



**République Algérienne Démocratique et
Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique**
Université Mohamed Khider Biskra



Département de Mathématiques
Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Statistique

*Mémoire de fin d'étude en
Master*
Intitulé :
**Les lois α -STABLES COMME
MODELE POUR LES SERIES**

Présenté par :
Lembarki

Devant le jury
-Dr. YAHIA Djabrane
-Dr. BENATIA Fatah
Encadreur :Dr.
TOUBA Sonia

Année Universitaire
2011-2012

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord, nous remercions **Dieu** le tout puissant qui nous a guidé et aidé dans notre travail.*

*Puis, nous tenons à remercier Mademoiselle **Sonia TOUBA**, M.A à l'Université Mohamed khider, pour avoir cru en nous et accepté de nous encadrer, pour ses orientations, et pour le temps qu'elle nous a consacré.*

*Nous remercions très sincèrement **les membres de jury**, c'est un grand honneur pour nous de pouvoir leur présenter ce travail.*

*Nous tenons à remercier également toutes les personnes avec lesquelles nous étions en relation durant cette année et qui nous ont guidé par leurs connaissances et leur savoir faire, parmi eux nous citons : **Yahia DJEBRANE**, M. A. à l'Université Mohamed khider.*

DÉDICACES

À ma chère MERE. À mon chère PERE

À mes chère frères et mes sœurs : Kada, Nassima, khaled, Samiha,

Hamada, Salah

À mes chère beau-frère : Khaled, Bacem

À toute ma famille

Je dédie ce modeste travail

Table des matières

REMERCIEMENTS	i
DÉDICACES	ii
TABLE DEE MATIERES	iii
TABLE DES FIGURES	iv
LISTE DES TABLEAUX	v
INTRODUCTION	vi
INDEX DES NOTATIONS	viii
1 LES LOIS STABLES	1
1.1 Lois stables univariées	2
1.1.1 Inconvénients des lois stables	3
1.1.2 Diverses propriétés	4
1.1.3 Propriétés arithmétiques	8
1.1.4 Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi stable	9
1.1.5 Algorithme de simulation	12
1.1.6 Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables	17
1.2 Conclusion	21
2 LES SÉRIES FINANCIÈRES	22
2.1 Propriétés des séries financières	23
2.1.1 Les lois gaussiennes	25
2.1.2 Les grandes fluctuations	28
2.2 Tests graphiques	30

TABLE DES MATIÈRES	iv
2.2.1 Quantiles Quantiles plot des données	30
2.2.2 Histogrammes	31
2.3 Conclusion	33
CONCLUSION GÉNÉRALE	34
BIBLIOGRAPHIE	35

Table des figures

Figure 1.1. Courbe de la densité pour $\alpha \in \{2; 1.7; 1.5\}; \beta = 0; \gamma = 1$ et $\mu = 0$	9
Figure 1.2. Courbe de la densité pour $\alpha = 1.4; \beta \in \{-1; 0; 1\}; \gamma = 1$ et $\mu = 0$	10
Figure 1.3. Courbe de la densité pour $\alpha = 1.4; \beta = 0; \gamma \in \{0.5; 1; 1.5\}$ et $\mu = 0$	11
Figure 1.4. Courbe de la densité pour $\alpha = 1.4; \beta = 0; \gamma = 1$ et $\mu \in \{-3; 0; 3\}$	12
Figure 1.5. Densité d'une loi normale de paramètre $\alpha = 1.5; \beta = 0; \gamma = 1$ et $\mu = 0; n = 10000$	14
Figure 1.6. Distribution d'une loi stable pour $\alpha = 1.5; \beta = 0; \gamma = 1$ et $\mu = 0$	15
Figure 1.7. Test graphique 1 : variance empirique calculée sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi SaS pour différentes valeurs de α	19
Figure 1.8. Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi SaS pour différentes valeurs de α	20
Figure 2.1. Les prix de fermeture journaliers des indices CAC40, CAI, DAX et Dow Jones.....	25
Figure 2.2. Distribution de l'accroissement du logarithme du cours de l'OPCVM Groupama Obligations France. ^[1]	26
Figure 2.3. Agrandissement du graphique précédent. ^[1]	26
Figure 2.4. Le rendement d'un échantillon d'une loi normale.....	28
Figure 2.5. Les rendements journaliers des indices boursiers.....	29
Figure 2.6. Quantiles normaux contre quantiles de nos indices boursiers.....	30
Figure 2.7. Quantiles normaux contre quantiles empiriques de la loi normale..	31
Figure 2.8. Distributions des indices boursiers.....	32
Figure 2.9. Queues des distributions des valeurs négatives et les valeurs positives.....	32

Liste des tableaux

1.1	Moyenne et variance théorique d'une loi stable	8
2.1	Statistiques de Kurtosis [1].	27
2.2	Les Statistiques des indices boursiers (donnees journaliers)	28

INTRODUCTION

En statistique, une des lois les plus utilisées est la loi gaussienne. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème de la limite centrale font que cette loi s'adapte bien dans de nombreuses situations. Parmi ces situations, il y a le domaine des séries chronologiques et plus précisément.

La recherche d'invariant est souvent considérée comme l'objectif premier de l'activité scientifique. Sur les marchés boursiers, cette recherche a pris le chemin de la modélisation du processus des variations des cours cotés. Très tôt s'est posée la question de la mise en évidence de régularités empiriques, résultats qui ne seraient pas dépendants de la période d'observation des marchés ni affectés par les conditions changeantes des économies.

Dans les années 60, Mandelbrot étudie ces fluctuations boursières, pour lesquelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé «lois α -stables». Le paramètre α , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie. Mandelbrot (1963) confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Fama (1965) va valider le modèle précédent sur le prix du marché des actions. Quelques années plus tard, Fama et Roll (1968) donnent les premières tabulations des lois symétriques α -stables ($S\alpha S$).

Il était connu depuis déjà un certain temps que les distributions réelles observées sur les marchés présentaient un trop grand nombre de grandes valeurs (fortes rentabilités positives ou négatives) pour pouvoir être ajustées par des densités gaussiennes¹. Ce problème se rencontrait depuis longtemps en économie, où de telles distributions ultra-étirées se manifestent fréquemment, et remonte au moins, pour sa première mise en évidence, à Vilfredo Pareto.

¹ La loi de Gauss possède une propriété très intéressante : elle vérifie la stabilité par addition au sens de Paul Lévy.

Pour prendre en compte ces queues de distribution non-gaussiennes, Mandelbrot proposa alors en 1962 de remplacer la loi de Gauss par des lois stables non-gaussiennes, théoriquement bien adaptées grâce à leur comportement asymptotique parétien, à la modélisation des queues épaisses obtenues expérimentalement par les statisticiens.

L'objectif principal de notre modeste travail, consiste à faire la lumière sur la proposition faite par Mandelbrot (introduction des lois stables), et de voir si elle permet d'atteindre le but assigné.

On se permet de se poser la question suivante : les rendements des actifs seront-ils mieux modélisés par les lois gaussiennes ou par les lois stables ? Nous espérons pouvoir donner une réponse à la fin de notre analyse.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous allons voir consacré à l'étude détaillée des lois stables, nous donnons dans un premier temps les définitions et les propriétés de ces lois, and Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi stable. Nous introduisons ensuite une méthode pour générer des variables aléatoires stables.

Le deuxième chapitre : Tout d'abord, nous rappelons les définitions et les principales propriétés des rendements logarithmique, telles que les lois gaussiennes, les grandes fluctuations,...etc. Enfin terminer ce chapitre avec l'utilisation des quatre indices boursiers pour faire : CAC40, CAI, DAX et Dow Jones. Pour faire des tests graphiques : QQ-plot, histogrammes et avoir si les rendements suivent une loi de Lévy ou bien normalement distribués.

INDEX DES NOTATIONS

Notation	Signification
i.e.	C'est-à-dire.
$f(x)$	Fonction de la densité de x .
$\psi_x(t)$	Fonction caractéristique de X .
<i>i.i.d</i>	Indépendante et identiquement distribuées.
$\stackrel{d}{=}$	Suit la même loi que.
$S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$	loi stable de paramètre α, β, γ et μ .
$sign(t)$	Cette fonction vaut $\frac{ t }{t}$.
v.a.r.	Variable aléatoire réelle.
$E(X)$	Espérance mathématique de X .
$Var(X)$	Variance de X .
$\mathbf{I}_{[a,b[}$	Fonction indicatrice : $I=1$ si $x \in [a, b[$ et $I=0$ si non.

