

ETUDE NUMERIQUE DU FACTEUR DE PORTANCE N_f POUR UNE FONDATION FILANTE ET CIRCULAIRE

NUMERICAL STUDY OF BEARING CAPACITY FACTOR N_f OF STRIP AND CIRCULAR FOOTING

D. BENMEDDOUR, M. MELLAS, A. MABROUKI

Département de Génie Civil, Université de Biskra

RESUME

Le problème d'évaluation de la capacité portante est largement étudié en tenant compte des différents paramètres géométriques et mécaniques. Les calculs sont basés sur la méthode d'équilibre limite, la méthode de ligne de glissement et la méthode d'analyse limite. Malgré la diversité dans les méthodes de calcul, l'écart entre les valeurs des facteurs de portance est très large surtout pour les grandes valeurs de l'angle de frottement et l'angle d'interface.

Cet article vise d'une part l'estimation numérique du facteur de portance N_f pour des fondations filante et circulaire sous une charge verticale centrée, en utilisant le code FLAC^{2D} (Fast Lagrangian Analyses of Continua in 2D), et d'autre part la comparaison de ces résultats numériques avec les résultats des publications récentes.

MOS CLES : Fondation filante et circulaire, capacité portante, modélisation numérique, charge centrée, comportement.

ABSTRACT

The bearing capacity evaluation problem is largely studied by taking into account various geometrical and mechanical parameters. The use of the various approaches (limit equilibrium, limit analysis, numerical computation and experimentally studies) makes it possible to enrich the comprehension of the footing behaviour.

This paper is concerned the numerical estimation of the bearing capacity factor N_f of a strip and circular footing in vertical load, using the code FLAC^{2D} (Fast Lagrangian Analyses of Continua in 2D). The results given by the present numerical analysis are compared with the results of recent publications.

KEY WORDS: Strip and circular footing, numerical modelling, vertical load, behaviour.

1 INTRODUCTION

L'un des sujets les plus importants dans le domaine de géotechnique est l'estimation de la capacité portante des fondations superficielles. De nombreux auteurs ont résolu le problème de la capacité portante en faisant des hypothèses différentes sur la rugosité de la semelle et la forme de la zone en équilibre limite, c'est-à-dire sur l'allure des surfaces de glissement, bien que les valeurs numériques soient parfois assez différentes.

Prandtl [14] et Reissner [15] ont présenté les premières solutions analytiques pour la capacité portante des fondations superficielles. Terzaghi [18] a proposé la formule générale de la capacité portante d'une semelle

filante soumise à une charge verticale centrée. La charge limite est déterminée en superposant trois états de résistance : la résistance du sol pulvérulent sous le niveau de la semelle, l'action des terres situées au-dessus du niveau de la fondation et l'action de la cohésion (Méthode de superposition de Terzaghi). Dans le cas d'une semelle filante (figures.1), la contrainte de rupture sous une charge verticale centrée est obtenue par la relation générale suivante [8] :

$$q_l = 1/2\gamma_1 B N_\gamma(\varphi) + c N_c(\varphi) + (q + \gamma_2 D) N_q(\varphi) \quad (1)$$

avec:

q_l : contrainte de rupture (capacité portante par unité de

surface) ;

γ_1 : poids volumique du sol sous la base de la fondation ;

γ_2 : poids volumique du sol latéral à la fondation ;

q : surcharge verticale latérale à la fondation ;

c : cohésion du sol sous la base de la fondation ;

$N_\gamma(\varphi)$, $N_c(\varphi)$ et $N_q(\varphi)$ facteurs de portance, ne dépendant que de l'angle de frottement interne φ du sol sous la base de la fondation.

