

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université de Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

Filière : Génie Mécanique

Option: Conception Mécanique et Productique

Réf:.....

**Mémoire de Fin d'Etudes**

**En vue de l'obtention du diplôme de:**

**MASTER**

***Thème***

**Étude de la Robotique pour le calcul  
de la position d'un bras manipulateur**

Présenté par :

Bedjaoui Imad Eddine

Proposé et dirigé par :

Dr. Nine Brahim

Promotion : Juin 2014

# *Remerciements*

*Je remercie le DIEU tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer mon travail.*

*Je remercie mon encadreur Monsieur le D<sup>r</sup> : Nine Brahim pour avoir accepté de diriger et d'être très patient durant la période de la recherche et la préparation de la thèse.*

*Je tiens à remercier le chef de département ainsi que le personnel du département pour leur gentillesse.*

*Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de juger mon travail.*

*Je tiens à remercier toute personne qui à participé de loin ou de près pour la réalisation de ce travail.*

# **DEDICACE**

*Je dédie ce travail*

*A ma mère pour toute sa patience et sa persévérance durant cette période difficile.*

*A mon père pour son soutien moral et financier.*

*A ma sœur adorable Chahrazed*

*A mon cher frère Hichem pour son soutien permanent et grâce à lui j'arrive à terminer ce travail.*

*A toute la famille.*

*A mes collègues de l'université.*

*A mes enseignants.*

*A tous mes amis.*

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Généralités sur la robotique</b> .....	<b>4</b>
<b>I.1. Introduction</b> .....	5
<b>I.2. Le nom Robot dans la littérature</b> .....	5
I.2.1. Définition .....	5
I.2.1.1. Définition d'un robot industriel par la JIRA .....	5
I.2.1.2. Définition d'un robot industriel par la RIA .....	5
I.2.1.3. Définition de l'ISO .....	5
I.2.1.4. Définition de l'AFRI (France) .....	5
<b>I.3. Brève histoire de la robotique</b> .....	6
<b>I.4. Domaine d'application de la robotique</b> .....	8
I.4.1. Fonctions historiques des robots .....	8
I.4.2. Champs d'application originale des robots .....	8
I.4.3. De nos jours .....	8
I.4.4. Domaine de la production et de la robotique industrielle .....	8
I.4.5. Exploration .....	8
I.4.6. Robots de service .....	8
<b>I.5. Robots industriels</b> .....	9
I.5.1. Robots Industriels de Soudage .....	9
I.5.2. Robots Industriels d'Assemblage .....	10



I.5.3. Robots Industriels d’Emballage / Palettisation .....	10
I.5.4. Robots Industriels dans l’Industrie Agro-alimentaire .....	10
I.5.5. Robots dans les Biotechnologies .....	11
<b>I.6. Robots d’exploitation .....</b>	<b>12</b>
<b>I.7. Robots de service .....</b>	<b>13</b>
I.7.1. Robots de Service aux Humains .....	14
I.7.2. Robots de Service aux Equipements .....	15
I.7.3. Robots rendant autre Services .....	16
<b>I.8. Rôle Mécanique du Robot manipulateur .....</b>	<b>17</b>
<b>I.9. Classification des Robots .....</b>	<b>17</b>
I.9.1. Classification AFRI .....	17
I.9.2. Classification de la JIRA .....	18
<b>I.10. Structure générale d’un Robot .....</b>	<b>20</b>
I.10.1. Manipulateur .....	20
I.10.2. Description du robot manipulateur .....	21
I.10.3. Fonction de l’unité de contrôle .....	22
<b>I.11. Robots industriels aujourd’hui .....</b>	<b>22</b>
<b>I.12. Aspects Mécaniques des robots .....</b>	<b>23</b>
<b>I.13. Conclusion .....</b>	<b>23</b>
<b>Chapitre II : Différentes méthodes de calcul de la portée .....</b>	<b>24</b>
<b>II.1. Introduction .....</b>	<b>25</b>
<b>II.2. La position d’un corps rigide .....</b>	<b>25</b>
<b>II.3. La matrice de rotation .....</b>	<b>26</b>

II.3.1. Rotation élémentaires .....	27
II.3.2. Représentation d'un vecteur .....	29
<b>II.4. Composition des matrices de rotation .....</b>	<b>31</b>
<b>II.5. Angles d'Euler .....</b>	<b>35</b>
<b>II.6. Changement de coordonnées .....</b>	<b>37</b>
<b>II.7. Transformation homogène .....</b>	<b>38</b>
<b>II.8. Opérateurs de translation et de rotation .....</b>	<b>40</b>
<b>II.9. Paramètres de Denavit et Hartenberg .....</b>	<b>42</b>
<b>II .10. Conclusion .....</b>	<b>45</b>
<b>Chapitre III : Application numérique de la méthode de Denavit-Hartenberg ...</b>	<b>46</b>
<b>III.1. introduction .....</b>	<b>47</b>
<b>III.2. Trigonométrie et calcul vectoriel dans le plan .....</b>	<b>47</b>
<b>III.3. Matrice de rotation et transformations de coordonnées .....</b>	<b>50</b>
<b>III.4. Modèle géométrique directe .....</b>	<b>53</b>
III.4.1. Exemple d'un robot sériel à cinq articulations pivots .....	53
<b>III.5. Application de la méthode Dénavit-Hartenberg .....</b>	<b>56</b>
III.5.1. Premier mouvement .....	56
III.5.2. Deuxième mouvement .....	57
<b>III.6. Modèle géométrique inverse .....</b>	<b>57</b>
III.6.1. Premier mouvement .....	62
III.6.2. Deuxième mouvement .....	63
<b>III.7. conclusion .....</b>	<b>65</b>

<b>Chapitre IV : Conception et Simulation avec Solidworks</b>	<b>66</b>
IV.1. Introduction	67
IV.2. Conception des composants du bras manipulateur	67
IV.2.1. Le bâti	67
IV.2.2. Le rotoïde	68
IV.2.3. Le premier bras	68
IV.2.4. Le deuxième bras	69
IV.2.5. L'effecteur	69
IV.3. Assemblage des composants	70
IV.4. Simulation avec Solidworks	72
IV.5. Conception d'une cellule robotisée	76
IV.6. Conclusion	78
<b>Conclusion générale</b>	<b>79</b>
<b>Annexe</b>	<b>81</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>84</b>



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

# Introduction générale

Depuis la révolution industrielle, une discipline à marqué l'évolution du monde technologique : la Robotique. L'avènement des robots dans l'industrie à permis de soulager l'homme des travaux répétitifs et difficiles tels que : le déplacement d'objets lourds, les taches d'assemblages, les microsoudures... etc. Ceci avec plus d'efficacité et de précision.

La compétition incessante dans l'industrie conduit à une nécessaire augmentation de la productivité en préservant la qualité et en diminuant le coût de revient des produits. Cependant, les robots manipulateurs existants souffrent encore de faiblesses qui les empêchent de mener à bien certaines tâches et limitent leurs champs d'action.

Ces robots sont en effet rigides, lourds et encombrants ce qui se traduit par une grande énergie consommé et une vitesse d'exécution lente. La consommation peut constituer un point crucial quand l'énergie est limitée, comme c'est le cas dans les applications spatiales.

A cet effet, des recherches universitaires et laboratoires de recherche tentent de développer de nouvelles méthodes et algorithmes de manière à libérer les résultats pour des usages industriels après validation. Les recherches sont appliqués à différents domaines tels que la planification de mouvement, la manipulation, et le contrôle de la position, etc. mais, les robots réels sont inaccessible à cause des prix élevés, donc des modèles simulés sont largement demandés par les laboratoires de recherche.

Les simulations et les modélisations sont plus faciles à installer, moins cher, plus rapide et plus pratique à utiliser. La construction de nouveaux modèles de robots et la mise en place d'expériences ne prend que quelques heures. Une simulation de configuration robotique est moins chère que de vrais robots (configurations du monde réel), permettant ainsi une meilleure exploration de la conception.

La possibilité d'effectuer des simulations en temps réel devient particulièrement importante dans les derniers stades de la conception processus. La conception finale peut être vérifiée avant que l'on se lance dans le processus coûteux de la construction d'un prototype.

La modélisation et la simulation des systèmes robotiques à l'aide de divers logiciels de programmation facilite le processus de conception, de construction et inspectant les robots dans le monde réel. Une simulation est importante pour les programmeurs de robot dans leur permettant d'évaluer et de prédire le comportement d'un robot, et en outre de vérifier et d'optimiser la planification de trajectoire de leur processus. En outre, cela permettra d'économiser le temps et l'argent, et jouer un rôle important dans l'évaluation de la fabrication d'automatisation. Être capable de simuler ouvre une large gamme d'options, en aidant à résoudre de nombreux problèmes créative. On peut étudier, concevoir, visualiser et tester un objet avant de faire une réalité.



# Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LA ROBOTIQUE

## **I.1. Introduction**

Le terme *robot* a été introduit pour la première fois par l'auteur Tchèque Capek dans sa pièce de théâtre R.U.R. (Rossum's Universal Robot) et il est dérivé du mot *robota* qui signifie travailleur (de force).

Dans cette œuvre les robots sont des machines qui ressemblent aux humains, mais qui peuvent travailler sans relâche et sans fatigue.

Initialement les robots ont été fabriqués pour le profit en remplaçant les travailleurs humains, mais à la fin de la pièce, les robots se retournent contre leurs créateurs et annihilent la race humaine toute entière

## **I.2. Le nom Robot dans la littérature [1]**

### **I.2.1. Définition**

#### **I.2.1.1. Définition d'un robot industriel par la JIRA**

Un système capable d'accomplir des tâches, en tout ou en partie, habituellement dévouées aux humains.

#### **I.2.1.2. Définition d'un robot industriel par la RIA**

Un manipulateur reprogrammable multifonctionnel conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou tout autre dispositif spécialisé au moyen d'une série de mouvements programmés et d'accomplir une variété d'autres tâches.

#### **I.2.1.3. Définition de l'ISO**

Une machine formée par un mécanisme incluant plusieurs degrés de libertés, ayant souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet capable de tenir des outils, des pièces ou un dispositif d'inspection.

#### **I.2.1.4. Définition de l'AFRI (France)**

Machine formée de divers mécanismes comportant divers degrés de libertés ayant souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet capable de maintenir un outil, une pièce ou un instrument de contrôle.

Son unité de contrôle doit contenir une unité de mémorisation, et il peut parfois utiliser des accessoires sensitifs et adaptables qui tiennent compte de l'environnement et des circonstances.

Ces machines, ayant un rôle pluridisciplinaire, sont généralement conçues pour effectuer des fonctions répétitives, mais qui sont adaptables à d'autres fonctions.



## I.3. Brève histoire de la robotique [1]

Depuis le XXI siècle le domaine de la robotique ne cesse de progresser surtout durant les dernières années qui a vue une révolution dans tous les secteurs.

- Seconde Guerre Mondiale: développement des servomécanismes.
- Années 1950 : Développement de manipulateurs « maître-esclave » contrôlés à distance pour manipuler des substances radioactives.

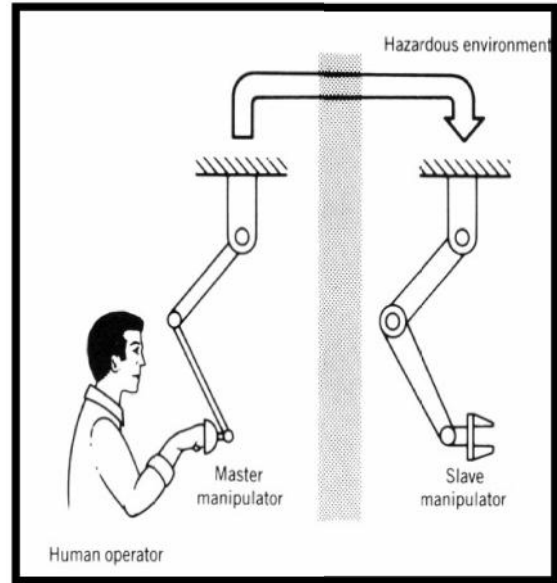
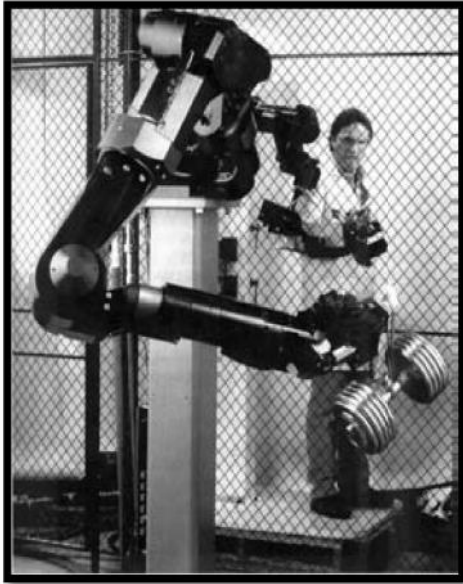


FIG I.1 Manipulateur maître esclave [1]. FIG I.2 schéma d'un manipulateur maître-esclave [1].

- 1956: C. Devol introduit un brevet délivré en 1961 intitulé "Programmed articulated transfer device"
- 1961: Les travaux de Devol et d'Engelberger conduisent au premier robot industriel construit par la société Unimation Inc. Le point clé du système est d'utiliser un ordinateur en conjonction avec un manipulateur. Unimate number 001 est entrée en service dans une usine pour 100.000 heures...
- Unimation Inc. délivre 66 machines entre 1966 et 1971

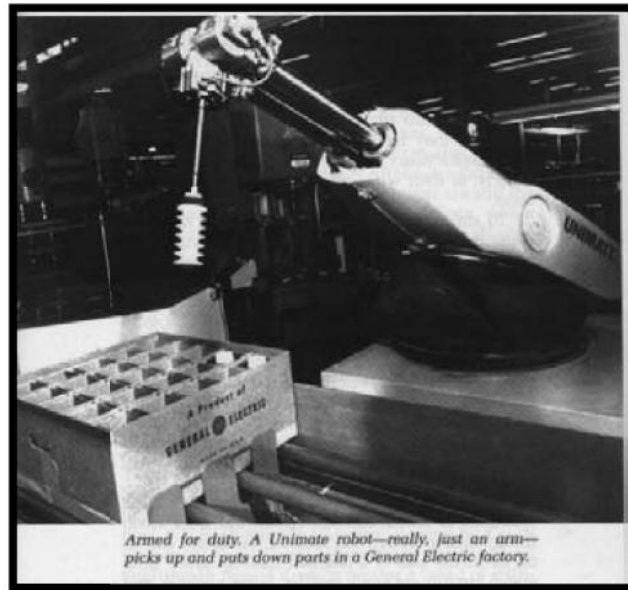


FIG I.3 : Unimate 001[1].

- **1968-1969:** Début de recherches intensives sur les robots contrôlés par ordinateur, par exemple au MIT (Boston arm) et à San Francisco (Stanford arm)
- **1974:** La firme Cincinnati Milacron introduit le robot industriel contrôlé par ordinateur dénommé « The Tomorrow Tool » ou T<sup>3</sup>

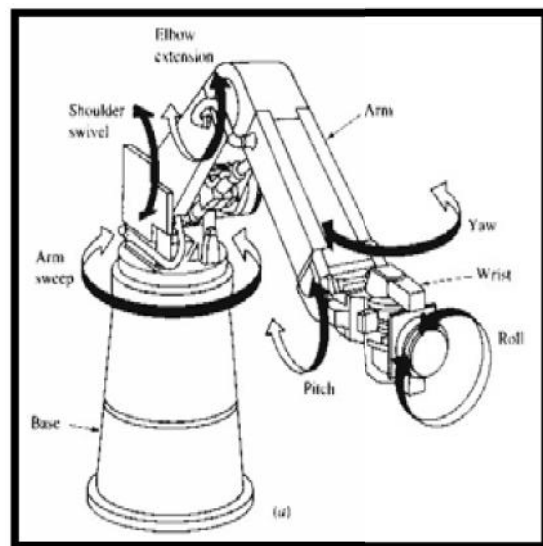
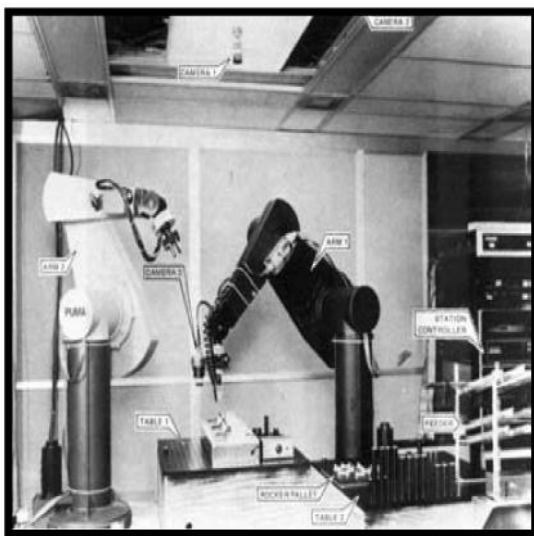


FIG I.4 : Cincinnati T<sup>3</sup>[1].

- **1971:** Création de la JIRA au Japon
- **1975:** Création de la RIA aux USA
- **1974:** Joe Engelberger prévoit un chiffre d'affaires de 3 milliards de \$ en robotique
- **1990:** Prévisions réalisées, mais ... 70% du marché est contrôlé par le Japon

- **1998:**

- La robotique industrielle représente un chiffre d'affaire de 4.2 milliards de \$
- Il y a 700.000 robots industriels dans le monde

## **I.4. Domaines d'application de la robotique [1]**

### **I.4.1. Fonctions historiques des robots**

Lors de l'introduction des robots dans le début des années 60, les robots étaient utilisés pour les opérations hasardeuses.

- Manutention de matériaux toxiques et radioactifs
- Chargement et déchargement des pièces chaudes des fours et leur manutention dans les fonderies.

### **I.4.2. Champs d'application originale des robots**

- Les 3 D's (Dull, Dirty, and Dangerous)
- Les 3 H's (Hot, Heavy and Hazardous)

### **I.4.3. De nos jours**

- Composants importants des processus de fabrication et de contrôle
- Amélioration de la productivité, accroissement de la qualité des produits fabriqués, réduction du coût du travail.

### **I.4.4. Domaine de la production et de la robotique industrielle**

- Automatisation de la fabrication et de la production
- Tâches répétitives
- Qualité constante (Répétitivité de la qualité)
- Production de lots de dimension moyenne (30-200)
- Adaptation au volume de la production
- Meilleure utilisation des capacités de production (pas de pauses)
- Travail pénible et dangereux

### **I.4.5. Exploration**

- Places difficiles d'accès (milieu sous-marin, espace...)
- Environnements hostiles (radioactivité, etc.)

### **I.4.6. Robots de service**

- Service aux humains
- Équipements de service

## I.5. Robots industriels [1]

### •Définition :

Un robot qui opère de manière automatique ou semi automatique pour accomplir des opérations de fabrication.

### •Classification :

- Soudage
- Peinture
- Assemblage
- Emballage et palettisation
- Industrie alimentaire
- Industrie biologique

### I.5.1. Robots Industriels de Soudage

• Une des applications les plus courantes de la robotique industrielle est **le soudage**. Le soudage robotisé des châssis de voiture améliore la sécurité car un robot ne manque jamais son point de soudure et les réalise toujours de la même manière tout au long de la journée.

A peu près 25 % des robots industriels sont impliqués dans différentes opérations de soudure.

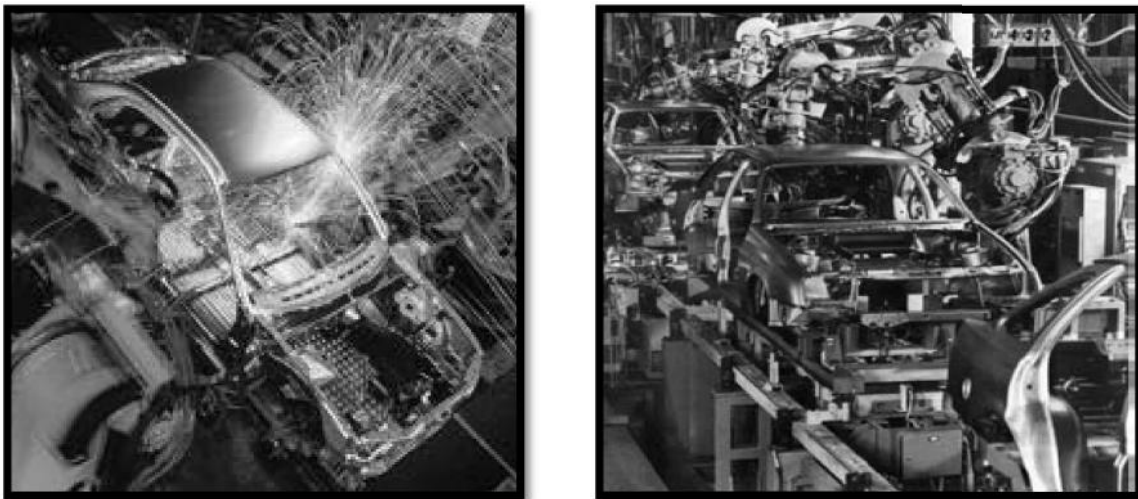


FIG I.5 : Robots Industriels de Soudage [1].

## I.5.2. Robots Industriels d'Assemblage

- L'assemblage occupe environ

33% des applications du parc des robots industriels (1997). Beaucoup de ces robots peuvent être trouvés dans l'industrie automobile et l'industrie électronique.

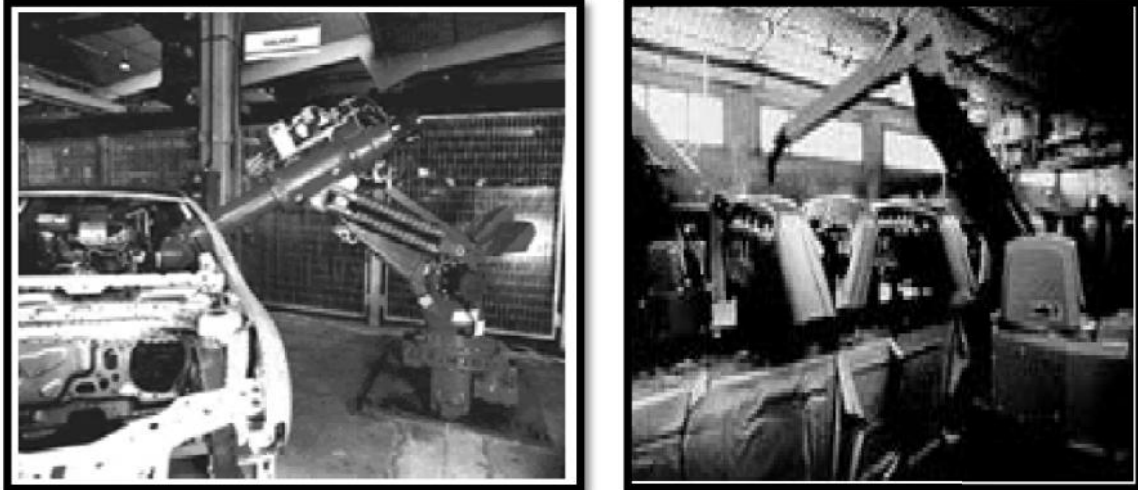


FIG I.6 : Robots Industriels d'Assemblage [1].

## I.5.3. Robots Industriels d'Emballage / Palettisation

L'emballage et la palettisation sont toujours des applications mineures des robots industriels, comptant seulement pour 2,8% du parc en 1997. Les prévisions pour ce type d'applications sont en croissance significative étant donné que les robots deviennent de plus en plus faciles à manipuler.

## I.5.4. Robots Industriels dans l'Industrie Agro-alimentaire

- L'industrie agro-alimentaire est un champ d'applications voué à jouer un rôle majeur dans le futur.

Comme montré sur la figure, les constructeurs développent une gamme spécifique de produits pour ce domaine.

- Ex: FANUC Washdown Type (A- 520i) ou ABB IRB340

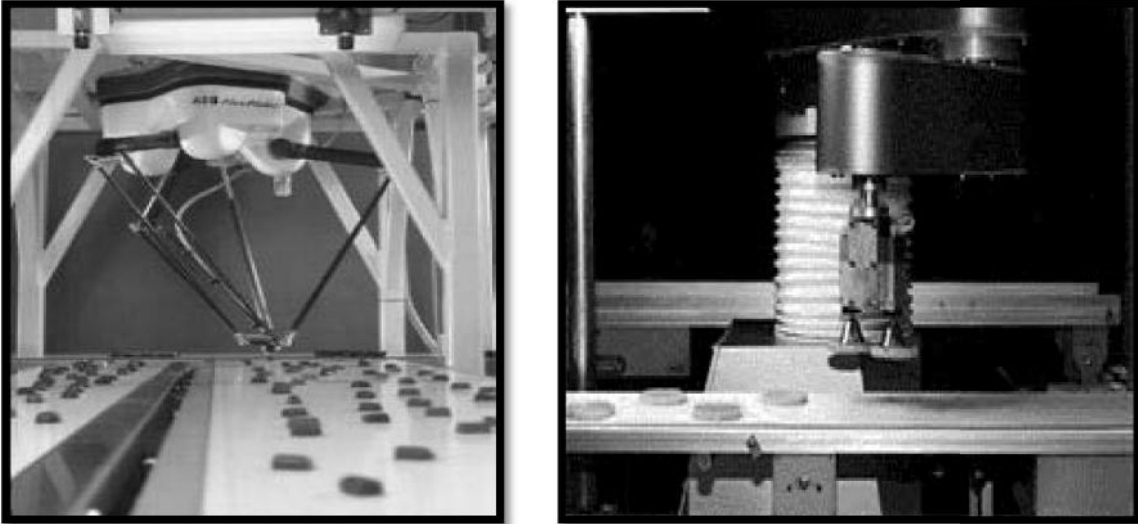


FIG I.7: Robots Industriels dans l'Industrie Agro-alimentaire [1].

### I.5.5. Robots dans les Biotechnologies

- Les applications dans l'industrie pharmaceutique et dans les biotechnologies constituent également un marché d'avenir encore presque vierge.
- Ex: le système robotisé de For BioRobotics (Australie) pour la micro-propagation des plantes. Le processus réalise une culture de plants, en coupant la tige de chaque plant en segments et en les replantant pour faire venir de nouveaux plants

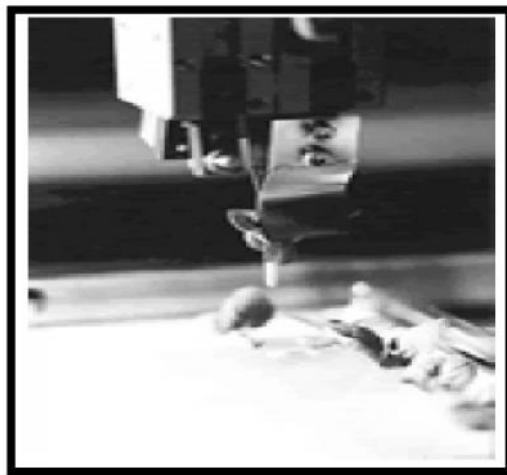


FIG I.8 : Robots dans les Biotechnologies [1].