Chapitre 1

LES LOIS STABLES

Lorsque nous faisons du traitement de données, en particulier pour les séries chronologiques, il nous arrive fréquemment d'utiliser la variance empirique. Comme le nombre d'observations est fini, cette variance est évidemment finie. Il semble alors logique d'employer des méthodes, de proposer des modèles, de faire des estimations utilisant une variance finie. Dans certains cas cependant, la variance empirique est très grande. La question se pose alors de savoir si la variance théorique est finie ou infinie.

Dans le cadre des distributions à variance infinie sont apparues les lois alpha-stables, dont le moment d'ordre 2 est infini dès que α est strictement inférieur à 2. Dans les années 60, un nouveau modèle de variation des prix repose sur des lois qui s'inspirent des « Lois de Pareto ». Ce sont les « lois alpha stables » ou lois à queue lourde. Les domaines d'application de ces lois sont entre autres la finance, les télécommunications, internet. . .

Plusieurs livres sont consacrés à ces lois : Zolotarev (1986) qui a étudié les lois alpha-stables dans le contexte univarié ; Samorodnitsky et Taqqu (1994) qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié ; Nikias et Shao (1995) qui ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal, pour n'en citer que trois.

Dans ce chapitre, le cas univarié est traité. Les lois sont définies et diverses propriétés sont présentées. Puis, sont et nous explicitons le calcul des moments et la simulation.

1.1 Lois stables univariées

Les lois Pareto-stables, appelées aussi lois Lévy-stables ou tout simplement lois stables, ont été introduites par Paul Lévy en 1924 (Lévy). Les définitions et propriétés énoncées dans ce chapitre sont issues de Janicki et Weron et de Samorodnitsky et Taqqu.

Définition 1.1.1 ^[6] *On dit d'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une loi stable si pour tout $n \geq 2$, il existe un réel strictement positif C_n et un réel D_n tels que :*

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{\text{loi}}{=} C_n X + D_n$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont n copies indépendantes de X .

- *stable : stable par convolution ;*
- *le réel strictement positif C_n est nécessairement de la forme $n^{\frac{1}{\alpha}}$, pour un certain $\alpha \in]0, 2] \rightarrow$ loi α -stable.*

Définition 1.1.2 ^[1] *On dit d'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une **loi stable** de paramètres α, β, γ et μ , que l'on note $X \equiv S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, si et seulement si sa **fonction caractéristique** est de la forme :*

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \exp \left\{ i\mu.t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \cdot \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad \text{si } \alpha \neq 1, \\ \psi_X(t) &= \exp \left\{ i\mu.t - \gamma |t| \cdot \left[1 + \frac{2}{\pi} i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \ln |t| \right] \right\} \quad \text{si } \alpha = 1, \\ \alpha &\in]0, 2], \quad \beta \in [-1, 1], \quad \gamma \geq 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Où :

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t > 0 \\ 0 & \text{quand } t = 0 \\ -1 & \text{quand } t < 0 \end{cases}$$

Les lois stables sont intéressantes car elles ne sont pas trop compliquées. En effet, il suffit de quatre paramètres pour les connaître complètement.

Exemple 1.1.1 Là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe :

– La loi normale $N(m, \gamma^2)$ est une loi $S_2\left(\beta, \frac{\gamma^2}{2}, m\right)$ (et réciproquement une loi $S_2(\beta, \gamma, \mu)$)

est une loi normale $N(\mu, 2\gamma)$,

– La loi de Cauchy généralisée de densité $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - m)^2}$ est une loi $S_1(0, \gamma, m)$,

– La loi de Poisson $P(\lambda)$ n'est pas stable.

Preuve. ^[7]En effet, soient X_1 et X_2 deux *v.a.r.* suivant une loi de Poisson. Supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $C > 0$ et D tels que :

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} CX_1 + D$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que :

$$\begin{cases} 2\lambda = C\lambda + D \\ 2\lambda = C^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} D = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ C = \sqrt{2} \end{cases}$$

ce qui entraîne une contradiction car $(X_1 + X_2)$ a ses valeurs uniquement dans \mathbb{N} alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'a pas que des valeurs dans \mathbb{N} . ■

1.1.1 Inconvénients des lois stables

Le principal inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas ^[1] :

1. La distribution gaussienne $S_2(0, \gamma, \mu)$ où $f(x) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{4\gamma^2}\right)$.
2. La distribution de Cauchy $S_1(0, \gamma, \mu)$ où $f(x) = \frac{2\gamma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\gamma^2)}$.
3. La distribution de Lévy $S_{\frac{1}{2}}(1, \gamma, \mu)$ où $f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \mu)}\right) \times \mathbf{I}_{\mu, +\infty[}$ avec \mathbf{I} fonction indicatrice.

Mais, depuis l'implantation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform), les densités stables sont faciles à calculer. Nous pouvons approcher par

cette méthode la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi_x(t) dt.$$

1.1.2 Diverses propriétés

Nous allons rappeler quelques propriétés importantes des variables aléatoires stables de loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Densité :

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (normale, Cauchy, gamma,...). Pour la loi α -stable, nous n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \psi_x(t) dt$$

Nous pouvons obtenir f d'une loi α -stable symétrique sous la forme d'une intégrale comme suivant :

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos[xt + \beta t^\alpha w(t, \alpha)] dt,$$

$$\text{où } w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Stabilité :

Propriété 1.1.1 : Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivante :

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, \gamma, \mu) \iff Y = \frac{X - \mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, 1, 0).$$

Preuve. ^[7]Tout d'abord, remarquons que :

$$\psi_{mX+p}(t) = E [e^{it(mX+p)}] = e^{itp}\psi_X(mt).$$

Condition nécessaire : prenons $m = \frac{1}{\gamma^\alpha}$ et $p = -\frac{1}{\gamma^\alpha}$. Nous avons alors :

$$\psi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^\alpha}\right) \psi_X\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right)$$

$$\psi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^\alpha}\right) \exp\left\{-\frac{i\mu t}{\gamma^\alpha} - \gamma \left|\frac{t}{\gamma^\alpha}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right) \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}$$

Or $\text{sign}\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right) = \text{sign}(t)$ car $\gamma > 0$ donc : $\psi_Y(t) = \exp\{-|t|^\alpha [1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2}]\}$, qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant $m = \gamma^\alpha$ et $p = \mu$. ■

Remarque 1.1.1 : Pour la simulation, il suffit de générer des lois $S_\alpha(0, \beta, 1)$ et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$.

Queues lourdes :

Propriété 1.1.2 : Soit X une v.a.r. $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ on a les deux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) &= \gamma C(\alpha) \frac{1 + \beta}{2}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X < -t) &= \gamma C(\alpha) \frac{1 - \beta}{2}, \\ \text{où } C(\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2 : L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto. En effet, une v.a.r. suit une loi du type Pareto si :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x).$$

Où $h(x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout $t > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t$

1. Mandelbrot (1962) a montré que pour les lois α -stables, nous avons :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha)x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})].$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on s'aperçoit que les lois stables sont asymptotiquement paréliennes.