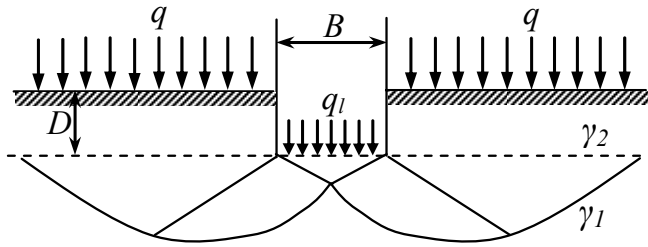


Figure 1 : Schéma de rupture d'une fondation superficielle [8]

La relation (1) est modifiée par l'introduction des coefficients multiplicatifs s_γ , s_c et s_q pour tenir compte de la forme de la fondation [8] :

$$q_t = 1/2s_\gamma\gamma_1BN_\gamma(\varphi) + s_cn_c(\varphi) + s_q(q + \gamma_2D)N_q(\varphi) \quad (2)$$

Dans la littérature, de nombreux résultats ont été publiés par différents auteurs. (Caquot et Kerisel [3]; Brinch Hansen [9]; Meyerhof [12]). Le problème axisymétrique pour une semelle circulaire a été considéré par Berezantzev [1], Shield [16], Cox et al [5] et Martin [11].

L'objet de cet article est l'estimation numérique du facteur de portance N_γ pour des fondations filante et circulaire sous une charge verticale centrée à l'aide du code FLAC^{2D} en différences finies explicites.

2 EVALUATION DE N_γ

Plusieurs procédures théoriques ont été développées pour l'évaluation de la capacité portante, les calculs sont basés généralement sur la méthode d'équilibre limite, la méthode de ligne de glissement et la méthode d'analyse limite. Les valeurs des coefficients de portance données par ces méthodes varient souvent considérablement, le facteur de portance N_γ est celui qui présente la plus grande diversité.

Le tableau 1 présente quelques formules développées pour le calcul de N_γ [13]. La formule donnée par Terzaghi [18] pour le calcul de N_γ fait intervenir le paramètre k_{py} , que l'on trouve dans les tables. Dans les relations proposées par Meyerhof [12], Brinch Hansen [9], Vesič [19] et celle donnée par l'Eurocode 7 [6], le coefficient de portance N_γ est fonction de N_q .

Tableau 1 : Formule de calcul du facteur N_γ [13]

Référence	Terme de surface N_γ
Terzaghi (1943)	$0.5 \tan \varphi \left(\frac{k_{py}}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)$
Meyerhof (1961)	$(N_q - 1) \tan(1.4\varphi)$
Brinch Hansen (1970)	$1.5(N_q - 1) \tan \varphi$
Vesič (1970)	$2(N_q + 1) \tan \varphi$
Eurocode 7 (1996)	$2(N_q - 1) \tan \varphi$

3 APERÇU SUR LES TECHNIQUES DE MODELISATION DES OUVRAGES EN GEOTECHNIQUE

Les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies sont de plus en plus utilisées dans l'analyse de la stabilité de sol. Le premier avantage de ces méthodes par rapport aux méthodes d'équilibre limite est que les hypothèses avancées sur la forme et l'emplacement de la surface de rupture, ainsi que sur les directions et la magnitude des forces ne sont pas nécessaires. Aujourd'hui la majorité des codes numériques, conçu pour faire des analyses bidimensionnelles (déformation plane ou axisymétrie) et tridimensionnelles. Les calculs tridimensionnels sont plus lourds que les calculs bidimensionnels, l'art de l'ingénieur réside essentiellement dans son aptitude à choisir judicieusement des modèles aussi simples que possibles. Le tableau 2 donné par Magnan et al [10] résume d'une manière très générale les problèmes posés par les approches bidimensionnelle et tridimensionnelle.

À côté de ces avantages et de ces inconvénients, il convient de signaler que les calculs bidimensionnels sont généralement du côté de la sécurité en exagérant les déformations et en surestimant les contraintes. L'utilisation de modèles bidimensionnels permet bien sûr de réduire considérablement les temps de calcul, mais rend possible surtout le raffinement géométrique des systèmes étudiés. En effet, pour de nombreux problèmes tridimensionnels, les maillages raffinés sont difficiles, voire impossibles à réaliser, car la taille des systèmes matriciels peut très vite dépasser la capacité des ordinateurs utilisés, notamment pour des calculs non-linéaires complexes.

4 PRESENTATION DU CODE FLAC

FLAC^{2D} [7] est un code en différences finies développé par la société américaine ITASCA Consulting Group. Il simule le comportement des structures en sols, en roches ou autres matériaux qui se plastifient quand leur surface de charge est atteinte. FLAC^{2D} a été conçu pour opérer dans un espace

bidimensionnel. Bien qu'il est possible souvent, de tirer parti des symétries du système étudié, afin de réduire la complexité du modèle, et donc les temps de calcul. Le logiciel FLAC^{2D} intègre de nombreux modèles constitutifs, adaptables à un grand nombre de matériaux, géologiques ou non. Chacun d'entre eux nécessite l'apport de paramètres mécaniques spécifiques, descriptifs de la rhéologie du matériau.

