

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

Filière : Génie Mécanique

Option: Systèmes Energétiques Et Développement Durable

Réf:.....

**Mémoire de Fin d'Etudes**

**En vue de l'obtention du diplôme de:**

**MASTER**

***Thème***

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT  
AUTOUR D'UN OBSTACLE MINCE DANS UN  
INTERVALLE DE NOMBRE DE  
MACH:  $0 < M < 3$**

**Présenté par :**

**BOUHELAL Abdelhamid**

**Proposé et dirigé par :**

**Dr : A. Brima**

**Promotion : Juin 2014**



# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail:*

*À mon très Cher Père : Mohamed Laid.*

*À ma très Chère Mère : Khadidja.*

*À mon très Cher Frère : Mamar.*

*À tous mes sœurs : Imane, Djamila,*

*Zineb, Aicha et Chefa.*

*À mon oncle : Abdelbasset*

*À mes chers et fidèles amis : Lebbihi Sassi, Zobiri  
Yacine, Lene Ziad, Khebbaz Mahmoud, Madani Samir,  
Ouamane Samir, Ben Omor Sameh, Belhadj Khaled.*

*À toute la promotion Génie mécanique énergétique.*

*Abdelhamid*

# Remerciements

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser cette étude en apportant des renseignements ou en acceptant de répondre à mes questions.*

*En premier lieu je tiens à remercier chaleureusement, mon encadreur: **Dr. Abdelhafid BRIMA** qui n'a épargné aucun effort pour m'aider et diriger durant la réalisation de ce modeste travail. Je lui suis très reconnaissant pour la patience dont il a fait preuve le long de ce projet qui a nécessité un travail de longue haleine.*

*J'exprime ma profonde gratitude au **Dr. Noureddine BELGHAR** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je lui suis très reconnaissant pour l'attention qu'il a portée à ce travail.*

*Je tiens à remercier également, **Mr. Chaouki MAHBOUB** d'avoir accepté d'être membre du Jury de soutenance.*

*Mes plus vifs remerciements s'adressent également au **Dr. Nabil ZEMMAR**, pour ces efforts remarquables qui m'ont permis d'acquérir de précieuses connaissances scientifiques.*

*J'exprime également ma profonde gratitude à tous les enseignants du département de mécanique, particulièrement aux :*

***Dr. Kamel Meftah; Pr. Mabrouk Hacini ; Pr. Athmani Rachid***

*Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.*

*Grand Merci à Tous*

# Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des matières	iv
Liste des figures	viii
Nomenclature	xi
Introduction générale	1

## *Chapitre I:*

### *SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE ET GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS AUTOUR DES OBSTACLES*

I.1. Introduction	6
I.2. Synthèse bibliographique	6
I.3. Notions de base en mécanique des fluides	9
I.3.1. Concept de la mécanique des fluides	9
I.3.2. Notion de fluide	10
I.3.2.1. Fluide parfait	10
I.3.2.2. Fluide réel	11
I.3.3. Variables fondamentales	11
I.3.3.1. La pression	11
I.3.3.2. La masse volumique	12
I.3.3.3. La viscosité	12
I.3.3.3.1. Fluides Newtoniens	13
I.3.3.3.2. Fluides non Newtoniens	13
I.3.3.4. Vitesse de l'écoulement	14
I.4. Régimes d'écoulements	13
I.4.1. Ecoulement laminaire et turbulent	14
I.4.2. Ecoulement permanent et transitoire	14
I.4.3. Ecoulement bidimensionnel et unidimensionnel	15

I.4.4. Ecoulement rotationnel et irrotationnel	15
I.4.5. Ecoulement compressible et incompressible	16
I.4.5.1. La vitesse du son	16
I.4.5.2. Le nombre de Mach	17
I.4.5.3. Classification des écoulements selon le nombre de Mach	17
I.5. Equations fondamentales	18
I.5.1. Equation de continuité	18
I.5.2. Equation de quantité de mouvement	19
I.5.3. Equation d'énergie	21
I.6. Notions de base en aérodynamique	22
I.6.1. Définition	22
I.6.2. Forces et moments aérodynamiques	22
I.6.3. La portance et la traînée	23
I.6.3.1. La portance	23
I.6.3.2. La traînée	23
I.6.4. Coefficients aérodynamiques	24
I.6.4.1. Coefficient de portance et de traînée	24
I.6.4.2. Coefficient de pression (Le nombre d'Euler)	25
I.6.5. Les obstacles aérodynamiques	25
I.6.6. profils aérodynamiques	25
I.6.6.1. Définitions géométriques des profils	25
I.6.6.2. Classification géométrique des profils	26
I.6.6.3. Classification les Profils NACA	28
I.7.1. Ecoulement parfait autour des obstacles	29
I.7.2. Ecoulement visqueux autour des obstacles	29
I.7.3. Ecoulement autour des obstacles de révolution simples	30
1.7.3.1. Ecoulement autour d'un disque plan	30

1.7.3.2. Ecoulement autour d'une sphère	31
1.7.3.3. Ecoulement autour d'un cylindre	32
I.7.4. Ecoulement autour d'un profil d'aile	33
1.7.4.1. Ecoulement autour d'un profil symétrique	34
1.7.4.2 Courbes de portance et de traînée pour un profil symétrique	35

## ***Chapitre II :***

### ***FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME***

II.1. Définition géométrique	38
II.2. Modèle Mathématique	39
II.2.1. Les hypothèses du problème	39
II.2.2. Mise en équations	39
II.2.2.1. Equation de continuité	40
II.2.2.2. Equation de quantité de mouvement	40
II.2.2.3. Equation d'énergie	40
II.2.2.4. Equation d'état	41
II.2.2.5. Equation du potentiel de vitesse	43
II.3. Théorie des petites perturbations	44
II.4. Ecriture adimensionnelle	47
II.5. Le coefficient de pression	47