Calcul des moments :

Une conséquence directe de la décroissance « lente » des lois de probabilité α -stables est la suivante :

Propriété 1.1.3 : Si X suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, et $p \in \mathbb{N}^*$, les moments d'ordre p sont comme suivant :

1. **Si** $\alpha = 2$:

$$\forall p, E|X|^p < +\infty.$$

2. **Si** $0 < \alpha < 2$:

$$\forall 0 \leq p < \alpha, E|X|^p < +\infty.$$

$$\forall p \geq \alpha, E|X|^p = +\infty.$$

Preuve. ^[7]En fait pour la première partie de la propriété 1.1.3, nous avons vu dans l'exemple 1.1.1 que le cas $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien. Et nous savons que les variables aléatoires gaussiennes ont toutes leurs moments finis. Pour la seconde partie de la propriété 1.1.3, remarquons tout d'abord que pour toute *v.a.r.* positive et intégrable, on a

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} P(Y \geq v) dv.$$

En posant $Y = |X|^p$ et $v = u^p$, nous avons

$$E(|X|^p) = \int_0^{+\infty} P(|X|^p \geq u^p) pu^{p-1} du. \quad (1.1)$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{p-1} P(|X| \geq u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow 0} P(|X| \geq u) = 1$$

Donc

$$u^{p-1} P(|X| \geq u) \sim u^{p-1} \text{ au voisinage de } 0.$$

Et

$$\int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \iff \int_0^M u^{p-1} du < +\infty \iff p > 0.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} P(|X| \geq u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha P(|X| \geq u) = \gamma C(\alpha).$$

Donc

$$u^{p-1} P(|X| > u) \sim u^{p-\alpha-1} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Et

$$\int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \iff \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1} du < +\infty \iff p < \alpha.$$

■

Conclusion : d'après (1.1), il est facile de voir que :

$$E |X|^p < +\infty.$$

$$\text{Lorsque } \begin{cases} \int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty. \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire lorsque } 0 < p < \alpha.$$

Remarque 1.1.3 :

1. Dès que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie.
Dès que α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.

$0 < \alpha \leq 1$		$1 < \alpha < 2$		$\alpha = 2$	
$E(X) = \infty$	$\text{Var}(X) = \infty$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \infty$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = 2\gamma^2$

TAB. 1.1 – Moyenne et variance théorique d'une loi stable

2. Si α est plus grand que 1, la moyenne d'une loi α -stable est μ .

En particulier, pour la moyenne $E(X)$ et la variance $\text{Var}(X)$, on obtient les résultats dans le tableau suivant :

Propriété 1.1.4 : Si X suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, 0)$ alors on a :

$$\forall 0 \leq p < \alpha, E|X|^p = C(\alpha, \beta, p) \gamma^{\frac{p}{\alpha}},$$

Où

$$C(\alpha, \beta, p) = \frac{2^{p-1} \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right).$$

1.1.3 Propriétés arithmétiques

Propriété 1.1.5 :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi stable $S_\alpha(\beta_1, \gamma_1, \mu_1)$ et $S_\alpha(\beta_2, \gamma_2, \mu_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ avec :

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad \beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres α peuvent être considérés ensemble et la loi qui résultera de cette association conservera les mêmes valeurs du paramètre α mais les autres paramètres seront modifiés.

Propriété 1.1.6 :

Si X_1 et X_2 suivent une loi stable $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, $A \in \mathbb{R}^+$, $B \in \mathbb{R}^+$, $C \in \mathbb{R}$ alors :

$$AX_1 + BX_2 + C \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\beta, \gamma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + C\right).$$

1.1.4 Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi stable

Une loi stable alors est caractérisée par 4 paramètres :

1) ($0 < \alpha \leq 2$) : Le paramètre α appelé **exposant caractéristique**, ou indice de stabilité décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution.

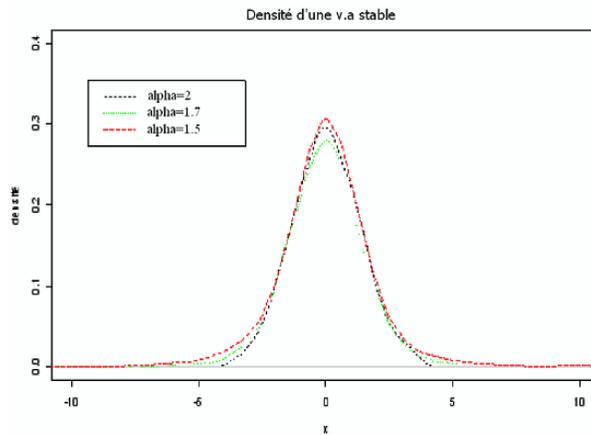


FIG.1.1. Courbe de la densité pour $\alpha \in \{2; 1.7; 1.5\}$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\mu = 0$.

✓ Plus α est petit, plus les queues de la distribution. sont épaisses. Autrement dit, plus α est petit, plus nous constatons l'existence de très grandes fluctuations. Une distribution gaussienne a la valeur maximum de α soit $\alpha = 2$.

✓ Remarquant bien que, Plus le paramètre α est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisse.

2) $-1 < \beta < 1$: **Paramètre de symétrie**. Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique. la loi est symétrique par rapport au paramètre μ . Si de plus, $\mu = 0$, la loi est dite symétrique alpha-stable, de fonction caractéristique

$$\psi_x(t) = \exp\{-\gamma|t|^\alpha\}.$$

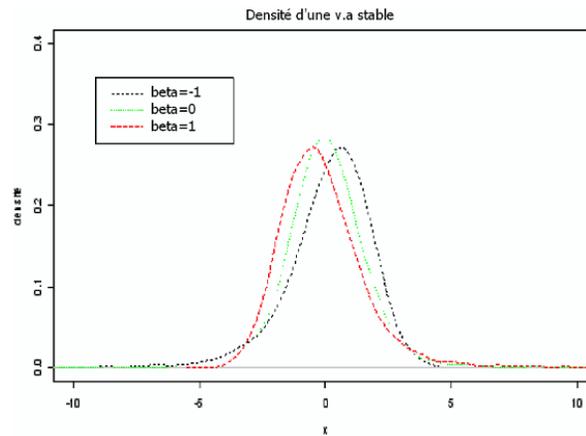


FIG.1.2. Courbe de densité pour
 $\alpha = 1.4; \beta = \{-1; 0; 1\}; \gamma = 1; \mu = 0.$

✓ Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne.

✓ Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

3) $\gamma > 0$: **Paramètre d'échelle**; tel que $\gamma_{Gaussien} = \sqrt{2}\gamma$;

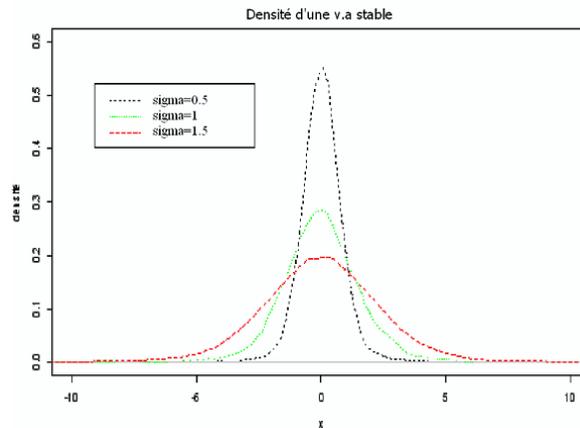


FIG.1.3. Courbe de la densité pour $\alpha = 1.4; \beta = 0; \gamma \in \{0.5; 1; 1.5\}; \mu = 0$.

✓ Plus γ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre γ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.

4) $-\infty < \mu < +\infty$: **Paramètre de localisation**, pour α supérieur à 1, à la moyenne de la loi de distribution. Si $\beta = 0$ alors μ est la médiane. Dans les autres

cas le paramètre μ ne peut pas être interprété.

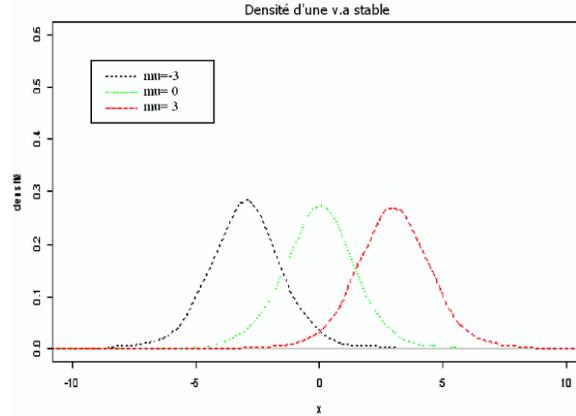


FIG.1.4. Courbe de la densité pour $\alpha = 1.4; \beta = 0; \gamma = 1; \mu \in \{-3; 0; 3\}$.

✓ Lorsque μ est positif (resp négatif), la courbe décale vers la droite (resp vers la gauche).

1.1.5 Algorithme de simulation

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al (1976). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, il suffit de faire un changement de variables (propriété 1.1.5).

Première étape :

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer deux v.a.r. uniformes sur $]0, 1[$ (notées U_1 et U_2), Puis en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\Phi &= \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{W} &= -\log(1 - U_2)\end{aligned}$$

Deuxième étape :

Elle consiste à calculer différentes quantités (en fonction de Φ et de W).