Une des spécificités de FLAC^{2D} (et de tous les logiciels ITASCA) est le macro-langage *FISH*, qui permet à l'utilisateur de définir de nouvelles variables, procédures, sorties graphiques, et même d'écrire sa propre loi de comportement. La formulation de FLAC est parfaitement adaptée à la modélisation des problèmes de géomécanique en plusieurs phases, comme une séquence excavation – construction – chargement.

Tableau 2 : Avantages et inconvénients des modèles d'ouvrage de géotechnique P. Mestat [10]

Type de modèle	Avantage	Inconvénients - Limitations
Modèle axisymétrique	<ul style="list-style-type: none"> • Prise en compte d'une géométrie tridimensionnelle particulière • lois de comportement et état initial quelconques • études paramétriques faciles • approche biphasique possible • éléments de contact • phasage de travaux 	<ul style="list-style-type: none"> • ouvrage à symétrie de révolution • respect des conditions de symétrie de révolution pour les terrains • chargement de révolution ou décomposable en une série de Fourier
Modèle plan (longitudinal ou transversal)	<ul style="list-style-type: none"> • lois de comportement et état initial quelconques • études paramétriques faciles • approche biphasique possible, calcul de surface libre • éléments de contact • phasage de travaux 	<ul style="list-style-type: none"> • hypothèse d'un ouvrage de grande longueur (modèle transversal) et ou d'une largeur suffisante (modèle longitudinal) • chargement par mètre linéaire • simulation approximative des renforcements
Modèle tridimensionnel	<ul style="list-style-type: none"> • géométrie réelle de l'ouvrage et de son environnement • groupe de structures • contraintes initiales quelconques • effet tridimensionnel des renforcements • éléments de contact • phasage de travaux simplifié 	<ul style="list-style-type: none"> • maillages pas assez raffinés • durée des calculs • lois de comportement simples • approche biphasique et évolution dans le temps délicates à mener • complexité des interactions sols-structure (maillage fin requis) • études paramétriques coûteuses

5 PRESENTATION DES CAS ETUDIÉS

5.1 Hypothèses de calcul

Malgré tous les inconvénients d'un modèle en deux dimensions, cela reste encore une modélisation adaptée pour les fondations. Pour cela, on fait souvent l'hypothèse d'un calcul en déformations planes pour une fondation filante ou en axisymétrie lorsque la fondation est circulaire. Les expériences montrent qu'une telle hypothèse donne en général une bonne approximation de la réponse réelle de l'ouvrage. On remarquera également que ceci ne peut être justifié que pour les ouvrages simples, et que la modélisation sophistiquée d'un problème complexe nécessite des hypothèses de calcul supplémentaires et éventuellement des modèles en trois dimensions.

Pour enrichir la discussion sur le problème d'estimation du facteur de capacité portante N_γ , nous avons étudié le cas d'une semelle filante et circulaire. Le modèle est constitué d'une semelle rigide qui repose sur un massif de sol frottant homogène et isotrope limité par une surface libre horizontale.

5.2 Procédure de simulation

Pour exécuter une analyse avec le code FLAC^{2D}, les étapes spécifiques suivantes doivent être considérées dans n'importe quelle modélisation :

- génération de maillage ;
- frontières et conditions initiales ;
- choix du modèle constitutif et propriétés du matériaux ;
- chargement et séquence de modélisation ;
- interprétation des résultats.

Le maillage d'un ouvrage de géotechnique est déterminé par les données géométriques du projet et par les caractéristiques géotechniques du terrain. Les aspects suivants doivent être considérés lors de génération du maillage :

- le nombre et la forme d'éléments qui donnent de bons résultats ;
- les frontières adoptées sont suffisantes pour que le mécanisme de rupture ne les intercepte pas.

Le maillage doit donc satisfaire une description aussi complète que possible de la géométrie, des résultats acceptables et des temps de calcul raisonnables.