## I.6. Robots d'exploration [1]

### • Définition :

Un robot qui opère de manière automatique ou semi-automatique pour remplir des missions d'exploration dans des endroits inaccessibles ou dangereux pour l'être humain

### • Classification:

- Exploration spatiale
- Exploration des mers et des océans

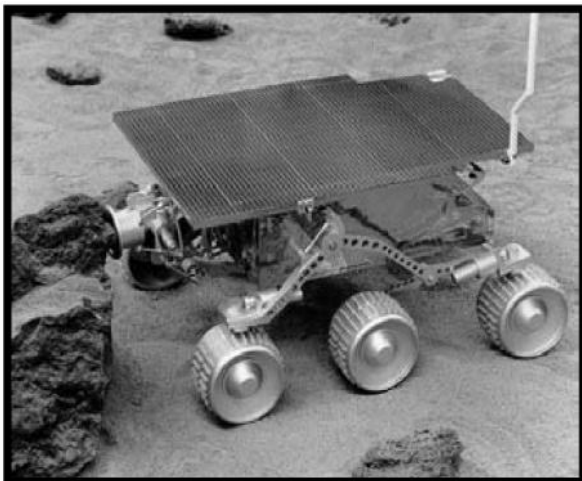


FIG I.9 : Le Remote Manipulator du Space Shuttle [1].

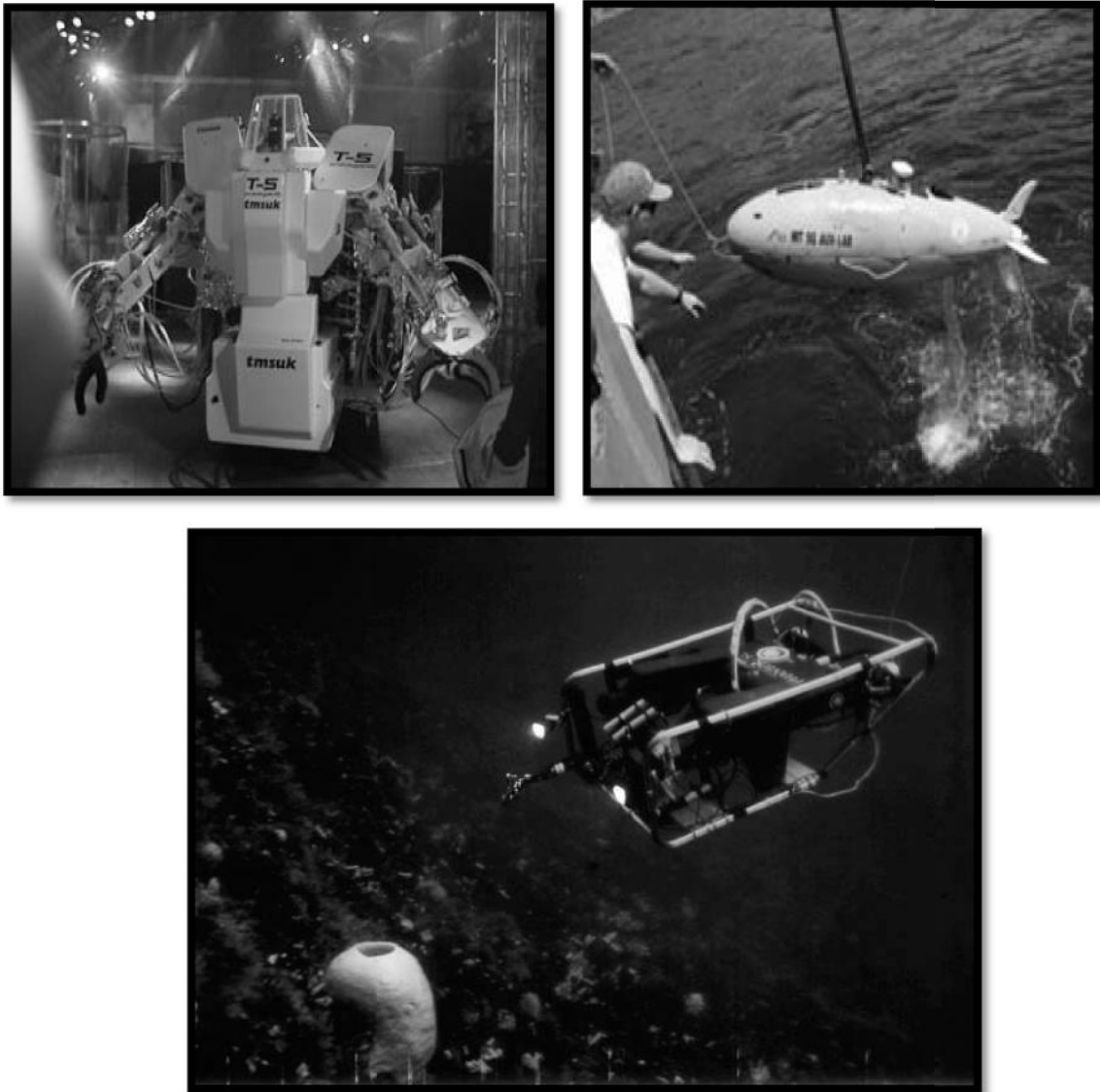


FIG I.10 : 3 vue des Robots d'exploration des mers et océans [1].

## I.7. Robots de service [1]

### • Définition :

Un robot qui opère de manière automatique ou semi-automatique pour remplir des missions de service aux êtres humains, aux équipements, en excluant les opérations de fabrication.

### • Classification :

- Services aux humains (sauvegarde des personnes, médecine, amusements, etc.)
- Services aux équipements (maintenance, réparation, nettoyage, etc.)
- Autres prestations de fonctionnement automatique (surveillance, transport, acquisition de données, etc.) et / ou robots de service n'ayant pu être classés dans les 2 autres groupes.



### I.7.1. Robots de Service aux Humains

- "Care-O-Bot" (Fraunhofer IPA, Germany) aide à procurer une autonomie plus grande aux personnes handicapées ou à mobilité réduite sans recourir à une aide extérieure. Il contribue de cette manière à les maintenir plus longtemps à la maison.

"Care-O-Bot" offre des communications multimédia, la gestion de l'électronique domestique, un guidage actif et un support aux personnes en allant chercher ou en transportant des objets usuels comme des repas, des livres.



FIG I.11: Care-O-Bot [1].

- **Le bras MANUS de la société Exact**

Dynamics (Pays Bas) est une chaise roulante montée avec un bras manipulateur léger à 6 ddl pour les personnes avec des invalidités graves.

La combinaison du manipulateur et de la chaise roulante les aide en exécutant des tâches simples comme ouvrir des portes, préparer le café, etc. Lorsqu'il n'est pas en activité, le bras retombe discrètement. L'interface homme-machine pour la commande des mouvements peut être ajustée individuellement. Elle peut être réglée sur un sifflet, la voix, un joystick...



FIG I.12 : Le bras MANUS de la société Exact [1]

### I.7.2. Robots de Service aux Equipements

- "Skywash" (Putzmeister Werke, Germany) peut diminuer par un facteur le temps de lavage d'un avion.

Skywash intègre toutes les composantes d'un système robotique avancé : pré-programmation des mouvements à partir d'un modèle CAO de l'avion, localisation automatique des objets par des capteurs 3-D, un asservissement du mouvement par des capteurs tactiles, une architecture fortement redondante (11 ddl) installée sur une base mobile et une sécurité de fonctionnement maximale.

Le manipulateur agit sous la supervision d'un être humain.



FIG I.13 : Skywash [1].

- "Mighty Hand" (Kajima, Japan) est destiné à porter des éléments lourds dans les travaux de construction : murs en béton, etc.

Le robot opère sous la supervision d'un homme.



FIG I.14: Mighty Hand (Kajima, Japan) [1].

### I.7.3. Robots rendant autre Services [1]

- The HelpMate of HelpMate Robotics, USA, est un robot mobile pour les hôpitaux. Il transporte les repas, les médicaments, les dossiers dans le corridor. Des interfaces utilisateurs simples et claires, un système de navigation efficace et sa capacité à ouvrir les portes ou à utiliser les ascenseurs en font un pionnier en termes de technologie et d'avantages apportés à l'utilisateur.



FIG I.15: The HelpMate of HelpMate Robotics [1].

## I.8. Rôle mécanique du robot manipulateur [1]

### • But de la structure mécanique du robot manipulateur

Assurer la localisation dans l'espace d'un outil appelé *effecteur*.

### • Localisation géométrie de l'effecteur

- localisation = position + orientation.
- assez arbitraire dans l'*espace de travail*.
- variable au cours du temps: notion de *trajectoire*.

### • Planification de trajectoire

Tenant compte des contraintes environnementales.

### • Description de la position et de l'orientation de l'effecteur

Nécessité de différents systèmes de coordonnées (repères)

Transformations de coordonnées

## I.9. Classification des robots [1]

### I.9.1. Classification AFRI

#### • Classe A télémanipulateurs :

- Manipulateurs maître-esclave.

#### • Classe B manipulateurs automatiques :

- Manipulateurs automatiques avec séquences fixes.
- Manipulateurs automatiques avec séquences variables exemple : machines à commandes numériques.

- **Classe C robots programmables :**

- 1ère génération de robots.

- **Classe D robots intelligents :**

- 2ème génération exemple : robots munis de systèmes de vision.

- 3ème génération exemple: robots avec Intelligence Artificielle (A.I.).

## **I.9.2. Classification de la JIRA**

- **Classe 1 télémanipulateurs :**

- Bras commandé directement par un opérateur humain.

- **Classe 2 manipulateurs avec séquence fixe :**

- Contrôle automatique, mais difficile à reprogrammer.

- **Classe 3 manipulateurs avec séquence variable :**

- Contrôle automatique, reprogrammé mécaniquement.

- Ex: « pick and place manipulators » robot « tout ou rien ».

- **Classe 4 robots Play back :**

- Séquences qui sont exécutées à l'origine sous la supervision d'êtres humains, mémorisées puis rappelées pour être rejouées (playback).

- **Classe 5 robots avec un contrôleur numérique :**

- Les positions des séquences sont contrôlées par des données numériques.

- **Classe 6 les robots intelligents :**

- Le robot peut réagir à son environnement et à des modifications arrivant durant l'exécution.

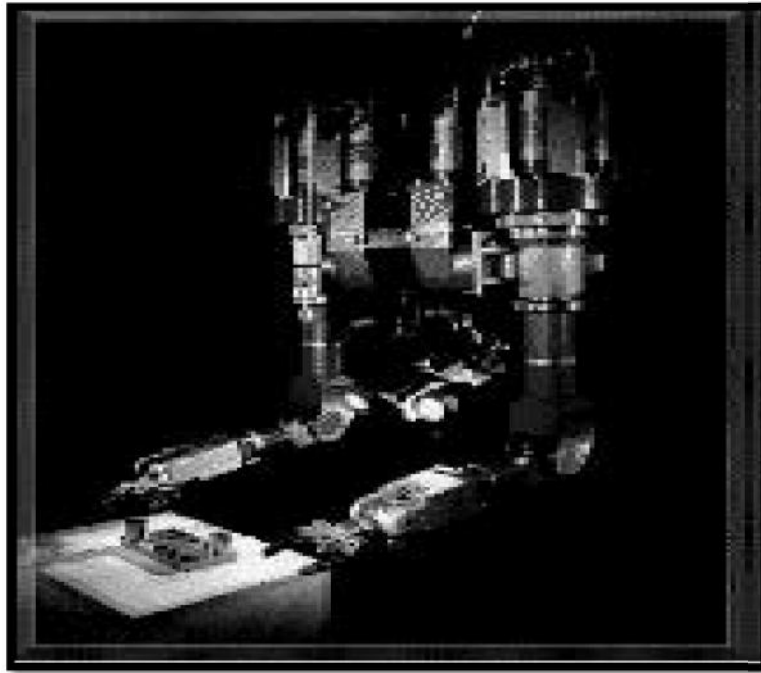


FIG I.16 : Télémanipulateur [1].



FIG I.17: Manipulator pick and place [1].

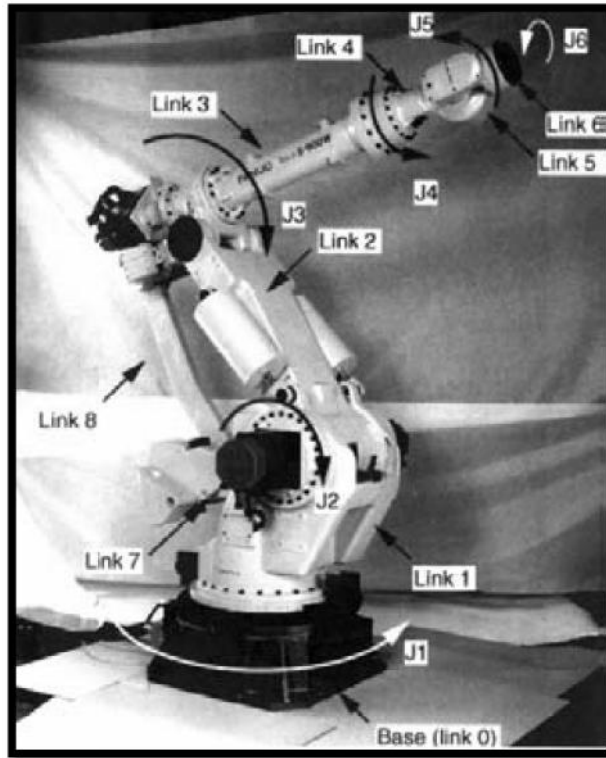


FIG I.18 : Robot industriel [1].

## I.10. Structure générale d'un robot [1]

### I.10.1. Manipulateur

- Description du robot manipulateur dans son environnement en 5 composantes interagissant.

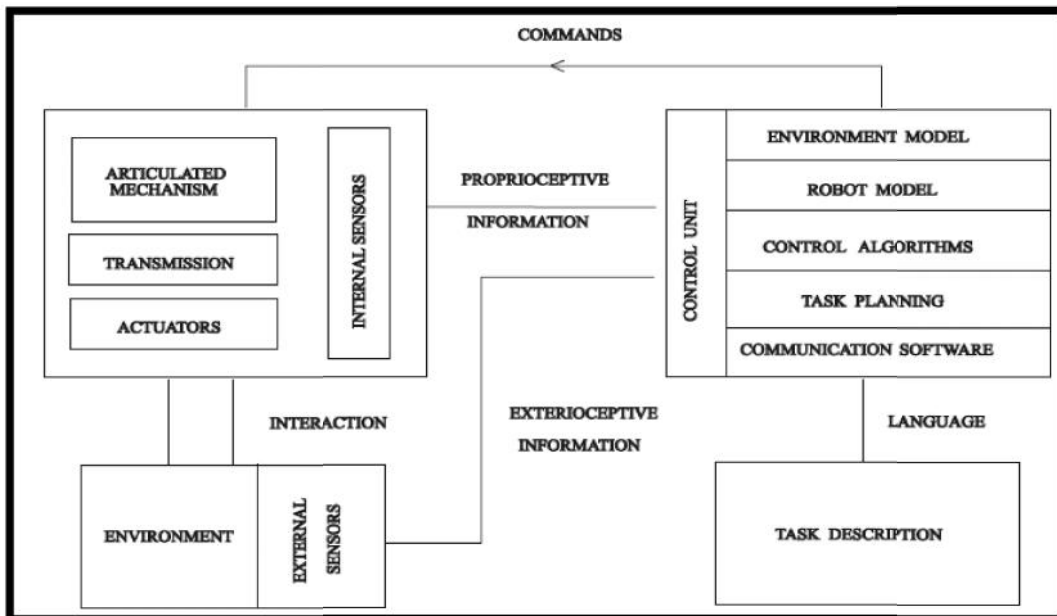


FIG I.19 : Architecture simplifiée du robot manipulateur [1].

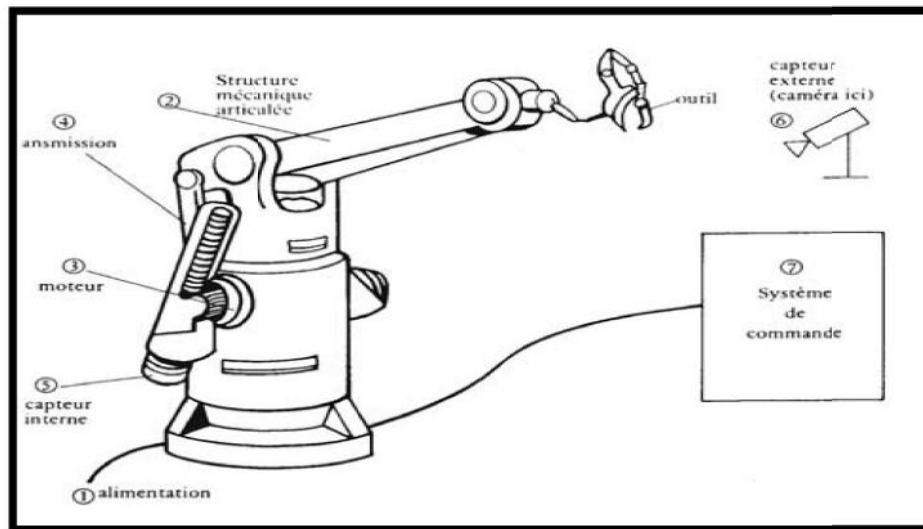


FIG I.20 : schéma d'un bras manipulateur [1].

## I.10.2. Description du robot manipulateur

### • Structure mécanique ou système articulé :

- membres rigides, liaisons articulées par des joints mécaniques.
- à son extrémité l'outil ou effecteur.

### • Actionneurs ou actuateurs :

- pour lutter contre la gravité, l'inertie, les forces extérieures;
- modifier la configuration.
- de types électriques / pneumatiques / hydrauliques.

### • Les systèmes de transmissions mécaniques :

- connecter les actuateurs à la structure mécanique.
- transmettre et adapter les sources d'énergie aux charges.

### • Les senseurs :

- tactiles, optiques, électriques...
- *senseurs proprioceptifs* dont le but est de fournir l'information sur la configuration du manipulateur.
- *senseurs extéroceptifs* dont le but est donné des informations sur l'environnement.

### • Unité de contrôle :

- rôle d'information: collecter l'information venant des senseurs.
- rôle de décision: partant d'une tâche définie et tenant compte des données du système et de l'environnement établir des actions.
- rôle de communication.



## I.10.3. Fonction de l'unité de contrôle: logiciels et bases de données concernant

– un modèle cinématique / dynamique du robot.

• entrées, consignes, commandes mouvements :

– modèle de l'environnement.

• planification de trajectoire, évitement de collision :

– algorithme de contrôle.

• gouverne le mouvement du robot à un plus bas niveau (structures et actionneurs) :

– protocole de communication.

• échange d'informations entre les différents composants du système :

• **Architecture de l'unité de contrôle :**

– centralisée ou hiérarchique (maître - esclave).

## I.11. Robots industriels aujourd'hui [1]

• **Théoriquement :**

– Un robot doit avoir une aptitude à réagir aux changements de l'environnement.

• **En pratique :**

– Les rôles d'information, de décision et de communication de l'unité centrale ne sont réalisées que jusqu'à un certain degré (assez faible).

– Il reste encore beaucoup de progrès à faire

– L'interaction avec l'environnement est souvent quasi-inexistante.

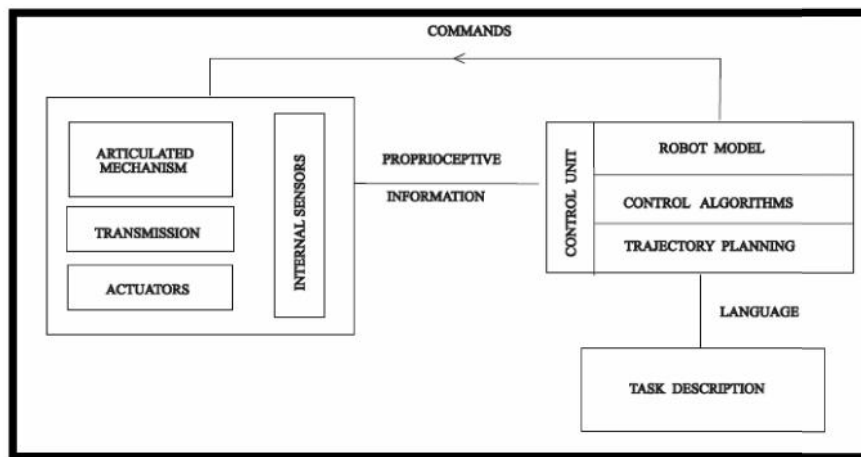


FIG I.21 : Architecture simplifiée du robot manipulateur actuel [1].

• **Conséquence :**

– Le robot manipulateur industriel actuel est surtout programmé pour réaliser une tâche figée.

## I.12. Aspects Mécaniques des robots [1]

### • Objectifs à atteindre :

- Mobilité et dextérité aussi grande que possible dans l'espace de travail.
- Accessibilité aussi large que possible.
- Flexibilité maximale des tâches à réaliser.

### • Parallélisme avec le bras humain :

- Liaison série de membres reliés par des joints rotules pour la mobilité et la dextérité.
- Pauvre raideur mécanique.
- Mauvaise précision.

### • Conséquences :

- Nécessité d'avoir une conception assez sophistiquée (« advanced design »).
- Une bonne modélisation.
- Un contrôle efficace.

### • Géométrie : relie positions des moteurs et de l'outil :

- Équations non linéaires complexes.

### • Cinématique : relie vitesses des moteurs et de l'outil :

- Une des difficultés provient des multiples degrés de liberté.
- des mécanismes.

### • Dynamique : forces et couples moteurs aux forces à l'outil et aux accélérations et donc à la trajectoire :

- Équations non linéaires fortement couplées (à cause de la cinématique).
- Variation forte de la gravité, des forces d'inertie avec la configuration.
- Effets Coriolis et centrifuges importants.
- Flexibilité structurale.
- Effets indésirables de l'amortissement structural.

## I.13. Conclusion

Dans ce chapitre la structure mécanique d'un robot manipulateur est composée de plusieurs corps connectés les uns aux autres par des liaisons appelées articulations, à un seul degré de liberté de translation ou de rotation, cette structure mécanique peut constituer une chaîne cinématique continue ouverte simple, une chaîne arborescente ou une chaîne complexe.

Cette étude est faite juste pour les robots à une chaîne cinématique ouverte.



# Chapitre II

DIFFÉRENTES MÉTHODES DE CALCUL  
DE LA PORTÉE

## II.1.Introduction

Un manipulateur peut être schématiquement représenté à partir d'un point de vue mécanique comme une chaîne cinématique de corps rigides (liens) connectés par des articulations rotationnels ou prismatiques. Une extrémité de la chaîne est limitée à une base, tandis que l'effecteur d'extrémité est montée à l'autre extrémité. Le mouvement résultant de la structure est obtenu par composition des mouvements élémentaires de chaque lien par rapport à le précédent. Par conséquent, afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la position et l'orientation de l'effecteur. Ce chapitre est consacré à la dérivation de l'équation de cinématique directe par une approche systématique, générale fondée sur l'algèbre linéaire. Ceci permet la position et l'orientation de l'effecteur (pose) pour être exprimé comme une fonction des variables d'articulaires de la structure mécanique par rapport le repère référentiel. Ce chapitre se termine par la dérivation des solutions au problème de cinématique inverse, qui consiste en la détermination des variables articulaires correspond à la position de l'effecteur donné.

## II.2. La position d'un corps rigide [2]

Un corps rigide est complètement décrit dans l'espace par sa position et orientation (En bref position) par rapport à un repère de référence. Comme représenté sur la figure, soit  $O-xyz$  le repère orthonormé de référence et  $x, y, z$  des vecteurs unitaires des axes de cette base.

La position d'un point  $O'$  sur le corps rigide par rapport à la base  $O-xyz$  est exprimée par la relation :

$$\mathbf{O}' = O'_x \mathbf{x} + O'_y \mathbf{y} + O'_z \mathbf{z} \quad \text{II.1}$$

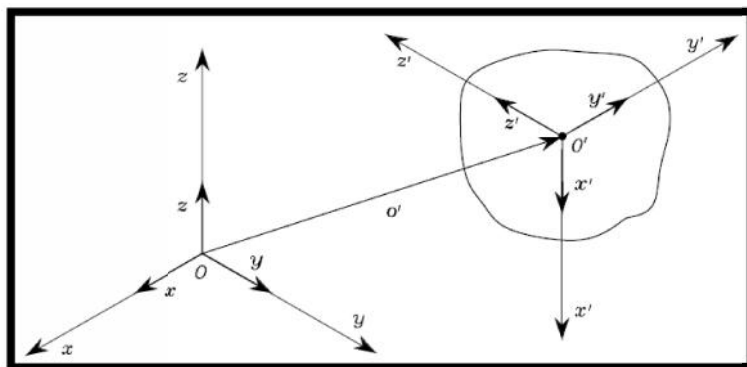


FIG II.1 : Position et l'orientation d'un corps rigide [2].

Où  $O_x, O_y, O_z$  désignent les composantes du vecteur  $O \in \mathbb{R}^3$  le long du référentiel axes; la position de  $O$  Tapez une équation ici. peut être écrit de façon compacte en tant que vecteur (3×1)

$$O' = \begin{bmatrix} O'_x \\ O'_y \\ O'_z \end{bmatrix} \quad II.2$$

Vecteur  $O$  est un vecteur lié depuis sa ligne d'application et point d'application sont tous les deux désignés, en plus de sa direction et de la norme.

Afin de décrire l'orientation de l'organe rigide, il est commode de considérer un repère orthonormé fixé au corps et à exprimer ses vecteurs unitaires par rapport au repère de référence.