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 - \alpha, \\ a &= \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right), \\ b &= \tan\left(\frac{\varepsilon\Phi}{2}\right), \\ \tau &= -\varepsilon \tan(\alpha\Phi_0), \\ B &= \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}}, \\ z &= \frac{\cos(\varepsilon\Phi) - \tan(\alpha\Phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos(\Phi)} \\ d &= \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Troisième étape :

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

Proposition 1.1.1 *Soit Φ une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons*

Pour $\alpha = 1$:

$$Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta\Phi \right) \tan(\Phi) - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos(\Phi)}{\frac{\pi}{2} + \beta\Phi} \right) \right).$$

Pour $\alpha \neq 1$:

$$Y = \left(\frac{\sin(\alpha(\Phi - \Phi_0))}{(\cos(\Phi))^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Où

$$\Phi_0 = \left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha} \right).$$

Exemple 1.1.2 Alors la variable aléatoire Y suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

- Dans le cas d'une loi $S_\alpha S$ (c'est-à-dire $\beta = 0$), nous avons :

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos\Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

- Plus particulièrement, dans le cas où $\alpha = 2$, nous avons :

$$Y = \frac{\sin(2\Phi)}{\sqrt{\cos(\Phi)}} \cdot \left(\frac{\cos(\Phi)}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin\Phi.$$

- Enfin, dans le cas où est $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, nous avons :

$$Y = \tan\Phi$$

Formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

Les figures qui suivent nous permettent de constater que le générateur de variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique.

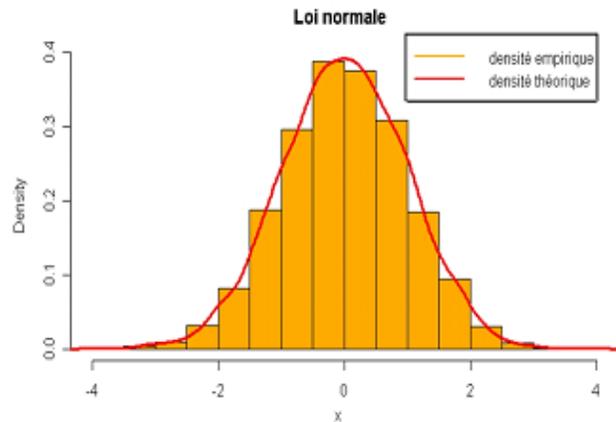


FIG.1.5. Densité d'une loi normale de paramètre
 $\alpha = 1.5; \beta = 0; \mu = 0; \gamma = 1$.

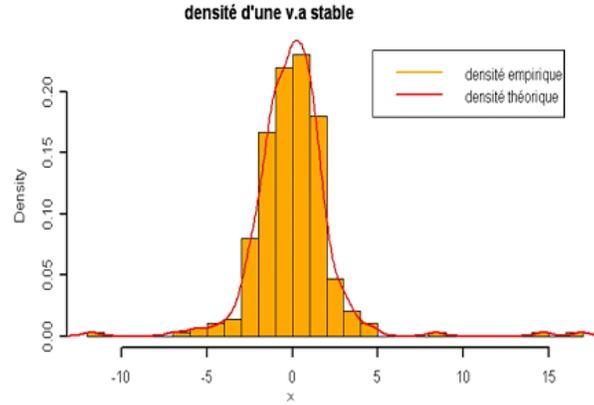


FIG.1.6. Distribution d'une loi stable pour
 $\alpha = 1.5; \beta = 0; \mu = 0; \gamma = 0.$

Remarque 1.1.4 :

Soit f la densité d'une loi stable, nous pouvons voir facilement que $f(-x, \alpha, \beta) = f(x, \alpha, -\beta)$. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité soit $x \geq 0$, soit $\beta \geq 0$. Zolotarev (1966) a démontré que la fonction de répartition d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$ peut s'écrire pour $y > 0$,

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} V_\alpha(y, \theta) &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\sin\left(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1-\alpha|)\right)}{\cos\theta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\cos\left[(\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1-\alpha|)\right]}{\cos\theta} \\ &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta). \end{aligned}$$

La densité se déduit de la fonction de répartition et s'écrit de la façon suivante

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Qui peut s'écrire plus simplement en rappelant que $\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \cdot \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|\alpha-1|} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\left(Y = h(\Phi, W) = \left(\frac{a(\Phi)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)$ a bien comme densité celle qui précède. Pour cela, posons le changement de variables suivant :

$$(\Phi, W) \xrightarrow{T} (\Phi, Y) = \left(\Phi, \left(\frac{a(\Phi)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)$$

$$(\Phi, Y) \xrightarrow{T^{-1}} (\Phi, W) = \left(\Phi, \left(\frac{a(\Phi)}{Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)\right)$$

Le calcul du déterminant de la matrice jacobéenne donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & a(\Phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} \end{vmatrix} = a(\Phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1}. \quad (1.2)$$

Rappelons enfin que Φ suit une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que W suit une loi exponentielle de paramètre 1, que Φ et W sont indépendantes et donc que

$$f_{\Phi, W}(\phi, w) = f_{\Phi}(\phi) f_W(w) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\phi) e^{-w} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(w). \quad (1.3)$$

(1.2) et (1.3) entraînent que

$$f_{\Phi, Y}(\phi, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\phi) \exp\left(-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)\right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}\left(a(\phi) y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \left|a(\phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) y^{\frac{1}{\alpha-1}}\right|.$$

Nous obtenons donc pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|1-\alpha|} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(\phi) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)\right] \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(a(\phi)) d\phi.$$

Or $a(\phi) > 0 \Leftrightarrow \phi > \phi_0$, ceci démontre le résultat voulu car $\phi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque 1.1.5 : Le cas $\alpha = 1$ se résout de manière similaire.

1.1.6 Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables

Dans cette principe, nous allons nous attarder sur les différentes manières de tester les paramètres d'une loi symétrique alpha-stable ($S\alpha S$) dont je rappelle la forme de la fonction caractéristique : $\psi_X(t) = \exp\{-\gamma|t|^\alpha\}$. Que ce soit pour les problèmes de test de variance, nous supposons pour la suite que nous avons la suite d'observations (x_1, \dots, x_n) de la v.a.r. X définie juste avant par sa fonction caractéristique.

Tests sur la variance

Nous allons voir deux façons de tester si on est en présence d'une loi à variance infinie ou non (ces deux tests graphiques sont aussi valables pour n'importe quelle loi stable, symétrique ou non).

a) Test graphique 1 Ce premier test est très simple et se décompose en 2 étapes :

1. Calculer la variance empirique pour différentes valeurs de n :

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \left(\text{où } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

2. Tracer le graphique (n, s_n^2) . Intuitivement, lorsque n augmente et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger. Au contraire, si on est en présence d'une loi à variance infinie, le tracé diverge.

b) **Test graphique 2** Ce deuxième test est basé sur le fait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha IP(|X| > t) = \gamma C(\alpha).$$

Donc en $+\infty$, $\frac{d \log P(|X| > t)}{d \log t}$ est équivalent à α . Là aussi, 2 étapes sont nécessaires :

1. Fixer t et calculer la quantité $g(t) = \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{|X_i| > t} \right)$,
2. Tracer le graphique $(\log t, g(t))$ et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de t .

c) **Quelques exemples**

Pour cela, nous avons repris les simulations de la section précédente. Les graphiques de la (figure.1.7) représentent le test graphique 1. Ceux de la (figure.1.8) représentent le test graphique 2.

On peut remarquer que seul le cas α égal à 2 fait converger la variance. Pour tous les autres cas, il y a divergence.

