-p)}\right]$ et $j_n=\left[np+\sqrt{n}\delta\sqrt{p\,(1-p)}\right]$. Pour $n$ assez grand les entiers $i_n$ et $j_n$ sont compris entre 1 et $n$. De plus l'intervalle aléatoire*

$$\left[X_{(i_n,n)},X_{(j_n,n)}\right],$$

*est un intervalle de confiance pour $x_p$ de niveau asymptotique $1-\alpha$.*

**Démonstration** : On pose $Z_n=\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}S_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}$, où $S_n\,(x)=\sum\limits_{i\,=1}^{n}1_{(X_i\leq x)}$.

Pour $n$ suffisamment grand on a :$1\leq i_n\leq j_n\leq n$, et

$$\begin{aligned}P\left(X_{(i_n,n)}\leq x_p\leq X_{(j_n,n)}\right) &= P\left(i_n\leq S_n\leq j_n\right)\\ &= P\left(\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}i_n-p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\leq Z_n\leq\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}j_n-p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right)\end{aligned}$$

De la définition de $i_n$ et $j_n$, on déduit que pour $n \geq n_0 \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} & P\left(-\delta \leq Z_n \leq \delta - \frac{1}{\sqrt{n_0}\sqrt{p\,(1-p)}}\right) \\ \leq \ & P\left(\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}i_n - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \leq Z_n \leq \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}j_n - p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right) \\ \leq \ & P\left(-\delta - \frac{1}{\sqrt{n_0}\sqrt{p\,(1-p)}} \leq Z_n \leq \delta\right). \end{aligned}$$

On en déduit donc, en faisant tendre $n$ puis $n_0$ vers l'infini, que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}i_n - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \leq Z_n \leq \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}j_n - p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right) = P\left(-\delta \leq Z \leq \delta\right) = 1-\alpha,$$

on a donc obtenu :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_{(i_n,n)} \leq x_p \leq X_{(j_n,n)}\right) = 1-\alpha.$$

■

## 1.3 Lois limites des valeurs extrêmes :

Le principal résultat de la théorie des valeurs extrêmes repose sur le théorème de Fisher et Tippet (1928) dont la première preuve rigoureuse est due à Gnedenko (1943).

On a $F_{M_n}(x)$ converge vers 0 ou 1 selon la valeur de $F(x)$ : la loi limite de $M_n$ est dégénérée !, on s'intéresse à trouver la loi qui caractérise $M_n$ le maximum d'un échantillon des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, mais le problème apparaît quand on ne connaît pas $F$. Deux approches sont possibles alors soit on fait des tests sur les populations $X$ pour en trouver la distribution, puis on l'élève à la $n$-ième puissance, soit on cherche plutôt la loi d'extrêmes à laquelle ces populations convergent. Puisque, comme expliqué dans l'introduction, on s'intéresse aux valeurs extrêmes, c'est ce dernier chemin que l'on va prendre.

### 1.3.1 Loi Max-Stable :

**Définition 1.3.1** ***(Loi Max-Stable)*** *: Une variable aléatoire $X$ non dégénérée est max-stable si elle satisfait, pour des constantes de normalisation $(d_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(c_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$,*

$$\max (X_1, ..., X_n) := d_n x - c_n.$$

**Définition 1.3.2** *: Soit $G$ une fonction de répartition non dégénérée, on dit que $G$ est max-stable s'il existe deux suite $(d_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(c_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$. Telleque :*

$$\lim_{n\to\infty} G (d_n x + c_n)^n := G (x) .$$

**Théorème 1.3.3** ***(Propriété limite des lois Max-Stables)*** *: La classe des lois max-stables coïncide avec la classe de toutes les lois limites possibles pour les lois des maximums des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, correctement normalisées.*

Ainsi en identifiant la famille de loi vers laquelle $M_n$ va converger, on pourra remplacer $F$ par cette dernière pour des grandes valeurs de $n$. Pour caractériser cette loi de distribution des extrêmes, nous allons recourir au théorème de Fisher-Tippet.

Avant d'énoncer le principal théorème de cette section, nous définissons des classes d'équivalences sur l'ensemble des fonctions de répartition (sur les distributions des probabilités).

Les distributions $F$ et $F^*$ sont dites de même type si :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F^* (ax + b) := F (x) .$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Fisher-Tippet qui permet de caractériser la loi de distribution des valeurs extrêmes.

### 1.3.2 Théorème limite de Fisher-Tippet :

**Théorème 1.3.4** ***(Théorème limite de Fisher-Tippet, 1928) :*** *Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Supposons qu'il existe des constantes $\{a_n > 0, n \geq 1\}$ et $\{b_n \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$ telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} P \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) := \lim_{n\to\infty} F (a_n x - b_n)^n := H (x) .$$

La suite $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}, n \geq 1\right)$ converge en loi vers une limite non triviale, avec $H$ une fonction de distribution non dégénérée c'est-à-dire qu'elle ne soit pas la fonction de Heaviside.

Ce résultat est la base de la théorie des valeurs extrêmes. C'est l'équivalent du théorème central limite (T C L) en ce qui concerne les maxima. On autorise alors une renormalisation linéaire de $M_n$ et on s'intéresse au comportement limite de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ avec $a_n$ et $b_n$ des suites (déterministes) bien choisies pour éviter la dégénérescence de la loi limite (analogie avec le théorème central-limite dans le qu'elle on s'intéresse au comportement de $\frac{S_n - b_n}{a_n}$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$). Si l'on fait un parallèle avec le théorème central-limite, la suite $a_n$ joue le rôle de $n^{-1/2}\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ désigne l'écart type de $X$ et la suite $b_n$ joue le rôle de l'espérance. La suite $a_n$ (resp $b_n$) s'interprète comme un paramètre d'échelle (resp un paramètre de position ou de centrage). De plus, les suites $a_n$ et $b_n$ ne sont pas uniques.

Le théorème limite de Fisher-Tippet est vrai pour la majorité des lois usuelles.

Si on prend le logarithme de la gauche et la droite de la formule de théorème (1.3.4) on trouve qu'il équivalente, alors pour chaque point de continuité $x$ pour qu'elle : $0 < H(x) < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n \log F(a_n x - b_n) := \log H(x). \tag{1.3.1}$$

### 1.3.3 Exemples de convergence du maximum renormalisé :

On considère des variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ indépendantes et de même loi, ainsi que leur maximum $M_n$. On recherche des suites $\left\{(a_n)_{n\geq 1} > 0\right\}$ et $\left\{(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}\right\}$ telles que la suite $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}, n \geq 1\right)$ converge en loi vers une limite non dégénérée. Nous considérons des variables de loi uniforme, exponentielle, de Cauchy.

**Proposition 1.3.5** *: Soit $p = 1$ (respectivement $p = 0$). Soit $(k(n), n \geq 1)$ une suite d'entiers telle que $1 \leq k(n) \leq n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = p$. Alors, la suite des quantiles empirique données par la statistique d'ordre $\left(X_{(k(n),n)}, n \geq 1\right)$ converge presque sûrement vers $x_F = \inf\{x : F(x) = 1\}$ (respectivement $\overline{x}_F = \sup\{x : F(x) = 0\}$), avec la convention $\inf\{\varnothing\} = +\infty$ (respectivement $\sup\{\varnothing\} = -\infty$).*

**Loi uniforme :**

On suppose que la loi de $X_1$ est la loi uniforme sur $[0, \theta]$, $\theta > 0$. La fonction de répartition de la loi est :

$$F(x) := \frac{x}{\theta} \quad pour \quad x \in [0, \theta].$$

Par la proposition (1.3.5) la suite $(M_n, n \geq 1)$ converge presque sûrement vers $\theta$.

**Lemme 1.3.6** *: La suite* $\left(n\left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right), n \geq 1\right)$ *converge en loi vers* $W$ *de fonction de répartition définie par :*

$$P(W \leq x) := e^x, x \leq 0.$$

La loi de $W$ est une loi de Weibull. La famille des lois de Weibull sera définie aprés. Cas particulier, la loi de $-W$ est la loi exponentielle de paramètre 1.

**Démonstration** :

On note $F_n$ la fonction de répartition de $n\left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right)$. Comme $M_n < \theta$, on a $F_n(x) = 1$ si $x \leq 0$.

Considérons le cas $x < 0$ :

$$F_n(x) = P\left(M_n \leq \theta + \theta\frac{x}{n}\right) = P\left(X_1 \leq \theta + \theta\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^n.$$

Il vient :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^n = e^x \; pour \; x \leq 0.$$

■

**Loi exponentielle :**

On suppose $X_1$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La fonction de répartition de cette loi est :

$$F(x) := 1 - e^{-\lambda x} \quad pour \quad x \geq 0.$$

Comme $x_F = +\infty$, la suite $(M_n, n \geq 1)$ diverge vers l'infini d'aprés la proposition (1.3.5).

**Lemme 1.3.7** *: La suite* $(\lambda M_n - \log(n), n \geq 1)$ *converge en loi vers* $G$ *de fonction de répartition définie par :*

$$P(G \leq x) := e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}.$$

La loi de $G$ est la loi de Gumbel.

**Démonstration** : On note $F_n$ la fonction de répartition de $\lambda M_n - \log(n)$.

On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = P\left(M_n \leq \frac{(x+\log(n))}{\lambda}\right), \\ &= P\left(X_1 \leq \frac{(x+\log(n))}{\lambda}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{-e^{-x}} \quad pour \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

**Loi de Cauchy :**

On suppose $X_1$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a = 1$. La densité de la loi est :

$$f(x) := \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Comme le support de la densité est non borné, il est clair que la suite $(M_n, n \geq 1)$ diverge.

**Lemme 1.3.8** *: La suite* $\left(\frac{\pi M_n}{\theta}, n \geq 1\right)$ *converge en loi vers* $W$ *de fonction de répartition définie par :*

$$P(W \leq x) := e^{-\frac{1}{x}}, x > 0.$$

La loi de $W$ appartient a la famille des lois de Fréchet.

**Démonstration** : On note $F_n$ la fonction de répartition de $\frac{\pi M_n}{\theta}$. On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) = P\left(X_1 \leq \frac{nx}{\pi}\right)^n, \\ &= \left(1 - \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy\right)^n. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy &= \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi y^2}dy + \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi(1+y^2)} - \frac{1}{\pi y^2}\right] dy, \\ &= \frac{1}{nx} + O\left((nx)^{-3}\right).\end{aligned}$$

Alors pour $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx} + O\left((nx)^{-3}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{x}}.$$

■

### 1.3.4 Théorème de Gnedenko :

**Théorème 1.3.9** ***(Gnedenko, 1943) :***

*Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de répartition $F$, il existe un paramètre réel $\gamma$ et deux suites $(a_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) := H_\gamma(x),$$

*où $H_\gamma$ est la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes(E V D). Alors à une translation et un changement d'échelle prés. La lois limite peut prendre trois forme possible :*

$$\textit{loi de Fréchet} \quad \Phi_\gamma(x) := \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \exp\left[-x^{-\frac{1}{\gamma}}\right] & si\ x \geq 0 \end{cases} \qquad et\ \gamma > 0,$$

$$\textit{loi de Weibull} \quad \Psi_\gamma(x) := \begin{cases} \exp\left[-(-x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases} \qquad et\ \gamma < 0,$$

$$\textit{loi de Gumbel} \quad \Lambda(x) := \exp\left[-\exp(-x)\right] \ \ si\ x \in \mathbb{R} \qquad et\ \gamma = 0.$$

**Démonstration** : La démonstration de ce théorème est longue voir S.Resnick." Extreme values, regular variation, and point processes Applied Probability. Springer-Verlag, New York, 1987". ■

**Remarque 1.3.10** *: Chacun des trois distribution de valeurs extrêmes peut s'obtenir par une transformation fonctionnelle de l'autre. Plus précisement, elle sont liées entre elles par les relation $X \sim \Phi_\gamma \Longleftrightarrow \ln X^\gamma \sim \Lambda \Longleftrightarrow -\frac{1}{X} \sim \Psi_\gamma^2$.*

## 1.4 Lois des valeurs extrêmes généralisées(G.E.V) :

Grâce aux travaux de von Mises (1936) et de Jenkinson (1955), on a une forme unifiée de la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes à un facteur d'échelle et de position près.

**Théorème 1.4.1** *: Il est possible de rassembler les trois familles de lois de valeur extrême en une seule famille paramétrique* $(H_\gamma(x), \gamma \in \mathbb{R})$ *dite famille des lois des valeurs extrêmes généralisées notée (G.E.V.D) ou (G.E.V). Elle est paramètrée par une seule variable* $\gamma \in \mathbb{R}$, *mais toujours à un facteur de changement d'échelle et de translation prés. La fonction de répartition est pour* $\gamma \in \mathbb{R}$, *et pour tout* $x$ *tel que* $1 + \gamma x > 0$,

$$H_\gamma(x) := \begin{cases} \exp\left[-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] & si\ \gamma \neq 0, \\ \exp\left[-\exp(-x)\right] & si\ \gamma = 0. \end{cases}$$

**Démonstration** : Supposons qu'ils existent deux suites qui sont $(a_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$ et la suite de terme $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}, n \geq 1\right)$ converge en loi vers une limite $W$ non constante. Pour toute fonction $g$ continue bornée, on a :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[g\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)\right] := E\left[g(W)\right]. \tag{1.4.1}$$

Supposons par simplicité que la loi de $X_1$ possède la densité $f > 0$. Alors la loi de $M_n$ possède la densité :

$$nF(x)^{n-1} f(x).$$

On a donc :

$$I_n := E\left[g\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)\right] := \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) nF(x)^{n-1} f(x)\, dx. \tag{1.4.2}$$

Comme $f > 0$, la fonction $F$ est inversible et d'inverse continue. On pose pour $t > 1$,

$$U(t) := F^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right). \tag{1.4.3}$$

En particulier, on a $U(t) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t} = F(x) \Longleftrightarrow P(X > x) = \frac{1}{t}$. On effectue le changement de variable $F(x) = 1 - \frac{v}{n} \Longleftrightarrow x = U\left(\frac{v}{n}\right)$. On obtien :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{U\left(\frac{n}{v}\right) - b_n}{a_n}\right)\left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} \mathbf{1}_{]0,n]}(v)\, dv. \tag{1.4.4}$$

Remarquons que $\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1} \mathbf{1}_{]0,n]}\left(v\right)$ converge en croissant vers $e^{v}\ \mathbf{1}_{\{v>0\}}$. Comme par hypothése $I_n$ converge, pour tout $g$, il est naturel, mais erroné a priori, de penser que pour tout $v>0$, la suite de terme

$$J_n\left(v\right)=\frac{U\left(\frac{n}{v}\right)-b_n}{a_n},\ \text{ converge,}$$

en déduit en considérant $J_n\left(\frac{1}{w}\right)-J_n\left(1\right)$ que pour tout $w>0$,

$$\frac{U\left(wn\right)-U\left(n\right)}{a_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}h\left(w\right).$$

Comme la variable aléatoire $W$ est non triviale, cela implique que la fonction $h$ n'est pas égale à une constante. Comme la fonction $U$ est croissante la fonction $h$ est également croissante.