Soit alors  $O-x y z$  un tel référentiel avec origine dans  $O$  et  $x, y, z$  sont les vecteurs unitaires des axes de référentiel. Ces vecteurs sont exprimés par rapport à le référentiel  $O-xyz$  par les équations:

$$\begin{aligned} x' &= x'_x x + x'_y y + x'_z z \\ y' &= y'_x x + y'_y y + y'_z z \\ z' &= z'_x x + z'_y y + z'_z z \end{aligned} \quad II.3$$

Les composantes de chaque vecteur unitaire sont les cosinus directeurs des axes de référentiel  $O-xyz$

### II.3. La matrice de rotation [2]

En adoptant une notation compacte, les trois vecteurs unitaires décrivant l'orientation du corps par rapport à le référentiel de référence peut être combiné dans la matrice (3×3).

$$R = [x' \quad y' \quad z'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^T x & y'^T x & z'^T x \\ x'^T y & y'^T y & z'^T y \\ x'^T z & y'^T z & z'^T z \end{bmatrix} \quad II.4$$

Qu'est appelée la matrice de rotation.

Il est à noter que les vecteurs colonnes de la matrice  $R$  sont mutuellement orthogonales étant donné qu'ils représentent les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé

$$x'^T y' = 0 \quad y'^T z' = 0 \quad z'^T x' = 0$$

Aussi,

$$x'^T x' = 1 \quad y'^T y' = 1 \quad z'^T z' = 1$$

En conséquence,  $R$  est une matrice orthogonale qui signifie que

$$R R^T = I_3 \quad II.5$$

Où  $I_3$  représente la matrice identité (3 x 3).

Si les deux côtés sont post-multipliés par la matrice inverse  $R^{-1}$ , donc :

$$R^T = R^{-1} \quad II.6$$

Autrement dit, la transposée de la matrice de rotation est égale à son inverse. En outre, observer que  $\det(\mathbf{R})=1$  si le référentiel est droitier tandis que  $\det(\mathbf{R}) = -1$  si le référentiel est gaucher.

La matrice de rotation défini ci-dessus appartient au orthonormée spéciale groupe  $SO(m)$  du réel ( $m \times m$ ) des matrices de colonnes et orthonormés déterminant égal à 1; dans le cas de rotations spatiales  $m = 3$ , tandis que dans le cas de rotations planes,  $m = 2$ .

### II.3.1. Rotation élémentaires

Envisager les référentiels qui peuvent être obtenus par l'intermédiaire des rotations élémentaires du référentiel sur l'un des axes de coordonnées. Ces rotations sont positives si elles sont faites dans le sens antihoraire autour de l'axe relatif.

On suppose que le référentiel  $\mathbf{O}-xyz$  soit mis en rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  on obtient le nouveau référentiel  $\mathbf{O}-x'y'z'$  tourné. Les vecteurs unitaires de ce référentiel peuvent être décrits en termes de leurs composants par rapport à l'ancien référentiel. Considérons les référentiel qui peuvent être obtenus par l'intermédiaire de rotations élémentaires du référentiel de référence autour d'un des axes de coordonnées. Ces rotations sont positives si elles sont faites dans le sens antihoraire autour de l'axe relatif.

On suppose que le référentiel  $\mathbf{O}-xyz$  soit mis en rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  on obtient le nouveau référentiel  $\mathbf{O}-x'y'z'$  tourné. Les vecteurs unitaires de ce référentiel peuvent être décrits en termes de leurs composants par rapport à l'ancien référentiel.

$$x' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad y' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

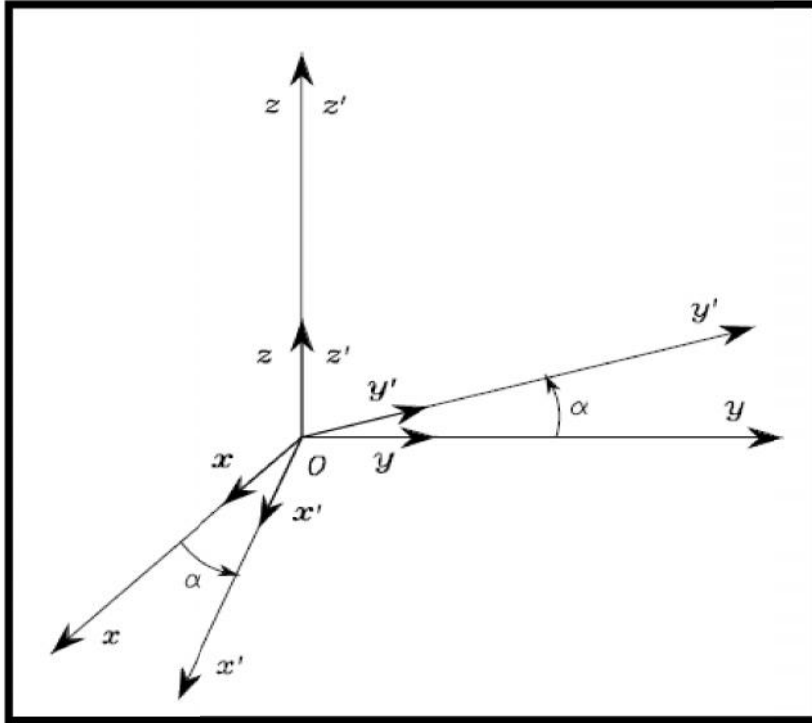


FIG II.2 : Rotation de référentiel  $O-xyz$  avec un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  [2].

Par conséquent, la matrice de rotation  $R(O-xyz)$  par rapport au Repère initial est

$$\mathbf{Rz}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad II.7$$

D'une manière similaire, on peut montrer que les rotations d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $y$  et d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $x$  :

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad II.8$$

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad II.9$$

Ces matrices sont utiles pour décrire des rotations autour d'un axe arbitraire dans l'espace.

Il est facile de vérifier que pour les matrices élémentaires de rotation dans (II.7) –(II.9) à la propriété suivante :

$$\mathbf{R}_k(-\alpha) = \mathbf{R}_k^T(\alpha) \quad k = x, y, z \quad II.10$$

Compte tenu de (II.7) - (II.9), la matrice de rotation peut être attribuée une signification géométrique ; à savoir, la matrice  $\mathbf{R}$  décrit la rotation autour d'un axe dans l'espace nécessaire pour aligner les axes du référentiel de référence avec les axes correspondants au référentiel du corps.

### II.3.2. Représentation d'un vecteur

En outre afin de comprendre un sens géométrique d'une matrice de rotation, considérons le cas où l'origine du référentiel de corps coïncide avec l'origine du référentiel de référence il s'ensuit que  $\mathbf{O} = \mathbf{0}$ , ou  $\mathbf{0}$  indique le vecteur nul ( $3 \times 1$ ).



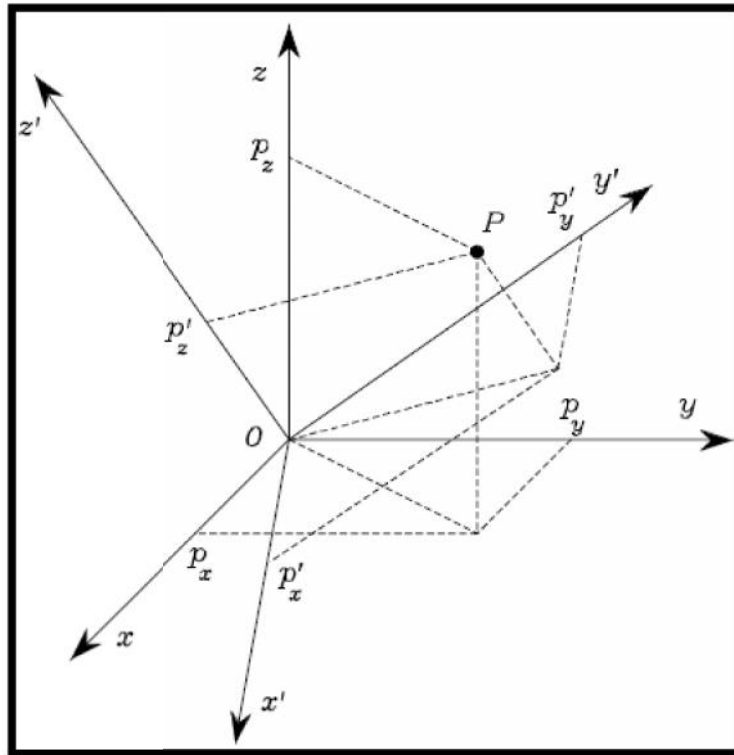


Figure II.3 : Représentation d'un point P en deux référentiels différents [2].

Un point P dans l'espace peut être représenté comme

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Par rapport à **O**- xyz ou

$$P' = \begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix}$$

Par rapport à **O**- x y z

Comme  $p$  et  $p'$  sont ces représentations du même point F, il est

$$P = P'x' x' + P'y' y' + P'z' z' = [x' \quad y' \quad z'] P'$$

$$P = R p' \tag{II.11}$$

La matrice de rotation R représente la matrice de transformation de coordonnées du vecteur dans le référentiel (O- x'y'z' ) dans les coordonnées d'un même vecteur dans le référentiel (O- xyz) En vue de la propriété d'orthogonalité, la transformation inverse est simplement donnée par

$$P' = R^T p \tag{II.12}$$

En somme, une matrice de rotation atteint trois significations géométriques équivalentes :

- Il décrit l'orientation mutuelle entre deux systèmes de coordonnées ; ses vecteurs de colonnes sont les cosinus directeurs des axes de rotation du référentiel par rapport à le référentiel d'origine.
- Il représente la transformation de coordonnées entre les coordonnées d'un point exprimé dans deux référentiels différents (avec une origine commune).
- C'est l'opérateur qui permet la rotation d'un vecteur dans le même système de coordonnées.

### II.4. Composition des matrices de rotation [2]

Afin de dégager des règles de composition de matrices de rotation, il est utile de considérer l'expression d'un vecteur dans deux référentiels différents. Soit  $O-x_0y_0z_0$ ,  $O-x_1y_1z_1$ ,  $O-x_2y_2z_2$  trois référentiels avec origine commun O. Le vecteur  $P$  décrive la position d'un point générique dans l'espace peut être exprimée dans chacun des référentiels ci-dessus ; soit  $P^0$ ,  $P^1$  et  $P^2$  désigner les expressions de  $p$  dans les trois référentiels.

Dans un premier temps, examiner la relation entre l'expression  $P^2$  du vecteur P dans le référentielle 2 et l'expression  $P^1$  du même vecteur dans le référentiel 1. Si  $R_j^i$  désigne la matrice de rotation du référentiel i par rapport au référentiel de j, alors

$$P^1 = R_2^1 P^2 \tag{II.13}$$

De même, il s'avère que

$$P^0 = R_1^0 P^1 \tag{II.14}$$

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{P}^2 \quad II.15$$

D'autre part, en remplaçant (II.13) dans (II.14) et en utilisant (2.II.15) donne

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \quad II.16$$

La relation (II.16) peut être interprétée comme la composition des rotations successives. Considérons un référentiel d'abord aligné avec le référentiel  $O-x_0y_0z_0$ . La matrice de rotation exprimée par  $\mathbf{R}_2^0$  peut être considéré comme obtenu en deux étapes:

- Faire tourner le référentiel donné selon  $\mathbf{R}_1^0$ , afin de l'aligner avec le référentiel  $(O-x_1y_1z_1)$ .
- Ensuite, faire pivoter le référentiel, maintenant aligné avec le référentiel  $O-x_1y_1z_1$ , selon  $\mathbf{R}_2^1$ , afin de l'aligner avec le référentiel  $O-x_2y_2z_2$ .

Notez que la rotation d'ensemble peut être exprimé comme une séquence de rotations partielles; chaque rotation est défini par rapport à la précédente. Le référentiel à l'égard de laquelle la rotation se produit est appelée référentiel courant. Composition de rotations successives est alors obtenue par post-multiplication des matrices de rotation suivant l'ordre donné de rotation, comme en (II.16).

Avec les notations adoptées, compte tenu de (II.6), il est

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T \quad II.17$$

Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées par constamment de les soumettre au référentiel initial; dans ce cas, les rotations sont effectuées par rapport à un repère fixe. Soient  $\mathbf{R}_1^0$  la matrice de rotation du référentiel  $O-x_1y_1z_1$  par rapport au référentiel fixe  $O-x_0y_0z_0$ . Alors  $\overline{\mathbf{R}_2^0}$  représentent la matrice caractérisant le référentiel  $O-x_2y_2z_2$  par rapport à le référentiel 0, qui est obtenu comme une rotation du référentielle 1 selon la matrice  $\overline{\mathbf{R}_2^1}$ . Depuis (II.16) donne une règle de composition des rotations successives sur les axes du référentiel courant, la rotation d'ensemble peut être considéré obtenue selon les étapes suivantes:

- Première réaligner le référentiel 1 avec le référentiel 0 par rotation  $\mathbf{R}_0^1$

- Ensuite, faire la rotation exprimée par  $\overline{R_2^1}$  par rapport à le référentiel courant.
- compenser Enfin pour la rotation fait pour le réalignement à l'aide de la rotation inverse  $R_1^0$

Etant donné que les rotations sont décrites ci-dessus par rapport à le référentiel courant, l'application de la règle de composition (II.16) des rendements  $\overline{R_2^0} = R_1^0 R_0^1 \overline{R_2^1} R_1^0$

Compte tenu de (II.17), il est :

$$\overline{R_2^0} = \overline{R_2^1} R_1^0 \quad \text{II.18}$$

Où l'entraîne  $\overline{R_2^0}$  est différent de celui de la matrice  $R_2^0$  dans (II.16). Par conséquent, on peut dire que la composition des rotations successives par rapport à un référentiel fixe est obtenue par pré-multiplication des matrices de rotation unique, dans l'ordre de la séquence donnée des rotations.

En rappelant le sens d'une matrice de rotation en fonction de l'orientation d'un référentiel courant par rapport à un référentiel fixe, il peut être admis que ses colonnes sont les cosinus directeurs des axes de le référentiel courant par rapport au référentiel fixe, tandis que les rangées (les colonnes de sa transposée et inverse) sont les cosinus directeurs des axes du référentiel fixe par rapport à le référentiel courant.

Une conclusion importante de la composition de rotations est que le produit de la matrice n'est pas commutatif. Compte tenu de ceci, on peut conclure que les deux rotations en général ne commutent pas et sa composition dépend de l'ordre des rotations simples.

**Exemple :**

Considérons un objet et un référentiel qui s'y rattachent. La figure (II.4) montre les effets de deux rotations successives de l'objet par rapport à le référentiel en cours en changeant l'ordre des rotations. Il est évident que l'orientation de l'objet final est différente dans les deux cas. En outre, dans le cas de rotations effectuées par rapport à le référentiel courant, les orientations diffèrent finales (FIG II.5). Il est intéressant de noter que les effets de la séquence de rotations par rapport au référentiel fixe sont interchangeable avec les effets de la séquence de rotations par rapport à le référentiel courant. Ceci peut s'expliquer par l'observation que l'ordre des rotations dans le référentiel fixe par rapport à l'ordre de rotations dans le référentiel courant.

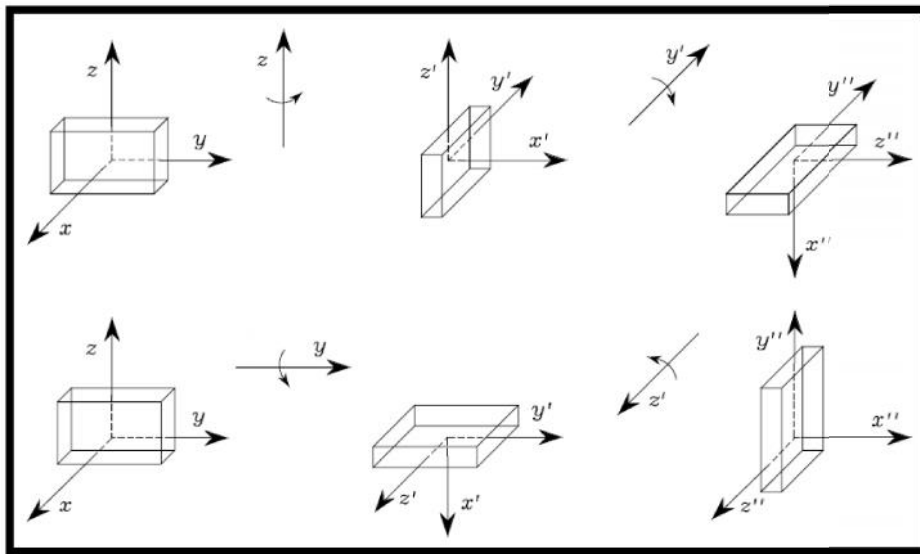


FIG II .4 : Rotations successives d'un objet autour d'axes de référentiel courant [2].

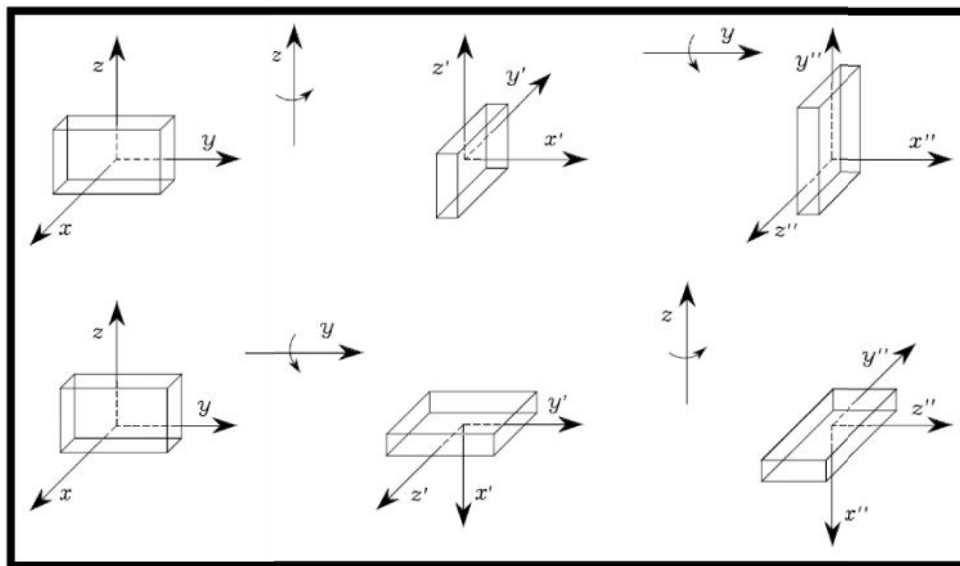


FIG II.5 : Rotations successives d'un objet autour d'axes de référentiel fixe [2].

### II.5. Angles d'Euler [3]

Les angles d'Euler que nous considérons ici sont ceux utilisés traditionnellement pour décrire le gyroscope. Ils portent alors respectivement les noms de  $\phi$  = précession,  $\theta$  = nutation et  $\psi$  = spin (FIG II.6).

Le changement de base est obtenu en effectuant successivement les trois transformations élémentaires indiquées sur la FIG II.6. Notons que la rotation s'effectue chaque fois autour des axes du référentiel mobile, ayant subi les rotations précédentes.

Les matrices de rotation élémentaires associées aux différentes rotations sont respectivement

$$\mathbf{R1}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II.19$$

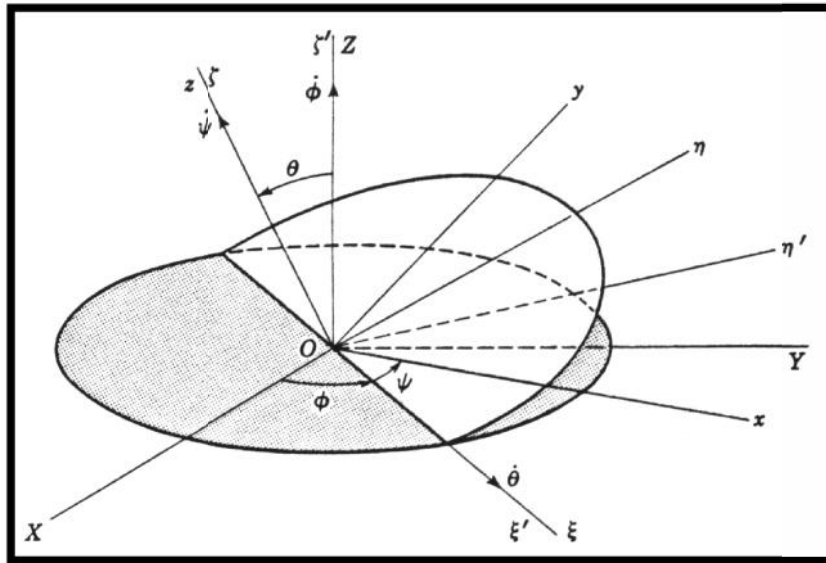


FIG II.6 : Rotations élémentaires associées aux angles d'Euler [3].

(Rotation de  $\phi$  autour de Oz)

$$\mathbf{R2}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad II.20$$

(Rotation de  $\psi$  autour de l'axe mobile  $O\xi'$ )

$$\mathbf{R3}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.21}$$

(Rotation de  $\psi$  autour de l'axe mobile  $\zeta$ ). Ces rotations étant effectuées successivement dans le référentiel mobile, la matrice de rotation globale est le produit de ces matrices élémentaires, dans l'ordre où elles sont effectuées:

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R1}(\phi) \mathbf{R2}(\theta) \mathbf{R3}(\psi) \quad \text{II.22}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad \text{II.23}$$

Par comparaison des termes de (II.23) et (II.24), il n'est pas difficile d'établir les relations d'inversion suivantes, qui fournissent l'angle et aussi son signe:

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{r_{31}}{r_{32}} \right) \quad \text{II.24}$$

$$\begin{cases} \sin \theta = r_{31} \sin \psi + r_{32} \cos \psi \\ \cos \theta = r_{33} \end{cases} \quad \text{II.25}$$

$$\begin{cases} \cos \phi = r_{11} \cos \psi + r_{12} \sin \psi \\ \sin \phi = r_{21} \cos \psi - r_{22} \sin \psi \end{cases} \quad \text{II.26}$$

La première de ces relations fournit deux solutions,  $\psi_1$  et  $\psi_2 = \psi_1 + \pi$ ; les deux autres permettent l'évaluation de  $\theta$  et  $\phi$  sans ambiguïté en ce qui concerne le quadrant.

Un inconvénient sérieux des angles d'Euler est que pour  $\theta = k\pi$ , les axes  $z$  et  $Z$  sont alignés et on ne peut plus distinguer  $\psi$  de  $\phi$ . Ceci peut être illustré en considérant le cas  $\theta = 0$ :  $R(\phi, \theta, \psi)$  se réduit alors à :

$$R(\phi, 0, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) & 0 \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La représentation par les angles d'Euler est particulièrement importante en robotique, parce qu'ils correspondent aux variables articulaires de la structure de poignet la plus classique (FIG II.7), avec la correspondance (précession-roll, nutation-bend, spin-turn).

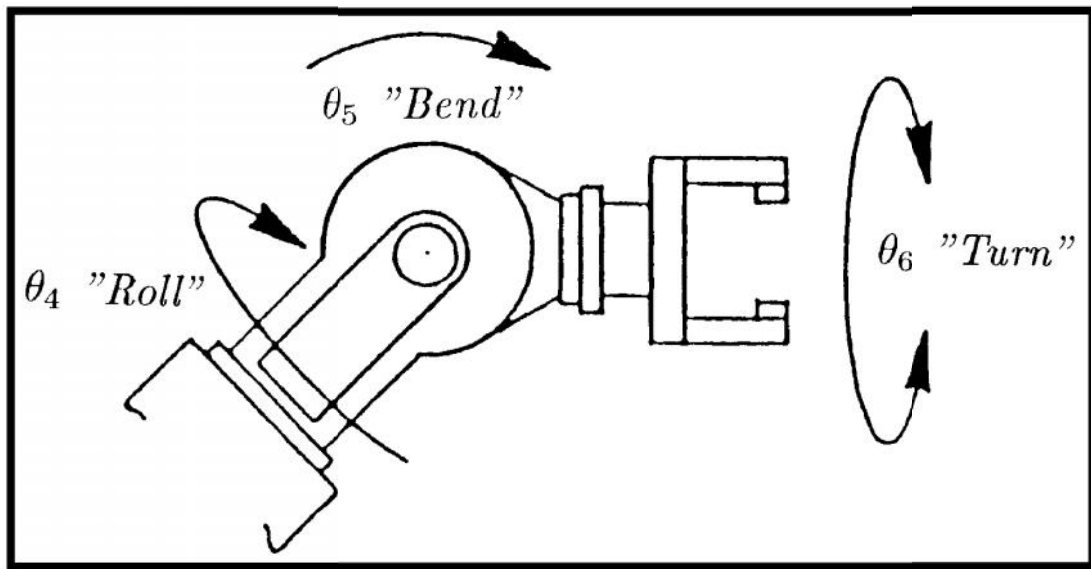


FIG II.7 : Structure classique d'un poignet dont les angles d'articulations sont identiques aux angles d'Euler [3].

## II.6. Changement de coordonnées [3]

Nous considérant à la FIG II.8, le référentiel {2} a subit, par rapport à {1}, une translation définie par  $\vec{OP} = \vec{OQ}$  et une rotation définie par R. Cette dernière définit la relation entre le référentiel {2} et le référentiel {1}, de même origine que {2} mais parallèle à {1}. Le vecteur définit les coordonnées de P dans {2}. Le changement de coordonnées s'obtient en exprimant l'égalité vectorielle

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \quad II.27$$



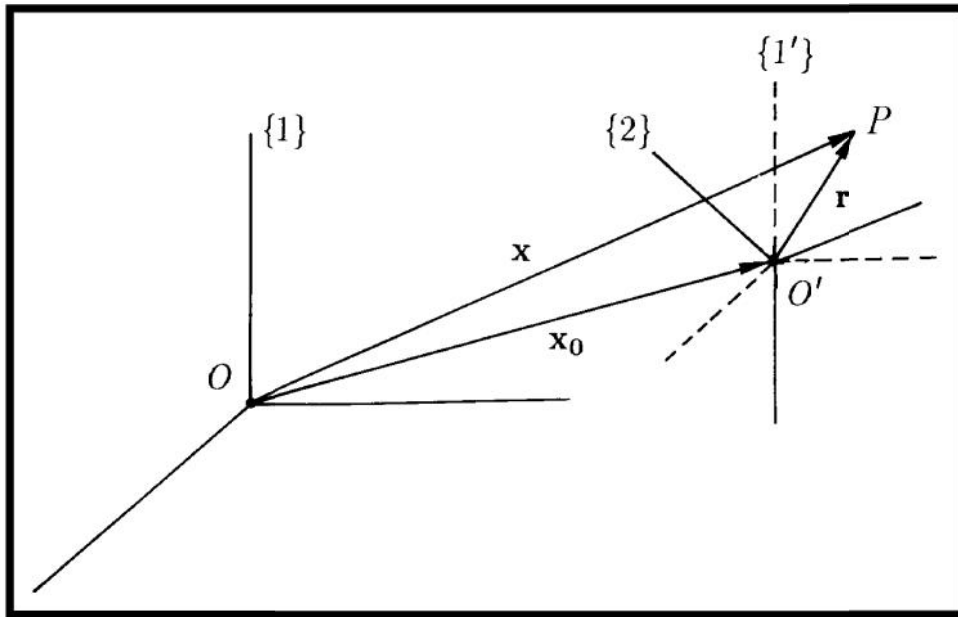


FIG II.8 : Changement de coordonnées [3].