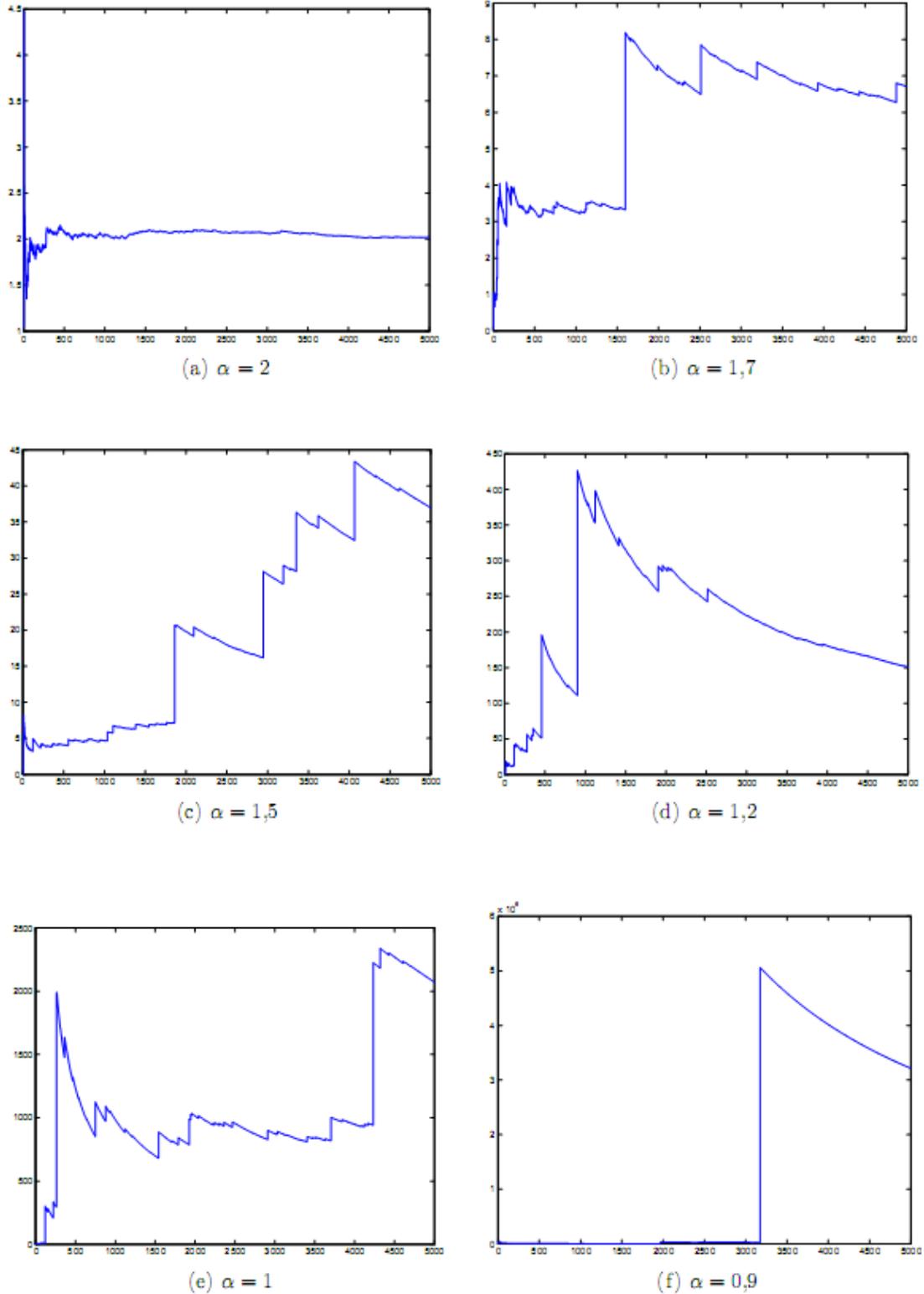


FIG.1.7. Test graphique 1 : variance empirique calcule pas pas sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi SaS pour différentes valeurs de α .

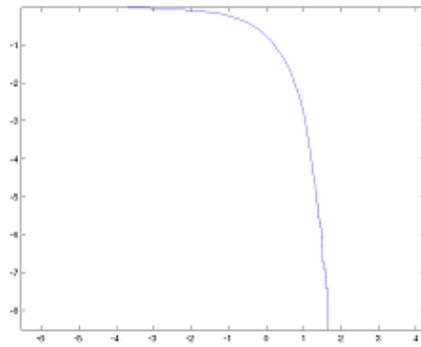
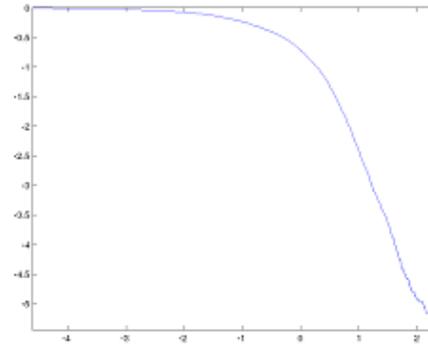
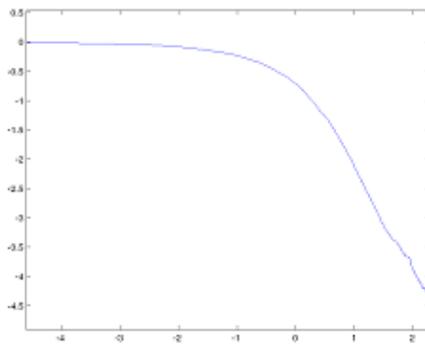
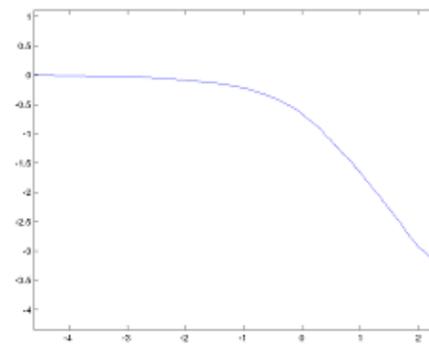
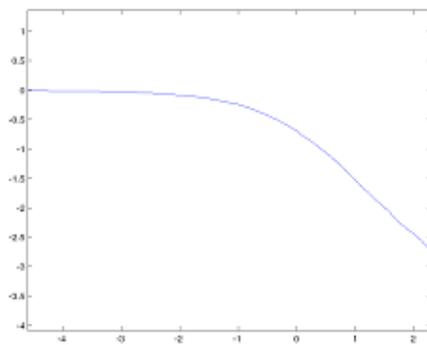
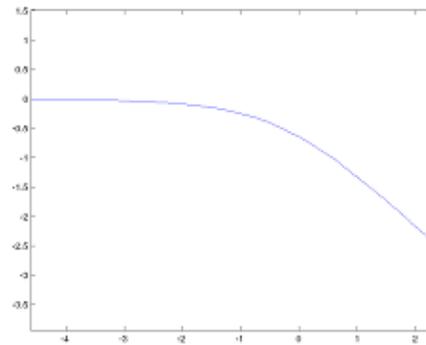
(a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1,7$ (c) $\alpha = 1,5$ (d) $\alpha = 1,2$ (e) $\alpha = 1$ (f) $\alpha = 0,9$

FIG.1.8. Test graphique 2 calcul sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi SaS pour différentes valeurs de α .

1.2 Conclusion

A travers cette partie, on vient de voir : une description générale concernant les lois stables qui ont été proposées par Paul Lévy en (1924), une étude de l'interprétation et l'influence de chaque paramètre de cette loi, l'algorithme qui permet de la générer. A la fin, nous avons pu déduire quelques résultats :

1. Parmi les paramètres que nous avons vus, on peut dire que l'indice de stabilité ($0 < \alpha \leq 2$) est le seul indice intéressant car il nous aide à déterminer la forme ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution.
2. La loi normale est un cas particulier de la loi stable pour $\alpha = 2$.
3. En effet, la somme de deux variables α -stables (i.i.d) est une variable stable de même exposant caractéristique α . Les variables stables possèdent ainsi des propriétés d'invariance d'échelle. (Nous pouvons généraliser cette proposition à n variables α -stables (i.i.d)).
4. Pour ces raisons, les lois stables sont très appréciées pour décrire les séries financières.

Chapitre 2

LES SÉRIES FINANCIÈRES

La disponibilité d'un grand nombre de données temporelles, financières en particulier, dans ces dernières années a permis non seulement de rechercher des dynamiques non linéaires, mais aussi de s'intéresser aux queues de distribution. En effet, l'analyse des séries financières est fondé sur la prise en compte des divers caractéristique des données observées, telles que : l'invariance par translation du temps (stationnarité), la dépendance, la linéarité,...etc.