Supposons que plus généralement, on ait pour tout $w>0$,

$$\frac{U\left(wx\right)-U\left(x\right)}{a\left(x\right)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}h\left(w\right), \tag{1.4.5}$$

où $a\left(x\right)=a_{[x]}$ pour $x\geq 1$, $[x]$ : désignant la partie entière de $x$. Soit $w_1,w_2>0$. On a :

$$\frac{U\left(w_1w_2x\right)-U\left(x\right)}{a\left(x\right)}=\frac{U\left(w_1w_2x\right)-U\left(w_1x\right)}{a\left(xw_1\right)}*\frac{a\left(xw_1\right)}{a\left(x\right)}+\frac{U\left(w_1x\right)-U\left(x\right)}{a\left(x\right)}.$$

En faisant :

$$\frac{a\left(xw_1\right)}{a\left(x\right)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}l\left(w_1\right),\forall w_1>0.$$

Et il vient que :

$$h\left(w_1w_2\right)=h\left(w_2\right)l\left(w_1\right)+h\left(w_1\right).$$

La fonction $l$ est mesurable et localement bornée. Comme la fonction $h$ est croissante et non constante, on en déduit que $l$ est strictement positive. De plus en posant $yw'=x$, on a pour $w'>0$,

$$l\left(w\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\left(xw\right)}{a\left(x\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{a\left(yw'w\right)}{a\left(x\right)}\frac{a\left(x\right)}{a\left(yw'\right)}=\frac{l\left(w'w\right)}{l\left(w'\right)}.$$

Ainsi on a pour tout $w'$, $w>0$,

$$l\left(ww'\right)=l\left(w\right)l\left(w'\right), \tag{1.4.6}$$

où $l$ est une fonction strictement positive mesurable localement bornée. Vérifions que les solutions non nulles de cette équation fonctionnelle sont : $l(w) = w^{\gamma}$, où $\gamma \in \mathbb{R}$. En intégrant pour $w' \in [1,2]$, il vient en effectuant le changement de variable $ww' = u$,

$$\frac{1}{w}\int_{w}^{2w} l(u)\,du = l(w)\int_{1}^{2} l(w')\,dw'.$$

On en déduit que $l$ est continue puis dérivable. On obtient alors en dérivant $l(ww')$ par rapport à $w'$ et en évaluant en $w' = 1$ que $wl'(w) = \gamma l(w)$. Ceci implique que $l(w) = cw^{\gamma}$. Comme $l(1) = l(1)^2$, on en déduit que $l(1) = 1$ et que $l(w) = w^{\gamma}$ pour $w > 0$. On retrouve $\gamma$ l'indice de la loi des valeurs extrêmes généralisées alors on a :

$$h(w_1 w_2) = h(w_2)\,w_1^{\gamma} + h(w_1)\,,\forall w', w > 0,$$

pour $\gamma = 0$ on obtient l'équation fonctionnelle : $h(w_1 w_2) = h(w_2) + h(w_1)\,.$

Un raisonnement semblable à celui effectué a partir de l'équation fonctionnelle (1.4.6) assure que les solutions mesurables localement bornées sur $]0,\infty[$ de cette équation fonctionnelle sont $h(w) = c\log(w)$, avec $c > 0$. Pour $\gamma \neq 0$, par symétrie on a :

$$h(w_1 w_2) = h(w_2)\,w_1^{\gamma} + h(w_1) = h(w_1 w_2) = h(w_1)\,w_2^{\gamma} + h(w_2)\,.$$

En particulier, on a :

$$h(w_1)\left(1 - w_2^{\gamma}\right) = \left(1 - w_1^{\gamma}\right)h(w_2)\,.$$

Cela implique $h(w) = 0$ si $w = 1$, et sinon $\frac{h(w)}{(w^{\gamma}-1)}$ est constant. Donc on obtient $h(w) = c\left(w^{\gamma} - 1\right).$

À un changement d'échelle prés, on peut choisir $c = \frac{1}{\gamma}$. À une translation prés, on peut choisir $U(n) = b_n$. En définitive, il vient :

$$\lim_{x\,\rightarrow\infty}\frac{U\left(\frac{n}{v}\right) - b_n}{a_n} = h\left(\frac{1}{v}\right) = \begin{cases} \frac{v^{-\gamma}-1}{\gamma} & si\ \gamma \neq 0, \\ -\log(v) & si\ \ \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.4.7}$$

On peut maintenant calculer la limite de $I_n$. Il vient par convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_n &= \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{v^{-\gamma}-1}{\gamma}\right) e^{v}\mathbf{1}_{\{v>0\}}dv, \\ &= \int g(y)\,1_{\{1+\gamma y>0\}}d\left(e^{-(1+\gamma y)^{\frac{-1}{\gamma}}}\right), \end{aligned}$$

où on a posé $y = \frac{v^{-\gamma}-1}{\gamma}$ si $\gamma \neq 0$, $y = \log(v)$ si $\gamma = 0$. La fonction de répartition de la loi limite est donc $H_\gamma$. ■

**Définition 1.4.2** *: Le paramètre $\gamma$ du théorèmes (1.3.9)de Gnedenko (1943) ou du théorème (1.4.1) est un paramètre de forme que l'on appelle «indice des valeurs extrêmes» ou «indice de queue».*

**Remarque 1.4.3** *: Il est claire que on alors :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{loi de Fréchet} & \Phi_\gamma(x) := H_{\frac{1}{\gamma}}(\gamma(x+1)) \\ \textit{loi de Weibull} & \Psi_\gamma(x) := H_{-\frac{1}{\gamma}}(\gamma(x-1)) \end{array} \right. \quad si \quad \gamma \neq 0, \tag{1.4.8}$$

$$\textit{loi de Gumbel} \quad \Lambda(x) := H_0(x) \quad si \quad \gamma = 0. \tag{1.4.9}$$

## 1.5 Fonctions à variation régulière de première ordre :

La variation régulière du premier ordre est utile pour montrer la consistance des estimateurs d'indice des valeurs extrêmes.

La variation régulière est la dérivation à l'infinie, pour une fonction mesurable $g$ on définie l'équation différentielle par

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h},$$

où $h \neq 0$. Maintenant ne prend pas la limite de $h \to \infty$ pour $y$ est fixé, mais en prendre la limite de $y \to \infty$ avec $h$ est fixé. Alors l'équation serait ne dépende pas de $h$ et nous pouvons ecrire $g(y) = g_0(y) + o(1)$ quand $y \to \infty$ (voir[2, [Proposition B.1.9(3), Appendix B]]), où $g_0$ est différentiable et la limite :

$$\lim_{y\to\infty} g_0^{'}(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{g(y+h) - g(y)}{h},$$

existe. Soit $f$ une fonction définit sur un intervalle ouvert $I$ avec un valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et elle définit par $f(t) = \exp(g(\log(t)))$ telle que la limite :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)}, \text{ existe quelque soit } x \in I. \tag{1.5.1}$$

**Théorème 1.5.1** *: Soit $f$ une fonction mesurable et positive définie sur un intervalle ouvert $I$ de $]0,\infty[$, et que pour quelque soit $x \in I$, la limite (1.5.1) existe. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telque :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} := x^{\alpha}, \text{ pour tout} x \in \left]0,\infty\right[. \tag{1.5.2}$$

Si $\alpha \neq 0$ dans (1.5.2), la fonction $f$ s'appelle fonction à variation régulière à l'infinie avec l'indice $\alpha$ et on note $f \in RV_{\infty}(\alpha)$ ou $f \in RV_{\alpha}$.

Si $\alpha = 0$ la fonction $f$ s'appelle fonction à variation lente à l'infinie noté $f \in RV_{\infty}(0)$ ou $f \in RV_0$ ou $f \in SV_{\infty}$. Dans cette résultat $f$ est toujour mesurable. Les fonctions à variation lente jouent un rôle prépondérant dans l'étude des lois des valeurs extrêmes.

Les résultats concernant ces fonctions sont diffciles. Nous renvoyons au livre trés complet de [11]. En particulier, on sait caractériser les fonctions à variation lente, voir[11, Theorem 1.3.1, Section [1.3]].

**Théorème 1.5.2** *: Si $f$ une fonction à variation régulière avec l'indice $\alpha$ alors (dans cas $\alpha > 0$, supposer que $f$ est continue sur chaque intervalle de $[0, X]$) :*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} &= x^{\alpha}, \text{ est convergée uniformément à une point } x, \\ & \begin{cases} \text{dans chaque } [a,b] & (0 < a \leq b < \infty) \quad \text{si} \quad \alpha = 0, \\ \text{dans chaque } ]0,b] & (0 < b < \infty) \quad \text{si} \quad \alpha > 0, \\ \text{dans chaque } [a,\infty[ & (0 < a < \infty) \quad \text{si} \quad \alpha < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

**Théorème 1.5.3** *: Soit une fonction $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ est mesurable et il existe une fonction $a > 0$ telleque pour tout $x > 0$ :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} =: \Psi(x) = \begin{cases} c\dfrac{x^{\alpha}-1}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ c\log(x) & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

*avec la fonction $\Psi$ n'est pas constante, $c \neq 0$. La fonction $a$ est appelée la fonction auxiliaire de $f$. Si $f$ vérifié la hypothèse de ce thèorème avec $\alpha \neq 0$ alors $f \in RV_{\alpha}$.*

La démonstration de ce théorème découle avec la preuve de théorème (1.4.1) , voir le reférence [2].

**Proposition 1.5.4** *: Si $f$ une fonction à variation régulière avec l'indice $\rho$, quand $x \to \infty$ alors :*

$$f(x) = \begin{cases} \infty & si \quad \rho > 0, \\ 0 & si \quad \rho < 0. \end{cases}$$

**Corollaire 1.5.5** *: Soit $f$ une fonction à variation régulière avec l'indice $\rho \neq 0$, alors il existe une fonction $\ell$ à variation lente telle que :*

$$f(x) = x^{\rho} \ell(x).$$

**Théorème 1.5.6** *: Soit $f$ et $g$ deux fonctions positives et continues.*

*Soit $0 < a < b < \infty$ et soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites telles que :*

$$\lim_{n \to \infty} \sup a_n = \infty, \lim_{n \to \infty} \sup a_n / a_{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n f(a_n x) = g(x),$$

*pour tout $x \in [a, b]$. Alors $f$ est à variation régulière.*

**Théorème 1.5.7** *: Soit $f$ une fonction positive et monotone. Soit $g$ une fonction, et $(a_n)$ et $(x_n)$ deux suites telles que :*

$$\lim_{n \to \infty} \sup x_n = \infty, \lim_{n \to \infty} \sup a_n / a_{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n f(x_n t) = g(t),$$

*pour $t$ est dense dans sous-intervalles de $[0, \infty[$. Alors $f$ est à variation régulière.*

On peut bein définir la régulière et la lente à variation d'une fonction à une point 0. Une fonction $f$ définit sur $[0, \infty[$ est à variation régulière à zéro avec l'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ si la fonction $x \to f(1/x)$ est à variation régulière avec l'indice $-\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exemple 1.5.8** *:*

1. *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les fonctions $x^{\alpha}, x^{\alpha} (\log(x))^{\beta}, x^{\alpha} (\log(\log(x)))^{\beta}$ sont des fonctions à variation régulière d'indice $\alpha$*
2. *Les fonctions $2 + \sin(\log(\log(x))), \exp[\log(x)]^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1, x^{-1} \log(\Gamma(x))$ sont des fonctions à variation lente*
3. *Les fonctions $2 + \sin(x), \exp[\log(x)], x \exp[\sin(\log(x))]$ ne sont pas à variation régulière.*

### 1.5.1 Théorème de Karamata :

**Théorème 1.5.9** *: Soit une fonction $\ell$ définie sur l'intervalle $[0, \infty[$. La fonction $\ell$ est à variation lente si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ et deux fonctions mesurables $c(x), \varepsilon(x)$ définies on $[a, \infty[$ telleques :*

$$\lim_{x \to \infty} c(x) = c \in ]0, \infty[, \ \ et \ \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0,$$

*et pour tout $x \geq a$ :*

$$\ell(x) := c(x) \exp\left\{\int_a^x \varepsilon(s)\, ds/s\right\}.$$

Puisque $\ell, c, \varepsilon$ peut être changées sur des intervalles finis, la valeur de $a$ est sans importance, et on peut prendre $c$ éventuellement continue. Même on peut définit la fonction $\ell$ comme suit :

$$\ell(x) := \exp\left\{c_1(x) + \int_a^x \varepsilon(s)\, ds/s\right\}, \tag{1.5.3}$$

où $c_1(x)$, $\varepsilon(x)$ sont continues et mesurbles, et

$$\lim_{x \to \infty} c_1(x) = d \in \mathbb{R}, \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

**Démonstration** :(Voir Philippe Soulier Some applications of regular variation in probability and statistics, 2009). ■

Si la fonction $c$ une fonction constante, alors on dit que $\ell$ est normalisée.

Le théorème de Karamata implique que si $\ell$ est normalisée alors $\ell$ est dérivable de dérivée $\ell'$ avec pour tout $x > 0$,

$$\ell'(x) = \frac{\varepsilon(x)\, \ell(x)}{x}. \tag{1.5.4}$$

En particulier, on a :

$$\lim_{x \to \infty} x \frac{\ell'(x)}{\ell(x)} = 0. \tag{1.5.5}$$

**Théorème 1.5.10** ***(Représentation du théorème)*** *: Si la fonction $f$ à variation régulière d'indice $\alpha$, il existe deux fonctions mesurables $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec :*

$$\lim_{t\to\infty} c\left(t\right) = c_0 \in \left]0, \infty\right[, \ \text{ et } \lim_{t\to\infty} \eta\left(t\right) = \alpha, \tag{1.5.6}$$

*et $t_0 \in \mathbb{R}^+$ telleque pour $t > t_0$,*

$$f\left(t\right) := c\left(t\right) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \eta\left(s\right) ds/s\right\}. \tag{1.5.7}$$

*Intuitivement, Si (1.5.7) existe avec le deux fonctions a et c sont vérifiées (1.5.6), alors $f$ est une fonction à variation régulière d'indice $\alpha$.*

Pour la preuve de ce théorème voir [2, la démonstration du [Theorem B.1.6, Appendix B]].

**Théorème 1.5.11** *: Soit $A$ un ensemble mesurable, et positive et soit $\ell$ une fonction définit dans $A$. La fonction $\ell$ est à variation lente si et seulement si pour chaque $\alpha > 0$, il existe une fonction croissante $\phi$ et fonction décroissant $\Psi$ telles que :*

$$x^{\alpha}\ell\left(x\right) \sim \phi\left(x\right), x^{-\alpha}\ell\left(x\right) \sim \Psi\left(x\right), \ \text{quand} \ \left(x \to \infty\right).$$

**Lemme 1.5.12** *: Soit $\ell$ une fonction à variation lente et soient $u_n$ et $v_n$ deux suites positives telles que $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$. Si $u_n \sim v_n$(i.e. $u_n/v_n \to 1$ quand $n \to +\infty$), alors $\ell\left(u_n\right) \sim \ell\left(v_n\right)$.*

Le lemme montre que les fonctions à variation lente conservent les équivalents.

Par conséquent, ce résultat implique que si $G$ est à variation régulière d'indice $\rho$ et si $u_n \sim v_n$, alors $G\left(u_n\right) \sim G\left(v_n\right)$ et on dit que les fonctions à variation régulière conservent aussi les équivalents.

Le résultat du lemme suivant montre que la convergence du rapport de deux fonctions à variation régulière d'indice $\rho$ est localement uniforme lorsque $x$ tend vers l'infini.

**Lemme 1.5.13** ***(Resnick,1987)*** *: Si $G$ est une fonction à variation régulière d'indice $\rho$, alors pour tout $0 < a < b$,*

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{\lambda\in[a,b]} \left|\frac{G\left(\lambda x\right)}{G\left(x\right)} - \lambda^{-\rho}\right| = 0.$$

### 1.5.2 Bornes :

**Proposition 1.5.14** *: Soit une fonction $\ell(x)$ à variation lente. Alors pour tout $\alpha > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\ell(x) = \infty \text{ } et \text{ } \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha}\ell(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\ell(x))}{\log(x)} = 0.$$

**Théorème 1.5.15** *(Borne de Potter) : Soit $f$ une fonction à variation régulière d'indice $\alpha$, alors quelque soit $\epsilon > 0$ et $C > 1$, il existe $x_0$ telque pour tout $y \geq x \geq x_0$,*

$$C^{-1}(y/x)^{\alpha-\epsilon} \leq \frac{f(y)}{f(x)} \leq C(y/x)^{\alpha+\epsilon}.$$

**Démonstration** :

D'aprés la théorème (1.5.9) de Karamata, nous pouvons écrire : $f(x) = x^{\alpha}c(x)\ell(x)$, avec :

$$\ell(x) = \exp\int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(s)}{s}ds,$$

$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in [0,\infty[$.