Dans le référentiel  $\{1\}$ . Les composantes des deux premiers vecteurs dans  $\{1\}$  sont respectivement  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}_0$ . Le troisième, en revanche, est connu par  $r$ , ses composantes dans  $\{2\}$ . Elles doivent être converties dans  $\{1\}$  à l'aide de la matrice de rotation  $R$ . Les vecteurs étant ainsi exprimés dans le même référentiel, ou des référentiels parallèles, ce qui revient au même, la relation vectorielle (II.27) peut être projetée dans la base  $\{1\}$  sous la forme:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + R\mathbf{r} \quad \text{II.28.a}$$

Ou, en indiquant explicitement les référentiels

$${}^1\mathbf{X} = {}^1\mathbf{X}_0 + {}^1R^2\mathbf{r} \quad \text{II.28.b}$$

### II.7. Transformation homogène [3]

L'équation (II.28) exprime la liaison entre les coordonnées du même point dans deux référentiels séparés par une translation  $\mathbf{X}_0$  et une rotation de matrice  $R$ . Les coordonnées du point  $P$  dans les deux référentiels sont respectivement  $\mathbf{X} = (x \ y \ z)^T$  et  $\mathbf{r} = (u \ v \ w)^T$

La relation (II.28) peut être écrite de manière compacte en ajoutant une quatrième composante, unitaire, aux deux vecteurs, on aura :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \quad II.29$$

La partie supérieure de cette relation est identique à (II.28), tandis que la dernière ligne fournit l'identité triviale  $1 = 1$ . (II.29) ne fournit aucune information complémentaire à (II.28), mais constitue une écriture plus compacte, particulièrement lorsque de nombreux changements de coordonnées sont considérés successivement. Comme la quatrième composante du vecteur position ne porte aucune information, nous utiliserons les mêmes notations  $x$  et  $r$  pour désigner le vecteur étendu à quatre composantes. Le contexte se chargera de préciser duquel il s'agit. La matrice de transformation homogène de dimension  $4 \times 4$ , relie les référentiels  $\{1\}$  et  $\{2\}$  et en définit complètement la position relative.

$${}^1_2T = \begin{pmatrix} R & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II.30$$

La forme compacte de (II.30) est

$$x = T r \quad II.31$$

A nouveau, les indices situés à gauche de  $T$  sont facultatifs et servent à préciser les référentiels reliés par  $T$ , quand cela est nécessaire.

$${}^2_x = {}^2_3T {}^3_x$$

$${}^1_x = {}^1_2T {}^2_x$$

$${}^1_x = {}^1_3T {}^3_x$$

Combinant les deux premières de ces équations, il suit immédiatement que

$${}^1_3T = {}^1_2T {}^2_3T \quad II.32$$

Cette relation se généralise sans difficulté à un nombre quelconque de transformations

$${}^1_nT = {}^1_2T {}^2_3T \dots \dots \dots {}^{n-1}_nT \quad II.33$$

On observera que tout indice apparaissant au bas d'une matrice de transformation et au haut de la suivante disparaît lors de la composition.

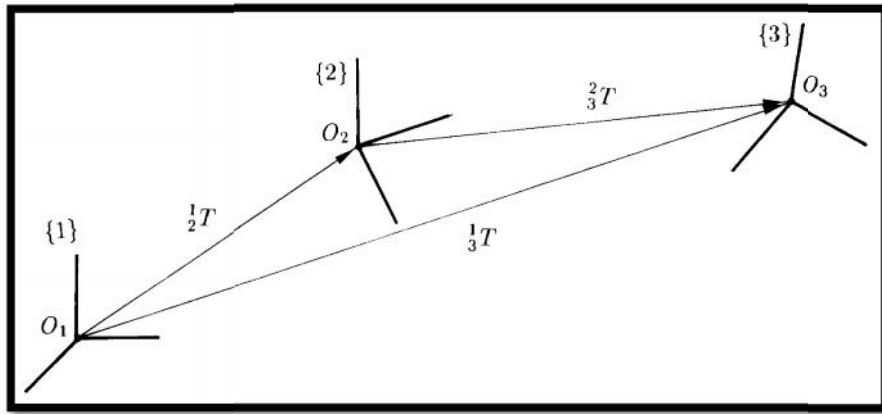


FIG II.9 : Composition des transformations homogènes [3].

Pour obtenir la relation d'inversion de la matrice de transformation homogène, il est commode de repartir de (II.28). Compte tenu de l'orthonormalité de R, celle-ci fournit

$$r = R^T(x - x_0)$$

Sous forme homogène, cette équation fournit

$$\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T x_0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T x_0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad II.34$$

On vérifiera sans difficulté que, compte tenu de  $RR^T = I_3$ ,  $T T^{-1} = T^{-1} T = I_4$

(Les symboles  $I_3$  et  $I_4$  ont été utilisés pour insister sur le fait qu'il s'agit des matrices unité d'ordre 3 et 4, respectivement).

### II.8. Opérateurs de translation et de rotation [3]

Si on effectue une translation  $x_0$  sur un vecteur  $r$ , les coordonnées du vecteur translaté sont identiques à celles obtenues en effectuant un changement de coordonnées dans lequel les bases parallèles sont distantes de  $x_0$ .

L'opérateur correspondant est :

$$T = \begin{pmatrix} I & x_0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad II.35$$

## Chapitre II : Différentes méthodes de calcul de la portée

La matrice unité  $I$  indique que les référentiels n'ont pas subi de rotation. Similairement, effectuer une rotation  $R$  sur un vecteur  $r$  revient à exprimer ce vecteur au travers d'une rotation du système de coordonnées définie par  $R$ . L'opérateur correspondant est :

$$T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.36}$$

Le vecteur  $0$  indique que les référentiels considérés ont la même origine. Il suit de (II.36) que l'application successive des rotations  $R_1$  puis  $R_2$  est équivalente à une rotation unique de

$$R = R_2 R_1 \quad \text{II.37}$$

### Exemple :

Soit le vecteur  $(1, 0, 1)^T$  sur lequel on veut effectuer une rotation de 90 degrés autour de l'axe  $OZ$ . Le résultat est, comme on le voit sur la figure II.11,  $(0, 1, 1)^T$ .

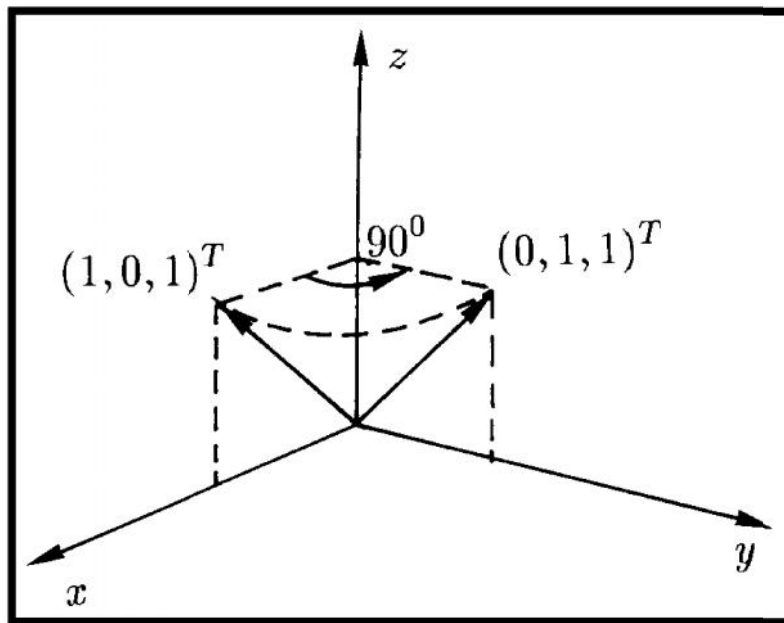


FIG II.10 : Rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe  $z$  [3].

Ceci peut également être obtenu par application de (II.36) où  $R$  correspond à une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe  $z$ , donnée par (II.38)

$${}^1_2R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II.38$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \ddots \\ \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \ddots \\ \hat{1} \end{pmatrix}$$

### II.9. Paramètres de Denavit et Hartenberg [4]

La convention de Denavit et Hartenberg (DH 1955) est une méthode systématique. Elle permet le passage entre articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, et les surfaces adjacentes restent en contact. Pour cet aspect l'utilisation des charnières ou des glissières est indispensable. Le choix adéquat des repères dans les liaisons facilite le calcul des matrices homogènes de DH et permet d'arriver à exprimer rapidement des informations de l'élément terminal vers la base ou l'inverse.

Les étapes à suivre pour cette technique sont les suivantes :

1. Numérotation des segments constitutifs du bras manipulateur de la base vers l'élément terminal. On associe le référentiel zéro à la base de celui-ci, et l'ordre n à l'élément terminal (effecteur).

2. Définition des axes principaux de chaque segment :

- Si  $z_i$  et  $z_{i-1}$  ne se coupent pas et on choisit  $x_i$  de manière à être la parallèle avec l'axe perpendiculaire à  $z_i$  et  $z_{i-1}$
- Si  $z_i$  et  $z_{i-1}$  sont colinéaires on choisit  $x_i$  dans le plan perpendiculaire à  $z_{i-1}$ .

3. Fixer les quatre paramètres géométriques:  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\theta_i$  (voir la figure II.11) pour chaque articulation tel que :

- $d_i$  coordonnée de l'origine  $o_i$  sur l'axe  $z_{i-1}$ . Pour une glissière  $d_i$  est une variable et pour une charnière  $d_i$  est une constante.
- $\theta_i$  est l'angle que l'on obtient par vissage de  $x_{i-1}$  vers  $x_i$  autour de l'axe  $z_{i-1}$ . Pour une glissière  $\theta_i$  est une constante et pour une charnière  $\theta_i$  est une variable.
- $a_i$  est la distance entre les axes  $z_i$  et  $z_{i-1}$  mesurée sur l'axe  $x_i$  négatif à partir de son origine jusqu'à l'intersection avec l'axe  $z_{i-1}$ .
- $\alpha_i$  est l'angle entre  $z_i$  et  $z_{i-1}$  obtenu en vissant  $z_{i-1}$  vers  $z_i$  autour de  $x_i$ .

On forme enfin la matrice homogène DH de déplacement qui lie la rotation et la translation. La partie supérieure gauche définit la matrice de rotation  $R_{i-1}^i$ , et le vecteur droit pour la translation  $d_{i-1}^i$ .

$$T_{i-1}^i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad II.39$$

Avec

$$R_{i-1}^i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ \mathbf{0} & s\alpha_i & c\alpha_i \end{pmatrix} \quad II.40$$

Et

$$d_{i-1}^i = \begin{pmatrix} a_i c\theta_i \\ a_i s\theta_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad II.41$$

LA figure II.12 représente les paramètres de Denavit et Hartenberg pour les deux référentiel successifs  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  et  $(x_i, y_i, z_i)$ .

$$rot(\theta_z)_{i-1}^i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ s\theta_i & c\theta_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad II.42$$

$$\text{trans}(d)_{i-1}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.43}$$

$$\text{trans}(a)_{i-1}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.44}$$

$$\text{rot}(\alpha_x)_{i-1}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ 0 & s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.45}$$

$$T_{i-1}^i = \text{rot}(\theta_z)_{i-1}^i \text{trans}(d)_{i-1}^i \text{trans}(a)_{i-1}^i \text{rot}(\alpha_x)_{i-1}^i \quad \text{II.46}$$

Enfin, la matrice de transformation homogène de Denavit et Hartenberg est la suivante :

$$T_{i-1}^i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{II.47}$$

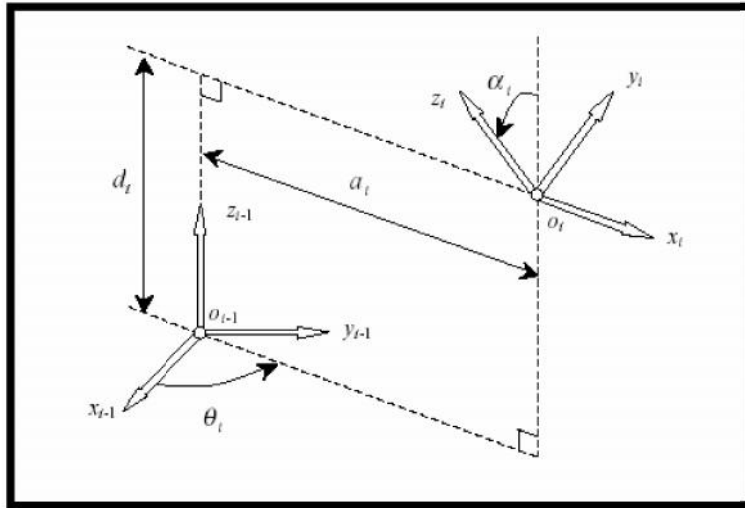


FIG II.11 : Systèmes de coordonnées et les paramètres de Denavit et Hartenberg [4].

### II.10. Conclusion

On peut considérer qu'après étude des méthodes de calcul de la portée par la méthode 3x3 et la méthode 4x4 et celle de Denavit et Hartenberg on constate l'homogénéité et la simplicité dans le calcul des produit des matrices ce qui nous amène à faire notre choix sur la méthode de Denavit et Hartenberg dans nos prochain calcul.



# Chapitre III

APPLICATION NUMÉRIQUE DE LA  
MÉTHODE DE DENAVIT-  
HARTENBERG

# Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

## III.1. Introduction

Pour résoudre la cinématique directe d'un robot sériel spatial à  $n$  articulations (pivots ou prismatiques), il est presque inévitable de placer un référentiel sur chaque lien du robot, chose que nous n'avons pas eu besoin de faire dans l'exemple trivial. Ainsi, dans le cas d'un robot à  $n$  articulations, donc à  $n+1$  liens, le modèle de la cinématique directe du robot sera exprimé par l'équation suivante :

$$T_n^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 \dots T_n^{n-1}$$

## III.2. Trigonométrie et calcul vectoriel dans le plan [5]

Plutôt que donner une liste de formules trigonométriques et de règles de calcul vectoriel, nous allons faire une révision de celles-ci en détaillant un exemple concret en robotique. Plus précisément, nous allons calculer la cinématique directe et inverse d'un robot sériel plan à 2ddl.

Soit le référentiel  $F$  (avec origine  $O$  et axes  $x$  et  $y$ ) et les vecteurs  $v_{OA}$  et  $v_{AB}$  qui servent à modéliser un robot sériel plan à 2 ddl, tel qu'illustre à la figure (III.1).

Les trois équations suivantes démontrent la notation que nous allons adopter dans ce chapitre ainsi que l'utilisation de la trigonométrie de base que nous allons faire :

$$v_{OA} = \begin{pmatrix} x_{OA} \\ y_{OA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad III.1$$

$$v_{AB} = \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \quad III.2$$

$$v_{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \quad III.3$$

Où  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des segments  $OA$  et  $AB$ , respectivement. Les composantes  $x_{OA}$  et  $y_{OA}$  du vecteur  $v_{OA}$  sont les projections de ce vecteur sur les axes  $x$  et  $y$ , respectivement, du référentiel  $F$ .

Pareillement, les composantes  $x_{AB}$  et  $y_{AB}$  du vecteur  $v_{AB}$  sont les projections de ce vecteur sur les axes  $x$  et  $y$ , respectivement. Enfin, les composantes  $x_B$  et  $y_B$  du vecteur  $v_{OB}$  sont les projections de ce vecteur sur les axes  $x$  et  $y$ , respectivement, et aussi les coordonnées cartésiennes de l'effecteur, soit le point  $B$ .

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

La position de l'effecteur peut aussi être représentée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 v_{OB} &= v_{OA} + v_{AB} = \begin{pmatrix} x_{OA} \\ y_{OA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{OA} + x_{AB} \\ y_{OA} + y_{AB} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{pmatrix} \quad III.4
 \end{aligned}$$

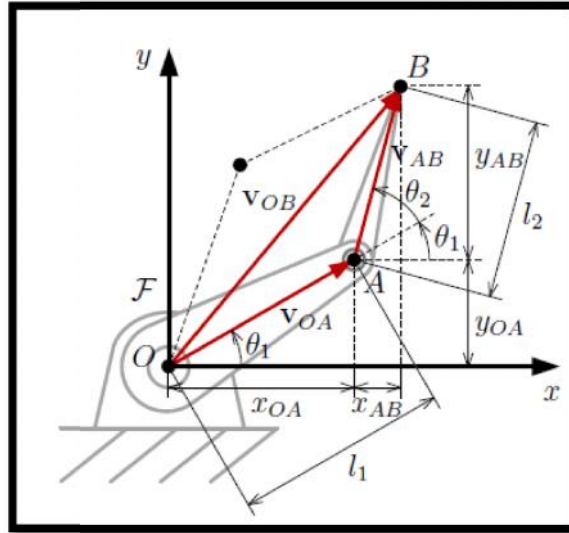


FIG III.1 : Cinématique directe et inverse d'un robot sériel plan à 2 ddl [5].

L'équation (III.4) représente la solution de la cinématique directe du robot sériel plan à 2 ddl. Si on connaît les rotations des deux moteurs,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , ainsi que les longueurs des deux bras, cette équation nous permet de calculer la position de l'effecteur.

A l'opposé, le problème de la cinématique inverse consiste à calculer les variables articulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , en connaissant la position de l'effecteur, soit les coordonnées  $x_B$  et  $y_B$ . Pour résoudre ce problème, nous allons calculer le produit vectoriel  $v_O^T v_{OB}$  (qui représente la longueur du vecteur  $v_{OB}$  au carré) en utilisant les expressions pour ce vecteur trouvées dans les équations (III.3) et (III.4) :

$$x_B^2 + y_B^2 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2))^2 + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2))^2 \quad III.5$$

En développant l'équation (III.5) et en utilisant l'identité trigonométrique

$\sin^2 + \cos^2 = 1$ , on obtient l'équation suivante :

$$x_B^2 + y_B^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \quad III.6$$

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

Puisque  $2l_1l_2 \neq 0$ , les deux solutions de cette équation trigonométrique sont

$$\theta_2 = \pm \arccos\left(\frac{x_B^2 + y_B^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \quad III.7$$

Ces deux solutions sont réelles uniquement si l'argument de la fonction  $\arccos(\cdot)$  est dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Puisque  $2l_1l_2 > 0$ , il est facile de démontrer que cette dernière condition pour l'argument de la fonction  $\arccos(\cdot)$  est équivalente à l'inégalité

$$(l_1 - l_2)^2 \leq x_B^2 + y_B^2 \leq (l_1 + l_2)^2 \quad III.8$$

Les deux solutions de l'équation (III.7) coïncident ( $\theta_2 = 0$ ) lorsque le robot est complètement étendu  $x_B^2 + y_B^2 = l_1^2 + l_2^2$ .

Une fois les deux solutions pour  $\theta_2$  trouvées, on peut calculer les deux solutions correspondantes pour l'angle  $\theta_1$ , en substituant chaque solution pour  $\theta_2$  dans l'expression droite de l'équation vectorielle (III.4) et en égalant 0 l'expression droite de l'équation vectorielle (III.3) :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) - l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \quad III.9$$

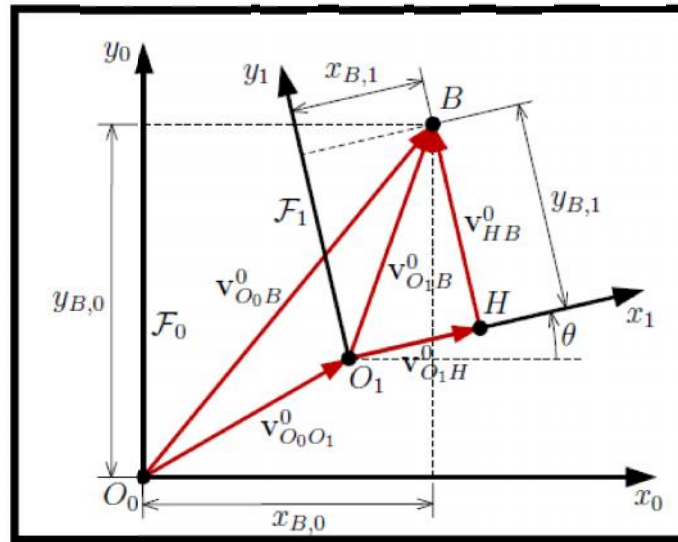


FIG III.2 : Transformations de coordonnées dans le plan [5].

Cette équation vectorielle représente un système de deux équations linéaires en  $\sin \theta_1$  et  $\cos \theta_1$ , dont la solution est :

$$\cos \theta_1 = \frac{x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2} \quad III.10$$

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

$$\sin \theta_1 = \frac{y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2} \quad III.11$$

En utilisant l'équation (III.6), ce système peut être réécrit comme

$$\cos \theta_1 = \frac{x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2}{x_B^2 + y_B^2} \quad III.12$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2}{x_B^2 + y_B^2} \quad III.13$$

Ce système a une seule solution pour l'angle  $\theta_1$  à l'exception du cas spécial

$x_B^2 + y_B^2 = 0$ . Qui peut arriver uniquement lorsque  $l_1 = l_2$ . Cette solution est donnée par la fonction atan2 (...) (Une variation à deux arguments de la fonction arctan (...) qui est très utilisée en robotique :

$$\theta_1 = \text{atan2}(y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2, x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2) \quad III.14$$

### III.3. Matrice de rotation et transformations de coordonnées [5]

Dans le cas de deux référentiels dans l'espace, on peut suivre exactement la même logique, mais le processus est un peu plus difficile à comprendre. Nous allons alors donner uniquement le résultat final.

Soit les deux référentiels  $F_0$  et  $F_1$  illustrés à la figure III.4<sup>1</sup>, où le vecteur  $v_{O_0 O_1}^0$  représente les coordonnées de l'origine du référentiel  $F_1$  par rapport au référentiel  $F_0$ . Admettons que les coordonnées d'un point B sont connues uniquement dans le référentiel  $F_1$ . Alors les coordonnées de ce point par rapport au référentiel  $F_0$  peuvent être trouvées à l'aide de l'équation suivante :

$$v_{O_0 B}^0 = v_{O_0 O_1}^0 + \mathbf{R}_1^0 v_{O_1 B}^1 \quad III.15$$

---

<sup>1</sup> Dans le cas des référentiels en trois dimensions, nous n'allons pas libeller leurs axes (< x >, < y >, < z >) mais plutôt dessiner les axes x en rouge, les axes y en vert, et les axes z en bleu, comme dans les logiciels de CAO.

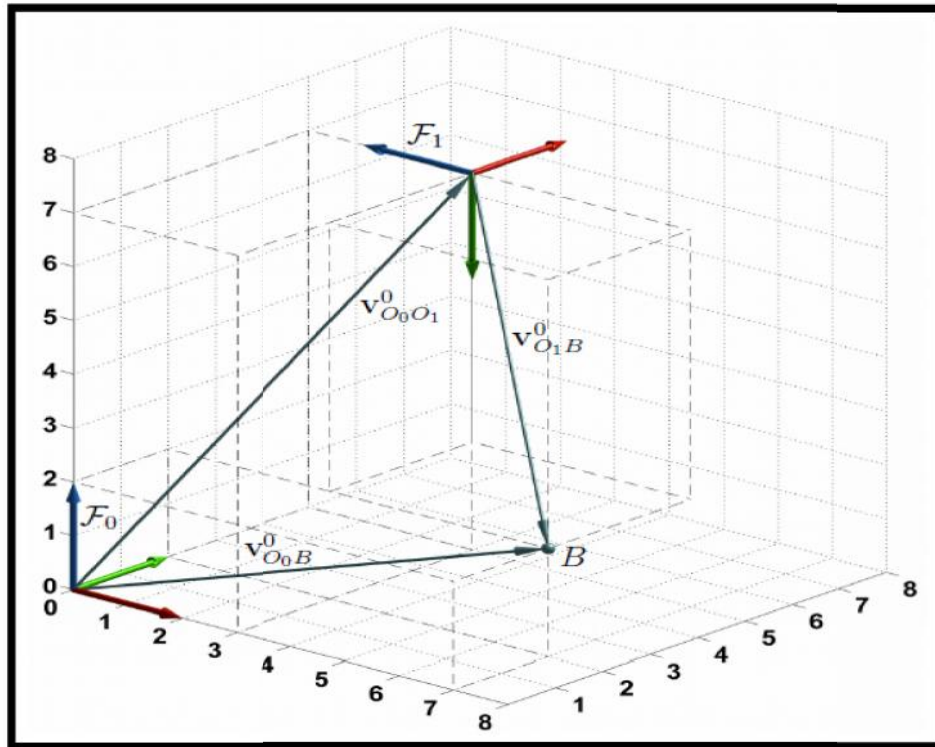


FIG III.4 : Transformation de coordonnées dans l'espace [5].

Où la matrice  $R_1^0$  est la matrice de rotation  $3 \times 3$  dans l'espace.

Contrairement à la matrice de rotation dans le plan, il n'existe pas de formule unique pour la matrice de rotation dans l'espace, puisqu'il y a plusieurs façons de représenter l'orientation d'un référentiel par rapport à un autre dans l'espace (douze conventions d'angles d'Euler<sup>2</sup>, les quaternions, l'axe équivalent de rotation, etc.). Par contre, cette matrice de rotation  $3 \times 3$  a les mêmes propriétés que la matrice de rotation dans le plan. Notamment, la première colonne, la deuxième colonne, et la troisième colonne de la matrice de rotation dans l'espace représentent les vecteurs unitaires le long de l'axe  $x_1$ , l'axe  $y_1$ , et l'axe  $z_1$ , respectivement, par rapport au référentiel  $F_0$ . La matrice de rotation dans l'espace est elle aussi une matrice orthogonale.

Enfin, nous allons résoudre l'exemple concret qui est représenté à la figure III.4. La position du point B par rapport au référentiel  $F_1$  est :

$$v_{O_1B}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{III.16}$$

<sup>2</sup> Voir l'annexe

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

Alors que la position de l'origine du référentiel  $F_1$  par rapport au référentiel  $F_0$  est

$$v_{O_0O_1}^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad III.17$$

La partie la plus difficile est de calculer la matrice de rotation  $R_1^0$ . Il s'agit d'obtenir les expressions des vecteurs unitaires le long des axes du référentiel  $F_1$ , par rapport au référentiel  $F_0$ . Dans cet exemple, ce calcul est relativement simple, puisque les axes des deux référentiels sont parallèles ou orthogonaux, mais souvent ce calcul est assez complexe. Nous avons alors

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad III.18$$

Ainsi, la position du point  $B$  par rapport au référentiel  $F_0$  est :

$$v_{O_0B}^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad III.19$$

Dans cet exemple, il est facile de valider notre réponse en inspectant le cuboïde carré en pointillé entre le référentiel  $F_0$  et le point  $B$  (figure III.4).