Définition 2.0.1 ^[3] *Une série temporelle (chronologique) est une série d'observations numériques (mesures) indicées par le temps. Ces observations seront représentées par $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$, où (t_1, t_2, \dots, t_n) représentent les marques temporelles, X_t est la valeur de la mesure réalisée en temps "t".*

Définition 2.0.2 ^[5] *Une série financière est un processus qui sert à l'explication des phénomènes de marché (prévisions, analyse des risques,...) et au calcul du prix des actifs, des indices et des options.*

Les séries de prix d'actif et de rendements présentent généralement un certain nombre de possessions similaires.

Définition 2.0.3 ^[5] *Le rendement journalier (hebdomadaire, mensuel,...) d'un actif financier est défini comme suit :*

$$R_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}, t > 1$$

Où P_t désigne le cours du titre financier (le prix d'actifs) à l'instant t . garantit que les prix sont toujours > 0 , $\forall r$, même en cas de très fortes baisses.

2.1 Propriétés des séries financières

Le rendement d'un actif présente les accroissements quotidiens du logarithme du prix, c'est le gain (ou la perte) relatif. Il est donc le plus intéressant pour l'investisseur que le prix lui-même, car il lui permet de déterminer les profits qu'il peut réaliser. C'est pour cela que les analyses financières sont basées sur les rendements des actifs au lieu de leurs prix. Dans l'analyse des séries financières (des rendements en particulier), Charpentier (2002), distingue les principales Propriétés que nous allons successivement aborder.

Pour bien éclairer les propriétés des séries financières, nous présentons les exemples indices des principales bourses suivants :

Des différents indices des principales bourses

L'indice boursier est une mesure moyenne de l'ensemble du marché. Il s'appuie sur une sélection plus ou moins large des valeurs de la cote. Le calcul des indices boursiers doit permettre de suivre l'évolution des prix des actifs financiers, mais aussi de leur rentabilité. Un indice boursier, prenant en compte les dividendes, est un indicateur de performance, mesurant ainsi la performance globale du marché.

CAC40 Le CAC40, qui prend son nom du système de "**Cotation Assistée en Continu**", est le principal indice boursier sur la place de Paris. Créé par la compagnie des Agents de Change, il est déterminé à partir des cours de 40 actions cotées en continu sur le Premier Marché parmi les 100 sociétés dont les échanges sont les plus abondants sur Euronext Paris.

Ces valeurs, représentatives des différentes branches d'activités, reflètent en principe la tendance globale de l'économie des grandes entreprises françaises et leur liste est revue régulièrement pour maintenir cette représentativité. L'indice représente environ 70 % de la capitalisation totale de la Place de Paris, soit 1100 Milliards d'euros.

DAX Index des actions allemandes ('Deutscher Aktienindex') qui regroupe les 30 principaux fonds d'actions allemands comme ; Adidas-Salomon, Allianz, Altana, BASF, Bayer, BMW, Commerzbank, Continental, DaimlerChrysler, Deutsche Bank, Deutsche Börse, Deutsche Bun-despost, Deutsche Telekom, Henkel, Lufthansa, MAN, Schering, Siemens, Volkswagen,

DOW JONES Cet indice porte les noms de ses deux inventeurs : Charles H. DOW et Edward D.JONES. Le Dow Jones est l'abréviation de Dow Jones Industriel Average et est l'indicateur le plus connu de la bourse américaine. L'index se compose de 30 fonds qui jouent tous un rôle majeur dans leur secteur. Le Dow Jones est un index très équilibré, qui n'est pas fréquemment modifié. Il arrive qu'il reste inchangé pendant plusieurs années. Les dernières modifications se sont produites en 1999 et en 2004. L'index AEX change chaque année de composition.

La figure suivante représente les prix de fermetures journaliers du CAC40¹, CAI², DAX³ et Dow Jones⁴ respectivement du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les fins de semaine et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont donc pas pris en compte, ainsi une année commerciale contient presque 250 jours ouvrables en moyenne.

¹La période du 01/03/1990 au 02/04/2007.

²C'est un indice boursier Egyptien. Données sont prises du 02/07/1997 au 02/04/2007.

³ C'est un indice boursier Allemand. Les données sont prises du 26/11/1990 au 05/04/2007.

⁴C'est un indice boursier Américain. Les données sont prises du 01/10/1928 au 09/04/2007.

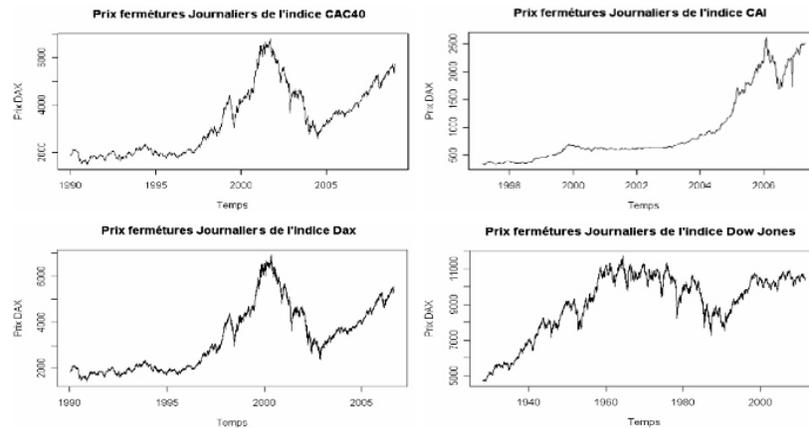


FIG.2.1. Les prix de fermeture journaliers des indices CAC40, CAI, DAX et Dow Jones.

2.1.1 Les lois gaussiennes

Nous allons voir dans ce chapitre des faits stylisés communes à la plupart des rendements logarithmiques qui montrent que l'hypothèse de la loi Gaussienne n'est pas valable pour des 3 raisons :

1. Les prix et donc les rendements sont discontinus en réalité,
2. Les rendements logarithmiques ne suivent pas une loi normale,
3. Les accroissements des rendements ne sont pas stationnaires.

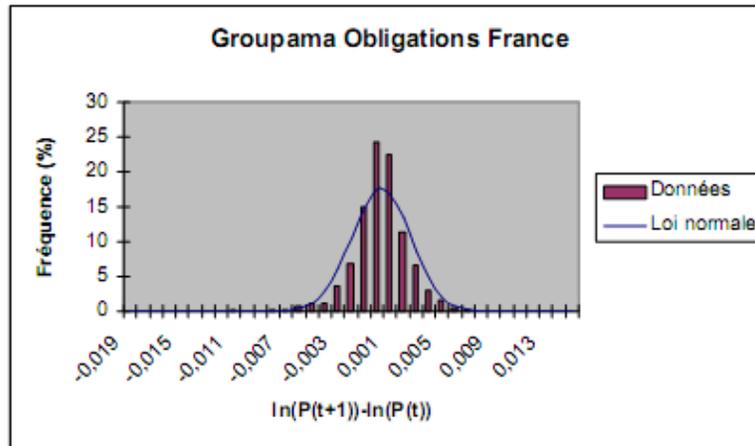


FIG.2.2. Distribution de l'accroissement du logarithme du cours de l'OPCVM Groupama Obligations France.^[1]

Cet histogramme paraît être symétrique. La distribution des données est plus pointue que la loi normale. Le graphique suivant montre que la queue de distribution des données réelles est plus épaisse et plus longue que la queue de distribution de la loi normale.

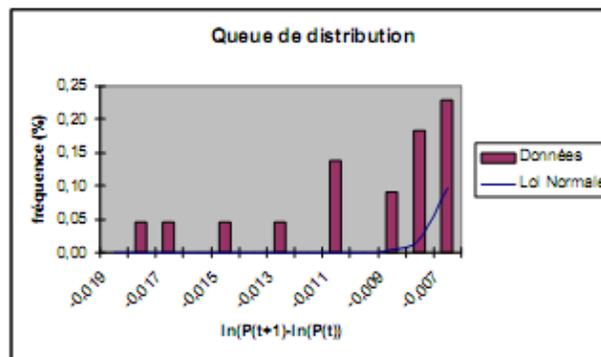


FIG.2.3. Agrandissement du graphique précédent.^[1]

Pour vérifier que les accroissements quotidiens du logarithme du cours de certains titres ne suivent pas une loi gaussienne, nous allons calculer la statistique de Kurtosis associée. Le Kurtosis caractérise la forme du pic ou l'aplatissement relatif d'une distribution comparée à une distribution normale. Un Kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un Kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie. Le Kurtosis se définit comme :

$$KURTOSIS_x = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]^2}$$

Nous trouvons pour la série sur les cours de l'OPCVM Groupama Obligations France¹ un Kurtosis égal à 8,31 (contre 3 pour une loi gaussienne). La distribution de cette série est donc plus pointue et a des queues de distribution plus lourdes qu'une distribution normale.