## ***Chapitre III :***

### ***APPROCHE NUMERIQUE DE CALCUL***

III.1. Introduction	51
III.2. La méthode des différences finies	52
III.3. Représentation du problème sous forme de grille	52
III.4. Discrétisation du problème par la méthode des différences finies	53
III.5. Transformation du domaine physique au domaine de calcul	54
III.6. Les conditions aux limites	54

III.7. Affectation des variables	56
III.8. Les équations aux nœuds	57
III.9. Méthode de résolution	59
III.10. Tableaux des valeurs utilisées	62

### ***Chapitre IV : Résultats et discussions***

IV.1. Intrprétation des résultats	66
IV.2. Variation de la perturbation	68
IV.3. Variation de vitesse verticale (V)	73
IV.4. Variation de la vitesse axiale (U)	75
IV.5. Variation du nombre de Mach local	78
IV.6. Variation du coefficient de pression	83
IV.7. Variation de la Température	86

### ***Chapitre V : Validation des résultats***

V.1. Introduction	90
V.2. Les champs de vitesse, de pression, de nombre de Mach et de température	91
V.2.1. Cas subsonique ( $M_\infty = 0.1$ )	91
V.2.2. cas transsonique ( $M_\infty = 0.9$ )	92
V.2.3. cas supersonique ( $M_\infty = 3$ )	94
V.3. Comparaison des résultats obtenus	96
V.3.1. Dans le cas subsonique ( $M_\infty = 0.1$ )	96
V.3.2. Dans le cas transsonique ( $M_\infty = 0.9$ )	101
V.4. Les courbes dans le cas supersonique	106
Conclusion générale	112
Références bibliographiques	114
Annexe	117

## Liste des figures

Figure	Intitulé	Page
I.1	Forces s'exerçants sur un fluide	10
I.2	Notion de pression	12
I.3	Fluide Newtonien et fluide non Newtonien (Épaississant et fluidifiant)	13
I.4	Ecoulement irrotationnel autour d'un profil	15
I.5	Mise en évidence de la notion de la célérité du son	16
I.6	Système de force aérodynamique s'exerçant sur un obstacle	22
I.7	Coefficient de traînée utile (Cd), pour quelques obstacles aérodynamiques	24
I.8	Définition géométrique d'un profil d'aile	26
I.9	Classification géométrique des profils d'aile	27
I.10	distribution de pression et un écoulement autour un disque placé perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement	31
I.11	Ecoulement autour d'une sphère et Distribution de pression	31
I.12	Coefficient de traînée $C_x$ en fonction du nombre de Reynolds ( $Re$ ) pour un cylindre lisse et une sphère lisse	33
I.13	Ecoulement autour d'un profil d'aile	33
I.14	Ecoulement des filets fluide autour d'un profil et distribution de la pression	34
I.15	Profil symétrique en décrochage statique	35
I.16	Courbes de portance et de traînée en fonction de l'angle d'attaque pour un profil NACA 0012 $Re=10^6$	36
II.1	présentation géométrique du profil choisie; profil NACA 0006	38
III.1	Représentation le problème sous forme de grille	53
III.2	Transformation du domaine d'étude	54
III.3	Les frontières de domaine d'étude	55
IV-1	Variation de la perturbation en fonction de X pour Mach $M_\infty = 0.1$	68
IV-2	Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas subsonique à $Y=0$	69
IV-3	Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas transsonique à $Y=0$	70
IV-4	Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas subsonique à $Y=2.4$	71
IV-5	Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas transsonique à $Y=2.4$	72
IV-6	Variation de la vitesse verticale en fonction de X, Mach $M_\infty = 0.1$	73
IV-7	Variation de la vitesse verticale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à $Y=0$	74

IV-8	Variation de la vitesse axiale en fonction de X Mach , $M_{\infty} = 0.1$	75
IV-9	Variation de la vitesse axiale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0	76
IV-10	Variation de la vitesse axiale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4	77
IV-11	Variation du nombre de Mach en fonction de X, $M_{\infty} = 0.1$	78
IV-12	Variation de la vitesse axiale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0	79
IV-13	Variation du nombre de Mach local en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4	80
IV-14	Variation du nombre de Mach local en fonction de X, $M_{\infty} = 0.279$	81
IV-15	Variation du nombre de Mach local en fonction de X, $M_{\infty} = 0.870$	82
IV-16	Variation du coefficient de pression en fonction de X, $M_{\infty} = 0.1$	83
IV-17	Variation du coefficient de pression en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0	84
IV-18	Variation du coefficient de pression en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4	85
IV-19	Variation de température en fonction de X, $M_{\infty} = 0.1$	86
IV-20	Variation de température en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0	87
IV-21	Variation de température en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4	88
V-1	Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.1$	91
V-2	vecteurs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.1$	91
V-3	Champs de coefficient de pression autour du profil NACA 0006, $M_{\infty} = 0.1$	91
V-4	Nombre de Mach local autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.1$	92
V-5	Champs de température autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.1$	92
V-6	Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.9$	92
V-7	Champs de vitesse verticale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.9$	93
V-8	Champs de nombre de Mach local autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.9$	93
V-9	Champs u coefficient de pression autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 0.9$	93
V-10	Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 3$	94
V-11	Champs de vitesse verticale autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 3$	94
V-12	Champs du coefficient de pression autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 3$	94
V-13	Champs du nombre de Mach autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 3$	95
V-14	Champs de température autour du profil NACA 0006, pour $M_{\infty} = 3$	95