Pour tout $\epsilon > 0$, et certains $x_0$ fixé telque $|c(x) - c| \leq c\epsilon$ et $|\varepsilon(x)| \leq \alpha$ pour $x \geq x_0$. Alors si $y \geq x \geq x_0$ nous avons :

$$\frac{f(y)}{f(x)} = \frac{c(y)}{c(x)}(y/x)^{\alpha}\exp\int_x^y \frac{\varepsilon(s)}{s}ds$$
$$\leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(y/x)^{\alpha}\exp\epsilon\int_x^y \frac{ds}{s} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}(y/x)^{\alpha+\epsilon}.$$

et l'autre borne est démontrée par le même méthode. ■

### 1.5.3 Intégration :

**Théorème 1.5.16** *: Soit $\ell$ une fonction à variation lente et soit $\beta > 0$. Alors :*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\beta}\ell(x)}\int_a^x \ell(t)t^{\beta-1}dt := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-\beta}\ell(x)}\int_x^{\infty} \ell(t)t^{-\beta-1}dt := \frac{1}{\beta}.$$

*La fonction $x \to \int_a^x \ell(t)t^{-1}dt$ est à variation lente et*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ell(t)}\int_a^x \ell(t)t^{-1}dt = \infty. \tag{1.5.8}$$

**Théorème 1.5.17** *: Soit $f$ une fonction à variation régulière et elle est bornée locallement et à variation sur l'intervalle $[x_0, \infty[$, alors pour tout $\beta$ telque $\alpha+\beta > 0$, elle satisfait que :*

$$\int_{x_0}^{x} t^{\beta} df(t) \sim \frac{\alpha}{\alpha+\beta} x f(x).$$

**Lemme 1.5.18** *: Soit $\ell$ une fonction à variation lente. Alors on a : pour tout $\alpha > 0$, $\ell(x) = o(x^{\alpha})$ en $+\infty$ et*

$$\int_{x}^{\infty} \ell(t) t^{-\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} \ell(x). \text{ en } +\infty$$

**Proposition 1.5.19** *: Soit $g$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, et elle est bornée locallement et à variation régulière avec un indice $\alpha$. Soit $h$ une fonction mesurable sur $[0, \infty[$, telleque :*

$$|h(t)| \leq c(t \wedge 1)^{\beta} + C(t \vee 1)^{\gamma},$$

*avec $\alpha + \beta > -1$, et $\gamma + \alpha < -1$. Si $\beta \leq -1$(il est possible prend si $\alpha > 0$), de plus on suppose que $|g(x)| \leq cx^{\delta}$ au voisinage zéro, pour $\delta$ telle que : $\delta + \beta > -1$. Alors :*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{g(tx)}{g(t)} h(t) dt = \int_0^{\infty} t^{\alpha} h(t) dt. \tag{1.5.9}$$

**Théorème 1.5.20** *: Soit $f$ une fonction positive, locallement intégrable dans un intervalle $[x_0, \infty[$.*

1. *Si pour certains $(\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2$ telque $\sigma + \rho > -1$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma}+1}{\int_{x_0}^{x} t^{\sigma} df(t)} = \sigma + \rho + 1, \tag{1.5.10}$$

*alors $f$ est à variation régulière avec l'indice $\rho$.*

2. *Si pour certains $(\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2$ telque $\sigma + \rho < -1$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma+1}}{\int_{x}^{\infty} t^{\sigma} df(t)} = -(\sigma + \rho + 1), \tag{1.5.11}$$

*alors $f$ est à variation régulière avec l'indice $\rho$.*

### 1.5.4 Densités :

**Théorème 1.5.21** *: Soit $F$ une fonction à variation régulière d'indice $\alpha$ et soit $f$ une fonction locallement intégrable sur l'intervalle $[1,\infty[$ telque :*

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt.$$

*Si $f$ est monotone, alors*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \alpha.$$

*Si $\alpha \neq 0$, alors $f$ est une fonction à variation régulière d'indice $\alpha - 1$.*

**Lemme 1.5.22** *: Soit $f$ une fonction monotone sur l'intervalle $[a,\infty[$. Soit une fonction $F_r(x)$ telle que pour $r \in \mathbb{R}$, $F_r(x) = \int_a^x t^r f(t)\,dt$. Si $F_r$ est une fonction à variation régulière d'indice $\beta > 0$, alors $f$ est une fonction à variation régulière d'indice $\beta - r - 1$.*

### 1.5.5 Inverse :

**Théorème 1.5.23** *: Soit $\alpha > 0$. Soit $f$ une fonction à variation régulière d'indice $\alpha$ et monotone. Alors il existe une fonction $g$ à variation régulière d'indice $1/\alpha$ telleque :*

$$f \circ g(x) \sim g \circ f(x) \sim x.$$

**Démonstration** :(Voir Philippe Soulier Some applications of regular variation in probability and statistics, 2009) ∎

**Lemme 1.5.24** *:*

1. *Si $G$ est à variation régulière d'indice $\rho > 0$, alors $G^{\leftarrow}(x) = G^{-1}(x)$ est à variation régulière d'indice $1/\rho$.*
2. *Si $G$ est à variation régulière d'indice $\rho < 0$, alors $G^{\leftarrow}(x) = G^{-1}(x)$ est à variation régulière d'indice $-1/\rho$.*

Pour une preuve du lemme, le lecteur pourra se référer de l'ouvrage de Bingham et l'autre**,** (1989), livre de Resnick, (1987)**.**

**Corollaire 1.5.25** *(Conjointe de Bruny) : Soit $\ell$ une fonction à variation lente a l'infini. Il existe une fonction $\ell^{\#}$ à variation lente telleque :*

$$\lim_{x\to\infty} \ell(x)\,\ell^{\#}(x\ell(x)) = 1.$$

## 1.6 Fonctions à variation régulière du second ordre :

**Définition 1.6.1** *: On dit qu'une fonction $\ell$ est à variation lente du second ordre avec une fonctionnement auxiliaire $b(x)$, s'il existe une fonction positive $A$ telle que :*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{b(x)} \log \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} := A(x). \tag{1.6.1}$$

***Proposition 1.6.2*** *: Il existe $\rho \leq 0$ et $c > 0$ telque $A(x) = c\int_1^t u^{\rho-1}du$ et $b$ est une fonction à variation régulière d'indice $\rho$.*

**Démonstration** : On pose $h(x) = \log(\ell(x))$ alors on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx) - h(x)}{b(x)} = A(x). \tag{1.6.2}$$

Si on a $s$, $t > 0$, alors

$$\frac{h(stx) - h(x)}{b(x)} = \frac{b(tx)}{b(x)} \frac{h(stx) - h(tx)}{b(tx)} + \frac{h(tx) - h(x)}{b(x)},$$

où :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b(tx)}{b(x)} = \frac{A(ts) - A(t)}{A(s)},$$

On a que $b$ est une fonction à variation régulière d'indice $\rho$ depuis $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = 0$ implique :

$$\frac{A(ts) - A(t)}{A(s)} = t^{\rho},$$

Si $\rho = 0$ alors $A(ts) = A(s) + A(t)$, si on prend $A(t) = c\log(t)$.

Si $\rho < 0$, alors

$$A(ts) = t^{\rho} A(s) + A(t),$$

et en permutant les rôles de $s$ et $t$ (i.e. $A(ts) = A(st)$),

$$t^\rho A(s) + A(t) = t^\rho A(t) + A(s),$$

c'est-à-dire $A(s)(1 - t^\rho) = A(t)(1 - s^\rho)$ c'est implique que: $(1 - s^\rho)^{-1} A(s)$ est un constant même que dire il existe $c > 0$ telleque :

$$A(s) = c(1 - s^\rho).$$

■

**Définition 1.6.3** *: Soit $\psi_2$ une fonction positive à variation régulière d'indice $\gamma$ telleque :*

$$\lim_{x \to +\infty} \psi_2(x) = 0,$$

*et vérifiant :*

$$\frac{U(xu) - U(x)}{\psi(x)} - h_\rho(u) \sim \psi_2(x) k(u) \, quand \; x \to \infty, u > 0.$$

*Telle que la fonction $h_\rho$ vérifie :*

$$h_\rho(u) := \int_1^u x^{\rho - 1} dx, \tag{1.6.3}$$

*et la fonction $k$ est donnée par :*

$$k(x) := c_1 \int_1^x s^{\rho - 1} \left( \int_1^s u^{\gamma - 1} du \right) ds + c_2 \int_1^x s^{\gamma + \rho - 1} ds. \tag{1.6.4}$$

*Et la fonction $\psi$ est à variation régulière d'indice $\rho$.*

**Définition 1.6.4** *: On dit qu'une fonction $U$ est à variation régulière du second ordre si elle vérifie :*

$$\frac{U(xu) - U(x)}{\psi(x)} - h_\rho(u) \sim \psi_2(x) k(u) \;\; quand \; x \to \infty, u > 0, \tag{1.6.5}$$

*et on dit que $\gamma$ est un paramètre du second ordre. On note $U \in RV_{\rho,\gamma}$*

La variation régulière du second ordre est un utile pour montrer la normalité asymptotique des estimateurs d'indice des valeurs extrêmes.

## 1.7 Domaines d'attraction :

### 1.7.1 Caractérisations générales :

On définit la fonction $U$ d'aprés la formule (1.4.3) par :

$$U(t) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right), t > 1,$$

où $F^{-1}$ est l'inverse généralisé de $F$. Les calculs de la démonstration du théorème (1.4.1) suggérent que si $F$ appartient au domaine d'attraction d'une loi des valeurs extrêmes (loi max stable), notons alors on a, à un changement d'échelle prés

$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(ws) - U(s)}{a(s)} := \frac{w^{\gamma} - 1}{\gamma}. \tag{1.7.1}$$

En particulier, si $x$, $y > 0$ et $y \neq 1$, on a :

$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{U(xs) - U(s)}{a(s)} \frac{a(s)}{U(ys) - U(s)},$$

$$= \begin{cases} \frac{x^{\gamma}-1}{y^{\gamma}-1} & si\ \gamma \neq 0, \\ \frac{\log(x)}{\log(y)} & si\ \gamma = 0. \end{cases}$$

**Proposition 1.7.1** *: Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, on dit que $F$ appartient au domaine d'attraction d'une loi des valeurs extrêmes si et seulement si $\forall x$, $y > 0$ et $y \neq 1$*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} := \begin{cases} \frac{x^{\gamma}-1}{y^{\gamma}-1} & si\ \gamma \neq 0, \\ \frac{\log(x)}{\log(y)} & si\ \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

Il est d'usage d'utiliser la notation $\overline{F}$ pour la distribution de la queue de la loi de $X$ : $\overline{F}(x) = P(X > x)$ alors :

$$F(a_n x - b_n)^n := \left(1 - \overline{F}(a_n x - b_n)\right)^n. \tag{1.7.3}$$

**Proposition 1.7.2** *: Soit $F$ une distribution. On dit que $F$ appartient au domaine d'attraction d'une loi des valeurs extrêmes si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x - b_n) := -\log(H_{\gamma}(x)),$$

*pour une certaine suites $(a_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$.*

Nous remarquons que la formule de proposition (1.7.2) elle découle la formule (1.3.1).

**Proposition 1.7.3** *: Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La distribution $F$ appartient au domaine d'attraction d'une loi des valeurs extrême s'il existe une fonction mesurable $a(t)$ telle que pour tout $1 + x\gamma > 0$, on ait :*

$$\lim_{u \to x_F^-} \frac{\overline{F}(a(t)x + t)}{\overline{F}(t)} := \begin{cases} (1 + x\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} & si\ \gamma \neq 0, \\ e^{-x} & si\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Bien que trés utilisée en pratique, cette approche des extrêmes basée sur la loi limite du maximum d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées a été fortement critiquée dans la littérature. En effet, elle ne tient compte que d'une seule observation, la plus grande. On a donc le sentiment de perdre de l'information et notamment toute celle contenue dans les autres grandes valeurs de l' ́echantillon.

**Définition 1.7.4** *: Si $F$ vérifie le théorème (1.3.9)de Gnedenko (1943), et le théorème (1.4.1) alors on dit alors que $F$ appartient au «domaine d'attraction» de $H_\gamma$et on note $F \in D(H_\gamma)$, selon le signe de $\gamma$, on distingue trois domaines d'attraction.*

1. Si $\gamma > 0$, on dit que $F$ appartient au domaine d'attraction de Fréchet et on notera $F \in D(\Phi_\gamma(x))$. Ce domaine d'attraction est celui des distributions à queues lourdes, i.e. qui ont une fonction de survie à décroissance polynomiale. Comme exemple de lois appartenant à ce domaine d'attraction on a les lois de Cauchy, de Pareto, du Chi-deux, de Student, de Fréchet,...etc.

2. Si $\gamma < 0$, on dit que $F$ appartient au domaine d'attraction de Weibull et on notera $F \in D(\Psi_\gamma(x))$. Ce domaine d'attraction est celui des fonctions de survie dont le support est borné supérieurement. Pour le domaine d'attraction de Weibull on trouve les lois Uniforme, Beta, de Weibull,...etc.

3. Si $\gamma = 0$, on dit que $F$ appartient au domaine d'attraction de Gumbel et on notera $F \in D(\Lambda(x))$. Ce domaine d'attraction est celui des distributions à queues légères, i.e. qui ont une fonction de survie à décroissance exponentielle. Dans ce domaine d'attraction, on regroupe les lois Normale, Exponentielle, Log-normale, Gamma,...etc

### 1.7.2 Domaine d'attraction de Fréchet :

**Définition 1.7.5** *: On appelle point terminal (en anglais «upper endpoint») de la fonction $F$, le réel $x_F$ définit par :*

$$x_F := \sup \{x : F(x) < 1\},$$

avec la convention $\sup\{\varnothing\} = \infty$.

**Théorème 1.7.6** *: La fonction de répartition $F$ appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre $\zeta > 0$ si et seulement si :*

$$\overline{F}(x) := x^{-\zeta}\ell(x),$$

*où la fonction $\ell$ est à variation lente.*

En particulier $x_F = +\infty$.

De plus si $F \in D(\Phi_\zeta)$ alors avec $a_n = U(n) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, la suite $(a_n^{-1}M_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $\Phi_\zeta$.

**Démonstration :**

Supposons que $\overline{F}(x) = x^{-\zeta}\ell(x)$, où la fonction $\ell$ est à variation lente. On conserve les notations de la théorème (1.5.9). On a $\overline{F}(x) \sim g(x)$ en $+\infty$, où :

$$g(x) = x^{-\zeta}c(x)\exp\left\{\int_a^x \varepsilon(s)\,ds/s\right\},$$

est une fonction continue. Posons $a_n = U(n) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

On a $\overline{F}(a_n) \leq \frac{1}{n} \leq \overline{F}(\overline{a_n})$ et $a_n$ tend vers l'infini avec $n$. Si $F$ est continue en $a_n$, alors on a $\overline{F}(a_n) = 1/n$, sinon comme $\overline{F}$ est équivalente en $+\infty$ à une fonction continue, on en déduit que $\overline{F}(a_n) \sim \frac{1}{n}$ quand $n$ tend vers l'infini. Pour $x > 0$, on a donc :

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(a_n x)}{\overline{F}(a_n)} = x^{-\zeta}. \tag{1.7.4}$$

■

### 1.7.3 Domaine d'attraction de Weibull :

**Théorème 1.7.7** *: La fonction de répartition $F$ appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull de paramètre $\zeta > 0$ si et seulement si : $x_F < \infty$ et*

$$\overline{F}\left(x_F - \frac{1}{x}\right) := x^{-\zeta}\ell(x),$$

*où la fonction $\ell$ est à variation lente.*

De plus si $F \in D(\Psi_\zeta)$ alors avec $a_n = x_F - U(n) = x_F - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, la suite $(a_n^{-1}M_n - x_F, n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $\Psi_\zeta$.

Comme on le voit clairement, les fonctions qui tendent au domaine d'attraction de Weibull nécessitent un point terminal. Ceci les rend peu pratiques dans la modélisation de beaucoup de phénomènes, où en principe il n'y a pas de borne supérieure. D'autre part, bien qu'il est évident que dans la nature il y a toujours une borne supérieure (peut-être extrêmement grande), on peut ne pas vouloir incorporer ce paramètre supplémentaire $x_F$ au modèle, et on tournera alors vers des modèles qui n'exigent pas de point final, comme Gumbel ou Fréchet.

Il existe cependant un autre critère de caractérisation de $D(\Psi_\zeta)$ et $D(\Phi_\zeta)$.

**Proposition 1.7.8** *(Critère de Von Mises) : Soit $F$ la fonction de répartition d'une loi de densité $f$.*

1. *Si on a :*
$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} = \zeta > 0, \tag{1.7.5}$$
*alors $F$ appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre $\zeta$.*

2. *On suppose que la loi de densité $f$ strictement positive sur un intervalle $[z, x_F]$, avec $x_F < \infty$. Si*
$$\lim_{x\to x_{\overline{F}}} \frac{(x_F - x) f(x)}{\overline{F}(x)} = \zeta > 0, \tag{1.7.6}$$
*alors $F$ appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull de paramètre $\zeta$.*

### 1.7.4 Domaine d'attraction de Gumbel :

Les résultats concernant le domaine d'attraction de la loi de Gumbel sont plus délicats. Se référer aux livres de Beirlant et autre (2004) ou voir [2] pour une présentation exhaustive.

**Théorème 1.7.9** *: La distribution $F$ appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel si et seulement si : il existe deux une fonctions $c$ et une fonction $\varepsilon(.)$ positive dérivable de dérivé $\varepsilon'(.)$ telleques :*

$$\lim_{x \to x_F} c(x) = c > 0, \lim_{x \to x_F} \varepsilon'(x) = 0.$$

*et pour $a < x < x_F$ :*

$$\overline{F}(x) := c(x) \exp\left\{ - \int_a^x \frac{1}{\varepsilon(t)} dt \right\}. \tag{1.7.7}$$

## 1.8 Condition de second ordre :

On définit une fonction $U$ d'aprés la formule (1.7.1) par :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} := \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} =: D_\gamma(x), \tag{1.8.1}$$

où $\gamma$ est une valeur constant dans $\mathbb{R}$ appelle l'indice de valeur extrême.