Admettons, maintenant, que les coordonnées du point  $B$  sont connues uniquement dans le référentiel  $F_0$ . Alors les coordonnées de ce point par rapport au référentiel  $F_1$  peuvent être trouvées à l'aide de l'équation suivante :

$$v_{O_1B}^1 = v_{O_1O_0}^1 + R_0^1 v_{O_0B}^0 \quad III.20$$

Où la position du point  $B$  par rapport au référentiel  $F_0$  est :

$$v_{O_0B}^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad III.21$$

Alors que la position de l'origine du référentiel  $F_0$  par rapport au référentiel  $F_1$  est :

$$v_{O_1O_0}^1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad III.22$$

La matrice  $R_0^1$  est la matrice de rotation qui représente l'orientation du référentiel  $F_0$  par rapport au référentiel  $F_1$ .  $R_1^0$ . Ces colonnes sont composées des vecteurs unitaires le long des axes du référentiel  $F_0$  exprimées par rapport au référentiel  $F_1$ . Nous avons alors :

# Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

$$R_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad III.23$$

Notez que la transposée de la matrice  $R_0^1$  est bel et bien la matrice  $R_0^1$  que nous avons obtenue dans l'équation (III.18).

Enfin, la position du point B par rapport au référentiel  $F_1$  est :

$$v_{O_1B}^1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad III.24$$

## III.4. Modèle géométrique directe [5]

### III.4.1. Exemple d'un robot sériel à cinq articulations pivots :

Pour mieux comprendre la méthode Denavit-Hartenberg, nous allons l'appliquer dans le cas d'un robot réel. Il s'agit d'un robot sériel à cinq articulations pivots, et plus précisément de l'ancien modèle VP-5243 de la compagnie DENSO Robotics.

La figure III.5 présente une photo du robot VP-5243, ainsi qu'un schéma qui illustre chacun des cinq axes des articulations pivots avec le sens positive de rotation.

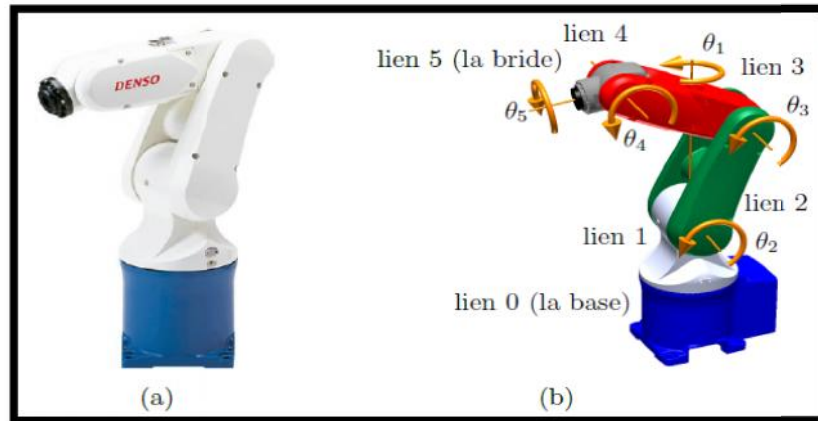


FIG III.5 : (a) Le robot VP-5243 de la compagnie DENSO Robotics et (b) un schéma illustrant les sens positifs de rotations [5].



## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

Une fois les référentiels DH placés, la prochaine étape est de trouver les paramètres DH en se référant aux figures III.5(a) et (b). Encore une fois, il est nécessaire de s'imaginer le robot avec ses référentiels DH bougé.

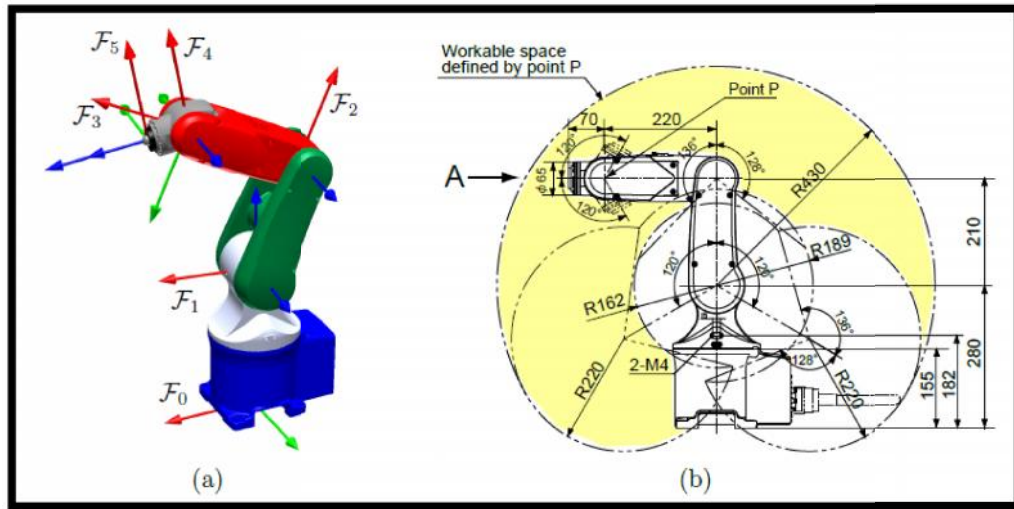


FIG III.6 : (a) Une des solutions pour les référentiels DH et (b) les dimensions du robot [5].

Le choix de configuration zéro à été déjà fait par son fabricant et nous devons se conformer à ce choix. Dans sa configuration zéro, le vrai robot VP-5243 est étiré vers le haut. En autres mots, dans la configuration illustrée à la figure (III.6) (b),  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$ ,  $\theta_3 = 90^\circ$ ,  $\theta_4 = -90^\circ$  et  $\theta_5 = 0^\circ$ .

$i$	$\overline{\theta_i}$	$\overline{a_i}$	$\overline{a_i}$	$\overline{\alpha_i}$
1	$0^\circ$	280 mm	0 mm	$-90^\circ$
2	$-90^\circ$	0 mm	210 mm	$0^\circ$
3	$90^\circ$	0 mm	220 mm	$0^\circ$
4	$-90^\circ$	0 mm	0 mm	$-90^\circ$
5	$0^\circ$	70 mm	0 mm	$0^\circ$

Tableau III.1 - Paramètres DH pour être conforme avec le vrai robot VP-5243 [5].

La prochaine étape est de substituer les paramètres DH du tableau III.1 dans l'équation (III.25) :

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

$$T_i^{i-1} = \text{rot}(\theta_z)_{i-1}^i \text{trans}(d)_{i-1}^i \text{trans}(a)_{i-1}^i \text{rot}(\alpha_x)_{i-1}^i \quad \text{III.25}$$

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 280 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.26}$$

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 210s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -210c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.27}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 220c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 220s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.28}$$

$$T_4^3 = \begin{pmatrix} s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ -c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.29}$$

$$T_5^4 = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.30}$$

Enfin, il ne reste que de substituer les matrices ci-dessus dans l'équation (III.31) et faire quelques manipulations trigonométriques afin de rendre l'expression finale plus compacte :

$$T_5^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 \quad \text{III.31}$$

$$T_5^0 = \begin{pmatrix} -c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 (70 s_{234} + 220 s_{23} + 210 s_2) \\ -s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 (70 s_{234} + 220 s_{23} + 210 s_2) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & c_{234} & 280 + 70 c_{234} + 220 c_{23} + 210 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où  $s_1 = \sin\theta_1$ ,  $c_1 = \cos\theta_1$ ,  $s_2 = \sin\theta_2$ ,  $c_2 = \cos\theta_2$ ,  $s_5 = \sin\theta_5$ ,  $c_5 = \cos\theta_5$ ,  $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$ ,  $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$ ,  $s_{234} = \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$  et  $c_{234} = \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$

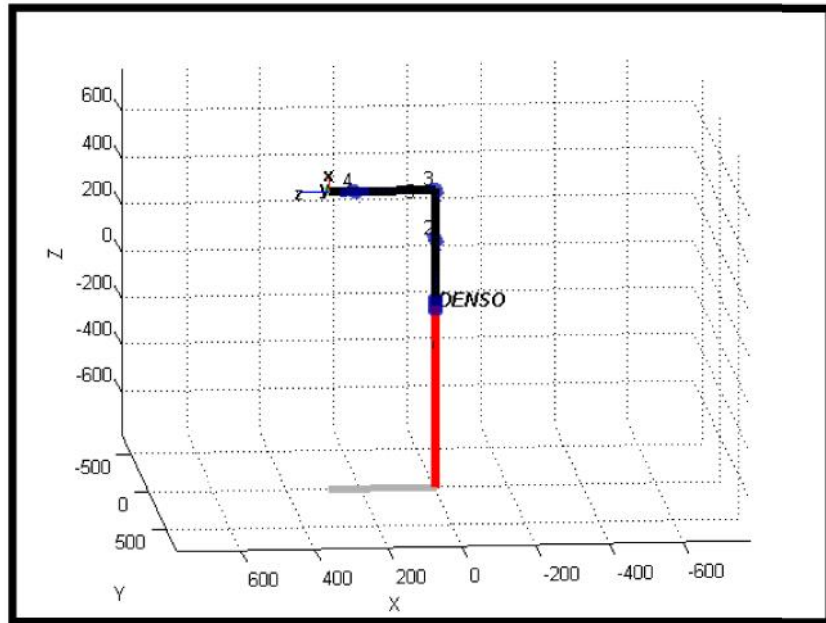


FIG III.7: La position de repos

### III.5. Application de la méthode Dénavit-Hartenberg

#### III.5.1. Premier mouvement :

$$\theta_1 = 180^\circ, \theta_2 = -45^\circ, \theta_3 = 60^\circ, \theta_4 = 36^\circ \text{ et } \theta_5 = 30^\circ$$

$$T_5^0 = \begin{pmatrix} 0.8836 & -0.3995 & -0.2443 & 286.6943 \\ -0.4306 & -0.08981 & -0.0889 & 104.3286 \\ -0.1839 & 0.1838 & -0.9656 & 148.7209 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_x=286.6943$$

$$P_y=104.3286$$

$$P_z=148.7209$$

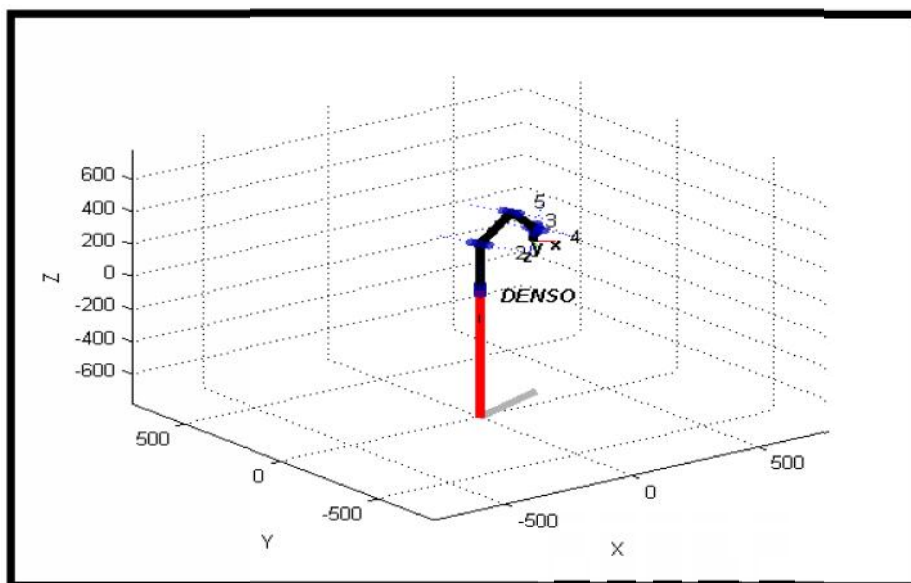


FIG III.8 : articulations avec  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \text{ et } \theta_5)$

# Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

## III.5.2. Deuxième mouvement :

$\theta_1 = 20^\circ, \theta_2 = -30^\circ, \theta_3 = 80^\circ, \theta_4 = -35^\circ$  et  $\theta_5 = 45^\circ$

$$T_5^0 = \begin{pmatrix} -0.5450 & 0.3147 & 0.7771 & -306.5959 \\ 0.5000 & 0.8660 & -0.000 & 0.000 \\ -0.6730 & 0.3886 & -0.6293 & 327.4998 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_x = -306.5959$$

$$P_y = 0$$

$$P_z = 327.4998$$

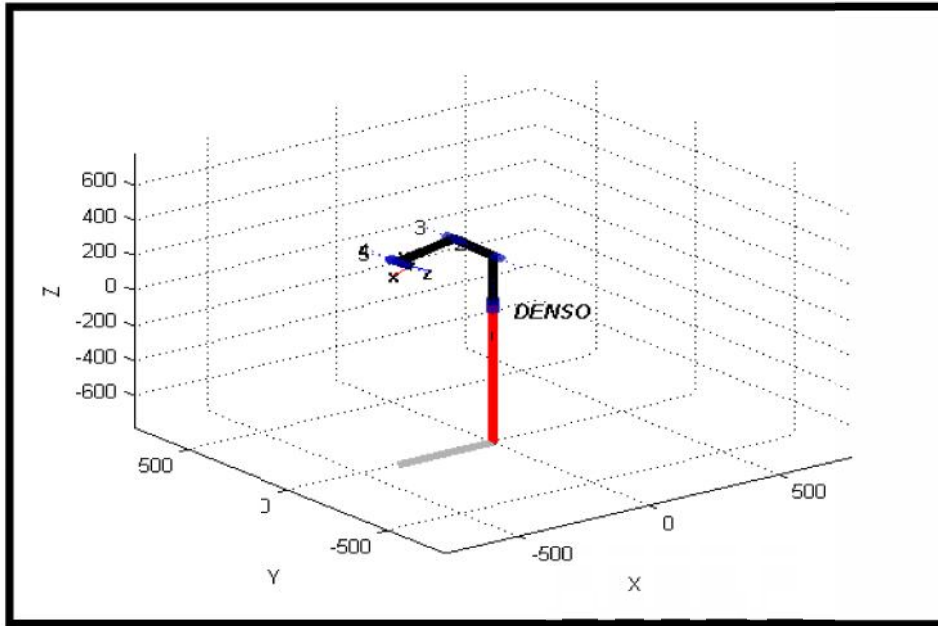


FIG III.9 : articulations avec  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  et  $\theta_5)$ .

## III.6. Modèle géométrique inverse [5]

Le modèle géométrique inverse est, sans aucun doute, la partie la plus difficile en robotique. Contrairement au modèle géométrique directe. Pour résoudre trouver le modèle géométrique inverse d'un robot à n articulations, il faut généralement résoudre l'équation suivante :

$$T_{outil}^{atelier} = T_0^{atelier} T_n^0 T_{outil}^n \quad III.32$$

Où  $T_0^{atelier}$  et  $T_{outil}^n$  sont connues, ainsi que la matrice  $T_{outil}^{atelier}$  (C'est la pose désiré), alors que la matrice  $T_n^0$  est connue sous forme d'une expression en fonction des n variables articulaires qui sont maintenant considérées comme inconnues.

Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(T_0^{atelier})^{-1} T_{outil}^{atelier} (T_{outil}^n)^{-1} = T_n^0 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad III.33$$

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

Où  $n_x, n_y, n_z, o_x, o_y, o_z, a_x, a_y, a_z, p_x, p_y$  et  $p_z$  seront considérés comme connus.

Ainsi, pour résoudre la cinématique inverse du robot VP-5243, il faut simplement résoudre l'équation matricielle ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} -c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 (70s_{234} + 220s_{23} + 210s_2) \\ -s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 (70s_{234} + 220s_{23} + 210s_2) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & c_{234} & 280 + 70c_{234} + 220c_{23} + 210c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad III.34$$

Cette équation matricielle représente en fait douze équations trigonométriques, en cinq inconnues :

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  et  $\theta_5$ . Heureusement, il existe une façon simple de simplifier certaines de ces équations, en les découplant. Il faut simplement pré-multiplier les deux cotés de l'équation matricielle (III.34) par  $(T_1^0)^{-1}$ . Cette opération va nous débarrasser des expressions en  $\theta_1$  dans la matrice à gauche :

$$\begin{pmatrix} -c_{234} c_5 & c_{234} s_5 & s_{234} & 70s_{234} + 220s_{23} + 210s_2 \\ -c_{234} c_5 & c_{234} s_5 & -c_{234} & -70c_{234} - 220c_{23} - 210c_2 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p_x c_1 + p_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & 280 - p_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & o_x s_1 - o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad III.35$$

Pour continuer, il faut absolument se faire une idée du nombre de solutions possibles à la cinématique inverse de notre robot. C'est probablement la partie la plus difficile ; elle nécessite de l'expérience.

Dans le cas général le robot VP-5243 a quatre solutions possibles à la cinématique inverse. Ainsi, un roboticien expérimenté saura toute de suite que l'angle  $\theta_1$  acceptera deux solutions, avec un décalage de  $180^\circ$ .

Cette observation est très importante, car elle nous indique que nous n'avons que trouver une seule équation trigonométrique linéaire en  $\cos \theta_1$  et  $\sin \theta_1$ . Pourtant, nous avons les deux équations suivantes, tirée de l'équation matricielle (III.35) :

$$-a_x s_1 + a_y c_1 = 0 \quad III.36$$

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = 0 \quad III.37$$

il faut réaliser que le vecteur  $[a_x, a_y]^T$  est la projection du vecteur unitaire le long de l'axe  $z_5$  du référentiel  $F_5$  sur le plan  $x_0 y_0$  du référentiel  $F_0$ . De façon similaire, le vecteur  $[p_x, p_y]^T$  est

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

la projection du vecteur qui relie l'origine du référentiel  $F_0$  avec l'origine du référentiel  $F_5$  sur le plan  $x_0y_0$  du référentiel

$F_0$ . Il est facile de voir que, en général, ces deux projections sont colinéaires (c'est-à-dire que le ratio  $a_x : a_y$  est égale au ratio  $p_x : p_y$ ). Ceci veut dire que les deux équations ci-dessus sont dépendantes et que nous ne pouvons pas les considérer simultanément.

Cependant, à cette étape, une erreur fréquente sera de considérer seulement une des deux équations, par exemple l'équation (III.36). Mais qu'est-ce qu'il va arriver si l'axe  $z_5$  pointe vers le haut (c'est-à-dire que  $a_x = a_y = 0$ ) ? Notre équation aura la forme  $0 = 0$ . De façon similaire, si l'origine du référentiel

$F_5$  se trouve sur l'axe 1 du robot,  $p_x = p_y = 0$  et l'équation (III.37) dégénère (aura la forme  $0 = 0$ ). Voici pourquoi, la solution pour la variable articulaire  $\theta_1$  devra prendre en compte les deux équations :

$$\theta_1 = \begin{cases} \text{atan2}(a_y, a_x) \text{ et } \text{atan2}(-a_y, -a_x), \text{ si } a_x^2 + a_y^2 \neq 0 \\ \text{atan2}(p_y, p_x) \text{ et } \text{atan2}(-p_y, -p_x), \text{ si } a_x^2 + a_y^2 = 0 \text{ et } p_x^2 + p_y^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{III.38}$$

Une fois les valeurs de  $\theta_1$  obtenues, nous pouvons maintenant trouver  $\theta_5$  à partir des deux équations suivantes tirées de l'équation matricielle (III.35) :

$$-s_5 = -n_x s_1 + n_y c_1 \quad \text{III.39}$$

$$-c_5 = -o_x s_1 + o_y c_1 \quad \text{III.40}$$

Ainsi pour chaque solution de  $\theta_1$ , nous pouvons trouver une seule solution pour  $\theta_5$  :

$$\theta_5 = \text{atan2}(n_x s_1 - n_y c_1, o_x s_1 - o_y c_1) \quad \text{III.41}$$

Il est important de comprendre que l'équation III.38 est toujours définie (c'est-à-dire que les arguments de la fonction atan2 ne sont jamais zéro en même temps). En effet, il faut noter que les matrices dans l'équation (III.35) correspondent à la pose du référentiel  $F_5$  par rapport au référentiel  $F_1$ . Ainsi, les expressions  $-n_x s_1 + n_y c_1$  et  $-o_x s_1 + o_y c_1$  correspondent aux projections des vecteurs unitaires le long des axes  $x_5$  et  $y_5$ , respectivement, sur l'axe  $z_0$ . Or, il est évident que  $x_5$  et  $y_5$  ne peuvent pas être normaux à l'axe  $z_1$  (celui qui est le long de l'axe 2 du robot) en même temps.

De façon similaire, nous pouvons trouver  $\theta_{234}$  ( $\theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ ) à partir des deux équations suivantes tirées de l'équation matricielle (III.34) :

$$s_{234} = a_x c_1 + a_y s_1 \quad \text{III.42}$$

$$-c_{234} = -a_z \quad \text{III.43}$$



## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

Ainsi pour chaque solution de  $\theta_1$ , nous pouvons trouver une seule solution pour  $\theta_{234}$  :

$$\theta_{234} = \text{atan2}(a_x c_1 + a_y s_1, a_z) \quad \text{III.44}$$

Suivant la même logique, les deux expressions  $a_x c_1 + a_y s_1$  et  $-a_z$  correspondent aux projections du vecteur unitaire le long de l'axe  $z_5$  sur les axes  $x_1$  et  $y_1$ , respectivement. Pour que ces deux expressions soient simultanément zéro, il faut que l'axe  $z_5$  soit parallèle à l'axe  $z_1$ , ce qu'il est impossible, car ces axes sont toujours normaux.

Nous pouvons continuer avec l'équation matricielle (III.34) pour trouver  $\theta_{23}$  et  $\theta_3$ , mais il nous sera plus difficile de faire des observations géométriques. Nous allons plutôt post-multiplier les deux cotés de cette équation matricielle par la matrice  $(T_5^4)^{-1}$ , pour nous débarrasser de  $\theta_5$  du côté gauche :

$$\begin{pmatrix} -c_{234} & 0 & s_{234} & 220s_{23} + 210s_2 \\ -c_{234} & 0 & -c_{234} & -220c_{23} - 210c_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 s_5 + q_1 c_5 & q_1 s_5 + q_2 c_5 & a_y s_1 + a_x c_1 & -70a_x c_1 - 70a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1 \\ q_z s_5 - n_z c_5 & -n_z s_5 - q_z c_5 & -a_z & 280 + 70a_z - p_z \\ q_3 s_5 + q_4 c_5 & q_4 s_5 - q_3 c_5 & -a_x s_1 + a_y c_1 & 70a_x s_1 - 70a_y c_1 - p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III.45}$$

Où  $q_1 = n_x c_1 + n_y s_1, q_2 = o_x c_1 + o_y s_1, q_3 = o_x s_1 - o_y c_1$  et  $q_4 = -n_x s_1 + n_y c_1$

Avant de continuer, il faut noter que les matrices homogènes de cette dernière équation matricielle correspondent à la pose du référentiel  $F_4$  par rapport au référentiel  $F_1$ . Or, il est évident que la distance entre les origines de ces deux référentiels dépend uniquement de l'angle  $\theta_3$ . Ainsi, pour obtenir une équation en  $\theta_3$  seulement, nous allons mettre au carré les composantes en position de l'équation matricielle (III.42) et prendre leur somme :

$$\begin{aligned} & (220s_{23} + 210s_2)^2 + (220c_{23} - 210c_2)^2 + 0^2 \\ & = (-70a_x c_1 - 70a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1)^2 + (280 + 70a_z - p_z)^2 + (70a_x s_1 - 70a_y c_1 - p_x s_1 + p_y c_1)^2 \end{aligned} \quad \text{III.46}$$

Après implications :

$$220^2 + 210^2 + 2(210)(220)c_3 = (-70a_x + p_x)^2 + (p_y - 70a_y)^2 + (p_z - 280 - 70a_z)^2 \quad \text{III.47}$$

L'équation (III.46) n'est rien d'autre que la loi des cosinus appliquée au triangle composée par les origines des référentiels  $F_1, F_2$ , et  $F_3$ . Cette équation a une solution si et seulement si

$$(220 - 210)^2 \leq (-70a_x + p_x)^2 + (p_y - 70a_y)^2 + (p_z - 280 - 70a_z)^2 \leq (220 + 210)^2 \quad \text{III.48}$$

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

Autrement dit, les deux inégalités (III.45) définissent l'enveloppe du travail du robot. Si ces deux inégalités sont satisfaites, la solution pour l'angle  $\theta_3$  est :

$$\theta_3 = \pm \arccos \left( \frac{(-70a_x + p_x)^2 + (p_y - 70a_y)^2 + (p_z - 280 - 70a_z)^2 - 92500}{92400} \right) \quad III.49$$

Tout ce qui reste maintenant c'est de trouver  $\theta_2$ . Nous pouvons faire ça en considérant les deux équations suivantes tirées de l'équation matricielle (III.42) :

$$220s_{23} + 210s_2 = -70a_x c_1 - 70a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1 \quad III.50$$

$$-220c_{23} - 210c_2 = 280 + 70a_z - p_z \quad III.51$$

que nous pouvons réarranger pour obtenir :

$$(220c_3 + 210)s_2 + 220s_2 c_2 = -70a_x c_1 - 70a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1 \quad III.52$$

$$220s_3 s_2 - (220c_3 + 210)c_2 = 280 + 70a_z - p_z \quad III.53$$

La solution de ce système de deux équations linéaires en  $s_2$  et  $c_3$  est :

$$s_2 = \frac{220r_2 s_3 + 220r_1 c_3 + 210r_1}{92500 + 92400c_3} \quad III.54$$

$$c_2 = \frac{-220r_2 c_3 + 220r_1 s_3 - 210r_2}{92500 + 92400c_3} \quad III.55$$

Où  $r_1 = -70a_x c_1 - 70a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1$  et  $r_2 = 280 + 70a_z - p_z$

Puisque le dénominateur dans les deux équations ci-dessus est toujours positif, la solution pour  $\theta_2$  est :

$$\theta_2 = \text{atan2}(220r_2 s_3 + 220r_1 c_3 + 210r_1, -220r_2 c_3 + 220r_1 s_3 - 210r_2) \quad III.56$$

Il faut bien comprendre que, en général, il y aura quatre solutions différentes pour  $\theta_2$ , puisqu'il y a deux solutions pour  $\theta_3$  et deux pour  $\theta_1$ .