V-15	Vecteurs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour $M_\infty = 3$	95
V-16	Comparaison de variation de vitesse axiale en fonction de X, $M_\infty = 0.1$	96
V-17	Comparaison de variation du nombre de Mach local en fonction de X, $M_\infty = 0.1$	97
V-18	Comparaison de la vitesse verticale en fonction de X, $M_\infty = 0.1$	98
V-19	Comparaison du coefficient de pression en fonction de X, $M_\infty = 0.1$	99
V-20	Comparaison la variation de température en fonction de X, $M_\infty = 0.1$	100
V-21	Comparaison la variation de vitesse axiale en fonction de X, $M_\infty = 0.9$	101
V-22	Comparaison la variation du nombre de Mach local en fonction de X, $M_\infty = 0.9$	102
V-23	Comparaison la variation de vitesse verticale en fonction de X, $M_\infty = 0.9$	103
V-24	Comparaison la variation du coefficient de pression en fonction de X, $M_\infty = 0.9$	104
V-25	Comparaison la variation de température en fonction de X, $M_\infty = 0.9$	105
V-26	Variation de vitesse axiale en fonction de X, pour le nombre de Mach $M_\infty = 3$	106
V-27	Variation de nombre de Mach local en fonction de X, pour $M_\infty = 3$	107
V-28	Variation du coefficient de pression sur l'Extrados en fonction de X, pour $M_\infty = 3$	108
V-29	Variation de vitesse verticale sur l'Extrados en fonction de X, pour $M_\infty = 3$	109
V-30	Variation de température en fonction de X, pour $M_\infty = 3$	110

## Nomenclature

### Notations usuels:

- $c$  : célérité du son (m/s)
- $C_p$  : chaleur spécifique à pression constante (J/kg. k)
- $C_v$  : chaleur spécifique à volume constante (J/kg. k)
- $\vec{F}$  : forces totales appliquées au fluide (Kg. m/s<sup>2</sup>)
- $\vec{F}_T$  : force tangentielle appliquée au fluide (Kg. m/s<sup>2</sup>)
- $\vec{F}_N$  : force normale appliquée au fluide (Kg. m/s<sup>2</sup>)
- $h$  : enthalpie par unité de masse (J/kg)
- $L$  : longueur caractéristique de l'obstacle (m)
- $M$  : masse molaire (Kg/mol)
- $m$  : masse du fluide (Kg)
- $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal à un élément de surface
- $P$  : pression local du fluide (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $P$  : force de portance (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $P_{dy}$  : pression dynamique (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $P_\infty$  : pression initiale de l'écoulement (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $\bar{P}$  : tenseur des contraintes totales (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $\vec{q}$  : vecteur de vitesse (m/s)
- $R$  : constante des gaz parfaits (J/mol.k)
- $S$  : entropie par unité de masse (J/kg)
- $s$  : surface élémentaire (m<sup>2</sup>)
- $T$  : température du fluide (k)
- $T$  : force de trainée (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $U_\infty$  : vitesse parallèle à l'infini (m/s)
- $u$  : composante axiale du vecteur vitesse (m/s)
- $u_k$  : vitesse axiale de perturbation (m/s)
- $v$  : composante verticale du vecteur vitesse (m/s)

- $\vartheta$ : volume élémentaire ( $m^3$ )  
 $v_k$  : vitesse verticale de perturbation (m/s)  
 $x, y$  : les coordonnées cartésiennes  
 $X, Y$  : les coordonnées adimensionnelles

### Symbole Grecque :

- $\alpha$ : angle d'incidence ( $^\circ$ )  
 $\gamma$ : coefficient de dilatation cubique à pression constante  
 $\lambda$ : conductivité thermique (W/m.k)  
 $\mu$ : viscosité dynamique (N.s/m<sup>2</sup>)  
 $\rho$ : Masse volumique (kg/s<sup>2</sup>)  
 $\Sigma$ : Surface de contrôle ( m<sup>2</sup>)  
 $\tau$ : Contrainte de cisaillement (N/m<sup>2</sup>)  
 $\nu$ : Viscosité cinématique (m<sup>2</sup>/s)  
 $\phi$ : Potentiel total vitesse (m<sup>2</sup>/s)  
 $\Omega$ : volume de contrôle (m<sup>3</sup>)  
 $\varphi$ : potentiel de vitesse (m<sup>2</sup>/s)  
 $\varphi^*$ : Potentiel de vitesse sans dimension  
 $\Phi$ : la dissipation visqueuse (N/s.m<sup>2</sup>)

### Nombres sans dimensions :

- $C_m$  : coefficient de couple  
 $C_p$  : coefficient de pression  
 $C_x$  : coefficient de trainé  
 $C_{xp}$ : coefficient de trainé et de pression  
 $C_z$ : coefficient de portance  
f: la finesse  
M: nombre de Mach  
 $M_\infty$ : nombre de Mach d'un écoulement parallèle et homogène  
 $Re$  : nombre de Reynolds

---

***INTRODUCTION***  
***GENERALE***

---

## *Introduction générale*

La mécanique des fluides est une science qui étudie le comportement des fluides au repos et en mouvement. C'est une science qui trouve des applications dans plusieurs domaines tels que l'astrophysique, la biomédecine, la météorologie, la géophysique, la physique du plasma, l'aérodynamique, l'hydraulique, les turbomachines et les équipements thermiques. La mécanique des fluides est subdivisée en plusieurs branches qui sont définies par les propriétés des fluides [17].

L'aérodynamique est l'une des branches de la mécanique des fluides. Elles sont spécialement réservées aux études de l'écoulement de l'air et plus pratiquement autour d'obstacles. C'est surtout autour de profils d'aile que ses applications deviennent de plus en plus étendues (turbomachines,.....etc.) [5].