**Définition 1.8.1** *: On dit que une fonction $U$( ou est une lois de probabilité) satisfait la condition de second ordre si pour une fonction positive $a$ et pour une fonction négative $A$ avec $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{U(tx)-U(t)}{a(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}}{A(t)} =: H(x), x > 0, \tag{1.8.2}$$

*où la fonction $A$( resp la fonction $a$) est le second fonction auxiliaire( resp est le premier fonction auxiliaire). Telle que $H$ n'est pas un multiple de $x^\gamma - 1/\gamma$ en particulier n'est pas identiquement zéro.*

**Remarque 1.8.2** *: On peut définir la condition de second ordre comme une condition de domaine d'attraction.*

**Théorème 1.8.3** *(De Haan et Stadtmüller, (1996)) : Supposons que la fonction $f$ satisfaite la condition de second ordre. Alors il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ et un paramètre $\rho \leq 0$ telleque pour tout $x > 0$,*

$$H(x) := c_1 \int_1^x s^{\rho-1} \left( \int_1^s u^{\gamma-1} du \right) ds + c_2 \int_1^x s^{\gamma+\rho-1} ds. \tag{1.8.3}$$

*On plus, pour $x > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{a(tx)}{a(t)} - x^\gamma}{A(t)} := c_1 x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \tag{1.8.4}$$

*et*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(tx)}{A(t)} := x^\rho, \tag{1.8.5}$$

*la constant $c_1 \neq 0$ si $\rho = 0$.*

**Démonstration** :(Voir De Haan et Ferreir A. Extreme value theory. An inroduction, 2006. Appendix B.3) ■

**Théorème 1.8.4** *: Soit $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$ la statistique d'ordre basée sur l'echantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ avec une distribution $F$. Supposons que la condtion de second ordre est vérifiée pour certains $\rho \in \mathbb{R}$, $\gamma \leq 0$, Alors*

$$\sqrt{k} \frac{X_{n-k,n} - U\left(\frac{n}{k}\right)}{a\left(\frac{n}{k}\right)},$$

*elle admise une normalité asymptotique standard à condtion que pour une suite d'entier $k = k_n$ telle que $k_n \to \infty$, quand $n \to \infty$, et la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k} A\left(\frac{n}{k}\right),$$

*existe et elle est finie.*

La démonstration de théorème se trouve dans le reférence [2].

# Chapitre 2

# Estimation du valeur extrême de queue lourde

## 2.1 Distribution à queue :

**Définition 2.1.1** *: Deux distributions $F$ et $G$. sont dites de queue équivalente si elles ont le même point terminal et $x_F = x_G$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c \in (0, +\infty).$$

### 2.1.1 Loi de Pareto :

**Définition 2.1.2** *: Une variable aléatoire positive $X$ est dit de type Pareto si sa fonction de survie $\bar{F}$ est de la forme :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} := \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\zeta}, \tag{2.1.1}$$

*pour un $\zeta > 0$ et pour tout $x > 0$. On dit que $\bar{F}$ est à variation régulière à l'infini d'indice $-\zeta$. Le réel $\zeta$ est appelé l'indice de Pareto ou de queue de la loi de $X$, et $X$ est dans le domaine d'attraction de la loi de $H_\gamma$ avec $\gamma = 1/\zeta$ ou $\zeta = 1/\gamma$.*

**Définition 2.1.3** *: On dit que la fonction de répartition suit loi de Pareto de premier espase si on a :*

$$F(x) := 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, pour\ x > x_0. \tag{2.1.2}$$

### 2.1.2 Lois à queue lourde :

**Définition 2.1.4** *: Soit une fonction de répartition $F$ appartient au domaine d'attraction de Fréchet. On dit que $F$ de distribution à queue lourde si :*

$$1 - F(x) := x^{-\zeta}\ell(x), x \to \infty, \ell(.) \in RV_0 \tag{2.1.3}$$

*alors $(1 - F(x))$ est une fonction à variation régulière d'indice $-\zeta$.*

★ lourde parce qu'il converge vers l'axe des $x_i$ à partir à un certain seuil à lourde.

### 2.1.3 Lois à queue de Weibull :

**Définition 2.1.5** *: Les lois à queue de type de Weibull correspondent au cas particulier où l'on suppose dans (1.7.7) que $\varepsilon'(.) \in RV_{-\zeta}$ où $\zeta$ est appelé indice de queue de Weibull , on montre facillement que (1.7.7) s'écrit :*

$$1 - F(x) := \exp\left\{-x^{\zeta}\ell(x)\right\}, x \to \infty, \ell(.) \in RV_0. \tag{2.1.4}$$

Une fonction de répartition s'écrivant selon se modèle est dit à queue de type de Weibull d'indice $\zeta$.

**Remarque 2.1.6** *: Les lois à queue de type de Weibull appartiennent évidemment au domaine d'attraction de Gumble.*

**Rappel des problémes :**

**Probléme 2.1.7** *: Disposant d'un échantillon $X_1, ..., X_n$ de $n$ variables aléatoires réelle indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune $F(.)$, nous souaitons estimer le réel $q(\alpha_n)$ définis par :*

$$q(\alpha_n) := \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha_n), \ avec\ \alpha_n \longrightarrow \infty\ lorsque\ n \longrightarrow \infty,$$

$\alpha_n$ *est une suite connue et* $\overline{F}^{\leftarrow}(u) := \inf\left\{x, \overline{F}(x) \leq u\right\}$ *est l'inverse généralisée de la fonction de survie.*

**Probléme 2.1.8** *: Un problème similaire à l'estimation de* $q(\alpha_n)$ *est l'estimation de "petites probabilitées"* $p_n$*. Autrement dit, pour une suite de réels* $(x_n)$ *fixée nous souaitons estimer la probabilité* $p_n$ *définie par :*

$$p_n := \overline{F}(x_n), x_n \longrightarrow \infty \ lorsque \ n \longrightarrow \infty.$$

## 2.2 Estimation d'indice de queue lourde :

### 2.2.1 Estimateur de Hill(1975) :

Cet estimateur a été introduit par Hill (1975) pour estimer d'une manière non-paramétrique le paramètre de queue des lois appartenant au domaine d'attraction de Fréchet. Pour construire son estimateur, Hill utilise la méthode du maximum de vraisemblance sur l'ensemble des $k_n$ plus grandes observations d'un échantillon, en supposons que $\gamma > 0$, et $F$ vérifie la condition :

$$\frac{1-F(x)}{1-F(u)} = \left(\frac{x}{u}\right)^{-1/\gamma}, \ x \geq u, \ u \in \mathbb{R}.$$

Alors on utilise seulement les statistiques d'ordre qui dépassent le seuil $u$.

On a, les statistique d'ordre $X_{n-k_n+1,n}, \ldots, X_{n,n}$. La fonction de log-vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} L(\gamma; X_{n-k_n+1,n}, \ldots, X_{n,n}) &= -k_n \log(\gamma u) + \log(1 - F(u)) - \frac{\gamma+1}{\gamma} \\ &\quad * \sum_{i=1}^{k_n} \left(\log(X_{n-i+1}) - \log(u)\right). \end{aligned}$$

En resolvant cette equation et remplaçant le seuil $u$ par $X_{n-k,n}$, on obtient l'estimateur de Hill. Pour caractériser l'estimateur de Hill, nous allons recourir au leur formule principal.

### 2.2.2 construire son estimateur :

Avant d'énoncer le principal formule de c'estimateur (estimateur de Hill (1975)) dans cette section , nous construissons l'estimateur de Hill (1975).

On a d'aprés la formule (1.7.4) : Soit $F$ une fonction de répartition. On dit que $F \in D(\Phi_\zeta)$ si et seulement si,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} := x^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma > 0 \text{ } o\grave{u} \text{ } \zeta = \frac{1}{\gamma}. \tag{2.2.1}$$

La formule (2.2.1) équivalence à pour [voir [2,theorem (1.2.2)]] :

$$\gamma > 0 : F(x) < 1, \forall x, \int_1^\infty (1-F(x)) \frac{dx}{x} < \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty (1-F(x)) \frac{dx}{x}}{1-F(t)} = \gamma, \tag{2.2.2}$$

Par intégration par partie on trouve que :

$$\int_t^\infty (1-F(s)) \frac{ds}{s} := \int_t^\infty (\log(u) - \log(t)) \, dF(u). \tag{2.2.3}$$

Donc nous avons :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty (\log(u) - \log(t)) \, dF(u)}{1-F(t)} = \gamma. \tag{2.2.4}$$

Afin de développer un estimateur basé sur ce resultat asymptotique, on remplace dans (2.2.4) la valeur $t$ par la statistique d'ordre $X_{n-k,n}$ et $F$ par la distribution empirique $F_n$ on trouve,

$$\widehat{\gamma} := \frac{\int_{X_{n-k,n}}^\infty (\log(u) - \log(X_{n-k,n})) \, dF_n(u)}{1-F_n(X_{n-k,n})}, \tag{2.2.5}$$

ce $\widehat{\gamma}$ est appelé l'estimateur de Hill (1975) et on note $\widehat{\gamma}^H$.

**Lemme 2.2.1** *: Soit $F$ une distribution appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre $\zeta > 0$. On a :*

$$\frac{1}{\overline{F}(t)} E\left[(\log(X) - \log(t)) \mathbf{1}_{\{X>t\}}\right] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\zeta} := \gamma.$$

**Démonstration** :

On déduit de la définition des fonctions à variation lente et du théorème (1.7.6) que $F \in D(\Phi_\zeta)$, où $1/\zeta = \gamma$, si et seulement si $\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} = x^{-\zeta}$ pour tout $x > 0$.

Supposons par simplicité que la loi de $X$ possède la densité $f$.

Par intégration par partie, on a pour $t > 1$

$$E\left[(\log(X) - \log(t))\,\mathbf{1}_{\{X>t\}}\right] = \int_t^{+\infty} (\log(x) - \log(t))\, f(x)\, dx,$$

$$= \left[-\overline{F}(x)(\log(X) - \log(t))\right]_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \frac{\overline{F}(x)}{x} dx.$$

En fait le membre de gauche est égal au membre de droite en toute généralité.

Grâce au lemme (1.5.18), on a $\overline{F}(x) = x^{-\zeta}\ell(x) = o\left(x^{-\zeta+\alpha}\right)$, avec $-\zeta + \alpha < 0$. Le membre de droite de l'équation ci-dessus se réduit donc à $\int_t^{+\infty} \frac{\overline{F}(x)}{x} dx$. On a d'aprés le deuxième partie du lemme (1.5.18) :

$$\int_t^{+\infty} \frac{\overline{F}(x)}{x} dx = \int_t^{+\infty} x^{-\zeta-1}\ell(x)\, dx \sim \frac{1}{\zeta} t^{-\zeta}\ell(t)\, dt = \frac{1}{\zeta}\overline{F}(t). \tag{2.2.6}$$

Il nous faut maintenant trouver un estimateur de $\overline{F}(t) = E\left[\mathbf{1}_{\{X_i>t\}}\right]$ et un estimateur de $E\left[(\log(X) - \log(t))\,\mathbf{1}_{\{X>t\}}\right]$.

La loi forte des grands nombres assure que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_i>t\}}$ converge presque sûrement vers $\overline{F}(t)$. Il reste à remplacer $t$ par une quantité qui tende vers $+\infty$ avec $n$, il est naturel de remplacer $t$ par $X_{n-k_n+1,n}$, où la suite $(k_n, n \geq 1)$ satisfait les hypothèses suivantes : $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$, et $\lim_{n\to\infty} k_n/n = 0$.

Cette dernière condition assure d'aprés la proposition (1.3.5) et le théorème (1.7.6) que presque sûrement $X_{n-k_n+1,n}$ diverge vers l'infinie.

Pour alléger les notations, notons $k_n = k$. S'il on suppose que $F$ est continue, la statistique d'ordre est strictement croissante presque sûrement, et on a pour estimation de $\bar{F}(X_{n-k+1,n})$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\left\{X_i>X_{n-k+1,n}\right\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\left\{X_{i,n}>X_{n-k+1,n}\right\}} = \frac{k-1}{n}. \tag{2.2.7}$$

La loi forte des grands nombres assure que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\left(X_i\right)-\log\left(t\right)\right)\mathbf{1}_{\{X_i>t\}}$ converge presque sûrement vers $g\left(t\right)=E\left[\left(\log\left(X\right)-\log\left(t\right)\right)\mathbf{1}_{\{X>t\}}\right].$

On remplace à nouveau $t$ par $X_{n-k+1,n}$, et on obtient comme estimation de $g\left(X_{n-k+1,n}\right)$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\left(X_i\right)-\log\left(X_{n-k+1,n}\right)\right)\mathbf{1}_{\left\{X_i>X_{n-k+1,n}\right\}}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=n-k+2}^{n}\log\left(X_{i,n}\right)-\left(k-1\right)\log\left(X_{n-k+1,n}\right)\right)$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=n-k+2}^{n}\log\left(X_{i,n}\right)-\log\left(X_{n-k+1,n}\right),$$

est un bon candidat pour l'estimation de $\gamma$. ■

**Théorème 2.2.2** *: Soit $\left(X_n,n\geq1\right)$ une suite des variables aléatoires indépendantes de loi $F\in D\left(H_\gamma\right)$, où $\gamma>0$. Si $\lim_{n\to\infty}k_n=+\infty$, et $\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=0$ alors l'estimateur de Hill (1975)définit par :*

$$\widehat{\gamma}_{k_n,n}^{H}:=\frac{1}{k_n}\sum_{i=n-k_n+1}^{n}\log\left(X_{i,n}\right)-\log\left(X_{n-k_n+1,n}\right).$$

**Définition 2.2.3** *: Soit $\left(k_n\right)_{n\geq1}$ une suite d'entiers avec $1<k_n=k\leq n$, si $\lim_{n\to\infty}k_n=+\infty$, et $\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=0$ alors on peut définit l'estimateur de Hill (1975) par :*

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^{H}:=\frac{1}{k_n-1}\sum_{i=1}^{k_n-1}\log\left(X_{n-i+1,n}\right)-\log\left(X_{n-k_n+1,n}\right). \tag{2.2.8}$$

***Remarque 2.2.4*** *: Il est d'usage avec l'éstimateur de Hill (1975) de remplacer la somme de $i=1,...,k_n-1$, par la somme de $i=0,...,k_n-1$, et $k_n-1$ par $k_n$ sauf dans le dernier terme, ce qui ne change rien au résultat asymptotique. Nous admettrons le résultat suivant :*

$$\widehat{\gamma}_{k}^{H}:=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left(X_{n-i,n}\right)-\log\left(X_{n-k,n}\right). \tag{2.2.9}$$

*Pour alléger les notations, notons $k_n=k$.*

### 2.2.3 Consistance d'estimateur de Hill(1975) :

Un grand nombre de travaux théoriques ont été consacrés à l'étude des propriétés de l'estimateur de Hill. Mason (1982) a démontré la consistence faible et Deheuvels, Haeusler et Mason ont établi la consistance forte dans Deheuvels et autre (1988).

**Lemme 2.2.5** *: Soit $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de distribution $1-1/\gamma, \gamma \geq 1$, et soit la statistique d'ordre $Y_1 \leq Y_2 \leq, ... \leq Y_n$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} Y_{n-k,n} = \infty, quand\ n \to \infty,$$

*à condition de $k_n = o(n)$ avec $k_n = k$.*

**Théorème 2.2.6** *(Mason, 1982) : Soit $X_1, ..., X_n$ une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition $F$. Supposon que $F \in D(\Phi_\gamma)$ avec $\gamma > 0$. Alors quand $n \to \infty, k = k_n \to \infty, k/n \to 0$,*

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^H \xrightarrow{P} \gamma.$$

**Démonstration** (Mason, 1982) :

On lance le corrolaire suivant, [voir [2, Corollary (1.2.10)]] :

1. Pour $\gamma > 0$ la formule (1.7.1) équivalence à :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma, pour\ x > 0,$$

2. Pour $\gamma < 0$ la formule (1.7.1) équivalence à :

$$U(\infty) < \infty\ et\ \lim_{t\to\infty} \frac{U(\infty) - U(t)}{U(\infty) - U(t)}, pour\ x > 0.$$

On a pour $x \geq 1$, et pour $t \geq t_0$, [voir [2, Proposition (B.1.9)], Appendix B]

$$(1-\varepsilon) x^{\gamma-\varepsilon'} < \frac{U(tx)}{U(t)} < (1+\varepsilon) x^{\gamma+\varepsilon'}, \tag{2.2.10}$$

elle est équivalente à :

$$\begin{aligned} \log(1-\varepsilon) + \left(\gamma - \varepsilon'\right) \log(x) &< \log(U(tx)) \log(U(t)) \\ &< \log(1+\varepsilon) + \left(\gamma + \varepsilon'\right) \log(x). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une distribution $1 - 1/\gamma$, $\gamma \geq 1$. On note que

$$U(Y_i) \stackrel{d}{=} X_i, i = 1, 2... \qquad (2.2.12)$$

Donc d'aprés estimateur de Hill(1975), on a

$$\widehat{\gamma}_k^H := \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log\left(U\left(Y_{n-i,n}\right)\right) - \log\left(U\left(Y_{n-k,n}\right)\right).$$

Si on pose dans (2.2.11) $t = Y_{n-k,n}, x = Y_{n-i,n}/Y_{n-k,n}$. Puis par le lemme (2.2.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \log(1-\varepsilon) + \left(\gamma - \varepsilon'\right) \log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right) &< \log\left(U\left(Y_{n-i,n}\right)\right) - \log\left(U\left(Y_{n-k,n}\right)\right) \\ &< \log(1+\varepsilon) + \left(\gamma + \varepsilon'\right) \log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right), \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, on a :

$$\log(1-\varepsilon) + \left(\gamma - \varepsilon'\right) \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right) < \widehat{\gamma}_k^H$$

$$< \log(1+\varepsilon) + \left(\gamma + \varepsilon'\right) \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right).$$

Donc il suffit démontré que, quand $n \to \infty$,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right) \xrightarrow{P} 1. \qquad (2.2.13)$$