Finalement, il ne reste qu'à obtenir  $\theta_4$  :

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \quad III.57$$



## III.6.1. Premier mouvement :

❖ Deuxième solution

$$\theta_1 = 180^\circ, \theta_2 \approx 17^\circ, \theta_3 \approx -60^\circ, \theta_4 \approx 96^\circ \text{ et } \theta_5 \approx 30^\circ$$

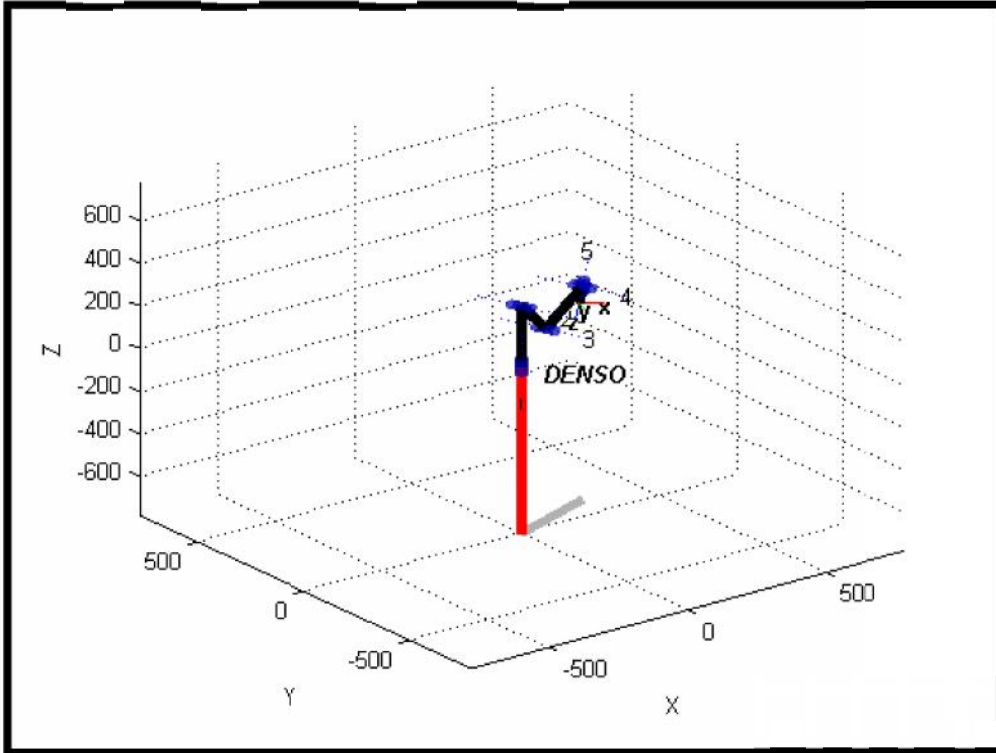


FIG III.10 : articulations avec les nouveaux paramètres  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \text{ et } \theta_5)$ .

❖ Troisième solution :

$$\theta_1 \approx 0^\circ, \theta_2 \approx -17^\circ, \theta_3 \approx 60^\circ, \theta_4 \approx -96^\circ \text{ et } \theta_5 \approx -150^\circ$$

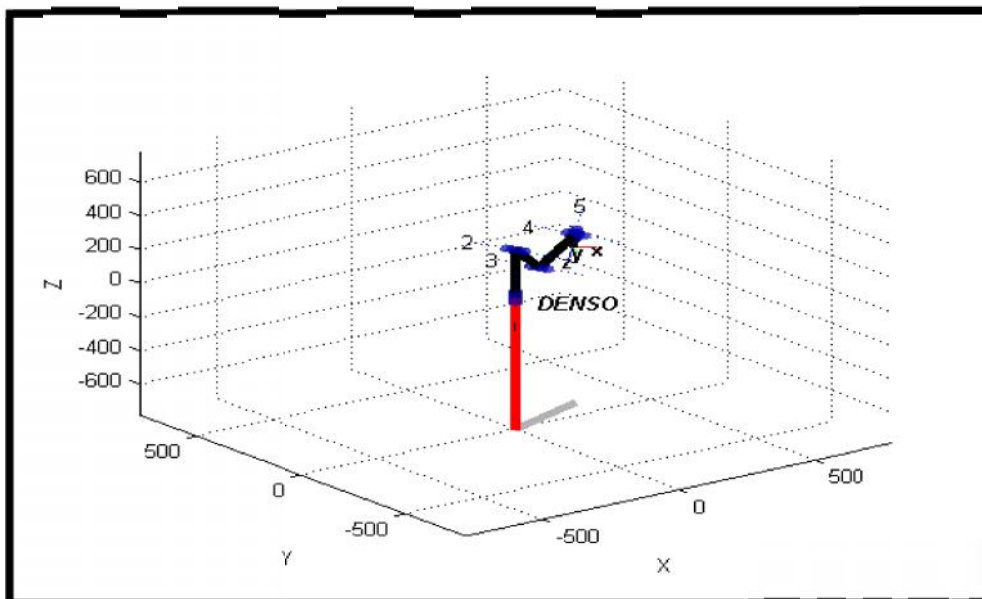


FIG III.11 : articulations avec les nouveaux paramètres  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \text{ et } \theta_5)$ .

❖ Quatrième solution :

❖  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 45^\circ$ ,  $\theta_3 \approx -60^\circ$ ,  $\theta_4 \approx -36^\circ$  et  $\theta_5 \approx -150^\circ$

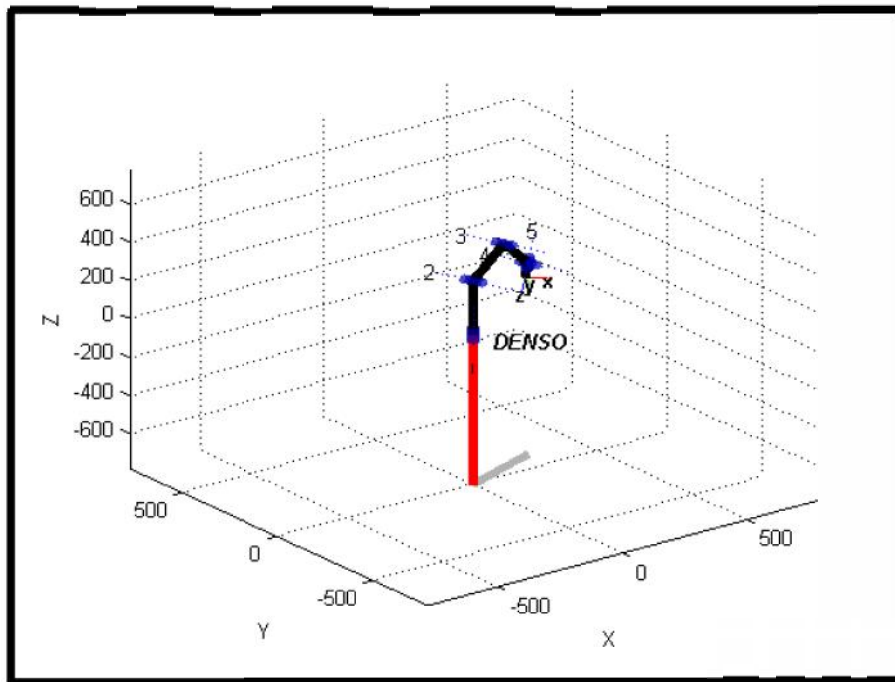


FIG III.12 : articulations avec les nouveaux paramètres ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  et  $\theta_5$ ).

### III.6.2. Deuxième mouvement :

❖ Deuxième solution

$\theta_1 = 20^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 52.19^\circ$ ,  $\theta_3 \approx -80^\circ$ ,  $\theta_4 \approx 42.73^\circ$  et  $\theta_5 \approx 45^\circ$

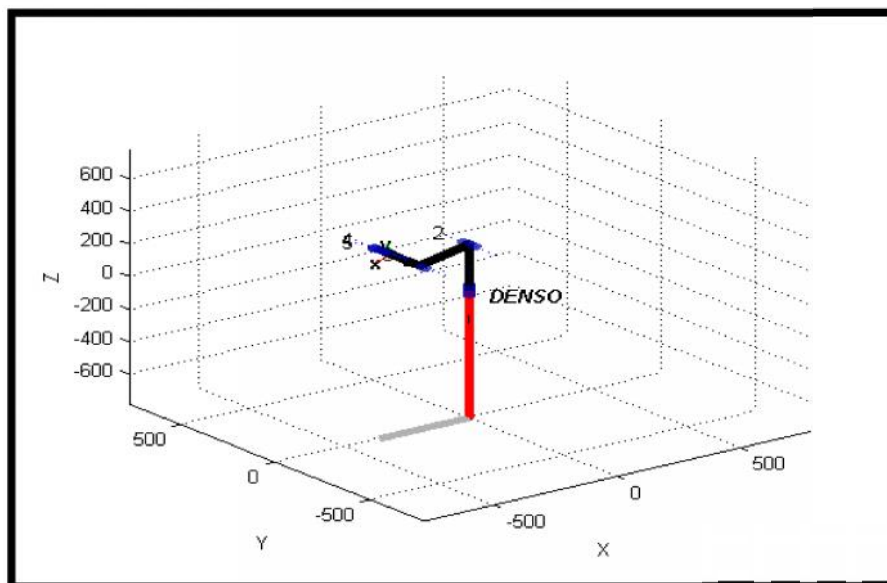


FIG III.13 : articulations avec les nouveaux paramètres ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  et  $\theta_5$ ).

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

❖ Troisième solution :

$$\theta_1 = -160^\circ, \theta_2 \approx -52.19^\circ, \theta_3 \approx 80^\circ, \theta_4 \approx -42.73^\circ \text{ et } \theta_5 = -135^\circ$$

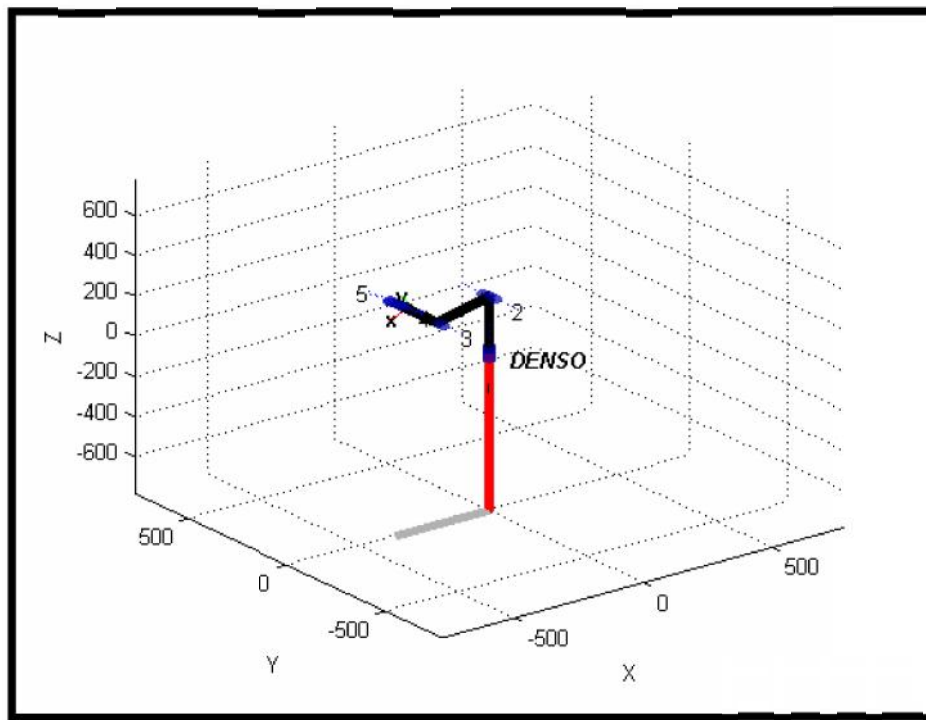


FIG III.14 : articulations avec les nouveaux paramètres ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  et  $\theta_5$ ).

❖ Quatrième solution :

$$\theta_1 = -160^\circ, \theta_2 \approx 30^\circ, \theta_3 \approx -80^\circ, \theta_4 \approx 35^\circ \text{ et } \theta_5 = -135^\circ$$

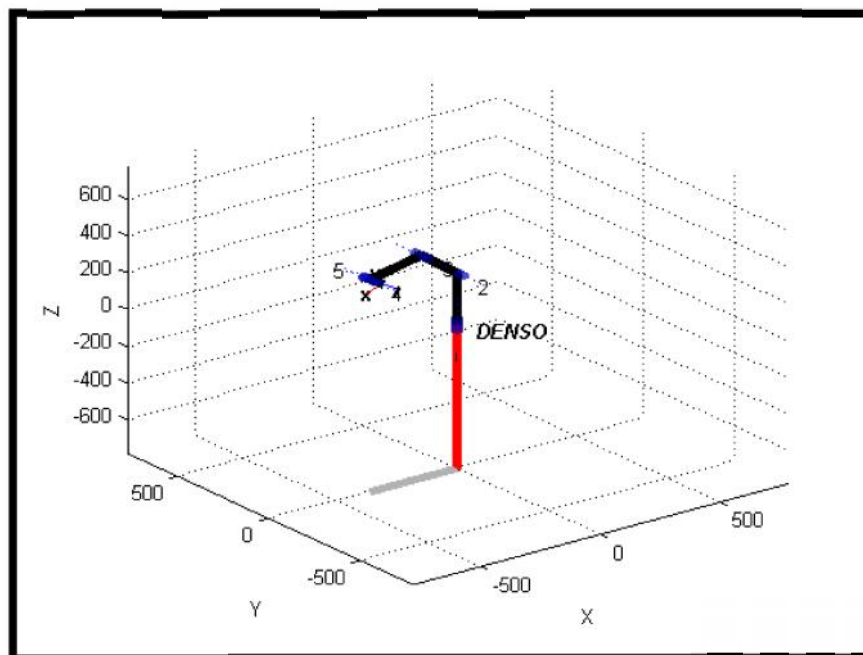


FIG III.15 : articulations avec les nouveaux paramètres ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  et  $\theta_5$ ).

## Chapitre III : Application numérique de la méthode Denavit-Hartenberg

---

### **III.7. Conclusion :**

L'application de la méthode de Denavit-Hartenberg à prouvé sont efficacité sur le plan de calcul en utilisant le logiciel Matlab et robotic toolbox ce qui nous a permis d'obtenir des résultats très satisfaisantes.



# Chapitre IV

CONCEPTION ET SIMULATION AVEC  
SOLIDWORKS

## IV.1. Introduction :

Le logiciel de CAO SolidWorks est une application de conception mécanique 3D paramétrique qui permet aux concepteurs d'esquisser rapidement des idées, d'expérimenter des fonctions et des cotes afin de produire des modèles et des mises en plan précises.

## IV.2. Conception des composants du bras manipulateur

### IV.2.1. Le bâti :

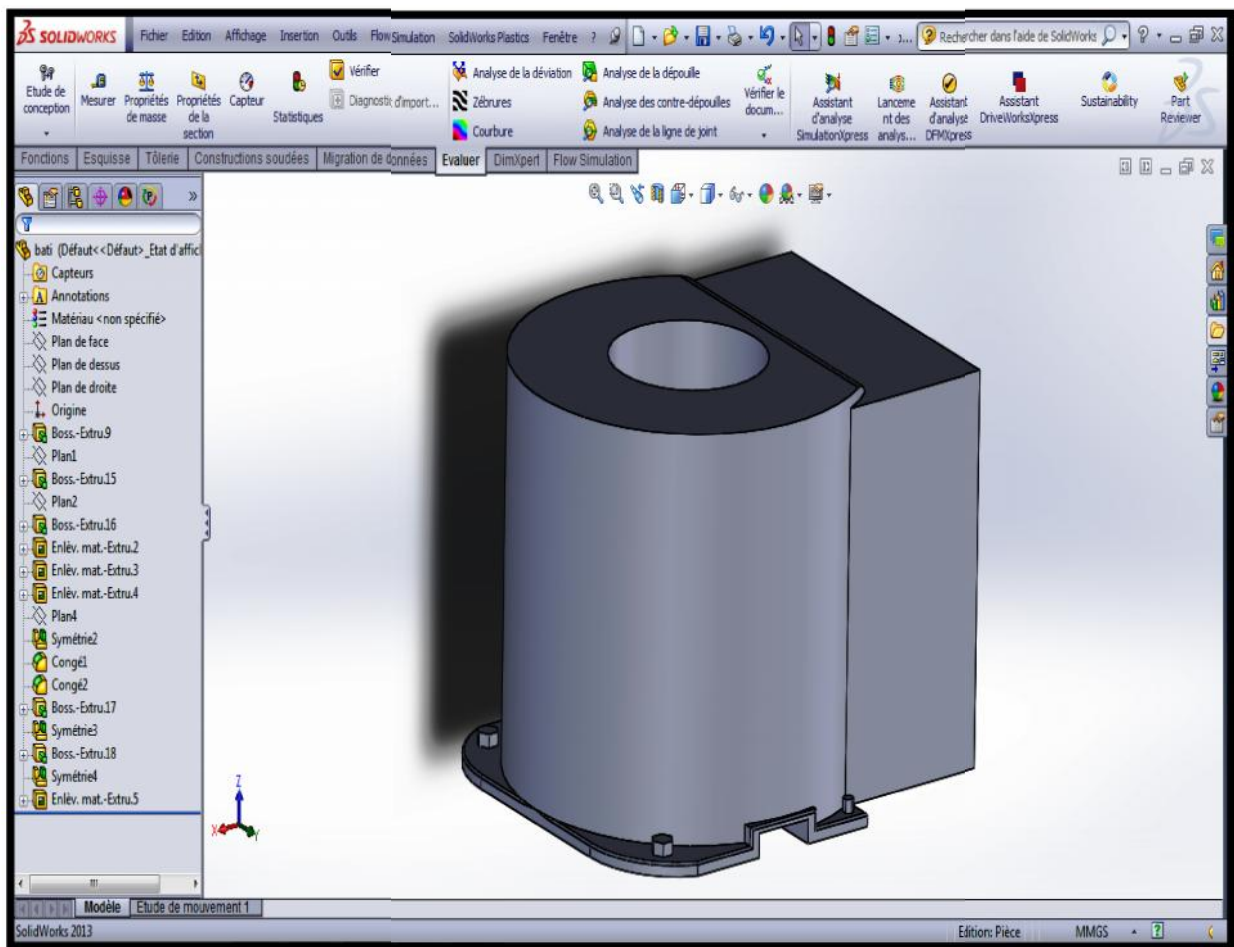


FIG IV.1 Conception du bâti avec Solidworks.

## IV.2.2. Le rotoïde :

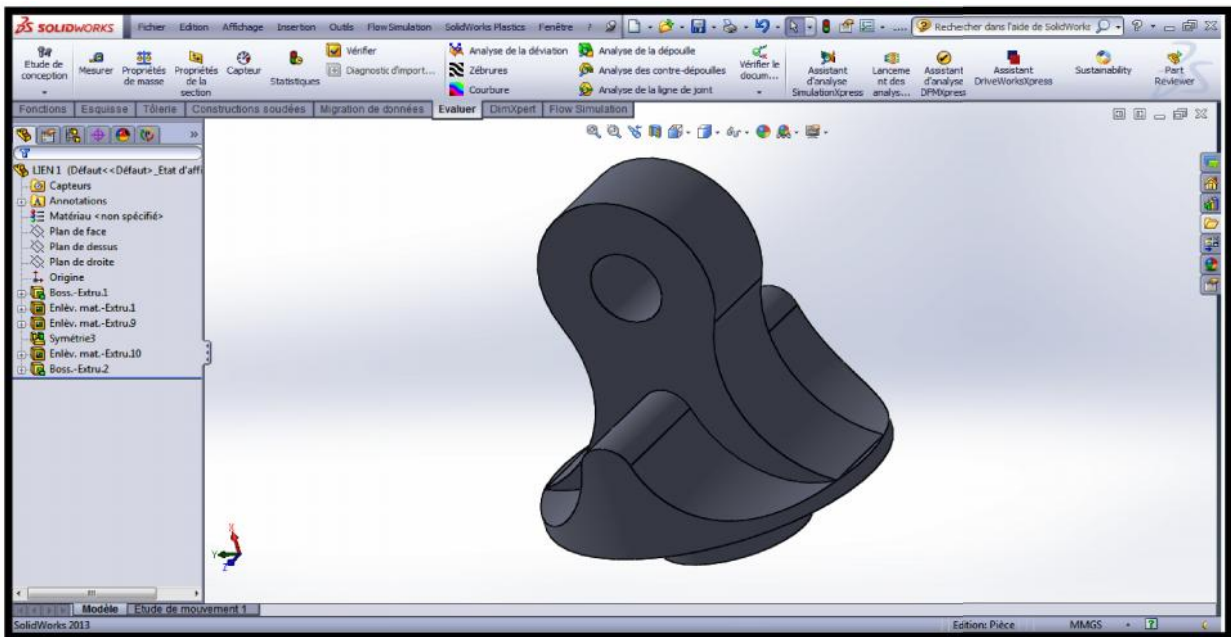


FIG IV.2 : Conception du rotoïde.

## IV.2.3. Le premier bras :

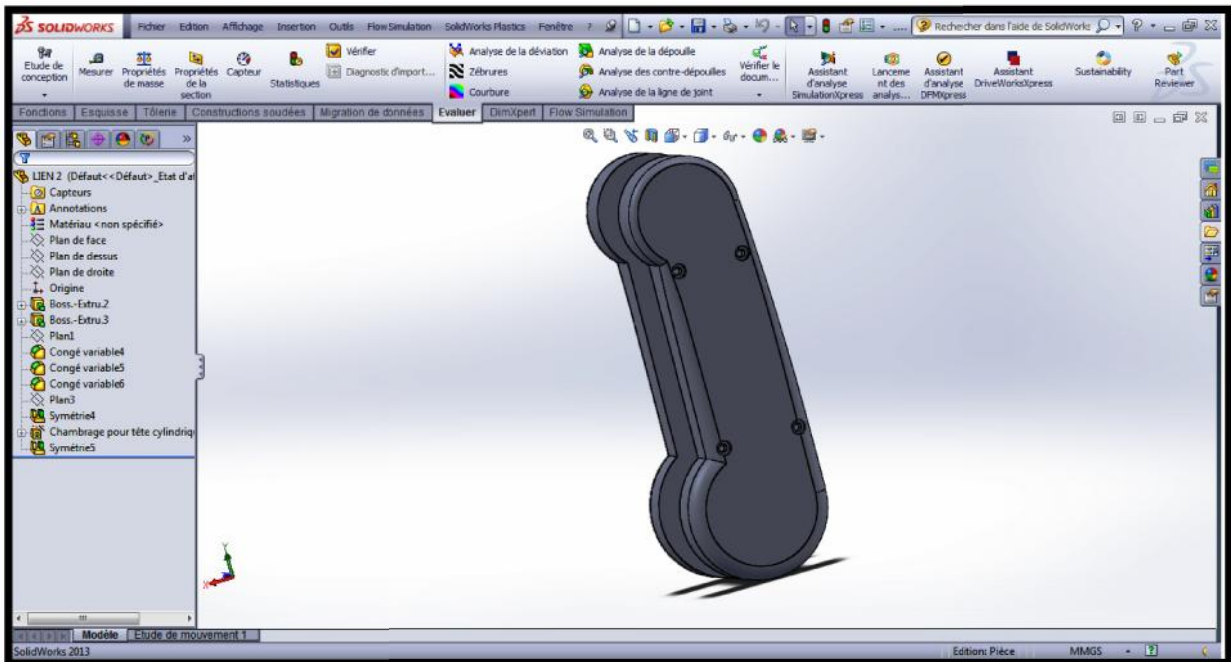


FIG IV.3 : Conception du premier bras.



## IV.2.4. Le deuxième bras :

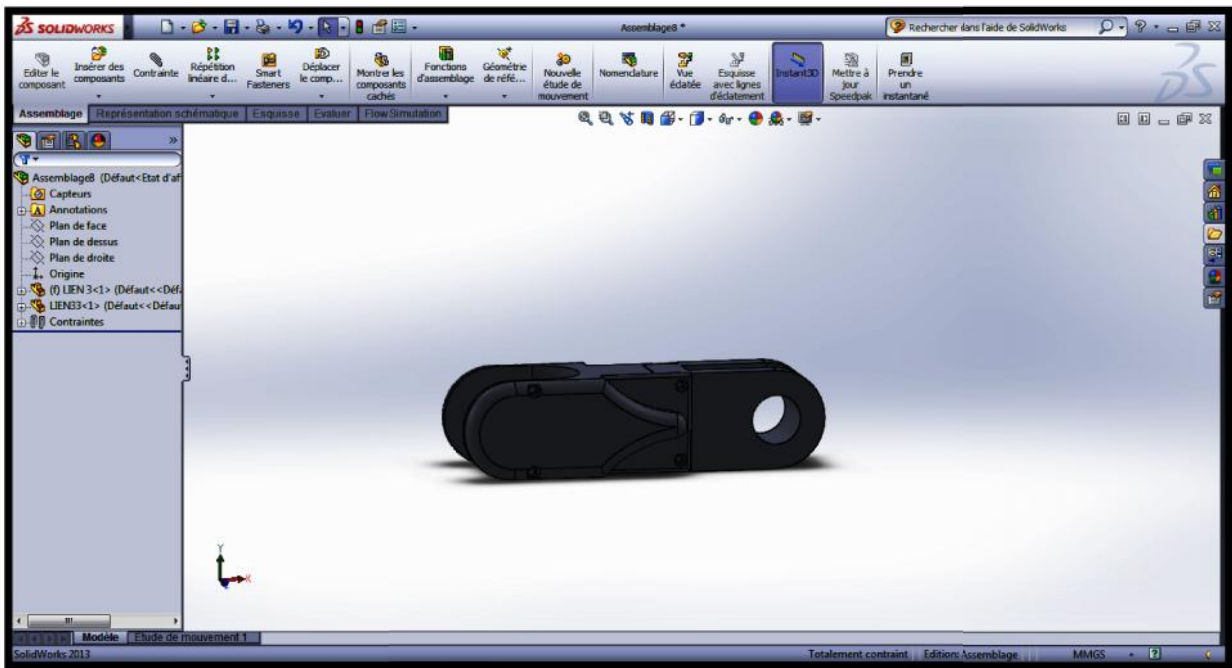


FIG IV.4 : Conception du deuxième bras.