Le développement de l'aérodynamique a suivi celui d'autres sciences telles que l'informatique avec l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissant, malgré leur coût, les techniques expérimentales (essais en souffleries) et bien sûr, les mathématiques avec leurs grands progrès et contribution en techniques numériques pour la résolution en mécanique des fluides des équations de NAVIER STOKES généralisées [5].

En effet, le pas décisif n'a été franchi que lorsque les fonctions motrices et de sustentation ont été séparées, l'intérêt pour l'aérodynamique est alors venu naturellement aussi bien pour les voilures tournantes, des organigrammes, des codes et des logiciels spécialisés ont ensuite été créés (NASA,NACA,ONERA,.. etc.) pour stimuler les travaux de recherche en aérodynamiques surtout que la plage des vitesses couvertes par les aéronefs a considérablement augmenté pour atteindre des régimes supersonique, voir hypersonique [1].

L'écoulement autour des objets est un phénomène qui se produit fréquemment dans la pratique. Il est indispensable dans la conception mécanique et thermique de nombreux systèmes en engineering comme : avions, automobiles, bâtiments, composant électroniques,

les aubes de turbines et les formes géométriques à section carrée et circulaire. L'identification et l'étude des phénomènes hydro et aérodynamiques qui surgissent dans le sillage d'un obstacle restent un sujet d'intérêt d'actualité dans divers domaines [4].

L'aérodynamique des profils d'aile est une science très récente dans le domaine de la mécanique, puisque les premiers travaux de recherche numériques et/ou expérimentaux remontent au vingtième siècle. L'aérodynamique d'un profil d'aile portant en mouvement par rapport à son milieu environnant, a suscité, de longue date, l'intérêt des chercheurs tant sur le plan fondamental qu'appliqué, et aussi bien numérique qu'expérimental [6].

Les structures d'écoulement autour des obstacles profilées occupent une place importante dans la physique des fluides dues à leur importance pratique dans les applications aérodynamiques et hydrodynamiques tels que les ailes d'avion, les sous-marins et les missiles....etc [6].

Beaucoup de travaux de recherches ont été réalisés pour modéliser l'écoulement autour des obstacles. Pour cela, plusieurs expériences dans le domaine ont été réalisées et confrontées aux méthodes numériques. Une large gamme de méthodes mathématiques ont été développées afin de s'approcher de la réalité de l'écoulement et de fournir le maximum d'information qui peuvent se produire [4]. Pour notre cas, on s'intéresse à l'étude de l'écoulement potentiel autour d'un obstacle mince dans un intervalle de nombre de Mach:  $0 < M_{\infty} < 3$ .

### **L'Objectif du sujet :**

Le but assigné à ce mémoire est d'étudier numériquement l'écoulement subsonique, transsonique et supersonique bidimensionnel autour d'un profil d'aile mince de type « NACA 0006 », pour un intervalle bien défini du nombre de Mach.

Notre étude utilisera la théorie des petites perturbations appliquée à l'équation de la combinaison de l'équation de continuité, Euler et d'énergie, cette théorie permettra de

transformer le problème très complexe en une équation différentielle aux dérivées partielles (linéaire ou non linéaire) à résoudre.

Le procédé numérique choisit dans ce travail permettra de transférer l'équation différentiel gouvernante le problème par une équation algébrique valable pour tous les nœuds du maillage choisit.

Le choix du domaine d'étude, ainsi que la fixation des conditions limites jouent un grand rôle dans l'interprétation des résultats, autrement dit-il influe sur leur finesse.

Enfin, certains résultats obtenus sont comparés ceux trouves par solveur « Fluent v 6.3.26». La validation numérique permettra de montrer à quel point les deux schémas (des différences finies et de volumes finis) fournirent les mêmes résultats.

### **Plan de travail :**

En plus de l'introduction générale, notre travail est exposé de cinq chapitres suivi à une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les travaux de quelques autour dans le domaine de l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement autour des obstacles, et une étude théorique sur quelques propriétés du fluide, et des différents types d'écoulements, un rappel des équations fondamentales de la mécanique des fluides puis un rappel sur les généralités sur l'aérodynamique et on présente généralités sur les écoulements autour des obstacles.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des caractéristiques géométriques de l'obstacle (profil mince de type NACA 0006), ainsi que les formulations mathématiques nécessaire. Il s'agit donc de l'établissement des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et l'équation d'énergie, pour obtenir les équations gouvernantes le problème pour chaque régime de l'écoulement.

La résolution par voie numérique de notre problème est basée sur la méthode connue sous le nom de « méthode des différences finies » fera l'objet du troisième chapitre. Le problème est traité sous l'influence de nombre de Mach ( $M_\infty$ ).

Dans le quatrième chapitre, nous présentons sous forme graphiques les résultats numériques obtenus à partir le programme de Newton Raphson qu'il réalisé en utilisant le langage : « FORTRAN 77 » et nous interprétons les résultats obtenues.

Le cinquième chapitre sera consacré une comparaison des résultats trouvés par la méthode des différences finies et les résultats obtenus par le solveur « FLUENT v 6.3.26 ». Pour valider les résultats obtenus dans notre travail.

Enfin le travail est achevé par une conclusion générale faisant apparaître l'intérêt du sujet et les perspectives recommandés.

# *Chapitre I*

---

***SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE ET GENERALITES  
SUR LES ECOULEMENTS AUTOUR DES  
OBSTACLES***

---

# *Chapitre I*

## *SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE ET GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS AUTOUR DES OBSTACLES*

### *I.1. Introduction:*

Beaucoup de travaux de recherches ont été réalisés pour modeler l'écoulement autour des obstacles. Pour cela, plusieurs expériences dans le domaine ont été réalisées et confrontées aux méthodes numériques. Pour cette dernière une large gamme de méthodes mathématiques ont été développées afin de s'approcher de la réalité de l'écoulement à différents régimes autour des obstacles (subsonique, transsonique, supersonique et hypersonique) et de fournir le maximum d'informations qui peuvent se produire [4].