■

**Théorème 2.2.7** *(Mason, 1982) : Soit $X_1, ..., X_n$ une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une distribution $F$. Supposons pour $(k_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers avec $k = k_n \to \infty$, $k_n/n \to 0$, et $k_{n+1}/k_n \to 1$, quand $n \to \infty$,*

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^H \xrightarrow{P} \gamma > 0.$$

*Alors $F \in D(\Phi_\gamma)$.*

**Démonstration** : Soit $F_n$ la distribution empirique de $X_1, ..., X_n$ et $G_n$ la distribution empirique de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, qu'ils sont indépendantes et identiquement distribuées de distribution $1 - 1/x, x \geq 1$. Alors pour chaque $n$,

$$1 - F_n(x) \stackrel{d}{=} 1 - G_n\left(\frac{1}{1 - F(x)}\right). \tag{2.2.14}$$

Par retour à (2.2.3) et la formule d'estimateur de Hill (1975) de (2.2.5) on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}^H &= \frac{n}{k}\int_{X_{n-k,n}}^{\infty}(1 - F_n(u))\frac{du}{u}, \ \textit{où}\ 1 - F_n(X_{n-k,n}) = \frac{k}{n} \\
&= \frac{n}{k}\int_{X_{n-k,n}}^{\infty}\left\{1 - G_n\left(\frac{1}{1 - F(x)}\right)\right\}\frac{du}{u}, \\
&= \frac{n}{k}\int_{Y_{n-k,n}}^{\infty}(1 - G_n(s))\, d\log(U(s)),
\end{aligned}$$

avec $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$ est la statistique d'ordre de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.
Nous avons allé à les résultats suivante :

1. D'aprés (Shorack et Wellner (1986), pp. 345 et 415) on a :
   (a) $P\left(\sup_{s\geq 1} s(1 - G_n(s)) > b\right) = \frac{1}{b}, \quad \textit{pour}\ b > 1,$
   (b) $P\left(\inf_{1\leq s\leq Y_{n,n}} s(1 - G_n(s)) < a\right) \leq \frac{e}{a}e^{-1/a}, \quad \textit{pour}\ 0 < a < 1.$
2. Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\inf_{Y_{n-k,n}\leq s\leq Y_{n,n}} s(1 - G_n(s)) &= \inf_{0\leq s\leq 1}\frac{ks}{n}Y_{n-[ks],n} \\
&= \left(\inf_{0\leq s\leq 1} s\frac{Y_{n-[ks],n}}{Y_{n-k,n}}\right)\left(\frac{k}{n}Y_{n-k,n}\right),
\end{aligned}$$

où le deux facteurs sont indépendante. Tellement lui la même distribution à :

$$\left(\inf_{0\leq s\leq 1} sY^*_{n-[ks],n}\right)\frac{k}{n}Y_{n-k,n}, \tag{2.2.15}$$

avec le $Y_1^*, \ldots, Y_n^*$ sont indépendant et de même lois avec $Y$, donc on a :

$$\left(\inf_{0\leq s\leq 1} sY^*_{n-[ks],n}\right)\left(\frac{k}{n}Y_{n-k,n}\right) \stackrel{d}{=} \left(\inf_{1\leq s\leq Y^*_{k,k}} s(1 - G_n(s))\right)\left(\frac{k}{n}Y_{n-k,n}\right).$$

3. Pour $F_Y(y) = 1 - 1/y, y \geq 1$, quand $n \to \infty, k \to \infty, k/n \to 0$, [voir [2, corrolly (2.2.2)]]
$$\sqrt{k}\left(\frac{k}{n}Y_{n-k,n} - 1\right) \overset{d}{\backsim} N(0,1), \tag{2.2.16}$$
donc on a :
$$\lim_{n\to\infty} P\left(1-\varepsilon \leq \frac{k}{n}Y_{n-k,n} \leq 1+\varepsilon\right) = 1.$$

Pour $t$ suffisamment grande, soit $n = n(t)$ un nombre entier satisfait :
$$\frac{n}{k_n} \leq t \leq \frac{n+1}{k_{n+1}}.$$

Considérons la formule ce-dessus :
$$P\left(\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}t(1+\varepsilon)\int_{t(1+\varepsilon)}^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s} \leq \frac{n}{k}(1-\varepsilon)\int_{\frac{n}{k}(1+\varepsilon)}^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s}\right.$$
$$\leq Y_{n-k,n}\int_{Y_{n-k,n}}^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s} \leq \frac{n}{k}\int_{Y_{n-k,n}}^{\infty}\frac{s(1-G_n(s))}{1-\varepsilon}\frac{d\log(U(s))}{s}$$
$$\left.\leq \frac{\gamma+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Le premier inégalité est vrais par définition, et le deuxième et le quatrième sont valable avec une probabilité tend vers 1 (pour le deuxième inégalité nous utilisons le résultat (3), et le quatrième est vrais asymptotique). Et par les résultats (1) et (2), nous avons l'inégalité troisième est vrais avec probabilité inférieur à $1 - e(1-\varepsilon)^{-1}\exp(-1(1-\varepsilon)) > 0$,

Alors on trouve une conclusion que pour chaque $\varepsilon > 0$,
$$P\left(t\int_t^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s} \leq \gamma+\varepsilon\right) > 0,$$
pour $t$ suffisamment grande. Alors pour $t$ assez grande $t\int_t^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s} \leq \gamma+\varepsilon$.

Nous donne une autre inégalité équivalente par similarité.

Alors on a que :
$$\lim_{t\to\infty} t\int_t^{\infty}\frac{d\log(U(s))}{s} = \gamma.$$

Et d'aprés l'intégration par partie on trouve :

$$t\int_t^{\infty}\frac{1}{s}d\log\left(U\left(s\right)\right)ds=t\int_t^{\infty}\log\left(U\left(s\right)\right)\frac{ds}{s^2}-\log\left(U\left(t\right)\right).$$

et nous avons que pour $x>0$, [voir [2, Remark (B.2.14(2))], Appendix B]

$$\lim_{t\to\infty}\left(\log\left(U\left(tx\right)\right)-\log\left(U\left(t\right)\right)\right)=\gamma\log\left(x\right). \tag{2.2.17}$$

Cette, $U$ est une fonction à variation régulière d'indice $\gamma$, qu'elle implique que la fonction $1-F$ est à variation régulière d'indice $-1/\gamma$. ■

**Théorème 2.2.8** *(Propriétés de l'estimateur de Hill, 1975) : Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers avec $1<k_n=k\leq n$, quand $n\to\infty, k=(k_n)\to\infty, k/n\to 0$,*

1. *Alors, $\widehat{\gamma}_{k_n}^H$ converge en probabilité vers $\gamma$.(consistance faible).*
2. *Si de plus $k_n/\log(\log n)\to\infty$, quand $n\to\infty$ alors $\widehat{\gamma}_{k_n}^H$ converge presque sûrement vers $\gamma$.(consistance forte).*

Pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur $\widehat{\gamma}_{k_n}^H$, on a besoin d'une hypothèse sur la fonction à variation lente $\ell$. Il est en effet nécessaire d'imposer une condition qui spécifie la vitesse de convergence du rapport des fonctions à variation lente vers 1.

Il existe une constante réelle $\rho<0$, et une fonction $\varepsilon\left(x\right)$ quand $x\to\infty$ telles que pour tout $\lambda>1$,

$$\log\frac{\ell\left(\lambda x\right)}{\ell\left(x\right)}\sim\varepsilon\left(x\right)\frac{\lambda^{\rho}-1}{\rho}. \tag{2.2.18}$$

Cette condition appelée «condition du second ordre » est satisfaite pour la plupart des lois appartenant au domaine d'attraction de Fréchet. Plus la constante $\rho<0$ de (2.2.18) est proche de zéro, plus difficile est l'estimation de l'indice de queue $\gamma$.

**Remarque 2.2.9** *: l'approximation (2.2.18) implique que $\forall\varepsilon>0,\exists x_0$, tel que on a $\forall x\geq x_{0,}\forall\lambda>1$,*

$$\frac{(1+\varepsilon)\,\lambda^{\rho+\varepsilon}-1}{\rho}\leq\frac{1}{\varepsilon\left(x_n\right)}\log\left(\frac{\ell\left(\lambda x\right)}{\ell\left(x\right)}\right)\leq\frac{(1-\varepsilon)\,\lambda^{\rho-\varepsilon}-1}{\rho}.$$

### 2.2.4 Normalié asymptotique d'estimateur de Hill(1975) :

La normalité asymptotique de l'estimateur de Hill (1975) est due entre autres à Davis et Resnick (1984), Csörgő et Mason (1985), Haeusler et Teugels (1985) et Smith (1987).

**Théorème 2.2.10** *: Supposons que la fonction de distribution $F$ a vérifiée la condition de second ordre de section [1.8], c'est-à-dire :*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{U(tx)}{U(t)}-x^{\gamma}}{A(t)}=x^{\gamma}\frac{x^{\rho}-1}{\rho},$$

*ou il équivalence a :*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}-x^{-1/\gamma}}{A\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)}=x^{-1/\gamma}\frac{x^{\rho/\gamma}-1}{\gamma\rho},$$

*où $\gamma>0,\rho\leq 0,$ et $A$ est une fonction positive ou négative avec $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=0.$*

*Alors :*

$$\sqrt{k}\left(\widehat{\gamma}_k^H-\gamma\right)\overset{d}{\longrightarrow}N\left(\frac{\lambda}{1-\rho},\gamma^2\right), \tag{2.2.19}$$

*avec $N$ est la loi normal centré réduite, à condition que $k=k_n\to\infty,k_n/n\to 0$ quand $n\to\infty,$ et :*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{k}A\left(\frac{n}{k}\right)=\lambda<\infty. \tag{2.2.20}$$

**Remarque 2.2.11** *: Il est possible que la convergence de $U(tx)/U(t)$ vers $x^{\gamma}$ est trés rapide pour tout puissance négative de $t$ c'est-à-dire :*

$$\forall x>0, et\ \forall\alpha>0,\lim_{t\to\infty}t^{\alpha}\left(\frac{U(tx)}{U(t)}-x^{\gamma}\right)=0.$$

Dons ce cas le résultat de théorème (2.2.10) satisfaisant la biaisé de partie $\lambda/(1-\rho)$ remplace par 0. Alors on a :

$$\sqrt{k}\left(\widehat{\gamma}_k^H-\gamma\right)\overset{d}{\longrightarrow}N\left(0,\gamma^2\right).$$

**Théorème 2.2.12** *(Deheuvels, 1988) : Soit* $X_1, ..., X_n$ *une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition* $F$. *Avec* $F \in D(\Phi_\gamma), \gamma > 0$. *Si* $n \to \infty, k = k_n \to \infty, k/n \to 0$, *alors*

$$\sqrt{k}\left(\widehat{\gamma}_k^H - \gamma\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \gamma^2\right).$$

**Théorème 2.2.13** *(Beirlant,2004) : Soit* $X_1, ..., X_n$ *une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition* $F$. *Avec* $F \in D(\Phi_\gamma), \gamma > 0$. *Quand* $n \to \infty, k = k_n \to \infty, \sqrt{k}b_{k,n} \to 0$, *alors*

$$\sqrt{k}\left(\frac{\widehat{\gamma}_k^H}{\gamma} - 1\right) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Ces dernier théorèmes va nous permettre de calculer des intervalles de confiance pour $\widehat{\gamma}_k^H$. On ne doit pas interpréter le théorème comme assurant que l'estimateur de Hill(1975) est toujours le meilleur. Le théorème (2.2.12) indique seulement que les propriétés statistiques usuelles que l'on demande aux estimateurs sont vérifiées, mais les conditions de régularité de deuxième ordre qu'il faut exiger à $\overline{F}$, ce qui n'est pas vérifiable en pratique, font qu'il soit nécessaire de faire attention au moment de l'utiliser. En fait, comme on le verra plus tard, parfois l'estimateur de Pickands donne des valeurs moins oscillantes. De plus, l'estimateur de Hill n'est valable que pour le bassin d'attraction de Fréchet ; dans les autres cas on est contraints d'utiliser les autres estimateurs. Finalement, il faut préciser que l'estimateur de Hill exige toujours des hypothèses d'indépendance, et est très sensible aux dépendances entre les variables aléatoires.

**Lemme 2.2.14** *: Soit* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition* $F$, *qu'ils suits la lois exponentielle standard et soit* $E_{1,n} \le E_{2,n} \le \cdots \le E_n$ *leur statistique d'ordre. Et soit* $f$ *une fonction telleque* $Var(f(E)) < \infty$. *alors :*

$$\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(E_{n-i,n} - E_{n-k,n}\right) - E\left(f(E)\right)\right),$$

$E_{n-k,n}$ *est indépendant et à normalité asymptotique avec espérence égal a zéro et variance* $Var(f(E))$ *quand* $n \to \infty$, *a condition que* $k = k_n \to \infty, k_n/n \to 0$.

**Démonstration** : (Voir De Haan and Ferreir A. Extreme value theory. An inroduction, 2006) ■

**Démonstration** (De théorème (2.2.10) ) :

Nous écrivons le condition de second ordre comme :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{x^{-\gamma}U(tx)}{U(t)}-1}{A(t)}=\frac{x^{\rho}-1}{\rho}.$$

Puisque $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=0$, alors c'est équivalent à :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(U(tx))-\log(U(t))-\gamma\log(x)}{A(t)}=\frac{x^{\rho}-1}{\rho}.$$

Pour une fonction $A_0$ avec $A_0(t)\backsim A(t)\,,t\to\infty$, et pour chaque $\varepsilon>0$, il existe $t_0$ telle que pour $t\geq t_0,x\geq 1$, [voir [2, Theorem (B.2.18)], Appendix B]

$$\left|\frac{\log(U(tx))-\log(U(t))-\gamma\log(x)}{A_0(t)}-\frac{x^{\rho}-1}{\rho}\right|\leq\varepsilon x^{\rho+\varepsilon}. \tag{2.2.21}$$

En retour a la preuve de théorème (2.2.6) on note que :

$$\widehat{\gamma}_k^H:=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log(U(Y_{n-i,n}))-\log(U(Y_{n-k,n}))\,,$$

où $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite des variables aléatoires indépendent et identiquement distribuées de distribution $1-1/x,x>0$. Nous appliquons l'inégalité (2.2.21) avec $t:=Y_{n-k,n}\to\infty$ quand $n\to\infty$ [lemme (2.2.5) ] et $x:=Y_{n-i,n}/Y_{n-k,n}$. Alors :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_k^H &\overset{d}{:=}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log(U(Y_{n-i,n}))-\log(U(Y_{n-k,n}))\,,\\ &=\frac{\gamma}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)+A_0(Y_{n-k,n})\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho}-1}{\rho}\\ &\quad+o_p(1)\left|A_0(Y_{n-k,n})\right|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho+\varepsilon},\end{aligned}$$

donc on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\left(\widehat{\gamma}_k^H-\gamma\right) &= \gamma\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)-1\right)\\ &+\sqrt{k}A_0\left(Y_{n-k,n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho}-1}{\rho}\\ &+o_p\left(1\right)\sqrt{k}\left|A_0\left(Y_{n-k,n}\right)\right|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho+\varepsilon},\end{aligned}$$

le premier partie d'égalité est à normalité asymptotique d'aprés lemme (2.2.14).

Nous avons, [voir [2, le preuve de lemme(3.2.3)], Section 3.2] :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho}-1}{\rho}:\overset{d}{=}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{Y_i^{\rho}-1}{\rho}. \tag{2.2.22}$$

Alors (2.2.22) est tend vers $E\left(Y_1^{\rho}-1\right)/\rho=\left(1-\rho\right)^{-1}$ par le loi de grand nombre. Par similarité on trouve que :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho+\varepsilon}\xrightarrow{P}E\left(Y_1^{\rho+\varepsilon}\right)=\frac{1}{1-\rho-\varepsilon}.$$

Il reste de preuve que :

$$\frac{A_0\left(Y_{n-k,n}\right)}{A_0\left(\frac{n}{k}\right)}\xrightarrow{P}1. \tag{2.2.23}$$

Pour démontre (2.2.23) il faut utilisé le lemme de Smirnov (1949) et inégalité de Potter (1942) qu'ils déffinissent ce-dessus. ■

**Lemme 2.2.15** *(Smirnov, 1949) : Soit* $U_{1,n}\leq U_{2,n}\leq\cdots\leq U_{n,n}$ *une statistique d'ordre à une loi uniforme sur* $[0,1]$*. Alors quand* $n\to\infty,k\to\infty,n-k\to\infty$,

$$\frac{U_{k,n}-b_n}{a_n}\overset{\mathcal{L}}{\sim}N\left(0,1\right),$$

*avec :*

$$\begin{aligned}b_n &:= \frac{k-1}{n-1},\\ a_n &:= \sqrt{b_n\left(1-b_n\right)\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

**Proposition 2.2.16** *( Potter, 1942) : Supposons que* $f \in RV_\alpha$. *Si* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *il existe* $t_0 = t_0(\delta_1, \delta_2)$ *telque pour* $t \geq t_0, tx \geq t_0$,

$$(1-\delta_1)\, x^\alpha \min\left(x^{\delta_2}, x^{-\delta_2}\right) < \frac{f(tx)}{f(t)} < (1+\delta_1)\, x^\alpha \max\left(x^{\delta_2}, x^{-\delta_2}\right).$$

En pratique, le choix du paramètre $k_n$ pose des problèmes. Si l'on trace le diagramme de Hill, c'est-à-dire la fonction $k_n \to \widehat{\gamma}_k^H$, on observe une extrême volatilité qui rend difficile l'utilisation de cet estimateur en pratique si l'on n'a aucune indication sur le choix de $k_n$.