Nous avons calculé la statistique de Kurtosis pour plusieurs chroniques financières et nous constatons que pour certaines séries elle est supérieure voire très supérieure à 3.

série	Kurtosis	série	Kurtosis
		Actions	
Nippon Gan	3.42	France télécom	3
OPCVM		Renault	2.03
GAN Coissance	11.07	AXA	26.42
France GAN	14.07	Indices	
Ameri-GAN	259.11	CAC40	5.24
CAN Rendement	364.47	SBF250	3.01
Group. Oblig. France	8.3	NiKKei300	3.67
		Dow Jones Industrails	59.43
		Nasdaq composite	416.78

TAB. 2.1 – Statistiques de Kurtosis [1].

¹Groupama Obligations France (cours journaliers du 25/08/1992 au 18/05/2001)

	CAC40	CAI	DAX	Dow Jones
Min	-0.1213	-0.2734	-0.0987	-0.2563
Max	0.1103	0.3029	0.0755	0.1487
Moyenne	0.0012	0.0039	0.0004	0.0002
Variance	0.0007	0.0008	0.0002	0.0001
KURTOSIS	4.03	4.95	6.78	29.86

TAB. 2.2 – Les Statistiques des indices boursiers (donnees journaliers) .

Il semble donc inexact de considérer que le rendement est toujours une variable aléatoire gaussienne. Nous venons de voir que les queues de la loi normale sont bien moins épaisses que les queues des distributions empiriques des rendements.

2.1.2 Les grandes fluctuations

Le modèle gaussien suppose aussi que les accroissements sont stationnaires (voir Figure 2.4). Ces modèles excluent les grandes fluctuations, ils ne prennent donc pas en considération les krachs et minikrachs qui se produisent de temps en temps. Ils sont donc insuffisants pour étudier les cours boursiers.

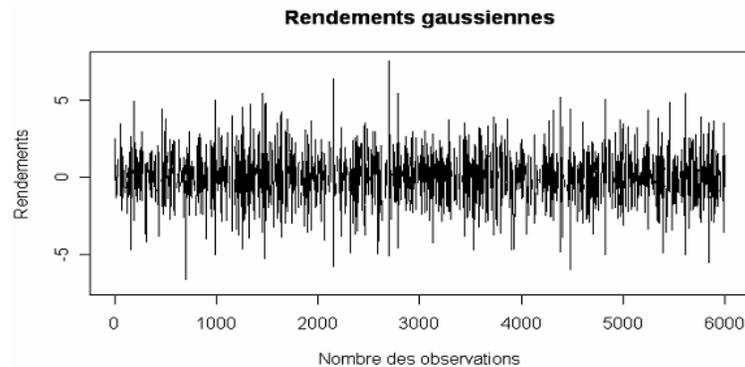


FIG.2.4. Le rendement d'un échantillon d'une loi normale.

Sur ce graphique, aucun accroissement n'est très différent des autres et la variance semble être à peu près constante au cours du temps. Les changements de prix sont réguliers et ne sont pas concentrés.

On va comparer l'évolution du rendement de ces indices (Figure 2.4) avec le rendement d'un échantillon d'une loi gaussienne (Figure 2.5).

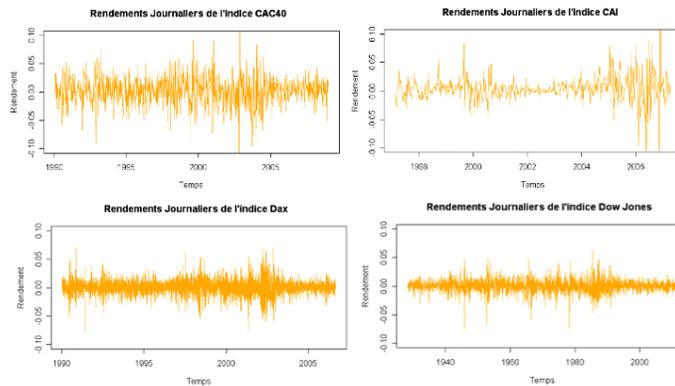


FIG.2.5. Les rendements journaliers des indices boursiers.

Comme le montre le graphique précédent, les accroissements ne sont pas réguliers, il existe des sauts. Un certain nombre de variations quotidiennes extrêmes, tant positives que négatives. Les changements du logarithme du prix n'ont pas une variance constante au cours du temps, ce qui est un signe de non-stationnarité.

Black et Scholes supposent l'indépendance et la normalité des rendements, mais des études empiriques ont montré qu'ils ne sont ni indépendants ni gaussiens. La dépendance entre les rendements est non linéaire, donc l'hypothèse d'indépendance est un peu difficile à supprimer pour l'analyse. Dans notre travail on change l'hypothèse de normalité en celle plus faible, que les rendements suivent une loi stable qui peut expliquer des asymétries et des queues lourdes que la loi gaussienne ne peut pas expliquer.

2.2 Tests graphiques

2.2.1 Quantiles Quantiles plot des données

Un graphique QQ-plot est un outil convenable pour voir si la distribution d'une variable dans un échantillon provient d'une distribution théorique spécifique. Le QQ-plot est un graphique qui oppose les quantiles de la distribution empirique aux quantiles de la distribution théorique envisagée. Si l'échantillon provient bien de cette distribution théorique, alors le QQ-plot sera linéaire.

Le QQ-plot (ou Quantile to Quantile Plot) permet de tester la conformité entre la distribution empirique d'une variable et une distribution théorique.

On constate d'après ces deux figures que le rendement de chaque indice boursier n'est pas stationnaire contrairement au rendement de l'échantillon gaussien. à cause de l'existence de périodes de grandes variations (existence de valeurs extrêmes), ce qui explique bien que l'hypothèse selon laquelle les rendements seraient normalement distribués est à rejeter, car, il y a une déviation par rapport à la direction droite aux extrémités (Figure 2.6).

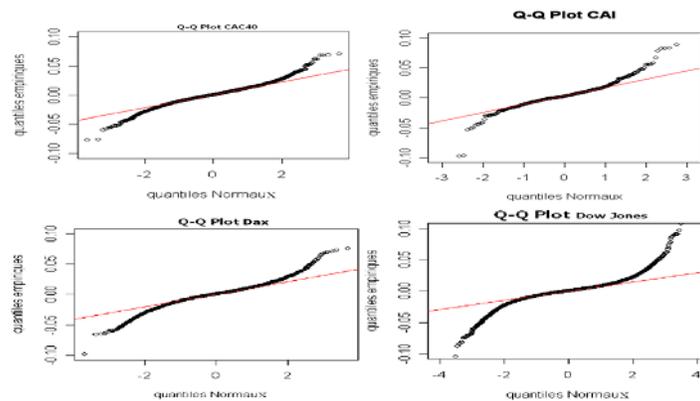


FIG.2.6. Quantiles normaux contre quantiles de nos indices boursiers.

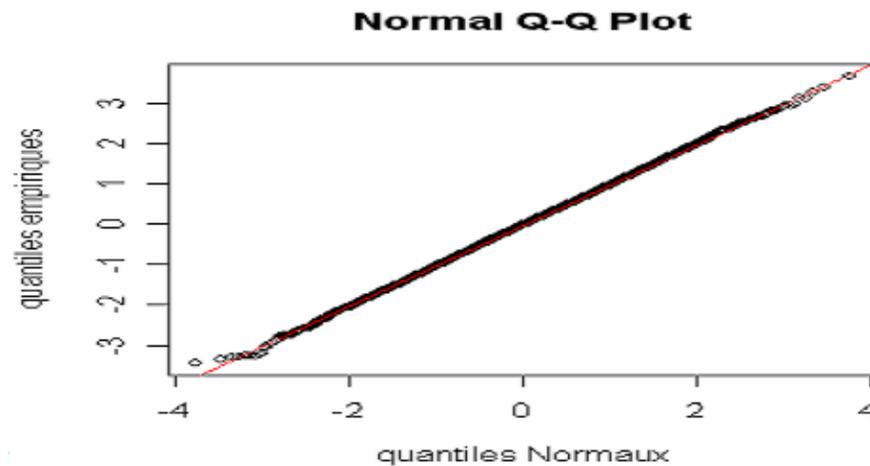


FIG.2.7. Quantiles normaux contre quantiles empiriques de la loi normale.