### *I.2. Synthèse bibliographique:*

**W. OGANNA, en 1989** [30]: a proposé une méthode basée sur l'équation de petite perturbation transsonique à deux dimensions, avec une viscosité artificielle, il dérive une équation intégro-différentielle et par la suite une équation intégrale. Le domaine de calcul est discrétisé en éléments rectangulaires et les fonctions de la variable dépendante et ses dérivées sont supposées être constantes dans chaque élément. Les systèmes d'équations algébriques non linéaires sont solutionnés par Jacobi itération. La méthode est testée pour un arc parabolique et un profil de type NACA 0012. La convergence de cette méthode est rapide et les solutions comparer bien avec les résultats de différences finies, malgré l'utilisation d'un petit nombre comparable de nœuds.

**T. HEMDAN et A. SELIM, en 1992** [14]: ont trouvé une nouvelle approche pour les écoulements stationnaires non-visqueux supersonique et hypersonique autour d'un profil mince et pointu-nez à petit angle d'attaque avec des ondes de choc. L'objectif de cette étude consiste pour la détermination numérique de l'effet de la surface biconvexe et l'effet du

nombre de Mach et l'épaisseur du profil sur le coefficient de la trainée pour les deux cas géométrique précédent.

**E. CARSON YATES, en 1993** [12]: a développé une équation intégrale pour la résolution des écoulements subsonique, transsonique et supersonique pour les cas stable et non stable. Cette équation est examinée avec le programme de la NASA. La méthode est traitée par un programme dirigé vers le traitement général, précis, efficace, et unifiée de flux autour des véhicules ayant des formes arbitraires, mouvements et déformations (y compris les notions de contrôle) subsoniques, transsonique, et des vitesses supersoniques à différents angles d'attaque.

**H.SHAN et AL, en 2004** [15]: ont étudié par la Simulation numérique de la séparation de l'écoulement subsonique sur un profil NACA0012 avec un angle d'attaque =  $6^\circ$  et contrôle de flux de séparation de générateurs de vortex. Les simulations numériques de trois cas, dont un cas de référence incontrôlée, un cas contrôlé avec générateur de vortex passif, et un boîtier de contrôle actif générateur de vortex ont été réalisés. La simulation numérique résout les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles utilisant une méthode LU-SGS totalement implicite. Un quatrième ordre schéma aux différences finies est utilisé pour calculer les dérivées spatiales. Procédé-frontière immergée est utilisée pour modéliser à la fois les générateurs de tourbillons passifs et actifs. La fréquence caractéristique qui domine l'écoulement est la fréquence propre de la séparation dans le cas de base. L'introduction du générateur de tourbillons passif ne modifie pas la fréquence de séparation. Dans le cas de la commande active, la fréquence de la sinusoïde a été choisi forçant proche de la fréquence naturelle de la séparation. Le temps et les résultats de l'envergure à moyenne ont été utilisés pour examiner le champ d'écoulement moyen pour les trois cas. La taille de la zone de séparation moyenne a été réduite de plus de 80%. Les structures en trois dimensions du champ d'écoulement ont également été étudiées.

**M. HAFEZ et E. WAHBA, en 2007** [22]: ont étudié par la simulation numérique d'un écoulement laminaire transsonique autour d'un profil de type NACA 0012, pour deux cas, le premier l'écoulement est visqueux et bidimensionnel à différent angle d'attaque ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ), à différent nombres de Mach ( $M = 0.8$  et  $M = 0.9$ ) et pour un nombre fixe de Reynolds ( $Re = 500$ ). Le deuxième cas, l'écoulement est tridimensionnel visqueux et non-visqueux à différent angle d'attaque ( $\alpha = 1^\circ$ ,  $\alpha = 3^\circ$ ), à différent nombres de Mach ( $M = 0.84$  et  $M = 0.9$ ) et pour un nombre fixe de Reynolds ( $Re = 1000$ ). Les résultats obtenues ont été comparés à ceux trouvés pour les régimes subsonique et supersonique.

**P. ARDONCEAU, en 2009** [23]: a développé une procédure nodale de résolution numérique de l'équation de Laplace appliquée aux écoulements à potentiel de vitesse autour de corps portants. Cette méthode est basée sur les conditions de Dirichlet internes exprimées aux nœuds du maillage plutôt que sur des parties lisses de la surface. Ensuite une formulation originale de type Neumann des conditions de Kutta est proposée. Exprimée sous forme d'une minimisation du flux pariétal de la vitesse, elle entraîne une réduction sensible de l'impact de la discrétisation sur l'estimation des efforts globaux par rapport aux formulations locales. La méthode est applicable aux écoulements bi ou tri-dimensionnel, stationnaires ou non stationnaires.

**L.LEIFSSON et S.KOZIEL, en 2010** [20]: ont proposé une méthodologie de conception informatique efficace pour l'optimisation du profil aérodynamique transsonique basé sur la physique de faible fidélité de substitution numérique pas cher (l'équation de la petite perturbation transsonique) est utilisé au lieu d'une haute-fidélité précis, mais coûteux en calcul (équations d'Euler compressible). L'efficacité de calcul de la méthode proposée a été démontrée à travers trois études de cas de l'optimisation de profils en écoulement bidimensionnel. Dans tous les cas, les approches a besoin de plus de 90% moins d'évaluations des modèles de haute-fidélité de trouver une conception optimale, par rapport à l'optimisation directe du mo-

dèle haute-fidélité en utilisant un algorithme motif de recherche. Les deux méthodes obtenues conceptions similaires aérodynamiques optimales dans tous les cas.