De plus, cet estimateur est biaisé. Ce biais est de l'ordre de $\varepsilon(n/k_n)$.La condition $\sqrt{k_n}\varepsilon(n/k_n) \to 0$ impose au bais d'être négligeable devant l'écart type de l'estimateur qui est quand à lui égal à $\sqrt{k_n}$.

Une minimisation de l'erreur en moyenne quadratique peut-être utilisée comme critère. Cette méthode reste néanmoins inutilisable en pratique puisque l'erreur en moyenne quadratique reste inconnue! Se référer à Beirlant et autre (1996) et Drees et Kaufmann (1998) pour des exemples de sélection du paramètre $k_n$.

Le résultat sur la normalité asymptotique de l'estimation de Hill permet de donner un intervalle de confiance pour l'estimation. En pratique on se contentera de remplacer $\gamma$ par sa valeur estimée.

Par conséquent, si $k_n$ est petit, on auraa fortiori, compte tenu des remarques faites précédemment, une estimation avec un intervalle de confiance large et a contrario, si $k_n$ est grand, on aura un intervalle de confiance plus étroit mais pas centrée sur la vraie valeur.

## 2.3 Estimateur des quantiles(estimateur de Weissman, 1978) :

### 2.3.1 Construction d'estimateur de Weissman, 1978 :

On désire estimer $z_q$ le quantil d'orde $1-q$ est petite. Si la fonction de répartition $F$ est continue strictement croissante, cela reveint à résourdre l'équation suivant : $F(z_q) = 1 - q$. On suppose que $F \in D(H_\gamma)$, pour certains $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Si $q$ est fixé, alors un estimateur de $z_q$ est le quantile empirique $X_{n-q_n,n}$. Nous avons déjà vu, au paragraphe [1.2], son comportement asymptotique : convergence presque sûrement, normalitè asymptotique, intervalle de confiance.

Or notre problématique correspond plutôt à l'estimation de $z_q$ quand on a peu d'observations, c'est- a-dire pour $q$ de l'ordre de $1/n$. Donc on recherche un estimateur de $z_{q_n}$ lorsque $q_n n$ admet une limite $c \in [0,1]$ quand $n$ tend vers l'infini, et on est intéressé par son comportement asymptotique. On dit que l'estimation est à l'intérieur des données si $c > 1$, et que l'estimation est hors des données si $c < 1$.

Soit $M_n$ le maximum de $n$ variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition $F \in D(H_\gamma)$. Il existe donc une suite $((a_n, b_n), n \geq 1)$, telle que pour $n$ grand,

$$P\left(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x\right) := F(xa_n + b_n)^n \approx H_\gamma(x).$$

Nous utiliserons en fait l'approximation plus générale suivante : pour $k$ fixé et $n$ grand, on a

$$F\left(xa_{n/k} + b_{n/k}\right)^{n/k} \approx H_\gamma(x). \tag{2.3.1}$$

Ainsi,on a intuitivement

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - F(z_{q_n}), \\ &\approx 1 - H_\gamma\left(\frac{z_{q_n} - b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{k/n}, \\ &= 1 - \exp\left\{-\frac{k}{n}\left(1 + \gamma\frac{z_{q_n} - b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{-1/\gamma}\right\}, \end{aligned}$$

$$q_n \approx \frac{k}{n}\left(1 + \gamma\frac{z_{q_n} - b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{-1/\gamma}. \tag{2.3.2}$$

On en déduit donc que :

$$z_{q_n} \approx \frac{\left(\frac{k}{nq_n}\right)^{\gamma} - 1}{\gamma} a_{n/k} + b_{n/k}, \tag{2.3.3}$$

où $q_n n \approx c$. Le estimateur de Hill que nous présentons s'écrivent sous cette forme.

Il reste donc à donner des estimations pour les paramètres de normalisation $a_{n/k}$ et $b_{n/k}$.

**Théorème 2.3.1** *: Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite des variables aléatoires indépendantes de loi $F \in D(H_\gamma)$, où $\gamma > 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0$, alors l'estimateur de quantile de $z_{q_n} = F^{\leftarrow}(1 - q_n) = \overline{F}^{\leftarrow}(q_n)$ définit par :*

$$z_{q_n}^H := \left(\frac{k}{nq_n}\right)^{\widehat{\gamma}^H} X_{n-k+1,n},$$

*où $\widehat{\gamma}^H$ est l'éstimateur de Hill(1975). $z_{q_n}^H$ : s'appelle l'estimateur de Weissman(1978).*

On retrouve la forme donnée dans le théorème (2.3.1) par la formule (2.3.3) avec $b_{n/k} = a_{n/k}/\widehat{\gamma}^H = X_{n-k+1,n}$.

### 2.3.2 Résultats asymptotiques :

**Proposition 2.3.2** *: On a la décomposition suivante :*

$$\log\left(z_{q_n}^H\right) \overset{d}{:=} -\gamma \log\left(U_{k,n}\right) + \log\left(\ell\left(\frac{1}{U_{k,n}}\right)\right) + \log\left(\frac{k}{nq_n}\right)\widehat{\gamma}_k^H,$$

*où $U_{k,n}$ est la $(n-k+1)$-ième plus grande statistique d'ordre d'un échantillon des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme standard $\{U_i, i = 1, 2, ...\}$.*

**Théorème 2.3.3** *: Supposons que la condition de second ordre est satisfait. Soit $(q_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $nq_n \to 0$. Si $k \to \infty, k/n \to 0$ et $k^{1/2}\varepsilon(n/k) \to \lambda \in \mathbb{R}$ quand $n \to \infty$ alors, l'estimateur deWeissman (1978), est asymptotiquement gaussienne, c'est-à-dire :*

$$\frac{k^{1/2}}{\log\left(\frac{k}{nq_n}\right)}\left\{\log\left(\frac{z_{q_n}^H}{z_{q_n}}\right) - \log\left(\frac{k}{nq_n}\right)\frac{\varepsilon(n/k)}{(1-\rho)}\right\} \xrightarrow{d} N\left(0, \gamma^2\right).$$

*Pour démontrer le deux résultats asymptotique voir [9].*

## 2.4 Estimation la moyenne de distribution de queue lourde :

### 2.4.1 Estimation la moyenne dans le cas du moment d'ordre deux fini :

**Définition 2.4.1** *: Un estimateur du paramètre inconnu $\theta = \Psi(F(x))$ d'un modèle ou loi de probabilité est une fonction qui fait correspondre à une suite d'observations issues du modèle ou loi de probabilité la valeur, que l'on nomme estimé ou estimation.*

$$\hat{\theta}_n := \Psi(F_n(x)).$$

**Définition 2.4.2** *: La moyenne empirique de l'échantillon est :*

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j,$$

Même pour cette caractéristique très simple (la moyenne), la loi de la version empirique $\overline{X}_n$ n'est pas connue pour tous choix possibles de $F$. Par contre, on peut calculer des caractéristiques de $\overline{X}_n$ telles que $E\left[\overline{X}_n\right]$ et $Var\left[\overline{X}_n\right]$ dans un cadre général.

$$\begin{aligned}
E\left[\overline{X}_n\right] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j\right], \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_j] = \frac{1}{n}E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n], \\
&= \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)], \\
&= \frac{1}{n}[\mu + \mu + \cdots + \mu] = \frac{1}{n}[n\mu], \\
E\left[\overline{X}_n\right] &= \mu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left[\overline{X}_n\right] &= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} Var\left[X_j\right], \\
Var\left[\overline{X}_n\right] &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(Var\left[X_1\right] + Var\left[X_2\right] + \cdots + Var\left[X_n\right]\right), \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left[\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left[n\sigma^2\right], \\
Var\left[\overline{X}_n\right] &= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Soit $X$ une variable aléatoire prenant un nombre fini des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$. La somme

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n,$$

peut être interprêtée de deux manières :

1. mathématiquement c'est une moyenne pondérée. Plus précisément, c'est le barycentre du système$\left(x_i, p_i\right), i = 1, 2, \ldots, n$ le «point» $x_i$ étant affecté de la «masse» $p$.
2. heuristiquement supposons qu'on répète $N$ fois l'expérience aléatoire attachée à $X$ et soit $N_i$ le nombre de fois où $X$ prend la valeur $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$. La moyenne arithmétique des valeurs de $X$ observées au cours des $N$ essais est :

$$\frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \cdots + N_n x_n}{N} = \frac{N_1}{N} x_1 + \frac{N_2}{N} x_2 + \cdots + \frac{N_n}{N} x_n,$$

qui puisque $\frac{N_i}{N}$ est proche de $p_i$ si $N$ est grand (loi empirique des grands nombres) est pratiquement égale à $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$ si $N$ est grand.

**Définition 2.4.3** *: Soit $X$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F$. On appelle espérance mathématique de $X$ , qu'on notera : $E\left[X\right]$ ou $\mu$ qu'il définit par :*

$$E\left[X\right] := \int_{\mathbb{R}} x dF_X\left(x\right) := \int_{\mathbb{R}} x f\left(x\right) dx,$$

*où $f$ est la fonction densité de $F$.*

**Définition 2.4.4** *: On peut donne une autre formule d'espérance par rapport a la quantile si on pose $F(x) = t$ avec chengement de condition limite d'intégral on trouve qu'il définit par :*

$$E[X] := \int_0^1 Q(t)\,dt.$$

**Remarque 2.4.5** *: Le moment d'ordre $k$ est le $E\left[X^k\right]$ pour $k > 0$.*

Par suit on définie l'estimateur de l'espérance qu'il définie dans l'agenda d'estimation de statistique par le moyenne emprique, même dans ce cas il y a deux méthode d'estimation le moyenne, qu'il définie par suivant :

Dans le première chapitre on section [1.1] on définie le statistique d'ordre est on dit que le distribution empirique est un estimateur de distribution théorique.

Et dans le section [1.2] on donne un définition de quantile empirique a partir la statistique d'ordre.

D'aprés la définition (2.4.1) on peut dire que :

1. On a par définition que :

$$E[X] := \mu = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x).$$

Alors l'estimateur de l'espérance est

$$\widehat{\mu} := \int_0^1 x dF_{X,n}(x),$$

d'aprés (1.1.1) on trouve :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \int_0^1 xd\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}(X_i \leq x)\right), \\
\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 xd\mathbf{1}(X_i \leq x), \\
\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 xd\delta_{X_i}(x), \delta_{X_i}(x) \text{ c'est le masse de dirac} \\
\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ car } \int_0^1 g(x)\,d\delta_a(x) = g(a) \text{ d'aprés dirac} \\
\widehat{\mu} &= \overline{X}.
\end{aligned}$$

2. Comme on définie autre formule d'espérance par :

$$E[X] := \mu := \int_0^1 Q(t)\,dt.$$

Alors l'estimateur de l'espérance est :

$$\widehat{\mu} := \int_0^1 Q_n(t)\,dt,$$

d'aprés (1.2.1) on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \int_0^1 X_{i,n}dt \text{ } o\grave{u} \text{ } \frac{i-1}{n} \leq t < \frac{i}{n}, \\
\widehat{\mu} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} X_{i,n}dt, \\
\widehat{\mu} &= \sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} dt, \\
\widehat{\mu} &= \sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \left[t\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}, \\
\widehat{\mu} &= \sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right], \\
\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,n}, \\
\widehat{\mu} &= \overline{X}.
\end{aligned}$$

Donc on a deux méthode pour estimer le moyenne empirique.

Pour estimer les paramètres d'une population il y a deux méthode : distribution empirique et le quantile empirique.

**Théorème central limite :**

Le théorème central limite (parfois appelé théorème de la limite centrale) établit la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne.

**Théorème 2.4.6** *: Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi $F$ et indépendantes. Supposons que l'espérance $\mu$ et l'écart-type $\sigma$ de $F$ existent et soient finis (le moment d'ordre deux est finie).*

*Considérons la somme $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors l'espérance de $S_n$ est $n\mu$ et et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$. De plus, quand $n$ est assez grand, la loi normale $N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ est une bonne approximation de la loi de $S_n$. Afin de formuler mathématiquement cette approximation, nous allons poser*

$$\overline{X}_n := S_n/n = \left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)/n,\ Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

*de sorte que l'espérance et l'écart-type de $Z_n$ valent respectivement $0$ et $1$ la variable est ainsi dite centrée et réduite.*

*Le théorème central limite stipule alors que la loi de $Z_n$ converge vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ lorsque $n$ tend vers l'infini (il s'agit de la convergence en loi). Cela signifie que si $\Phi$ est la fonction de répartition de $N(0,1)$, alors pour tout réel $z$ :*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n \leq z\right) := \Phi\left(z\right),$$

*ou, de façon équivalente :*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) := \Phi\left(z\right).$$

**Démonstration** : Pour un théorème d'une telle importance en statistiques et en probabilité appliquée, il existe une démonstration particulièrement simple utilisant les fonctions caractéristiques. Cette démonstration ressemble à celle d'une des lois des grands nombres.

Pour une variable aléatoire $Y$ d'espérance $0$ et de variance $1$ la fonction caractéristique de $Y$ admet le développement limité de Taylor :

$$\varphi_Y\left(t\right) = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right),\ t \to 0.$$

Si $Y_i$ vaut $\left(X_i - \mu\right)/\sigma$, il est facile de voir que la moyenne centrée réduite des observations $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est simplement :

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}.$$

D'après les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques, la fonction caractéristique de $Z_n$ est :

$$\left[\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n.$$

En appliquant la relation bien connue,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n := e^u$$

nous obtenons donc($t$ est un réel quelconque mais fixé, c'est $n$ qui tend vers $+\infty$) :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = e^{-t^2/2}.$$

Mais cette limite est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ d'où l'on déduit le théorème de la limite centrale grâce au théorème de continuité de Lévy, qui affirme que la convergence des fonction caractéristiques implique la convergence en loi. ■

**Remarque 2.4.7** *: En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

**Loi des grands nombres :**

En statistiques, le loi des grands nombres exprime le fait que les caractéristiques d'un échantillon aléatoire se rapprochent d'autant plus des caractéristiques statistiques de la population que la taille de l'échantillon augmente.

On appelle loi des grands nombres tout théorème qui assure que la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ d'une suite indépendent identiquement distribuée $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles intégrables converge vers l'espérance commune des $X_n$.

**Théorème 2.4.8** *: Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite des variables aléatoires indépendent identiquement distribuée (toutes de même loi que la variable $X = X_1$). On suppose de plus que $X$ admet une espérance $\mu$ et une variance $\sigma^2$.*

*On définit la variable $\overline{X}_N$, comme la moyenne des $N$ première $X_i$.*

*Alors la suite $\left(\overline{X}_n\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la constante $\alpha = E[X]$.*

**Démonstration** : Les variables $X_i$ étant indépendantes, la somme de $N$ d'entre elles a pour variance :

$$Var\left(\overline{X}_N\right) = \frac{\sigma^2}{N},$$

Par ailleurs, la linéarité de l'espérance donne immédiatement $E\left[\overline{X}_N\right] = E[X]$. Soit $\epsilon > 0$ appliquons l'inégalité de Tchebychev à $\overline{X}_N$

$$P\left(\left|\overline{X}_N - E[X]\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 N}.$$

Soit $\epsilon$ fixé, cette probabilité tend donc bien vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$. ■

La preuve précédente n'utilise pas réellement, ni le fait que les variables sont indépendantes, ni celui qu'elles ont la même loi ; il suffrait qu'elles soient deux à deux indépendantes, ou même simplement non corrélées (toutes covariances nulles), et qu'elles aient toutes même espérance et même variance, pour que le calcul de la variance de $\overline{X}_N$ soit correct.

**Loi faible des grands nombres :**

**Théorème 2.4.9** *: On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, ayant même variance finie et même espérance notées respectivement $\mu$ et $\sigma^2$. La loi faible des grands nombres stipule que, pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, la probabilité que la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ s'éloigne de l'espérance d'au moins $\varepsilon$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini*

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Autrement dit, $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers $\mu$. Ce résultat est très important en statistique, puisqu'il assure que la moyenne empirique est un estimateur convergent de l'espérance.