La procédure de simulation utilisée dans la présente analyse est basée sur les deux étapes suivantes :

- détermination de l'état des contraintes initiales ;

- calcul mécanique de la portance du sol, dans cette étape la portance du sol est déterminée en appliquant une vitesse de déplacement très faible aux nœuds des éléments qui discrétisent la fondation. Le déplacement progressif de fondation est accompagné par l'augmentation des contraintes dans le sol. Finalement, les contraintes se stabilisent pour une valeur qui indique la capacité portante q_u .

Des analyses en déformation plane ont été exécutées pour le problème d'une fondation filante. Dans tous les cas, du fait de la symétrie du problème, seule la moitié du modèle peut être étudiée (figure.2). Les conditions aux limites sont prises en compte en bloquant les déplacements horizontaux et verticaux pour la limite inférieure, pour les limites latérales le déplacement est bloqué dans la direction x .

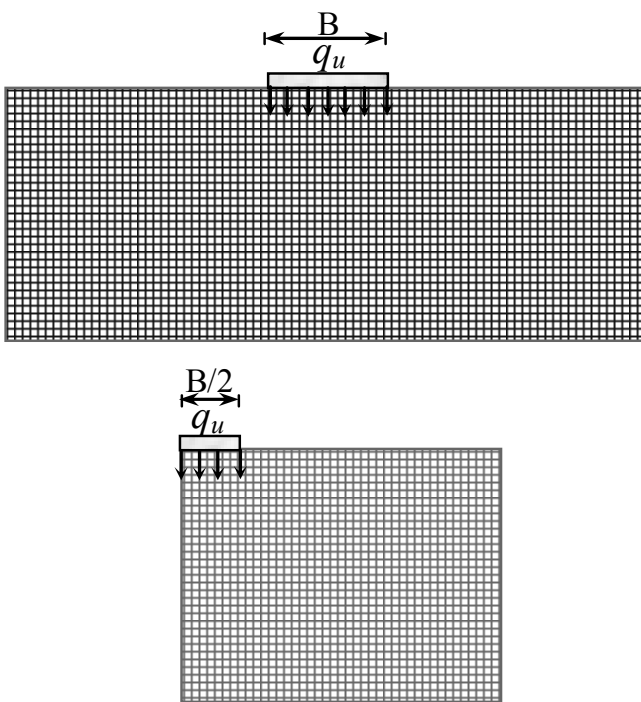


Figure 2 : Présentation du problème

Afin de montrer l'influence de la taille du modèle, le nombre d'éléments et la vitesse de déplacement sur la capacité portante, plusieurs dimensions du maillage ont été considérées avec une demi largeur de fondation supposée constante ($B/2 = 0.5$ m), finalement le maillage adopté pour l'étude d'une fondation filante est montré sur la Figure.3. Ce maillage contient 60 éléments dans la direction x , dont 10 au-dessous de la fondation et 42 éléments dans la direction y .

FLAC^{2D} peut être employé pour faire l'analyse des problèmes axisymétriques (ou corps de révolution). Le maillage axisymétrique est configuré par une commande spécifique. Pour cette configuration, un système de coordonnées cylindrique est appelé : $x = 0$ est l'axe de symétrie, la direction de l'axe x correspondant à la coordonnée radiale, et la direction y à la coordonnée axiale.

En dehors de coordonnée plane (la direction z) est la coordonnée circonférentielle. Seulement l'abscisse positive de l'axe x peut être employée pour créer un maillage axisymétrique. Tout nœud ayant $x = 0$ est automatiquement fixé dans la direction x . et tout déplacement dans le plan x - y provoque automatiquement une contrainte dans la direction circonférentielle. Les quatre composantes de déformation et de contrainte impliquées dans une analyse axisymétrique sont montrées dans la figure 4.