**D.LIU et AL, en 2012** [11]: ont étudié numériquement un écoulement visqueux bidimensionnel autour d'un profil d'aile supercritique de type RAE2822 pour différents nombres de Reynolds. La solution est passée sur la résolution de l'équation de Navier –Stokes à deux dimensions avec l'utilisation le modèle de turbulence Spalart - Allmaras (SA). Les résultats des calculs sur l'aile RAE2822 est comparée avec les résultats expérimentaux de la soufflerie. Le traitement numérique effectué pour un intervalle de nombre de Reynolds entre  $2 \cdot 10^6$  jusqu'à  $2 \cdot 10^6$ , et pour de cas de nombre de Mach : 0,74 et 0,8 avec un angle d'incidence variable de  $2^\circ$  à  $6^\circ$ . Les résultats montrent que la répartition de la pression de surface supérieure comprenant l'emplacement et l'intensité des ondes de choc et de la pression, changé apparemment avec des nombres de Reynolds, Les résultats numériques obtenues montre que l'effet de nombre de Reynolds doivent être considérés lors de la conception et l'optimisation des gros porteurs appliqué au profils aérodynamiques supercritiques.

### ***1.3. Notions de base en mécanique des fluides:***

#### ***1.3.1. Concept de la mécanique des fluides:***

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

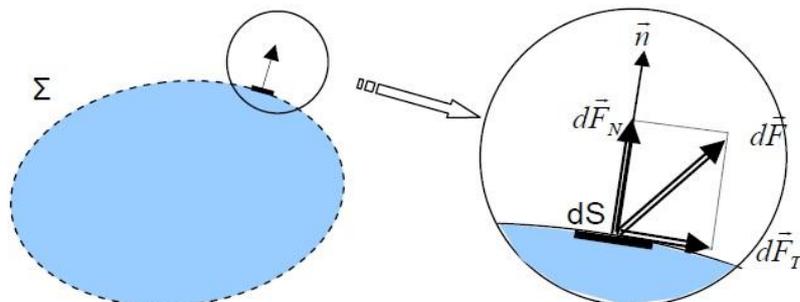
La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, la biomédecine, la météorologie, l'hydraulique, la géophysique, la turbomachine et l'aérodynamique [27].

### ***1.3.2. Notion de fluide:***

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, un fluide donc est un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquide et gaz. Un fluide peut être réel (visqueux), parfait (non visqueux) [27].

#### ***1.3.2.1. Fluide parfait:***

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée  $\Sigma$  fictive ou non.



**Fig. I.1:** Forces s'exerçant sur un fluide [27].

Considérons  $d\vec{F}$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer  $d\vec{F}$  en deux composantes:

- une composante  $d\vec{F}_T$  tangentielle à  $dS$ .
- une composante  $d\vec{F}_N$  normale à  $dS$ .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante  $d\vec{F}_N$  est nulle. Autrement dit, la force  $d\vec{F}$  est normale à l'élément de surface  $dS$  [27].

### ***1.3.2.2. Fluide réel:***

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits [27].

### ***1.3.3. Variables fondamentales:***

Les variables fondamentales de la mécanique des fluides, sont: La pression, la masse volumique, la viscosité et la vitesse d'écoulement [18].

#### ***1.3.3.1. La pression:***

La pression est la force normale exercée sur une surface unitaire:

$$P = \lim_{dS \rightarrow 0} \left( \frac{dF}{dS} \right) \quad (\text{I.1})$$

Où:  $dS$ : surface élémentaire autour d'un point dans le fluide.

$dF$ : force élémentaire appliquée à la surface  $dS$ .

Il s'agit d'une propriété qui dépend du point considéré; elle peut donc être différente d'un point à l'autre dans le fluide [18-29].

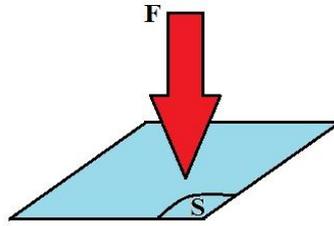


Fig. I.2: Notion de pression [15].

### 1.3.3.2. La masse volumique:

On définit la masse volumique comme la quantité de masse par unité de volume:

$$\rho = \lim_{d\mathcal{V} \rightarrow 0} \left( \frac{dm}{d\mathcal{V}} \right) \quad (\text{I.2})$$

Où:  $d\mathcal{V}$ : volume élémentaire autour d'un point.

$dm$ : masse du fluide à l'intérieur de  $d\mathcal{V}$  [18].

### 1.3.3.3. La viscosité:

La viscosité d'un fluide est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle de frottement. Son effet se manifeste principalement au voisinage des parois. Dans le cas d'un fluide Newtonien en mouvement, la relation entre la contrainte de cisaillement,  $\tau$ , et le gradient de vitesse est linéaire (la direction de l'axe des  $y$  est perpendiculaire et la vitesse de l'écoulement,  $V$ , est parallèle à la paroi):

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (\text{I.3.a})$$

L'expression de la viscosité cinématique est:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{I.3.b})$$

Où:  $\mu$ : viscosité dynamique; en (N.s/m<sup>2</sup>).

$\nu$ : la viscosité cinématique; en (m<sup>2</sup>/s).

$\tau$ : contrainte de cisaillement; en (N/m<sup>2</sup>) [18].