## IV.2.5. L'effecteur :

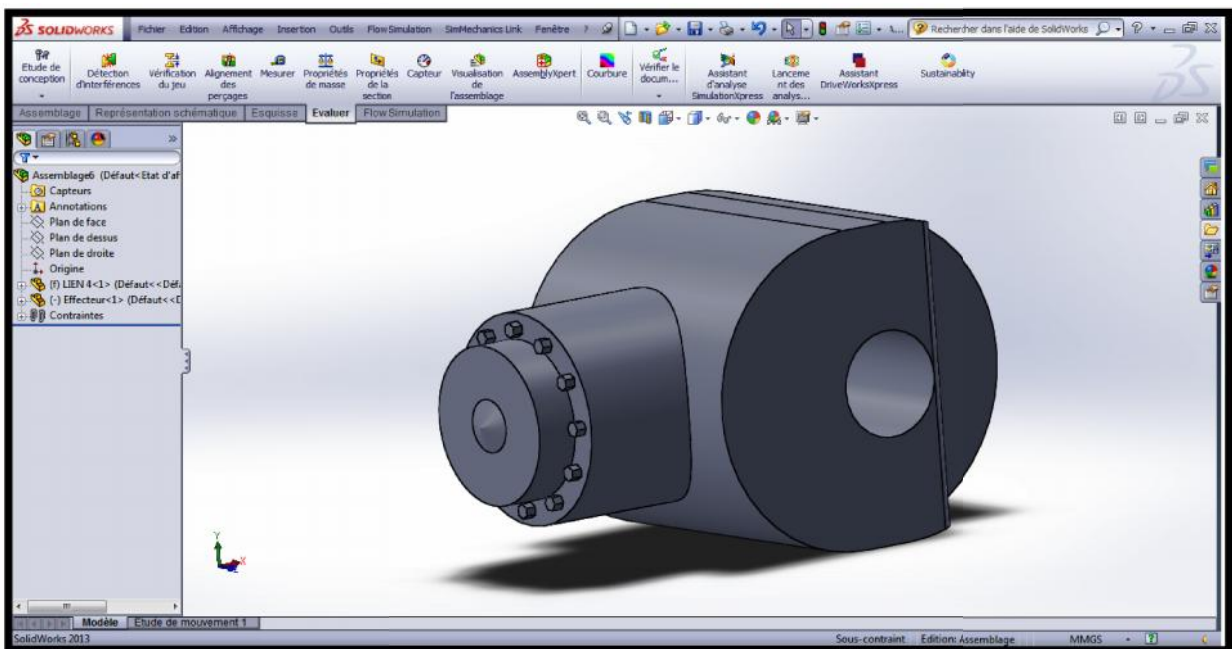


FIG IV.5 : Conception de l'effecteur.



## IV.3. Assemblage des composants :

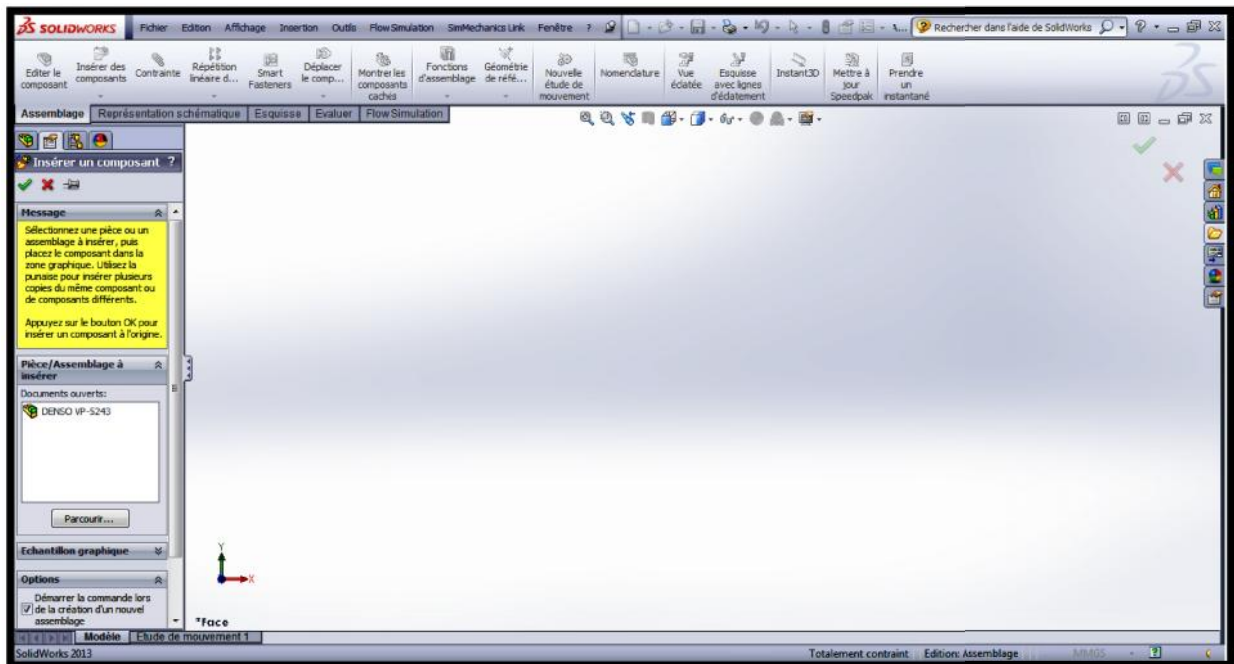


FIG IV.6 : ouvrir l'interface de l'assemblage.

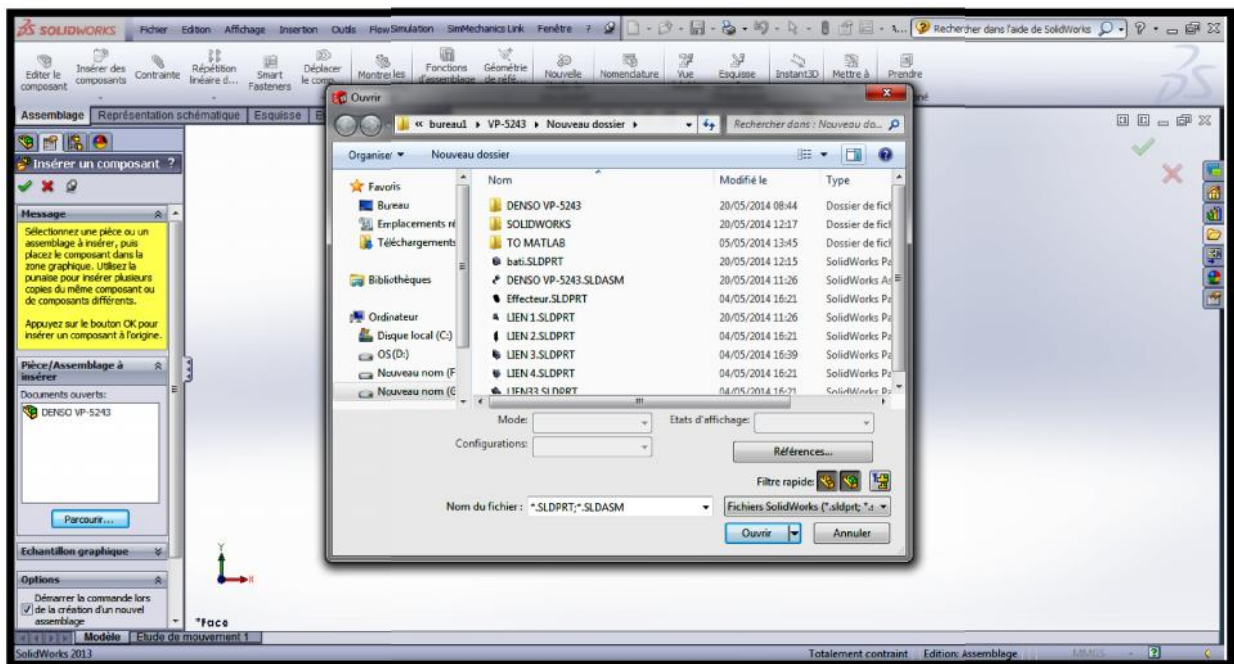


FIG IV.7 : parcourir le dossier des éléments.

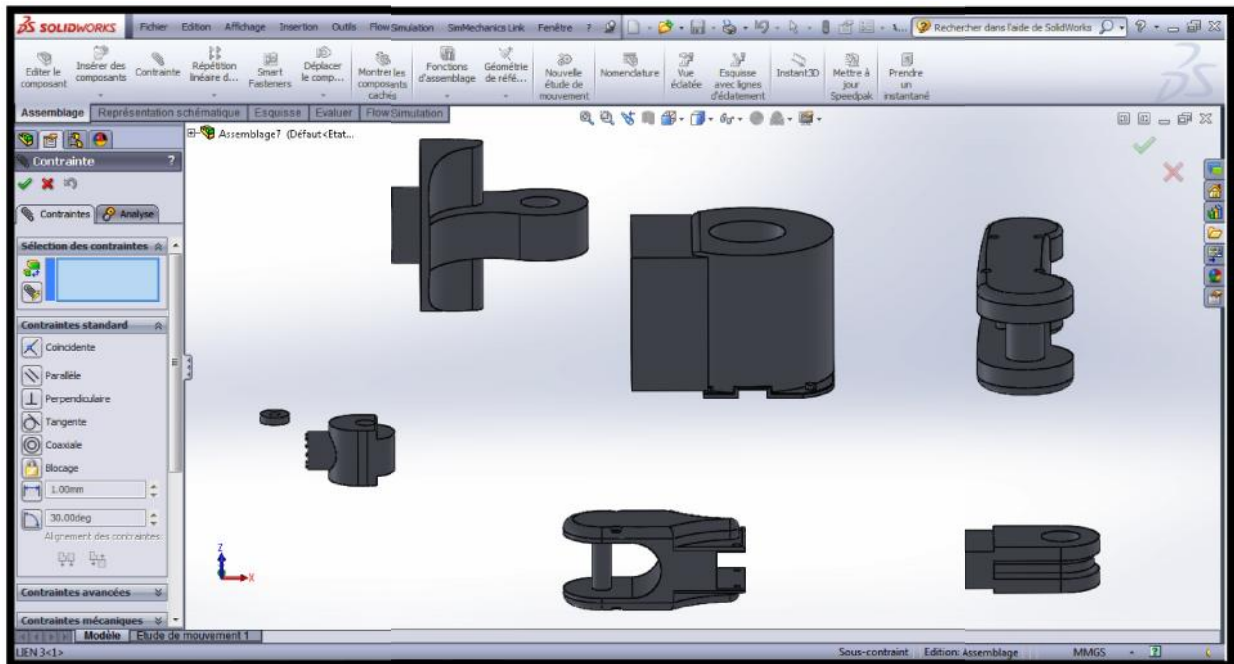


FIG IV.8 : les composants avant l'assemblage.

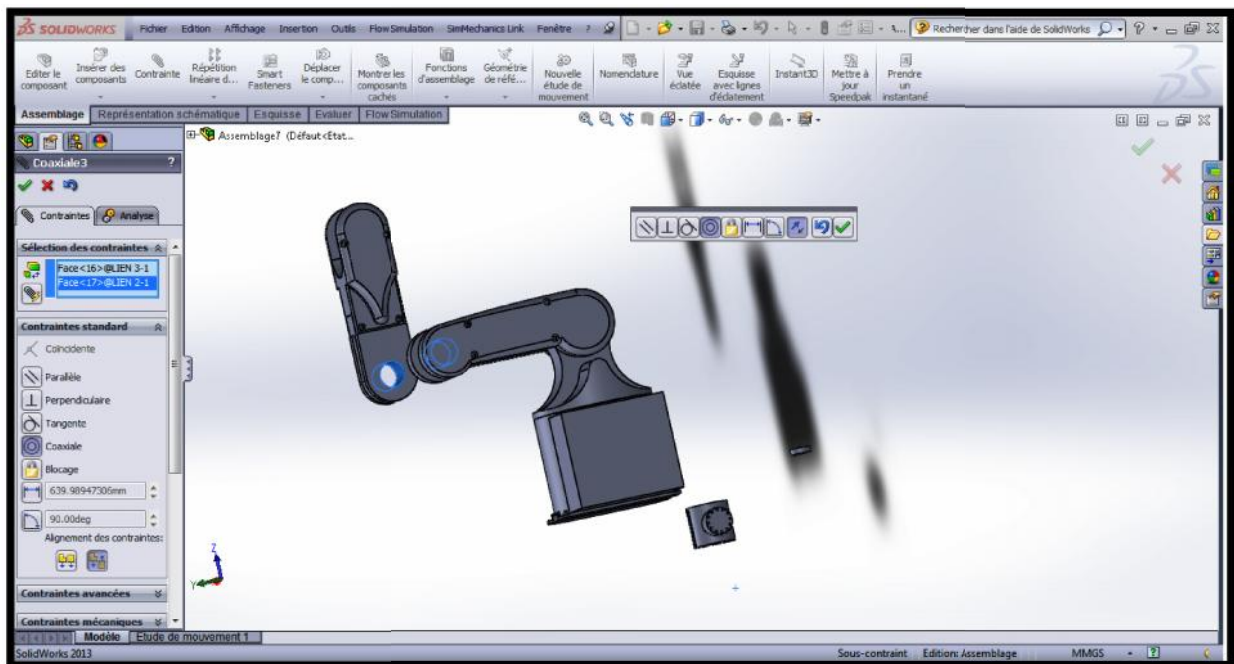


FIG IV.9 : Définir les contraintes.

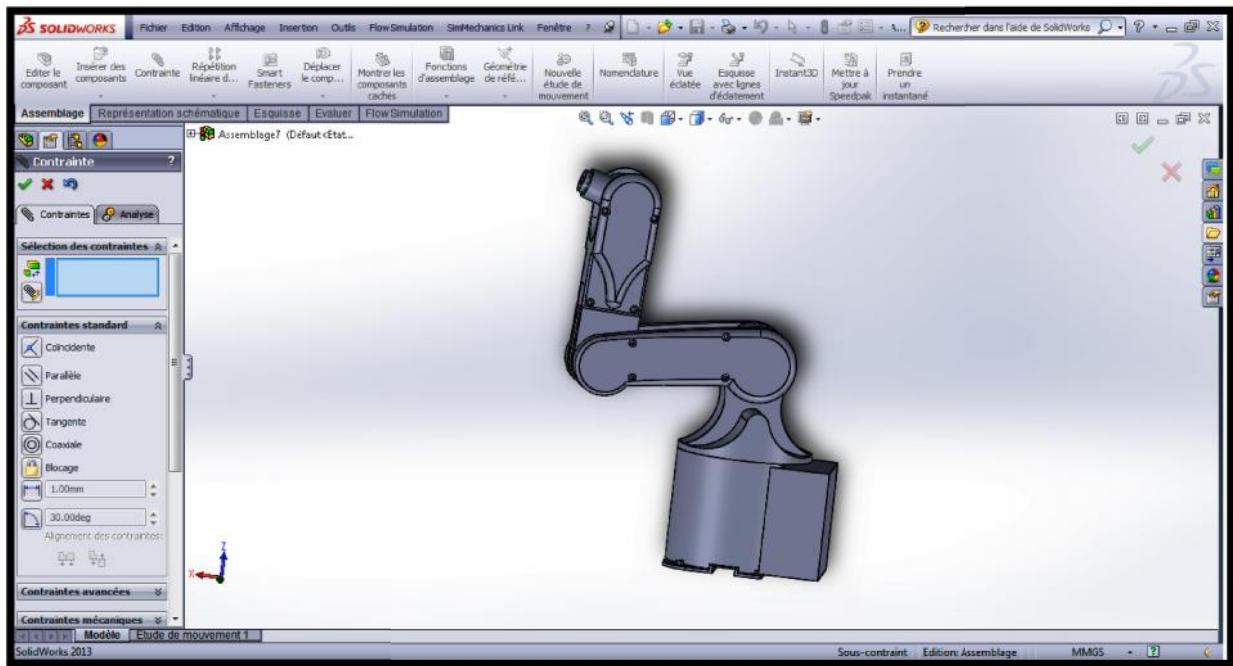


FIG IV.10 : Assemblage des composants.

## IV.4. Simulation avec Solidworks :

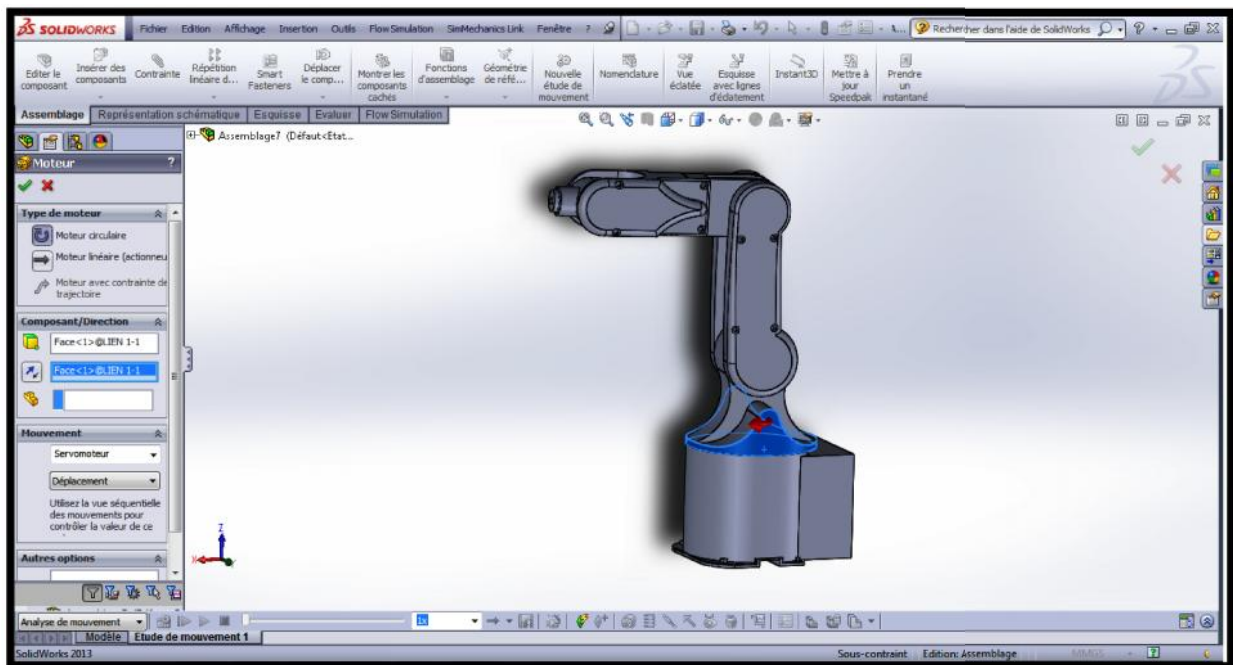


FIG IV.11 : définir la position et le type de chaque moteur.



# Chapitre IV : Conception et Simulation avec Solidworks

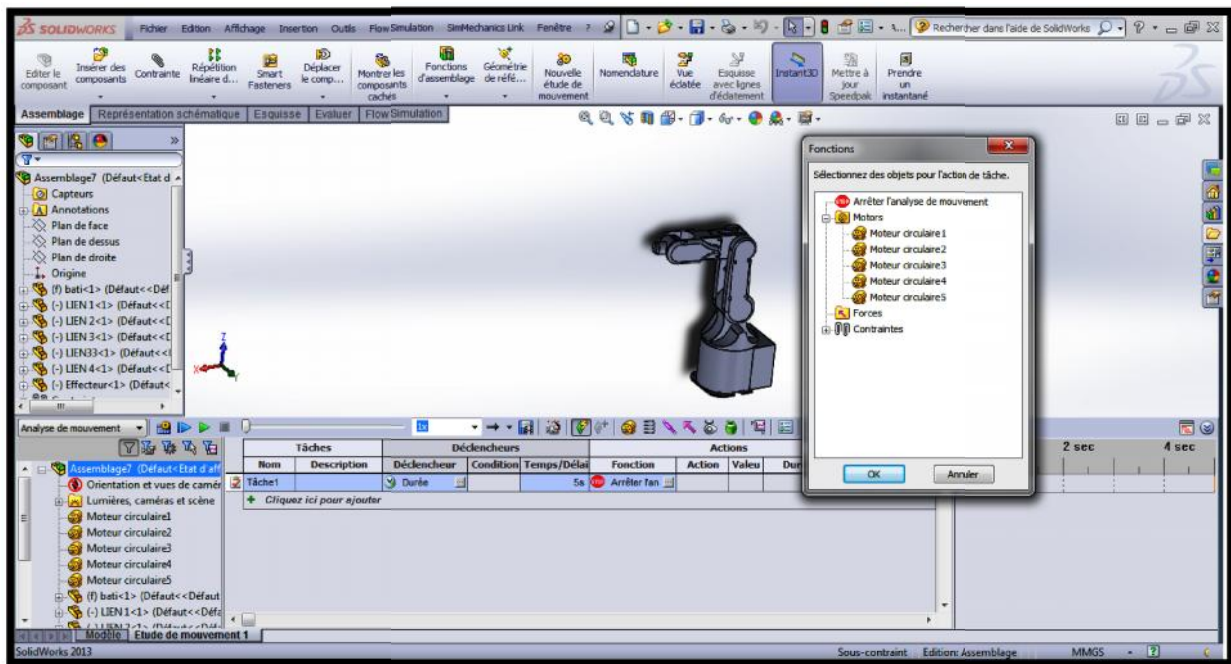


FIG IV.12 : Répartitions des taches aux moteurs.

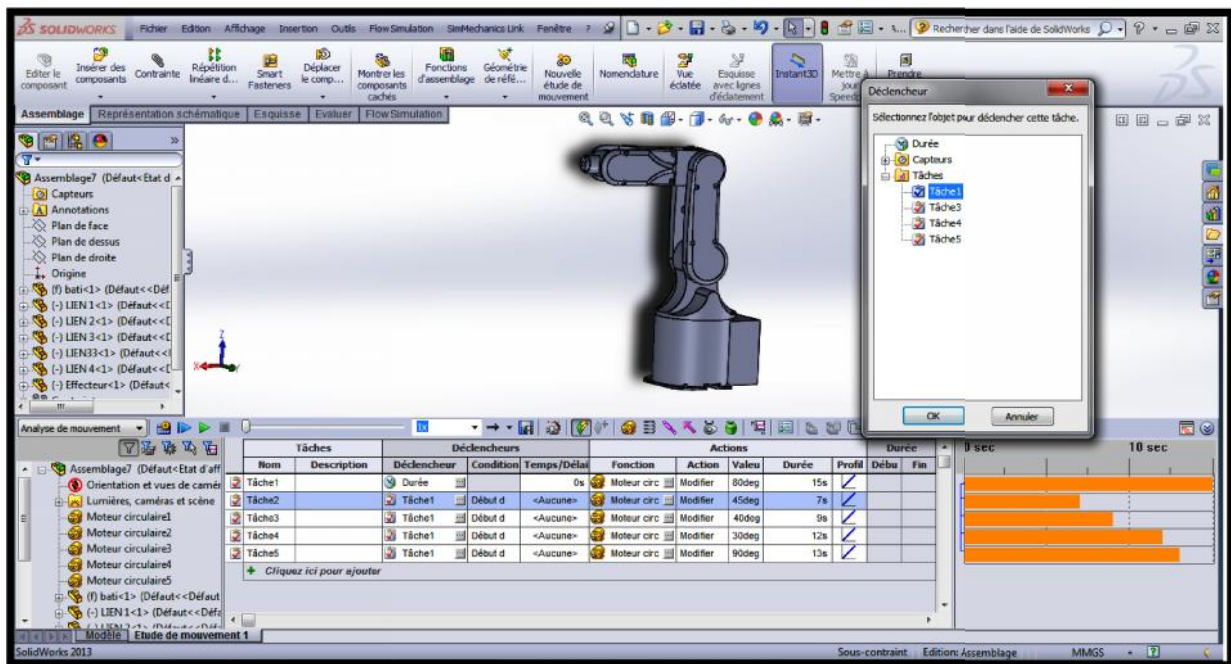


FIG IV.13 : Ordre des taches.

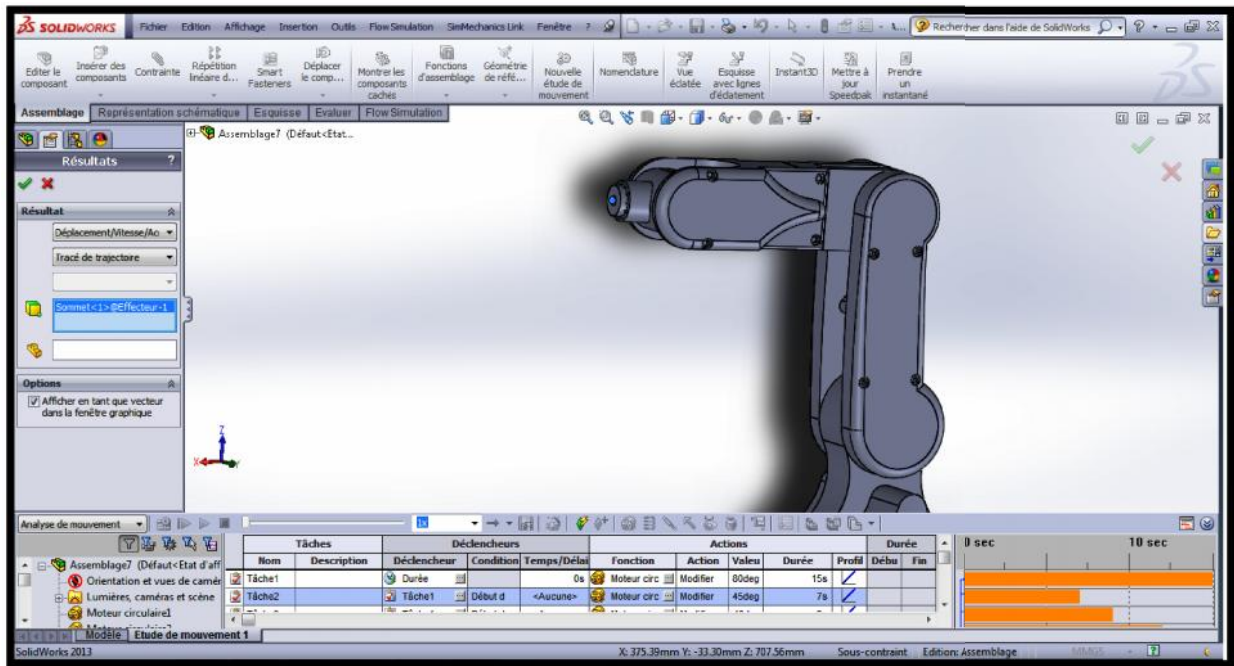


FIG IV.14 : traçage de la trajectoire de l'effecteur.