La loi faible des grands nombres se démontre en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Définition 2.4.10** ***(Inégalité de Bienaymé-Chebychev) :***

*Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance mathématique $\mu$ et de variance $\sigma^2$. L'inégalité de Bienaymé-Chebychev indique que pour tout nombre réel positif $\beta$, la probabilité que $X$ s'écarte de son espérance mathématique d'une grandeur inférieure à $\beta$ , a pour limite supérieure $\frac{\sigma^2}{\beta^2}$ :*

$$P\left(|X-\mu| \geq \beta\right) \leq \frac{\sigma^2}{\beta^2}.$$

**Loi forte des grands nombres :**

**Théorème 2.4.11** *: On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé qui suivent la même distribution, intégrables, c'est-à-dire $E\left(|X_1|\right) < +\infty$. En reprenant les notations ci-dessus, la loi forte des grands nombres précise que $\overline{X}_n$ converge vers $\mu$ presque sûrement.*

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1.$$

Autrement dit, selon la loi forte des grands nombres, la moyenne empirique est un estimateur fortement convergent de l'espérance.

La loi forte des grands nombres se démontre en utilisant le lemme de Boral cantelli.

**Lemme 2.4.12** ***(de Borel-Cantelli) :***

*Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements on note :*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \ \ et\ \ \liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$$

1. *Si $\sum_{n\in N} p\left(A_n\right) < \infty$, alors :*

$$P\left(\limsup A_n\right) = 0,$$

*ou d'autre manière équivalente, presque sûrement $\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$ est fini.*

2. *Si $\sum_{n\in N} p\left(A_n\right) = \infty$, et si les événements $A_n$ sont indépendants alors :*

$$P\left(\limsup A_n\right) = 1,$$

*ou d'autre manière équivalente, presque sûrement $\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$ est infini.*

**Estimation par intervalle de confiance de la moyenne :**

En estimant la moyenne théorique (espérance) $\mu$ dans une population par la moyenne empirique $\overline{X}_n$ dans un échantillon, en fait en général une erreur. La valeur estimée n'est qu'approximative. On a souvent recours à des estimations par intervalle : il s'agit de déterminer un intervalle $\left[\overline{X}_n - d, \overline{X}_n + d\right]$ autour de la valeur de la moyenne empirique $\overline{X}_n$ de sorte qu'on puisse affirmer, avec un degré de confiance fixé, que la moyenne $\mu$ de la variable $X$ dans un population se trouve dans l'intervalle $\left[\overline{X}_n - d, \overline{X}_n + d\right]$. Le paramètre $d$ est appelé la marge d'erreur. La probabilité $\alpha$ que $\mu$ appartienne à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - d, \overline{X}_n + d\right]$ est appelé le seuil de confiance.

On peut donc construire un intervalle de confiance pour $\mu$ de 2 manières :

1. Choisir un marge d'erreur $d$ puis déterminer le seuil de confiance $\alpha$.
2. Choisir un seuil de confiance $\alpha$ puis déterminer la marge d'erreur $d$ correspondante.

La relation entre la marge d'erreur $d$ et le seuil de confiance $\alpha$ est :

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \leq d\right) = \alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \leq d\right) = P\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \\ &= P\left(-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

D'aprés le théorème central limite si $n$ assez grand, la variable aléatoire $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On a donc :

$$\alpha \approx 2F_{N(0,1)}\left(\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}} - 1\right) \quad et \quad d \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} F_{N(0,1)}^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

où $F_{N(0,1)}$ désigne la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite.

Dans le cas où la variance $\sigma^2$ est inconnue, on l'estime par la variance empirique de l'échantillon, qu'il définie par $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$.

### 2.4.2 Estimation la moyenne dans le cas du moment d'ordre deux infini :

Pour l'estimation du moyenne d'une distribution à queue lourde avec l'indice de queue $-\alpha < -1$ la distribution asymptotique du moyenne d'échantillon n'est pas normale quand $\alpha < 2$. En ce subsection nous proposons un estimateur alternatif dont la distribution est la loi normal sous la condition de second ordre, pour tout $\alpha > 1$.

Supposons que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite des variables aléatoires indépendent identiquement distribuées avec une fonction de répartition $F$ ce qui à variation régulière d'indice $-\alpha < -1$ est vérifiée :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx) + F(-tx)}{1 - F(t) + F(-t)} := x^{-\alpha}, x > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F(t) + F(-t)} := p \in [0, 1]. \tag{2.4.1}$$

Si $F$ satisfait (2.4.1) pour la cas $1 < \alpha < 2$, alors on dit que $F$ appartient a la domaine de l'attraction d'une loi stable. Dans le cas $\alpha > 2$ on dit que $F$ est de moment d'ordre deux finie, c'est-à-dire, $F$ appartient a la domaine de l'attraction d'un de distribution normale.

Pour l'estimation du moyenne ou $E[X]$ où $X_1 := X$ un estimateur normal est le moyenne empirique d'échantillon $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Afin de déduire un intervalle de confiance pour $E[X]$ nous devons caractiriser le type de la distribution asymptotique de $S_n$.

Il y a une méthode pour caractiriser le type de la distribution asymptotique de $S$ est le $m$ hors de la méthode de circuit fermé du $n$-sous-échantillon (voir Hall et Lepage, 1996). Cependant, dans le cas $\alpha \in [1, 2[$ Hall et Jing(1998) prouvé que la méthode de circuit fermé (boostrap) de sous-échantillon exécute plus mal que la méthode asymptotique dans une classe importante des problèmes.

Ici, afin d'éviter de caractiriser le type de la distribution asymptotique de $S_n$, on peut poser une question intéressante : pouvons nous avoir un estimateur consistent pour $E[X]$ à qui la limite est normale pour $\alpha > 1$?

Notons que l'estimateur $S_n$ n'emploie pas l'information de queue de $F$ suffisamment, mais la condition (2.4.1) vraiment nous fournit les informations de queue sur $F$. Laisse nous nous divisons $E[X]$ on :

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 F^{-1}(u)\,du, \\
&= \int_0^{k/n} F^{-1}(u)\,du + \int_{k/n}^{1-k/n} F^{-1}(u)\,du + \int_{1-k/n}^{1} F^{-1}(u)\,du, \\
&= \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} + \mu_n{}^{(3)},
\end{aligned}$$

où $F^{-1}(s) := \inf\{x : F(x) \geq s\}, 0 < s < 1$, et $k = k(n) \to \infty$ et $k/n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors nous pouvons estimer $\mu_n^{(i)}, i = 1, 2, 3$ séparément.

Soit $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$ est la statistique d'ordre de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Un estimateur pour $\mu_n^{(2)}$évident est le moyenne empirique :

$$\widehat{\mu}_n^{(2)}(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{i,n},$$

ce qui a été étudié intensivement (voir Csörgő et autres, 1986a, b, Csörgő et autres, 1988a, b ; Griffin et Pruitt, 1989).

Afin d'estimer $\mu_n^{(1)}$ et $\mu_n^{(3)}$, et déduire les distributions asymptotiques pour les estimateurs de $\mu_n^{(1)}$ et $\mu_n^{(3)}$ nous imposons une condition de second ordre de $F$ (voir De Haan et Stadtmüller, 1996), supposant qu'il y a une fonction $A$ avec le signe constant près de l'infini avec $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = 0$, nous avons :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1 - F(tx) + F(-tx)) / (1 - F(t) + F(-t)) - x^{-\alpha}}{A(t)} := x^{-\alpha} \frac{x^{-\beta} - 1}{-\beta}, x > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1 - F(t)) / (1 - F(t) + F(-t)) - p}{A(t)} := q, \tag{2.4.2}$$

où $\beta > 0$, $q \in \mathbb{R}$. La fonction $|A|$ est alors fonction à variation régulière d'indice $-\beta$.

D'ailleurs, sous la condition (2.4.2) le cas $\alpha \in [1, 2[$ implique que $F$ appartient a la domaine de l'attraction d'une loi stable et le cas $\alpha \geq 2$ implique que $F$ appartient a la domaine de l'attraction d'un de distribution normale.

Alors nous devons estimer $\mu_n^{(1)}$ et $\mu_n^{(3)}$. Ceci peut être fait par la connaissance de la théorie de valeur extrême, donc d'aprés le théorème (2.2.12) on lonce l'estimateur de Hill (1975) alors on définir :

$$\widehat{\alpha}_n^{(1)} := \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{k,n}) \right\}^{-1},$$

et :

$$\widehat{\alpha}_n^{(3)} := \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log^+(-X_{n-i+1,n}) - \log^+(-X_{n-k+1,n}) \right\}^{-1},$$

où $\log^+(x) = \log(x \vee 1)$.

Et par utilisation le théorème (2.2.5) d'estimateur de Weissman (1978) on trouve que :

$$(k/n)(X_{n-k+1,n})^{\widehat{\alpha}_n^{(3)}} x^{-\widehat{\alpha}_n^{(3)}},$$

est un estimateur de $1 - F(X)$ pour le grand $x$. Et même on trouve :

$$(k/n)(X_{k,n})^{\widehat{\alpha}_n^{(1)}} x^{-\widehat{\alpha}_n^{(1)}},$$

est un estimateur de $F(-X)$ pour le grand $x$.

Par conséquent nous avons,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_n^{(1)}(k) \quad : &= \int_0^{k/n} (k/n)^{-1} / \widehat{\alpha}_n^{(1)} X_{k,n} u^{-1/\widehat{\alpha}_n^{(1)}} du, \\ : &= \frac{k}{n} X_{k,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\widehat{\alpha}_n^{(1)} - 1}, \end{aligned}$$

est un estimateur de $\mu_n^{(1)}(k)$ et

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) \quad : &= \int_{1-k/n}^{1} (k/n)^{-1/\widehat{\alpha}_n^{(3)}} X_{n-k+1,n} (1-u)^{-1/\widehat{\alpha}_n^{(3)}} du, \\ : &= \frac{k}{n} X_{n-k+1,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(3)}}{\widehat{\alpha}_n^{(3)} - 1}, \end{aligned}$$

est un estimateur de $\mu_n^{(3)}(k)$.

Par conséquent, nous fournissons notre nouveau d'estimateur :

$$\widehat{\mu}_n^{(1)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(2)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) \tag{2.4.3}$$

c'est un estimateur de la moyenne de distribution à queue lourde.

### 2.4.3 Résultats asymptotiques :

**Définition 2.4.13** *: Soit $T$ un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par $T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ ; pour tout $t \in T$, $X_t$ soit une variable aléatoire.*

On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque $w$ on associe la fonction $t \to X_t(w)$ qui est appelée trajectoire (sample path en anglais).

Souvent, on note le processus stochastique par $X(t)$ , et la trajectoire par $X(t, w)$ .

**Définition 2.4.14** *: Un processus stochastique $\{B(t), 0 \leq t < 1\}$ est appelé ponts Brownien si :*

1. *La fonction de répartition jointe de $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_k))$ , où $(0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1, k = 1, 2, \dots)$ est Gaussienne avec $E[B(t)] = 0$,*
2. *La fonction de covariance de $B(t)$ est :*

$$R(r, t) = E[B(s) B(t)] = s \wedge t - st,$$

3. *La trajectoire de la fonction de l'echantillon de $B(t; w)$ est continue dans $t$ avec probabilité 1.*

**Lemme 2.4.15** *: Supposons que (2.4.2) est satisfaite et $k \to \infty$ et $k/n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k/n} \int_{k/n}^{1-k/n} (1-t)\, dF^{-1}(t) / \sigma(k/n)$$
$$:= \sqrt{\frac{2-\alpha}{2\left(p^{2/\alpha} + (1-p)^{2/\alpha}\right)}} (1-p)^{1/\alpha} \mathbf{1}_{(\alpha<2)}, \tag{2.4.4}$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k/n} \int_{k/n}^{1-k/n} t dF^{-1}(t) / \sigma(k/n)$$
$$:= \sqrt{\frac{2-\alpha}{2\left(p^{2/\alpha} + (1-p)^{2/\alpha}\right)}} p^{1/\alpha} \mathbf{1}_{(\alpha<2)}. \tag{2.4.5}$$

**Démonstration** : Remarquons que :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{k/n}\int_{k/n}^{1-k/n}(1-s)\,dF^{-1}(s)/\sigma(k/n) \\
= \quad & \frac{\sqrt{k/n}\left\{F^{-1}(1/2)-F^{-1}(k/n)-\int_{k/n}^{1/2}sdF^{-1}(s)+\int_{1/2}^{1-k/n}(1-s)\,dF^{-1}(s)\right\}}{\sigma(k/n)}
\end{aligned}$$

et la condition (2.4.2) implique que $E[X^2]=\infty$ dans le cas $\alpha\leq 2$ et $E[X^2]<\infty$ dans le cas $\alpha>2$.

Par conséquent, dans le cas $\alpha>2$, (2.4.2) suit de celle la fonction définit par

$$\int_{k/n}^{1-k/n}(1-s)\,dF^{-1}(s)/\sigma(k/n)\,,$$

ainsiqu'elle est bornée.

Après nous supposons $\alpha\leq 2$. Par le lemme (2.5) de Csörgő et autre (1988a) nous avons

$$\int_{k/n}^{1/2}tdF^{-1}(t)/\sigma(k/n)\to 0,$$

$$\int_{1/2}^{1-k/n}(1-t)\,dF^{-1}(t)/\sigma(k/n)\to 0.$$

Utilisons le lemme (1) de Csörgő et autre (1986a, b) nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{k/n}/\sigma(k/n) &\to 0, \\
\sqrt{k/n}F^{-1}(k/n)/\sigma(k/n) &\to -\sqrt{\frac{2-\alpha}{2\left(p^{2/\alpha}+(1-p)^{2/\alpha}\right)}}(1-p)^{1/\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent (2.4.4) et lui demandé.

La preuve de (2.4.5) est similie à la démonstration de (2.4.4). ■

**Théorème 2.4.16** *: D'aprés Csörgő et autres, (1986a, b) nous avons :*

$$\sqrt{n}\left\{\widehat{\mu}_n^{(2)}(k)-\mu_n^{(2)}(k)\right\}/\sigma(k/n)\xrightarrow{d}N(0,1)\,, \tag{2.4.6}$$

*où*

$$\sigma^2(s):=\int_s^{1-s}\int_s^{1-s}(u\wedge v-uv)\,dF^{-1}(u)\,dF^{-1}(v)\,.$$

Notons cela $\mu_n^{(1)} \to 0, \mu_n^{(3)} \to 0$ et $\sqrt{n}\left\{\mu_n^{(1)}(k) - \mu_n^{(3)}(k)\right\}/\sigma(k/n) \to \infty$ (quand $\alpha \in [1, 2[)$ ce que peut être vu facilement lemme (1) de Csörgő et autres (1986a, b). Bien que $\widehat{\mu}_n^{(2)}(k) \xrightarrow{P} E[X]$ la limite de $\sqrt{n}\left\{\widehat{\mu}_n^{(2)}(k) - E[X]\right\}/\sigma(k/n)$ n'existe pas quand $\alpha \in [1, 2[$.