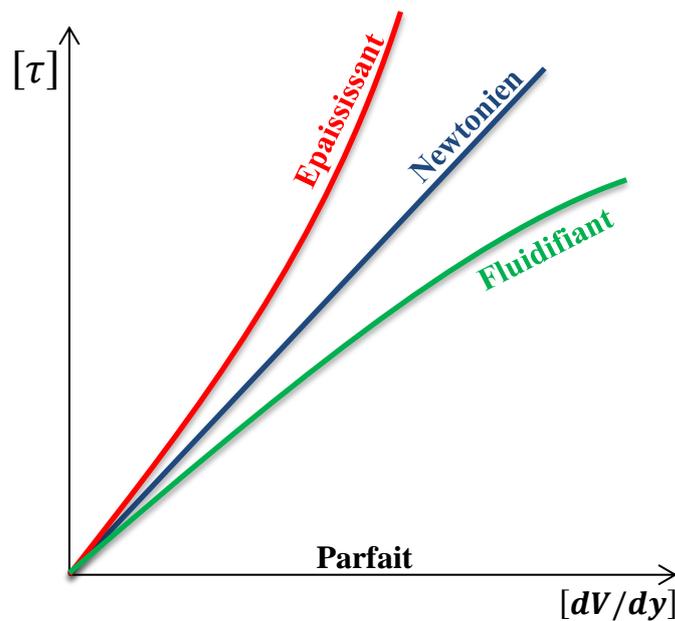
Les fluides peuvent être classés, selon la viscosité en deux grandes familles:

### ***1.3.3.3.1. Fluides Newtoniens:***

Les fluides Newtoniens ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température; Exemples: l'eau, l'air et la plupart des gaz [27].

### ***1.3.3.3.2. Fluides non Newtoniens:***

Dans un fluide non newtonien, la viscosité évolue en fonction du gradient de vitesse auquel il est soumis. Exemples: le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Ainsi, la viscosité augmente pour les corps dits épaississants (par exemple: ciment liquide) et diminue pour les corps dits fluidifiants (par exemple: Ketchup, sables mouvants, le sang) [26].



**Fig. I.3:** Fluide Newtonien et fluide non Newtonien (Épaississant et fluidifiant) [26].

#### ***1.3.3.4. Vitesse de l'écoulement:***

La vitesse de l'écoulement représente la vitesse d'un élément de fluide qui passe par un point à un instant donné. Elle joue un rôle très important en dynamique des fluides [18].

#### ***1.4. Régimes d'écoulements:***

##### ***1.4.1. Ecoulement laminaire et turbulent:***

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. L'une des premières analyses de la transition d'un régime laminaire vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements en conduit cylindrique effectuées par Reynolds en 1883. Une étude systématique du régime d'écoulement a été réalisée en fonction des différents paramètres intervenant dans le problème : la masse volumique du fluide, la viscosité, la géométrie de la conduite, ... etc. Reynolds a montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend pas séparément de chacun des paramètres mais d'une seule grandeur les regroupant tous : le nombre de Reynolds [26]:

$$\text{Re} = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (\text{I.4})$$

Où:  $V$ : La vitesse moyenne de l'écoulement; [ $V$ ] en (m/s).

$L$ : La longueur caractéristique; [ $L$ ] en (m).

Le nombre de Reynolds est une grandeur sans dimension représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de la viscosité, et caractérise l'apparition de la turbulence [18].

##### ***1.4.2. Ecoulement permanent et transitoire:***

On dit qu'un écoulement est permanent (ou stationnaire) si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps, comme la pression, la masse volumique

la vitesse,...etc. On dit qu'un écoulement transitoire (ou instationnaire) si les variables décrivant le mouvement sont dépendant du temps [17].

### ***1.4.3. Ecoulement bidimensionnel et unidimensionnel:***

Dans certains cas particuliers intéressants, le problème réel tridimensionnel peut ramener à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel ou unidimensionnel. C'est pour ça, on peut considérer l'écoulement de grande étendue suivant l'axe des (Z) comme un écoulement bidimensionnel suivant les axes des (X) et des (Y), et toutes les grandeurs cinématiques ne dépend alors que de deux variables d'espace [17].

### ***1.4.4. Ecoulement rotationnel et irrotationnel:***

On dit de l'écoulement d'un fluide qu'il est irrotationnel si les vitesses angulaires des particules sont nulles. Dans ce type d'écoulement, toute particule de fluide se déplace en une succession de mouvements translation pure (**Fig.I.4**).

Dans un écoulement irrotationnel, la vitesse  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel des vitesses  $\varphi$ :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{I.5})$$

En coordonnées cartésiennes, on écrit encore la vitesse  $\vec{V}$  comme:

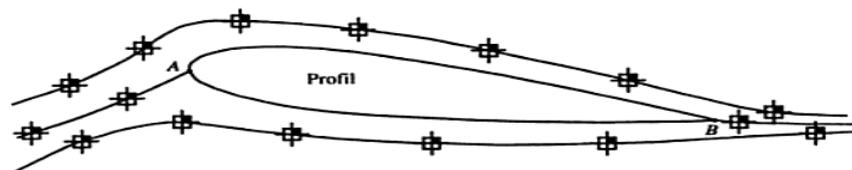
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (\text{I.6})$$

Suivant la définition de l'écoulement irrotationnel, on peut écrire:

$$\vec{V} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

D'où:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$



**Fig.I.4:** Ecoulement irrotationnel autour d'un profil [18].

On dit que l'écoulement d'un fluide est rotationnel lorsque les particules fluides subissent une vitesse angulaire de rotation pure [16-18]:

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \neq \vec{0} \tag{I.7}$$

**I.4.5. Ecoulement compressible et incompressible:**

Ce qui différencie un écoulement compressible d'un écoulement incompressible, c'est le fait que des petites variations de masse volumique, de pression et de vitesse se propagent à l'intérieur du fluide à une certaine vitesse qui est la célérité du son [24].

**I.4.5.1. La vitesse du son:**

considérons une petite perturbation adiabatique réversible (donc isentropique) qui se déplace dans le fluide initialement au repos contenu dans un tube de section A constante.



Référence lié à la perturbation.