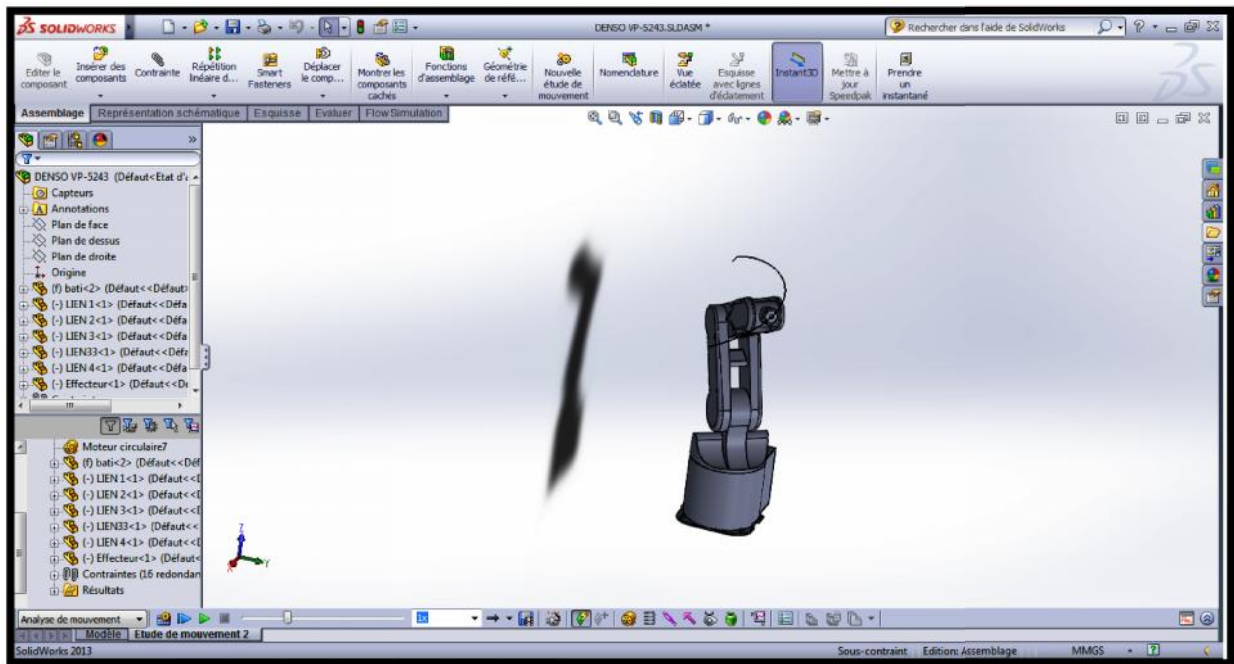


FIG IV.15 : le premier mouvement en cours du bras.

## Chapitre IV : Conception et Simulation avec Solidworks

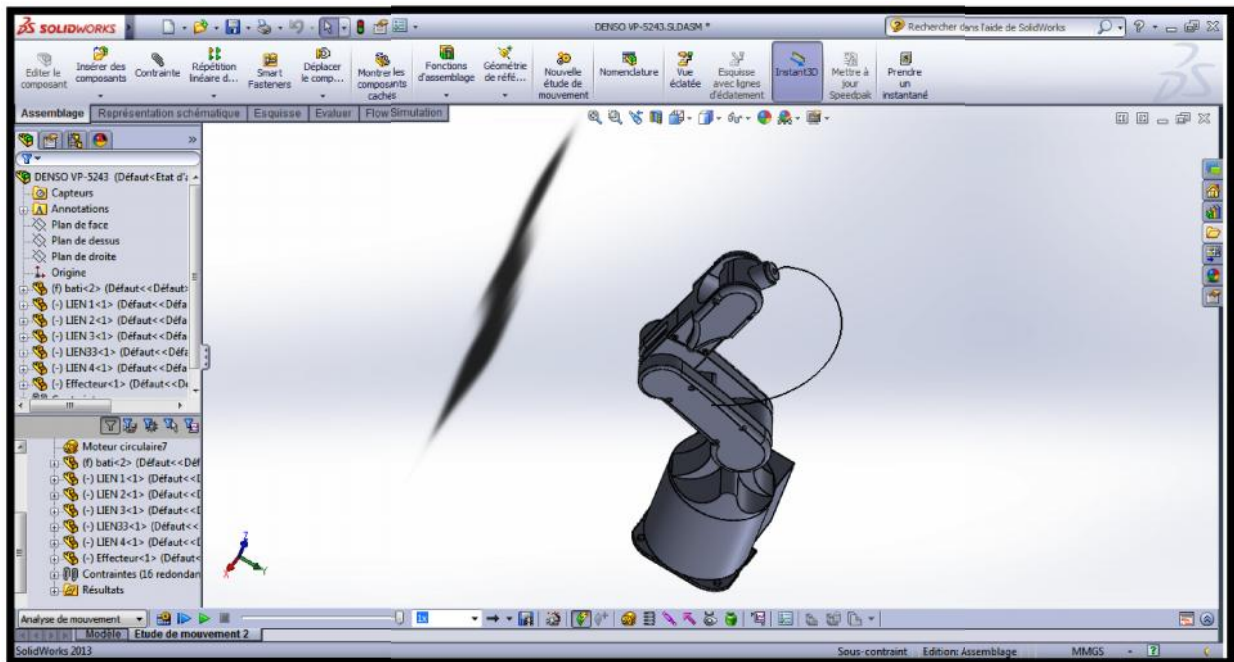


FIG IV.16 : Fin de premier mouvement du bras.

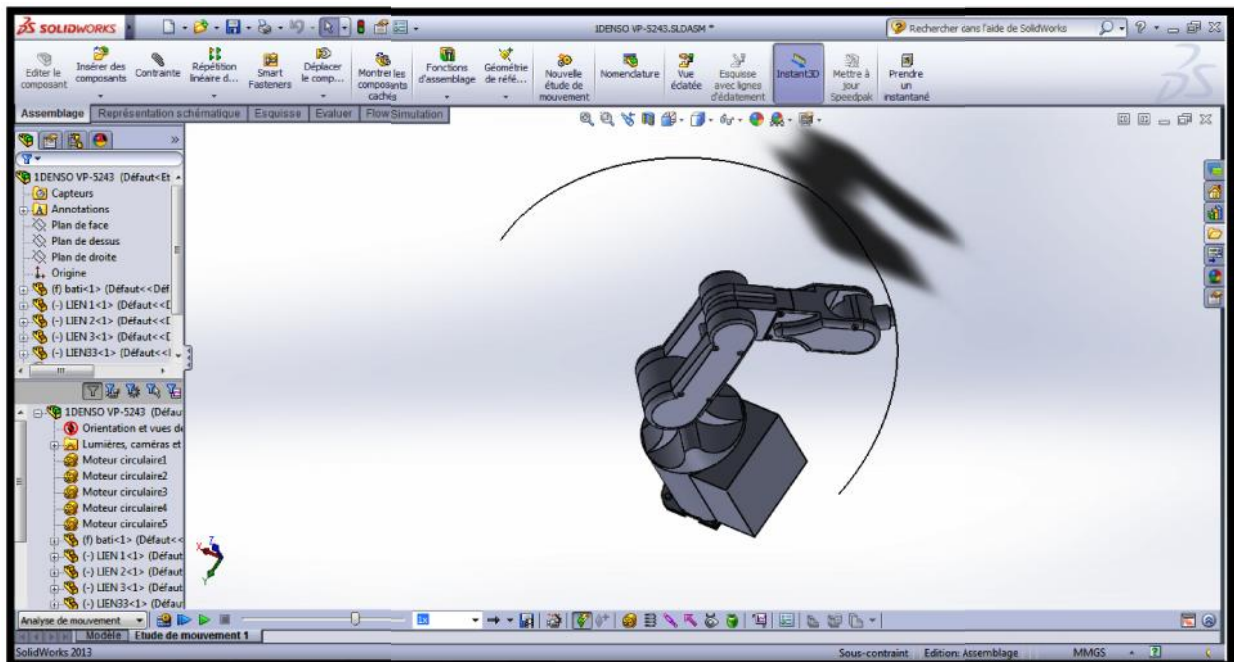


FIG IV.17 : deuxième mouvement en cours du bras.



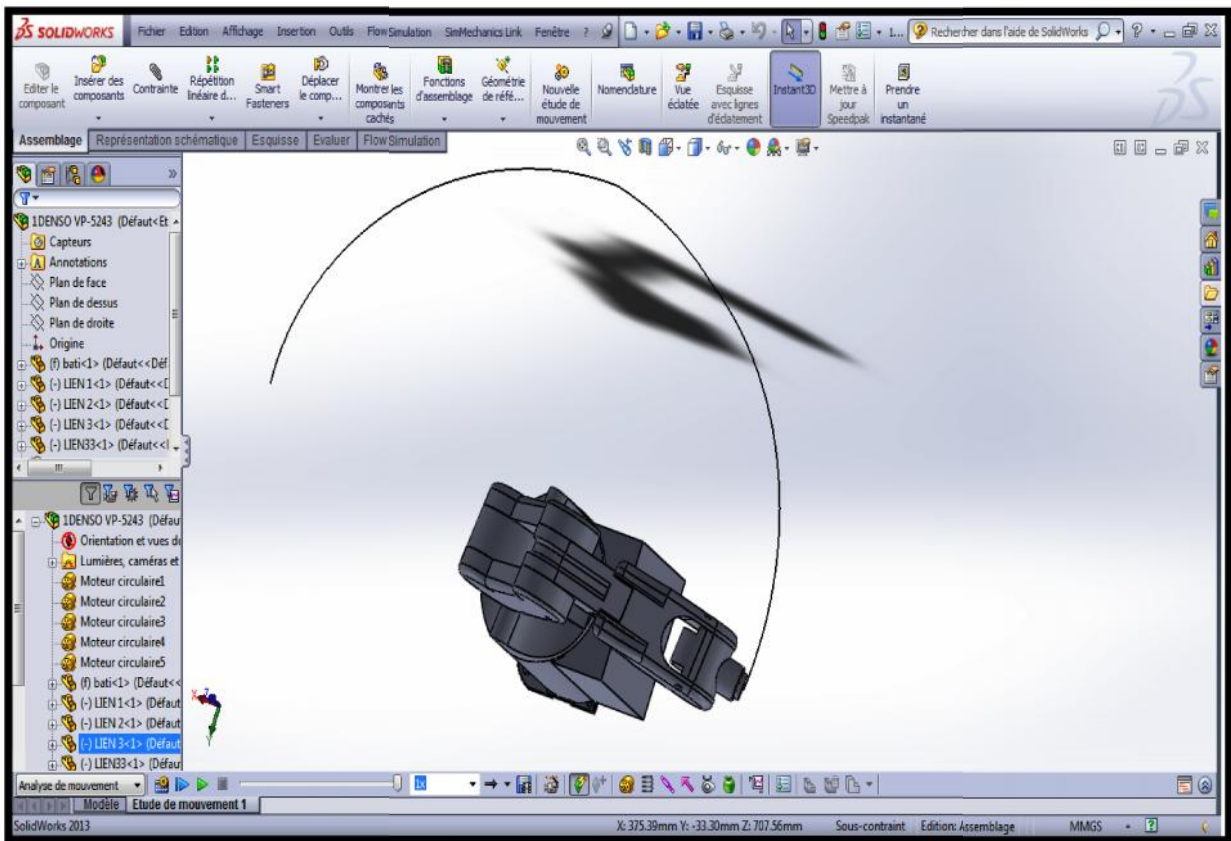


FIG IV.18 : fin de deuxième mouvement du bras.

### IV.5. Conception d'une cellule robotisée :

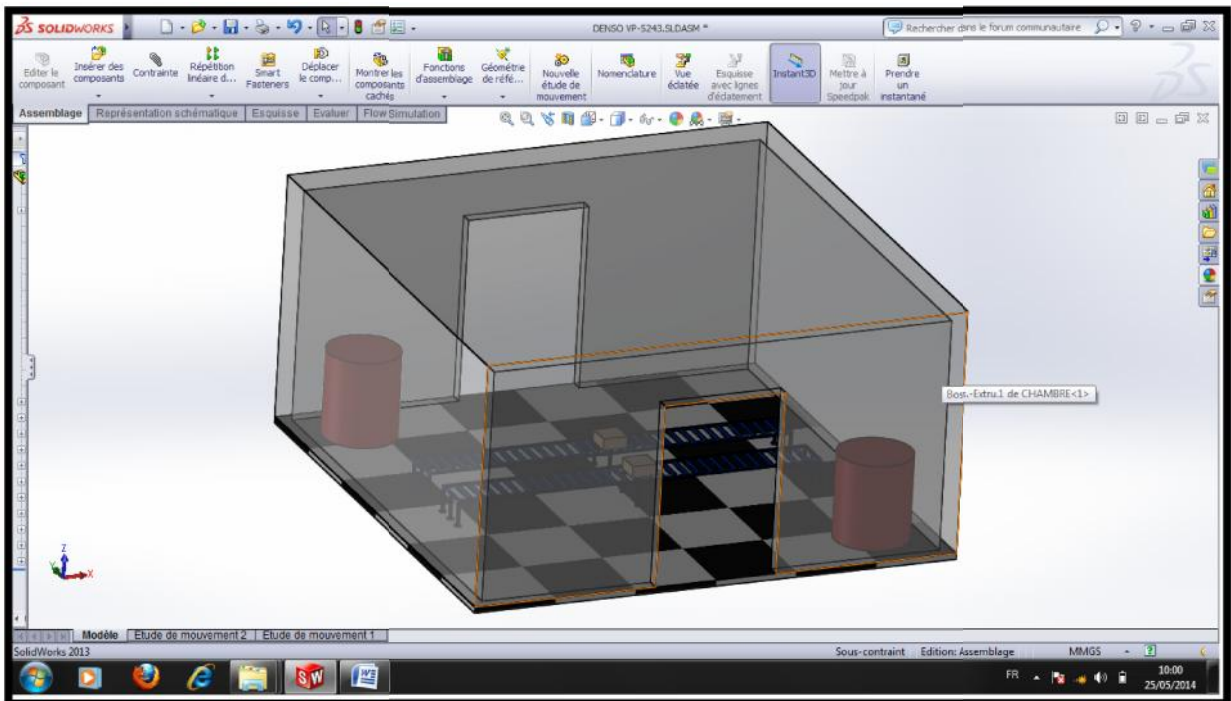


FIG IV.19 : la cellule.

## Chapitre IV : Conception et Simulation avec Solidworks

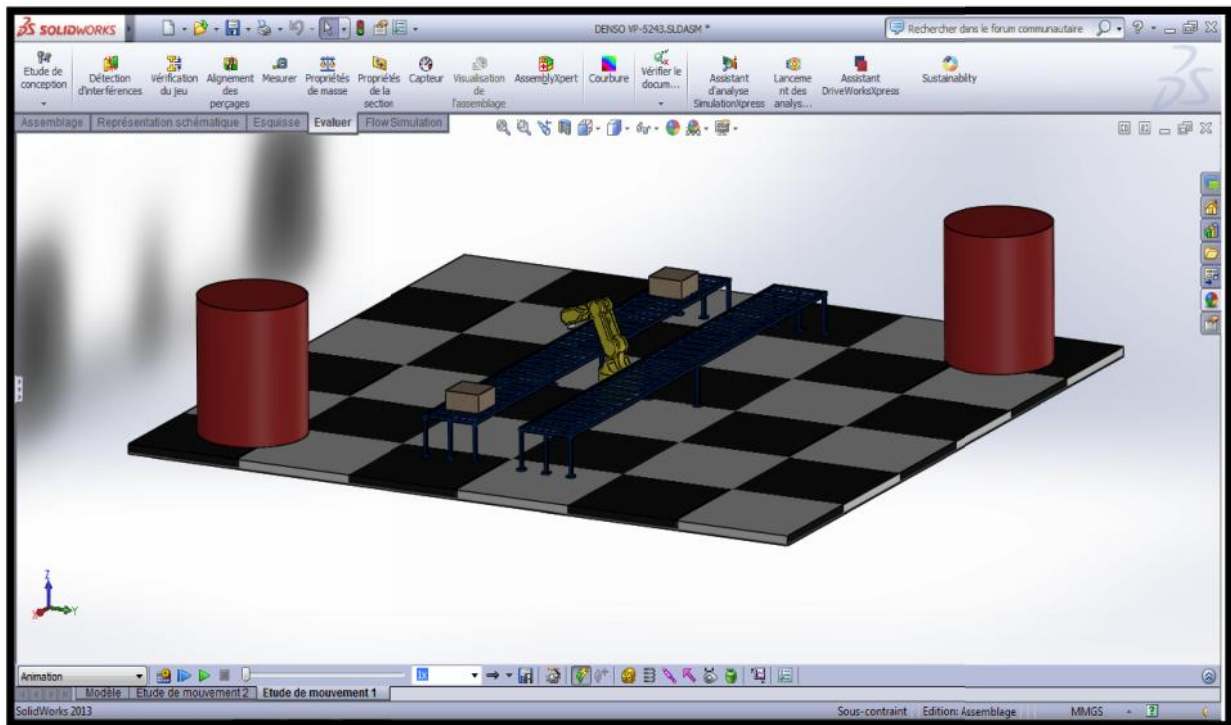


FIG IV.20 : le prototype en état de mouvement.

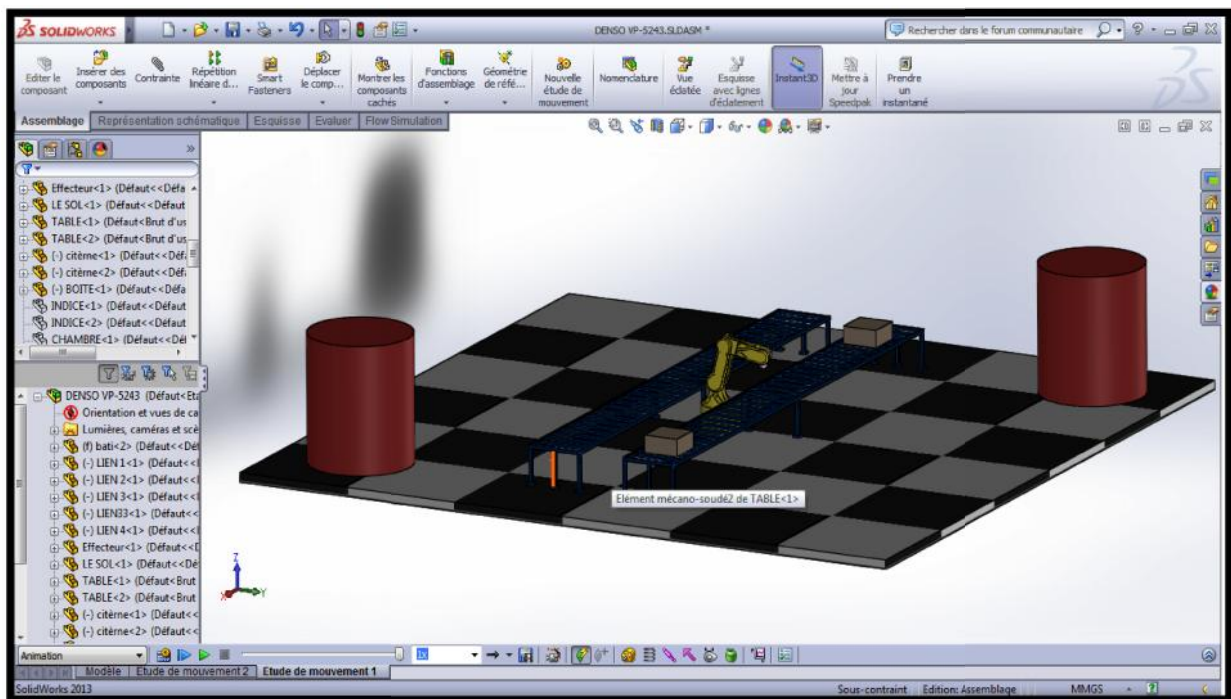


FIG IV.21 : La fin de tâche.



### **IV.6.Conclusion :**

Solidworks nous a permis de réaliser les différents mouvements avec une certaine souplesse et de manipulation se qui nous donne un avantage de correction et de contrôle afin d'obtenir les mouvements désirés et cela nous ouvre la voie à d'autres travaux.



CONCLUSION  
GÉNÉRALE

# Conclusion générale

L'objectif de ce travail porte sur la modélisation des robots industriels et plus spécifiquement de trouver le modèle géométrique direct et inverse d'un robot manipulateur à chaîne continue ouverte.

La première partie est consacrée à donner une vision plus large sur le domaine d'application de la robotique et les différents concepts utilisés dans les différents milieux d'utilisation médical, industrielle.

Dans la seconde partie on présente les différentes approches et méthodes de calcul pour définir la position et les paramètres des positions des éléments du robot.

Dans le troisième chapitre on abordait la modélisation en appliquant la convention de Denavit-Hartenberg qui présente une souplesse pour le logiciel de calcul Matlab et Robotic toolbox pour calculer le modèle géométrique ce qui nous a permis la localisation de l'effecteur à n'importe quel point dans l'espace de travail.

La méthode de Denavit-Hartenberg est basée sur la technique d'optimisation numérique.

Enfin dans le quatrième chapitre on a utilisé Solidworks pour construire les différents éléments du corps du robot ainsi que l'assemblage et le choix des actionnaires pour la mobilité du robot prototype Denso VP-5243 et la simulation de quelques trajectoires possibles et de mettre le robot dans une cellule robotisée.

## Perspectives

Dans les conclusions de ce mémoire, plusieurs parties restent à découvrir pour mieux maîtriser ce domaine qui est à la pointe de la technologie moderne et de permettre de faire des approches plus optimales et de réduire au maximum les erreurs de conception, les défauts de positions et d'atteindre les résultats souhaités dans un futur si possible proche.



ANNEXE

# [ANNEXE]

Douze conventions possibles pour les angles d'Euler [6]

$$R_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

$$R_{XZY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_{YXZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\alpha & -s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

$$R_{YZX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_{ZXY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{pmatrix}$$

# [ANNEXE]

---

$$R_{XYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{pmatrix}$$

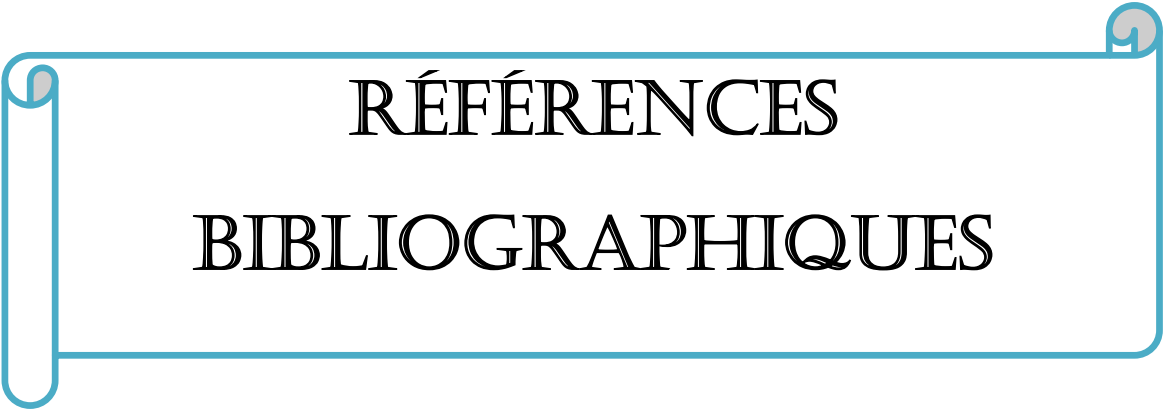
$$R_{XZX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_{YXY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_{YZY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

$$R_{ZXX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{pmatrix}$$

$$R_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{pmatrix}$$



RÉFÉRENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

## Références bibliographiques

- [1] Pierre Duysinx, « Eléments de robotique aspects Mécaniques », Ingénierie des Véhicules Terrestres ,Département Promethe ,Université de Liège 1999.
- [2] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani and Giuseppe Oriolo, « Robotics Modeling, Planning and Control » Springer-Verlag London Limited 2010.
- [3] André Preumont, « Théorie générale des systèmes articulés introduction à la robotique » 2<sup>eme</sup> Edition. Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles 2001.
- [4] R. Merzouki, « Cours et TP de Robotique de Manipulation », Master SMART, polytechnique Lille 2010.
- [5] Ilian Bonev, Yanick Noiseux, « Notes de cours GPA546 » Département de génie de la production automatisée, Université Laval Québec, Canada 23 mai 2013.
- [6] John J, Craig publishing, « Introduction to Robotics Mechanics and Control », Addison-Wesley Company 1989.
- [7] Marco Ceccaarelli , « Robot manipulators », In-the, Education and Publishing KG, Vienna, Austria, First published September 2008 Printed in Croatia.



- [8] Mme S.Borsali, « Modélisation des Robots Rédigé », cours Master Automatique S2, université de Telemcen 2012.
  
- [9] Peter Corke, « Robotics vision and control », published by Springer 2011.
  
- [10] Peter Corke, « Robotics toolbox for matlab release 9 », Springer February 2013.
  
- [11] Philippe Wenger, Jadran Lenarcic, « Advances in Robots Kinematics analysis and design », Springer Science+Business Media B.V 2008.
  
- [12] Jorge Angeles, « Fundamentals of Robotic Mechanical Systems theory, methods and algorithms », McGill University Montreal, Quebec, Canada, Springer 2007.
  
- [13] Doina Pislă, Marco Ceccaarelli, Manfred Husty and Burkhard corves, « New trend in mechanism science analysis and design », Springer Science+Business Media B.V 2010.

:

الهدف من هذه الدراسة هو حساب موا  
آلية ذات خمسة درجات حرية  
طريقة ديناڤايت- هارتنبرغ و  
ربوتيك .  
تصميم عناصر هذه الذراع و تجميعها و كذا محاكاة مختلف مواقع الأداة تمت بمساعدة سوليڤوركس.

### **Résumé :**

L'objectif de ce travaille est le calcule de la position de l'effecteur d'un bras manipulateur à cinq degrés de liberté par l'utilisation de la méthode de Denvait-Hartenberg et la combinaison du logiciel Matlab et Robotic-toolbox.

La conception des éléments et le montage du bras ainsi que la simulation avec plusieurs positions est obtenu à l'aide du logiciel Solidworks.

### **Abstract :**

The objective of this work is to calculate the position of effector for an arm manipulator with five degrees of freedom using the Denvait-Hartenberg convention and combination of Matlab and Robotic-toolbox.

The design of each elements and assembling the arm although the simulation of different pose was obtained with Solidworks.