**Théorème 2.4.17** *: Supposons que (2.4.2) est satisfaite pour $\alpha > 1$,et $\beta > 0$. Soit $k = k_n$ dénoter satisfaire intermédiaire d'ordre de nombre entier :*

$$k := o\left(n^{2\beta/(\alpha+2\beta)}\right). \tag{2.4.7}$$

*Alors :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n}}{\sigma(k/n)}\left(\widehat{\mu}_n^{(1)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(2)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) - E[X]\right) \\
&\xrightarrow{d} N\left(0, 1 + \left\{\frac{(2-\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha-1)^4} + \frac{2-\alpha}{\alpha-1}\right\}\mathbf{1}_{(\alpha<2)}\right).
\end{aligned}$$

**Remarque 2.4.18** *: Remarquons que $\sigma(t)$ est à variation régulière d'indice $\frac{1}{2} - 1/\alpha$ quand $t \to \infty$ dans le cas $\alpha \in [1, 2]$. Pour ce cause l'estimateur de la moyenne de distribution à queue lourde est convergé lentement moins que le moyenne empirique de l'échantillon de le cas $\alpha \in [1, 2]$. Cependant dans le cas $\alpha \geq 2$ l'estimateur de la moyenne de distribution à queue lourde a même asymptotique distribution avec le moyenne empirique de l'échantillon.*

**Démonstration** (De théorème (2.4.17)) :

Soit $U_1, U_2, \ldots, U_n$ une suite des variables aléatoires suit loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $U_{1,n} \leq U_{2,n} \leq \cdots \leq U_{n,n}$ la statistique d'ordre de $U_1, U_2, \ldots, U_n$. On définit aussi la fonction de répartition empirique par **:**

$$G_n(u) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(U_i \leq u), 0 \leq u \leq 1,$$

et soit aussi $V_n(t) = U_{i,n}$ pour $(i-1)/n < t < i/n, i = 1, \ldots, n$ le quantile empirique associé, avec $V_n(0) = U_{1,n}$. Nous définissons le processus empirique uniforme :

$$\alpha_n(u) := \sqrt{n}(G_n(u) - u), 0 \leq u \leq 1,$$

et le processus des quantiles uniforme :

$$\beta_n(u) := \sqrt{n}\left(V_n(u) - u\right), 0 \leq u \leq 1.$$

Puis, la formule suivant donne une approximation pour le processus $\alpha_n(u)$ en terme d'une suite de ponts Brownien. D'aprés Csörgő et autre (1986a,b) là existe un ordre de ponts browniens $B_n(u)$ , $0 \leq u \leq 1, n = 1, 2, \ldots$ , telleque

$$\sup_{1/n \leq u \leq 1-1/n} n^{\mu} \frac{\left|\sqrt{n}\left(G_n(u) - u\right) - B_n(u)\right|}{\left(u(1-u)\right)^{1/2-\mu}} = O_p(1), \tag{2.4.8}$$

quand $n \to \infty$, où $\mu$ est tout nombre fixe tels que $\mu \in [0, 1/4[$. Supposant, sans perte de généralité, cela tous les deux $\widehat{\mu}_n^{(1)}$ et $\widehat{\mu}_n^{(3)}$ sont exprimés par le terme de $X_{j,n} = F(U_{j,n})$, $j = 1, 2, \ldots, n$ il est facile de vérifier cela :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}_n^{(3)} - \mu_n^{(3)} \\
= \; & \frac{k}{n} F^{-1}\left(U_{n-k+1,n}\right) \frac{\alpha \widehat{\alpha}_n^{(3)}}{\left(\widehat{\alpha}_n^{(3)} - 1\right)(\alpha - 1)} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\frac{F^{-1}(U_{n-i+1,n})}{F^{-1}\left(U_{n-k+1,n}\right)}}{\left(\frac{1-U_{n-i+1,n}}{1-U_{n-k+1,n}}\right)^{-1/\alpha}} \right\} \\
& + \frac{k}{n} F^{-1}\left(U_{n-k+1,n}\right) \frac{\alpha \widehat{\alpha}_n^{(3)}}{\left(\widehat{\alpha}_n^{(3)} - 1\right)(\alpha - 1)} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \log \left( \frac{1 - U_{n-i+1,n}}{1 - U_{n-k+1,n}} \right)^{-1/\alpha} - 1/\alpha \right) \\
& + \frac{k}{n} F^{-1}(1 - k/n) \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left( \frac{F^{-1}\left(U_{n-k+1,n}\right)}{F^{-1}(1 - k/n)} - \left[ \frac{n}{k}\left(1 - U_{n-k+1,n}\right) \right]^{-1/\alpha} \right) \\
& + \frac{k}{n} F^{-1}(1 - k/n) \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left( \left[ \frac{n}{k}\left(1 - U_{n-k+1,n}\right) \right]^{-1/\alpha} - 1 \right) \\
& + \left( \frac{k}{n} F^{-1}(1 - k/n) \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \int_{1-k/n}^{1} F^{-1}(u)\, du \right), \\
= \; & III_1 + III_2 + III_3 + III_4 + III_5,
\end{aligned}$$

Et que on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_n^{(2)} - \mu_n^{(2)} &= -\int_{k/n}^{1-k/n} \left\{G_n(u) - u\right\} dF^{-1}(u) \\
&\quad - \int_{U_{k,n}}^{k/n} \left\{G_n(u) - k/n\right\} dF^{-1}(u) \\
&\quad - \int_{1-k/n}^{U_{n-k,n}} \left\{G_n(u) - (1 - k/n)\right\} dF^{-1}(u), \\
&= II_1 + II_2 + II_3.
\end{aligned}$$

Et :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_n^{(1)}-\mu_n^{(1)} &= \frac{k}{n}X_{k,n}\frac{\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\widehat{\alpha}_n^{(1)}-1}-\int_0^{k/n}F^{-1}(u)\,du\\
&= \frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})\left(\frac{\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\widehat{\alpha}_n^{(1)}-1}-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\\
&\quad+\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})-\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\right)\\
&\quad+\left(\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\frac{\alpha}{\alpha-1}-\int_0^{k/n}F^{-1}(u)\,du\right)\\
&= \frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})\frac{\alpha\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\left(\widehat{\alpha}_n^{(1)}-1\right)(\alpha-1)}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{F^{-1}(U_{i,n})}{F^{-1}(U_{k,n})}-1/\alpha\right)\\
&\quad+\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})-\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\right)\\
&\quad+\left(\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\frac{\alpha}{\alpha-1}-\int_0^{k/n}F^{-1}(u)\,du\right),\\
&= \frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})\frac{\alpha\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\left(\widehat{\alpha}_n^{(1)}-1\right)(\alpha-1)}\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{\frac{F^{-1}(U_{i,n})}{F^{-1}\left(U_{k,n}\right)}}{\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k,n}}\right)^{-1/\alpha}}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{k}{n}F^{-1}(U_{k,n})\frac{\alpha\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\left(\widehat{\alpha}_n^{(1)}-1\right)(\alpha-1)}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k,n}}\right)^{-1/\alpha}-1/\alpha\right)\\
&\quad+\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{F^{-1}(U_{k,n})}{F^{-1}(k/n)}-\left(\frac{n}{k}U_{k,n}\right)^{-1/\alpha}\right)\\
&\quad+\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\left(\frac{n}{k}U_{k,n}\right)^{-1/\alpha}-1\right)\\
&\quad+\left(\frac{k}{n}F^{-1}(k/n)\frac{\alpha}{\alpha-1}-\int_0^{k/n}F^{-1}(u)\,du\right),\\
&= I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,
\end{aligned}
$$

Il découle de la preuve du théorème (1) de Csörgő et autre (1986a,b) que :

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} II_2 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} II_3 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} II_1 = -\int_{k/n}^{1-k/n} B_n(s)\, dF^{-1}(s) / \sigma(k/n) + o_p(1).$$

Par (2.4.2), (2.4.7) et le lemme de Csörgő et autre (1986a,b) nous avons

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} I_1 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} I_3 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} I_5 \to 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} III_1 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} III_3 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k/n)} III_5 \overset{P}{\to} 0,$$

$$\frac{\sqrt{k/n} F^{-1}(U_{k,n})}{\sigma(k/n)} \overset{P}{\to} -\sqrt{\frac{2-\alpha}{2\left(p^{2/\alpha} + (1-p)^{2/\alpha}\right)}} (1-p)^{1/\alpha} \mathbf{1}_{(\alpha<2)},$$

$$\frac{\sqrt{k/n} F^{-1}(U_{n-k+1,n})}{\sigma(k/n)} \overset{P}{\to} -\sqrt{\frac{2-\alpha}{2\left(p^{2/\alpha} + (1-p)^{2/\alpha}\right)}} p^{1/\alpha} \mathbf{1}_{(\alpha<2)}.$$

Utilisons le théorème (2.3) et (2.4) du Csörgő et Mason (1985), nous avans :

$$\begin{aligned} & \sqrt{k} \left\{ -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1-U_{n-i+1,n}}{1-U_{n-k+1,n}} - 1 \right\} \\ = \; & \sqrt{n/k} B_n(1-k/n) - \sqrt{n/k} \int_{1-k/n}^{1} \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_p(1) \end{aligned}$$

et
$$\sqrt{k}\left\{-\log\left(1-U_{n-k,n}\right)+\log\frac{k}{n}\right\}=-\sqrt{n/k}B_n\left(1-k/n\right)+o_p\left(1\right).$$

Similarité à preuve des théorèmes (2.3) et (2.4) du Csörgő et Mason (1985), nous pouvons voir que :

$$\sqrt{k}\left\{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1-U_{i,n}}{1-U_{k,n}}-1\right\}=-\sqrt{n/k}B_n\left(k/n\right)+\sqrt{n/k}\int_0^{K/n}\frac{B_n\left(s\right)}{s}ds+o_p\left(1\right),$$

et :
$$\sqrt{k}\left\{-\log\left(U_{k,n}\right)+\log\frac{k}{n}\right\}=\sqrt{n/k}B_n\left(k/n\right)+o_p\left(1\right).$$

Posons $a_0=\sqrt{\left(2-\alpha\right)/2\left(p^{2/\alpha}+\left(1-p\right)^{2/\alpha}\right)}1_{(\alpha<2)}$. En utilisant la formule (2.4.8) ,

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n}}{\sigma\left(k/n\right)}\left\{\widehat{\mu}_n^{(1)}\left(k\right)+\widehat{\mu}_n^{(2)}\left(k\right)+\widehat{\mu}_n^{(3)}\left(k\right)-E\left[X\right]\right\}\\
&\overset{d}{=}-a_0\left(1-p\right)^{1/\alpha}\frac{\alpha}{\left(\alpha-1\right)^2}\left\{-\sqrt{n/k}B_n\left(k/n\right)+\sqrt{n/k}\int_0^{k/n}\frac{B_n\left(s\right)}{s}ds\right\}\\
&-a_0\left(1-p\right)^{1/\alpha}\frac{1}{\alpha-1}\sqrt{n/k}B_n\left(k/n\right)-\int_{k/n}^{1-k/n}B_n\left(s\right)dF^{-1}\left(s\right)/\sigma\left(k/n\right)\\
&+a_0p^{1/\alpha}\frac{\alpha}{\left(\alpha-1\right)^2}\left\{\sqrt{n/k}B_n\left(1-k/n\right)-\sqrt{n/k}\int_{1-k/n}^{1}\frac{B_n\left(s\right)}{1-s}ds\right\}\\
&+a_0p^{1/\alpha}\frac{1}{\alpha-1}\left\{-\sqrt{n/k}B_n\left(1-k/n\right)\right\}+o_p\left(1\right)\\
=\;&-a_0\left(1-p\right)^{1/\alpha}\frac{\alpha}{\left(\alpha-1\right)^2}\sqrt{n/k}\int_0^{k/n}\frac{B_n\left(s\right)}{s}ds\\
&+a_0\left(1-p\right)^{1/\alpha}\frac{1}{\left(\alpha-1\right)^2}\sqrt{n/k}B_n\left(k/n\right)\\
&-\int_{k/n}^{1-k/n}B_n\left(s\right)dF^{-1}\left(s\right)/\sigma\left(k/n\right)\\
&+a_0p^{1/\alpha}\frac{1}{\left(\alpha-1\right)^2}\sqrt{n/k}B_n\left(1-k/n\right)\\
&-a_0p^{1/\alpha}\frac{\alpha}{\left(\alpha-1\right)^2}\sqrt{n/k}\int_{1-k/n}^{1}\frac{B_n\left(s\right)}{1-s}ds+o_p\left(1\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\sigma_0^2\right).
\end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma(k/n)}\left\{\widehat{\mu}_n^{(1)}(k)+\widehat{\mu}_n^{(2)}(k)+\widehat{\mu}_n^{(3)}(k)-E[X]\right\}\right),\\
\sigma_0^2 &= \lim_{n\to\infty}\Bigg\{a_0^2(1-p)^{2/\alpha}\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_0^{k/n}ds\int_0^{k/n}\frac{s\wedge t-st}{st}dt\\
&+a_0^2(1-p)^{2/\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\\
&+\int_{k/n}^{1-k/n}dF^{-1}(s)\int_{k/n}^{1-k/n}(s\wedge t-st)\,dF^{-1}(t)/\sigma^2(k/n)\\
&+a_0^2p^{2/\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}\\
&+a_0^2p^{2/\alpha}\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_{1-k/n}^{1}ds\int_{1-k/n}^{1}\frac{s\wedge t-st}{(1-s)(1-t)}dt\\
&-2a_0^2(1-p)^{2/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_0^{k/n}\frac{s-(k/n)s}{s}ds\\
&+2a_0(1-p)^{1/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\sqrt{n/k}\int_0^{k/n}ds\int_{k/n}^{1-k/n}\frac{s-st}{s}dF^{-1}(t)/\sigma(k/n)\\
&-2a_0^2(1-p)^{1/\alpha}p^{1/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_0^{k/n}\frac{s-(1-k/n)s}{s}ds\\
&+2a_0^2(1-p)^{1/\alpha}p^{1/\alpha}\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_0^{k/n}ds\int_{1-k/n}^{1}\frac{s-st}{s(1-t)}dt\\
&-2a_0(1-p)^{1/\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)^2}\sqrt{n/k}\int_{k/n}^{1-k/n}\left(\frac{k}{n}-s\frac{k}{n}\right)dF^{-1}(s)/\sigma(k/n)\\
&+2a_0^2(1-p)^{1/\alpha}p^{1/\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\left(\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)\\
&-2a_0^2(1-p)^{1/\alpha}p^{1/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_{1-k/n}^{1}\frac{k/n-(k/n)s}{1-s}ds\\
&-2a_0p^{1/\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)^2}\sqrt{n/k}\int_{k/n}^{1-k/n}\left(s-s\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)dF^{-1}(s)/\sigma(k/n)\\
&+2a_0p^{1/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\sqrt{k/n}\int_{1-k/n}^{1}ds\int_{k/n}^{1-k/n}\frac{t-st}{1-s}dF^{-1}(t)/\sigma(k/n)\\
&-2a_0^2p^{2/\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-1)^4}\frac{n}{k}\int_{1-k/n}^{1}\frac{1-\frac{k}{n-s}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{1-s}ds\Bigg\}
\end{aligned}$$

Utilisation le lemme (2.4.15), est trés difficile mais directement vers l'avant rendements de calcul on trouve :

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= a_0^2 (1-p)^{2/\alpha} \frac{2\alpha^2}{(\alpha-1)^4} \\
&+a_0^2 (1-p)^{2/\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)^4} + 1 \\
&+a_0^2 p^{2/\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)^4} + a_0^2 p^{2/\alpha} \frac{2\alpha^2}{(\alpha-1)^4} \\
&-2a_0^2 (1-p)^{2/\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^4} \\
&+2a_0 (1-p)^{1/\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} a_0 (1-p)^{1/\alpha} \\
&-2a_0 (1-p)^{1/\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)^2} a_0 (1-p)^{1/\alpha} \\
&-2a_0 p^{1/\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)^2} a_0 p^{1/\alpha} \\
&+2a_0 p^{1/\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} a_0 p^{1/\alpha} \\
&-2a_0^2 p^{2/\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^4} \\
&= 1 + \left\{ \frac{(2-\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha-1)^4} + \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \right\} \mathbf{1}_{(\alpha<2)}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 2.4.19** *: Si* $\lim_{n\to\infty} k/n^{2\beta}/(\alpha+2\beta) = c \in [0,+\infty[$, *alors d'aprés la preuve de théorème (2.4.17) nous pouvons voir que :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n}}{\sigma(k/n)} \left( \widehat{\mu}_n^{(1)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(2)}(k) + \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) - E[X] \right) \\
&\xrightarrow{d} N\left( b, 1 + \left\{ \frac{(2-\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha-1)^4} + \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \right\} \mathbf{1}_{(\alpha<2)} \right),
\end{aligned}$$

*où* $b$ *dépende de* $\alpha, \beta, p, q, c$.

# Notations

$\underset{z\to\infty}{\longrightarrow}$ : La limite quand $z$ tend vers l'infinie.

$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ : La limite quand $n$ tend vers l'infinie.

$\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}$ : La limite quand $x$ tend vers l'infinie.

**T.C.L.** : Théorème.Central.Limite

**E.V.T.** **:** Extreme.Valus.Theory.

**E.V.G.** : Extreme.Valus.Distribution.

**G.E.V.** : General.Extreme.Valus.

**G.E.V.D.** :General.Extreme.Valus.Distribution

$h \to \infty$ : $h$ tend vers l'infinie.

$y \to \infty$ : $y$ tend vers l'infinie.

$x \to \infty$ : $x$ tend vers l'infinie.

$f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ : limite $f(x)$ quand $x$ tend vers l'infinie.

$\overset{d}{=}$ : Égalité en distribution.

$\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ : Converge en loi.

$\limsup A_n = \overline{\lim} A_n$ : Un nombre infini $A_i$ d'événement a lieu.

$\liminf A_n = \underline{\lim} A_n$ : Seul un nombre infini $A_i$ d'événement a lieu.

$\overset{d}{\to}$ : Converge en loi (distribution).

$\overset{P}{\to}$ : Converge en probabilité.

# Bibliographie


[1] cermis.enpc.fr/~alfonsi /mrf-quantile.pdf

[2] De Haan Laurens and Ferreira Ana., 2006., «Extreme Value Theory. An Introduction», Springer. New York.

[3] Djaber Ibtissem., 2003., «Comportement asymptotique presque sûre de la moyenne empirique pour les distributions à queue lourde»., Mèmoire., Departement de Mathimatique. Universite de Mohamed Khider Biskra.

[4] fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_central_limite.

[5] fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_grande_nombre.

[6] Jean-François Le Gall., 2006., «Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires».

[7] Lani abdnour., 2010., «Étude et comparaison des estimations de l'indice de valeur extrême».

[8] Laurent GARDES., 2003., «Estimation d'une fonction quantile extrême».

[9] Lekina Alexandre., 2010., «Estimation non-paramétrique des quantiles extrèmes condititionnels».

[10] Liang Peng., 2001., «Estimating the mean of a heavy tailed distribution», Statistics & Probability Letters 52, 255–264

[11] N.H.Bingham., 1987., «Regular Variation», Encyclopedia of mathematics and its applications ; 27.

[12] Olivier Mazet., Stéphane Balac., 2001., «Introduction aux probabilités».

[13] Philippe Soulier., 2009., «Some applications of regular variation in probability and statistics».

[14] www.tn.refer.org/CEAFE/Oral_presentation/Mathlothi.pdf-Tunisie.