2.2.2 Histogrammes

Il est possible de visualiser la forme de la distribution des données à analyser en les représentant sous forme d'histogramme puis de comparer la forme de cet histogramme avec une courbe représentant une loi normale (les paramètres de cette loi étant calculés à partir des données à analyser). Ceci ne permet pas de conclure à la normalité des données mais peut donner une idée du type de loi sous-jacente : loi normale, loi de Cauchy ...etc.

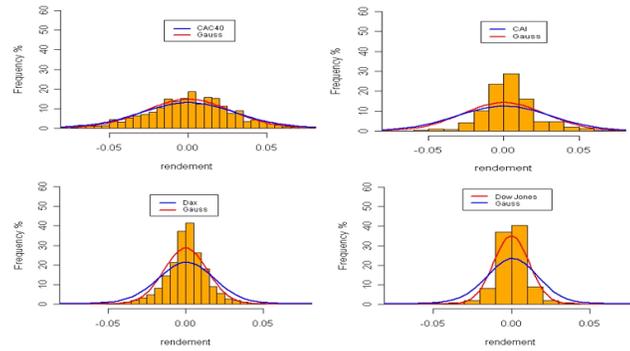


FIG.2.8.Distributions des indices boursiers.

Nous remarquons que la courbe de la densité de la loi stable, approche bien la distribution empirique de toutes les séries financières. La courbe associée à loi normale a été dessinée à partir de la densité de la loi gaussienne en prenant la moyenne empirique et la variance empirique des données. La courbe de la loi stable a été réalisée de manière empirique à partir de l’algorithme de simulation de variables aléatoire stable de Chambers, Mallows et Stuck (1976).

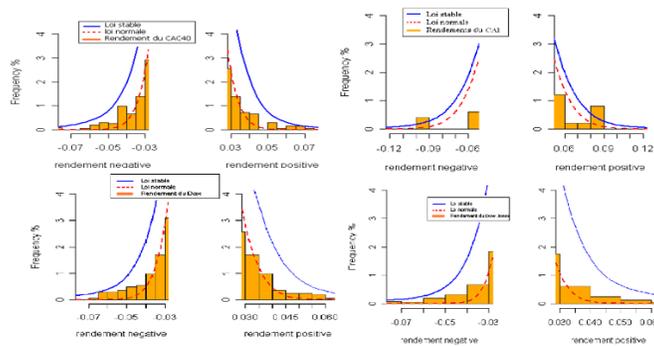


FIG.2.9.Queues des distributions des valeurs ngatives et les valeurs positives.

Notons que la loi stable a tendance à avoir des queues de distribution plus

épaisses que la loi empirique des rendements. Ce défaut a été noté plusieurs fois et est une des critiques majeures des lois stables. Cependant, Mittnik et Rachev et d'autres chercheurs ont noté que la surestimation des queues par les lois stables était due en général à l'emploi d'un estimateur de α qui ne convenait pas dans le cas où les données appartiennent au domaine d'attraction des lois stables.

2.3 Conclusion

Dans ce dernier chapitre :

1. Nous avons montrés graphiquement que dans certains cas, les lois de Lévy non gaussiennes approchent beaucoup mieux les lois des séries financières que la loi normale.
2. Les lois α -stables approchent mieux les lois des rendements d'actifs que la loi normale, nous sommes amenés à généraliser le modèle d'évaluation des actifs financiers à un marché α -stable.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons constaté tout au long de notre étude que la proposition faite par Benoît Mandelbrot s'avère juste, l'hypothèse de normalité des variations des prix ou des rendements est mise à mal par certains mouvements extrêmes des marchés. La distribution réelle est plus large sur les bords (queue de distribution épaisse), plus cintrée et plus pointue. Les lois stables approchent mieux les lois des rendements financiers que Les lois normales utilisées actuellement dans de nombreux modèles.

L'utilisation des lois Lévy-stables en finance reste très controversée. Nous avons tout de même travaillé avec ces lois car elles possèdent de nombreuses qualités :

- ✓ Les distribution stables permettent de prendre en compte les queues de distribution épaisses observées en pratique sur la loi des rendements et intègrent les discontinuités observées sur le marché. Dans le cas où le paramètre de stabilité α est inférieur à 2, leur variance est infinie (i.e. instable).

- ✓ Elles sont définies par seulement quatre paramètres, ce qui les rend simple à utiliser en pratique.

- ✓ Elles possèdent un paramètre d'asymétrie qui permet de gérer le fait qu'à un mouvement à la baisse ne correspond pas forcément une fluctuation identique à la hausse.

- ✓ Pour ces raisons, les lois stables sont très appréciées pour décrire les séries financières. Cependant nous avons mis en évidence quelques inconvénients.

De plus, il a été signalé que les lois stables de Lévy représentent correctement la partie centrale de la distribution empirique des rendements logarithmiques mais surestiment l'épaisseur de la queue de distribution. Pour palier à ce problème, Les chercheurs proposent de travailler avec des lois tronquées.

Bibliographie

- [1] Adam, E. (2000-2001). L'analyse fractale des marchés financiers. Stage effectué à Finama Asset Management. 31-36. 48-55.
- [2] Alexander, A,Pablo,O. Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance.
- [3] Aragon,Y. (2004). Introduction aux Séries Temporelles.
- [4] Hadjer, A. et Ghozleine, B.(Promotion Juin 2006). La prévision du taux de change avec la méthode de BOX-JENKINS (cas d'Algérie). Université Mohamed khider-Biskra. 10
- [5] Hana, B. et Fatima, O. (Promotion Juin 2007). Modelisation GARCH des Taux de Change Euro/DZD. 9
- [6] Laurence, M. (4 mars 2010). Lois α -stables, d'après Nikias et Shao.
- [7] Ludovic, d'estampes. (24 octobre 2003). Traitement Statistique des Processus Alpha-Stables Mesures de Dépendance et Identification des Ar Stables. 10-21.

Résumé:

Notre mémoire a pour objectif initial de découvrir et comprendre l'importance des lois α -stables, en particulier, dans les rendements des actifs, pour l'analyse de portefeuille et la gestion de risque. De plus, nous critiquons le modèle brownien. Nous montrons, pour finir ce travail, que l'hypothèse de normalité n'est pas vérifiée, que la loi normale n'est pas adéquate dans la mesure où elle sous estime les queues de distributions des actifs et les grandes fluctuations autour du rendement moyen, en utilisant les testes graphiques (Histogrammes, QQ-plot) pour quelques indices boursiers.

Mots clé : Lois α -stables, Rendement logarithmique, loi normale, indice boursier, queues lourde.

Abstract:

Our Master thesis is initially intended to discover and understand the importance of α -stable laws, in particular in asset returns for portfolio analysis and risk management. Moreover, we criticize the Brownian model. We show, to finish this work, that the normality assumption is not verified, that the normal law is not adequate since it underestimates the tails of the distributions of returns and large fluctuations around the average return, using the graphs tests (histograms, QQ-plot) for some stock indexes.

Keywords: α -stable laws, asset returns, normal distribution, stock index, heavy tails.

خلاصة:

الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو اكتشاف وفهم أهمية القوانين المستقرة α ، ولا سيما في عوائد الأصول لتحليل المحفظة وإدارة المخاطر. وعلاوة على ذلك، نناقش نموذج برونيان. نعرض أيضا -لإنهاء هذه المهمة- أن الفرضية الطبيعية غير متحقق منها، وأن القانون الطبيعي ليس مناسباً من حيث أنه يقلل من ذيول من توزيعات العوامل و التقلبات الكبيرة حول متوسط العائد، باستخدام الرسوم البيانية للاختبار (رسوم بيانية، خرائط QQ) لبعض مؤشرات الأسهم.

كلمات البحث: القوانين α -مستقرة، توزيع لوغاريتمي، قانون عادي، مؤشر الأسهم، والذيل الثقيلة.