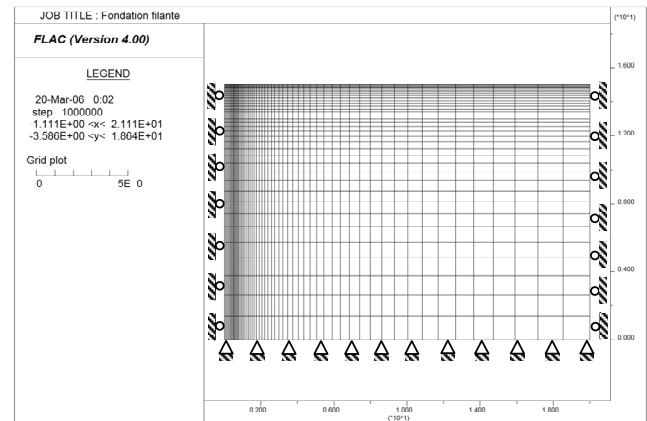


Figure 3 : Maillage et Conditions aux limites pour l'analyse d'une fondation filante

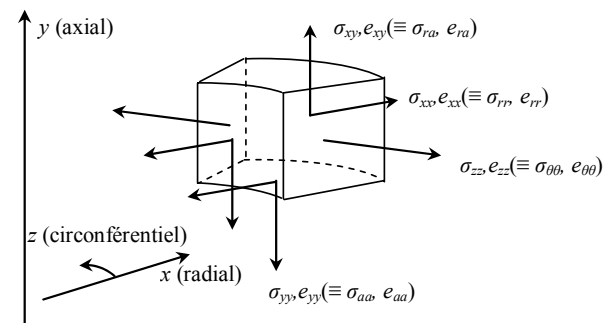


Figure 4 : Déformations et contraintes pour l'analyse axisymétrique Manual FLAC^{2D} [7]

Comme nous l'avons effectué pour les analyses dans le cas de fondation filante, plusieurs tests ont été exécutés pour fixer le modèle et la vitesse appliquée pour l'étude d'une fondation circulaire en axisymétrie. Le maillage adopté contient 60 éléments dans la direction r , dont 10 au-dessous de la fondation et 42 éléments le long de l'axe y .

Le modèle élastique parfaitement plastique de Mohr-Coulomb intégré dans le code FLAC^{2D} est adopté pour l'étude en déformation plane et en axisymétrie. Ce modèle est caractérisé par le poids volumique $\gamma = 20$ kN/m³, un module volumique $K = 10$ MPa, un module de cisaillement $G = 20$ MPa, une cohésion nulle, un angle de frottement $\varphi = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ et un angle de dilatance $\psi = \varphi$. Dans notre étude nous avons adopté une interface sol fondation parfaitement lisse et une autre parfaitement rugueuse.

6 RESULTATS ET DISCUSSIONS

6.1 Cas d'une fondation filante

Ce problème a été étudié précédemment par *Sokolovskii* [17], *Bolton* et *Lau* [2] et *Martin* [11]. Le facteur de capacité portante N_γ dépend de l'angle de frottement du sol et de la rugosité de fondation (il dépend aussi de l'angle de dilataance du sol ψ). Le but de ce travail est limité à la détermination du facteur N_γ pour $\psi = \varphi$. Beaucoup de résultats ont été publiés pour N_γ , la divergence dans les résultats est particulièrement claire pour les grandes valeurs de l'angle de frottement et surtout lorsque la fondation est rugueuse. Dans le but de mettre en évidence la sensibilité du facteur de portance N_γ à l'angle de frottement interne φ et l'angle d'interface sol-écran δ , nous présentons sur le tableau 3 les valeurs de N_γ pour deux cas de l'angle d'interface $\delta/\varphi = 0$ et 1. Le facteur N_γ est donné pour sept valeurs de l'angle de frottement φ . Ce tableau présente aussi une comparaison avec les résultats obtenus par *Martin* [11], *Sokolovskii* [17] et *Bolton* et *lau* [2].

Tableau 3 : Valeurs du facteur N_γ pour une semelle filante

φ	δ/φ	FLAC ^{2D}	ABC Martin [11]	Sok [17]	B.L [2]
05	0	0.0587	0.08446	0.085	0.09
	1	0.0891	0.1134	-	0.62
10	0	0.2879	0.2809	0.28	0.29
	1	0.452	0.4332	-	1.71
15	0	0.755	0.6999	0.70	0.71
	1	1.281	1.181	-	3.17
20	0	1.722	1.579	1.58	1.60
	1	3.099	2.839	-	5.97
25	0	3.776	3.461	3.46	3.51
	1	7.151	6.491	-	11.6
30	0	8.32	7.653	7.65	7.74
	1	16.34	14.75	-	23.6
35	0	18.85	17.58	17.6	17.8
	1	38.83	34.48	-	51.0

Pour analyser les résultats présentés dans le tableau 3, nous présentons dans la figure 5, l'évolution de N_γ en fonction de φ dans le cas d'une semelle parfaitement lisse et rugueuse.

Cette comparaison montre que les valeurs obtenues par FLAC^{2D} sont en bonne concordance avec celles obtenus par *Martin* [11]. Pour un sol ayant un angle de frottement $\varphi=5^\circ$, les valeurs de N_γ calculées par FLAC^{2D} sont légèrement

inférieures à celles obtenues par *Martin* [11], au delà de $\varphi=10^\circ$ elles deviennent légèrement supérieures. Pour une semelle rugueuse on remarque que les résultats de *Bolton* et *Lau* [2] surestiment le facteur N_γ . Afin de visualiser la zone mobilisée, nous présentons dans la figure 6, le champ de déplacement pour $\varphi=25^\circ$ dans le cas d'une semelle parfaitement rugueuse.

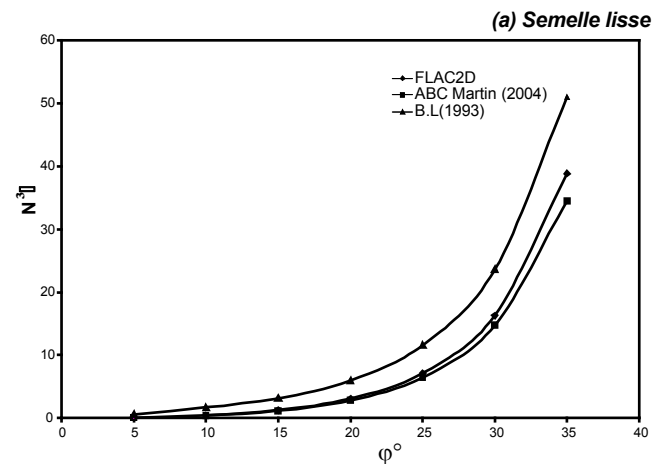
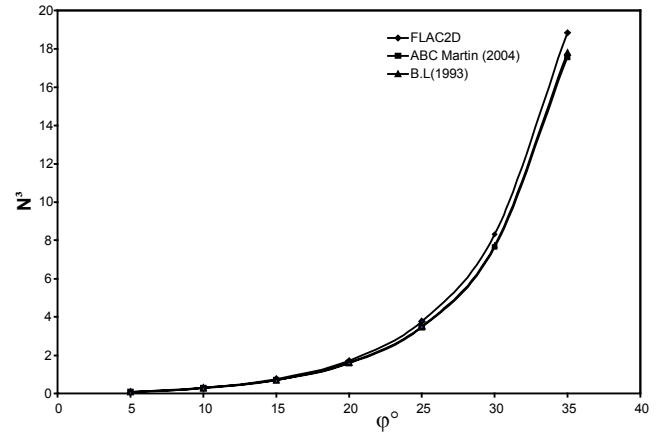


Figure 5 : Variation de N_γ en fonction de l'angle de frottement φ

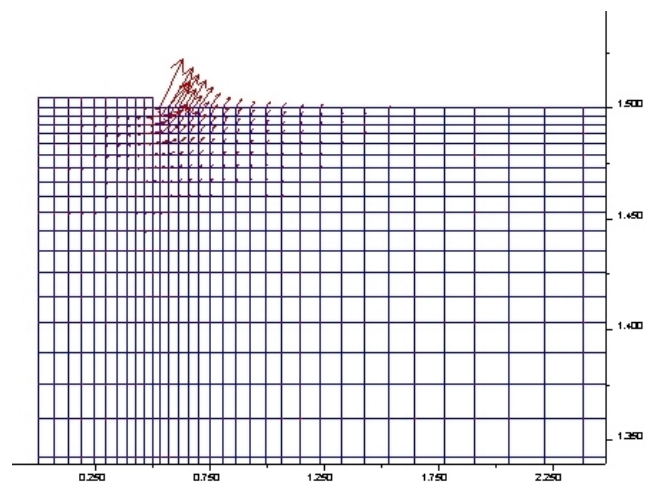


Figure 6 : Champ de déplacement pour $\varphi=25^\circ$ cas d'une semelle parfaitement rugueuse

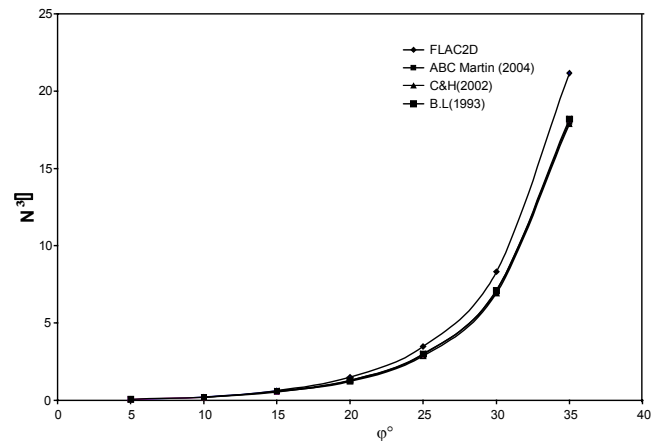
6.2 Cas d'une fondation circulaire

Si le problème de fondation filante a fait l'objet de très nombreuses études tant expérimentales que théoriques, il n'est pas de même pour une fondation circulaire. Ce problème a été étudié précédemment par Bolton et Lau [2], Cassidy et Houlby [4] et Martin [11]. Le tableau 4 présente une comparaison des résultats obtenus par FLAC^{2D}, Martin [11], Cassidy et Houlby [4] et Bolton & Lau [2]. Pour comparer les résultats présentés dans le tableau 4, nous présentons dans la figure 7, l'évolution de N_γ en fonction de φ dans le cas d'une semelle parfaitement lisse et parfaitement rugueuse.

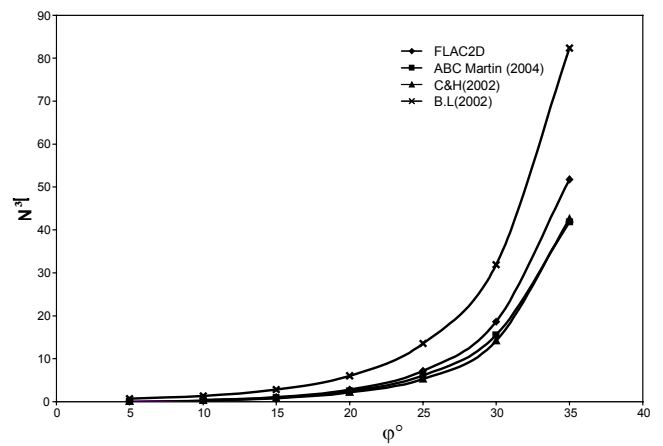
Tableau 4 : Valeurs du facteur N_γ pour une semelle circulaire

φ	δ/φ	FLAC ^{2D}	ABC Martin [11]	C & H [4]	B.L [2]
05	0	0.0388	0.05975	0.062	0.06
	1	0.0617	0.08063	0.067	0.68
10	0	0.2229	0.2059	0.200	0.21
	1	0.3518	0.3224	0.266	1.37
15	0	0.6252	0.5346	0.553	0.60
	1	1.076	0.9323	0.796	2.83
20	0	1.504	1.271	1.219	1.30
	1	2.81	2.416	2.160	6.04
25	0	3.49	2.971	2.865	3.00
	1	7.14	6.073	5.270	13.5
30	0	8.31	7.111	6.935	7.10
	1	18.64	15.52	14.13	31.9
35	0	21.17	18.03	17.88	18.2
	1	51.78	41.88	42.56	82.4

L'analyse des résultats du tableau 4 et les courbes qui représentent la variation du facteur N_γ en fonction de l'angle de frottement φ permettent de remarquer que dans le cas d'une semelle lisse les résultats obtenus par FLAC^{2D} sont en bon accord avec ceux obtenus par d'autres auteurs, par ailleurs on constate que les résultats de Bolton et Lau [2] surestiment le facteur N_γ . Dans le cas d'une semelle lisse, le rapport des facteurs de portance d'une semelle circulaire à ceux d'une semelle filante varie de 0.66 pour $\varphi = 5^\circ$ à 1.12 pour $\varphi = 35^\circ$. Par contre pour une semelle parfaitement rugueuse, ce rapport varie de 0.69 pour $\varphi = 5^\circ$ à 1.33 pour $\varphi = 35^\circ$.



(a) Semelle lisse



(b) Semelle rugueuse

Figure 7 : Variation de N_γ en fonction de l'angle de frottement φ

7 CONCLUSIONS

Dans cette étude, nous avons déterminé les facteurs de portance N_γ pour les fondations filantes et circulaires par le code FLAC^{2D}, dans le but de les comparer avec ceux présentés par des publications récentes. Les expérimentations numériques ont permis de tirer les conclusions suivantes :

- Le choix de la vitesse de déplacement a une grande influence sur les valeurs de N_γ , les valeurs faibles de N_γ peuvent être obtenues pour une vitesse très faible. On constate aussi l'effet du nombre des éléments et leurs formes sous la fondation sur les résultats, le raffinement du maillage avec une forme carrée donne des bons résultats.
- La nature de l'interface entre le sol et la fondation influe considérablement sur le calcul du facteur N_γ , le rapport entre les valeurs calculées pour une fondation lisse et une fondation rugueuse atteint le double pour des angles de frottement élevés.

- Les résultats obtenus pour une semelle filante et circulaire ont été confrontés avec ceux obtenus par Martin [11] et d'autres chercheurs, la fiabilité du code FLAC2D est largement prouvée surtout pour les angles de frottement inférieur à 35°.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] Berezhantsev, V. G. (1948). Limit equilibrium of a medium with internal friction and cohesion in axisymmetric stress state. *Prikl. Mat. Mekh.*, 12, 95–100 (in Russian).
- [2] Bolton M.D., Lau C.K. (1993). Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil. *can. geotech.j.*, Vol. 30, pp 1024-1033.
- [3] Caquot A., Kerisel J. (1953). Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent. *Proc. 3rd int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng.*, zurich, Vol. 1, pp336-337.
- [4] Cassidy, M.J. & Houlsby, G.T. (2002). Vertical bearing capacity factors for conical footings on sand. *Géotechnique*, Vol. 52, No. 9, pp 687-692.
- [5] Cox A.D., Eason G., & Hopkins H.G. (1961). Axially symmetric plastic deformation in soils. *Proc. R. Soc. London (Ser. A)*, Vol. 254, pp1-45.
- [6] Eurocode 7 (1996). Norme XP 1997-1: Calcul géotechnique. Déc. 1996, AFNOR.
- [7] FLAC-Fast Lagrangian Analysis of Continua, version 4.0. (2000). ITASCA Consulting Group, Inc., Minneapolis.
- [8] Frank R. (1999). Calcul des fondations superficielles et profondes. *Techniques de l'Ingénieur et Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées*, Paris, 139 p.
- [9] Brinch Hansen J. (1970). A revised and extended formula for bearing capacity. *Danish Geotechnical Institute Bulletin*, n° 28, pages 5-11.
- [10] Magnan J-P. & Guiloux A. Mestat P., «La pratique des calculs tridimensionnels en géotechnique», Journées d'étude-paris, 24 et 25 novembre 1998, Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées.
- [11] Martin C.M. (2004). User Guide for ABC – analysis of bearing capacity, version 1.0.
- [12] Meyerhof, G. G. (1963). "Some recent research on the bearing capacity of foundations." *Can. Geotech. J.*, 1, 16–26.
- [13] Nicolai D., «Développement et applications géotechniques du calcul à la rupture par la méthode des éléments finis», Thèse de Doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées, 2001.
- [14] Prandtl, L. (1920). Über die Häete plastischer Körper. *Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 74–85.
- [15] Reissner, H. (1924). Zum Erddruckproblem. *Proc.*, 1st Int. Congr. Appl. Mech., C. B. Biezeno and J. M. Burgers, eds., Delft, 295–311.
- [16] Shield, R. T. (1955). On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 233, 267–287.
- [17] Sokolovskii, V.V. (1965). *Statics of granular media*. Pergamon, Oxford (UK).
- [18] Terzaghi, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*, Wiley, New York.
- [19] Vesič, A.S (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, 1973, ASCE, vol. 99, no. SM1, pages 113-125.