**Fig.1.5:** Mise en évidence de la notion de la célérité du son [24].

Dans un référentiel lié à la perturbation, l'écriture des bilans de masse et quantité de mouvement donne:

- ✓ Masse:  $\rho c = (\rho + d\rho)(c - du)$
- ✓ Quantité de mouvement:  $\rho c^2 - (\rho + d\rho)(c - du)^2 = dp$

Ces deux équations s'écrivent respectivement, au premier ordre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho du = cd\rho \\ 2\rho cdu - c^2 d\rho = dp \end{array} \right. \quad \text{D'où } c^2 d\rho = dp$$

La perturbation considérée est isentropique, donc:

$$c^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas d'un gaz parfait:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

D'où:  $\mathbf{M}$  est la masse molaire,  $\mathbf{R}$  est la constante des gaz parfaits, et  $\gamma = C_p/C_v$

- Pour bien comprendre la différence entre l'écoulement compressible et l'écoulement incompressible, doivent être identifiées un nombre sans dimension, appelé nombre de Mach [24].

#### ***1.4.5.2. Le nombre de Mach:***

Le nombre de Mach, est un nombre adimensionnel noté par  $M_\infty$ , est proportionnel à la racine carrée du rapport entre les forces d'inertie et les forces dues à la compressibilité:

$$\frac{F_A}{F_C} = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force dues à la compressibilité}}$$

$$\frac{F_A}{F_C} = \frac{\rho V^2 L^2}{E_V L^2} = \frac{V^2}{E_V / \rho} = \frac{V^2}{(dp/d\rho)^2} = \frac{V^2}{C^2} = M_\infty^2$$

D'où:  $E_V$ : est le module de la compressibilité du fluide.

$$M_\infty = \frac{V}{C} : \text{le nombre de Mach.}$$

- Le nombre de Mach caractérise les effets de compressibilité dans un écoulement. Pour les fluides incompressibles, la vitesse du son tend vers l'infini c'est-à-dire  $M_\infty$  tend vers 0 [18].

#### ***1.4.5.3. Classification des écoulements selon le nombre de Mach:***

- On distingue en général les régimes d'écoulement suivants [18-24]:

$$\spadesuit \text{ Subsonique incompressible: } \quad 0 < M_\infty < 0.3$$

❖ <b>Subsonique compressible:</b>	$0.3 < M_\infty < 1.0$
❖ <b>Transsonique:</b>	$0.8 < M_\infty < 1.2$
❖ <b>Sonique:</b>	$M_\infty = 1.0$
❖ <b>Supersonique:</b>	$1.0 < M_\infty < 5.0$
❖ <b>Hypersonique:</b>	$M_\infty > 5.0$

### ***1.5. Equations fondamentales:***

On peut décrire le mouvement d'un fluide par un ensemble d'équations aux dérivées partielles déduites des lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique, c'est-à-dire les lois de conservation de la masse (équation de la continuité), de la quantité de mouvement (équation de la quantité de mouvement) et d'énergie (l'équation de l'énergie).

Pour proposer de façon complète un problème en dynamique des fluides, il convient d'ajouter aux équations de mouvement des conditions initiales et des conditions aux limites (ou conditions frontières) [18].

#### ***1.5.1. Equation de continuité:***

L'équation de la continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. C'est-à-dire la variation de masse pendant un temps d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle de fluide sortant.

On considère un volume matérielle  $\Omega$ . Sa masse peut s'exprimer comme:

$$m = \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathcal{V} \quad (\text{I.9})$$

Où  $\rho$  désigne la densité locale du fluide. Si le volume matérielle ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans  $\Omega$  est constante et on peut écrire:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathcal{V} \quad (\text{I.10})$$

On applique le théorème de transport au volume  $\Omega$  sur une surface de contrôle  $\Sigma$  "Le théorème de transport de Reynolds", voir (**Annexe A**):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathcal{G} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{G} + \iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, ds \quad (\text{I.11})$$

Si le volume ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur  $\Sigma$  peut être remplacée par une intégrale de volume "Le théorème d'Ostrogradsky", voir (**Annexe B**):

$$\iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, ds = \iiint_{\Omega} \nabla(\rho \vec{V}) \, d\mathcal{G} \quad (\text{I.12})$$

Dans ces conditions l'équation (I.11) devient:

$$\iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) \right] \, d\mathcal{G} = 0 \quad (\text{I.13})$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{I.14})$$

L'équation (I.14) est appelée l'équation de continuité (forme différentielle) [18–29].

### ***1.5.2. Equation de quantité de mouvement:***

La quantité de mouvement d'un système fluide de volume  $\Omega$ , s'écrit:

$$\iiint_{\Omega} \rho \vec{V} \, d\mathcal{G} \quad (\text{I.15})$$

Or, le principe fondamental de la dynamique nous dit que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement doit être égale à la somme des forces agissant sur le système

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} \, d\mathcal{G} = \vec{R} + \vec{P} \quad (\text{I.16})$$

Où  $\vec{R}$ : forces de surface et  $\vec{P}$ : force de volume (poids), l'expression de  $\vec{R}$  et de  $\vec{P}$  sont:

$$\vec{R} = \iint_{\Sigma} \overline{\overline{p}} \vec{n} ds \quad \text{Et} \quad \vec{P} = \iiint_{\Omega} \rho \vec{F} d\mathcal{G} \quad (\text{I.17})$$

D'où:  $\vec{F}$ : Représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).  
Comme par exemple l'accélération de la pesanteur ou les forces d'aubages dans l'hypothèse de symétrie axiale dans les turbomachines.

$\vec{n}$  : est le vecteur unité tangent à la surface  $\Sigma$ .

$\overline{\overline{P}}$  : est le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit en fonction des composantes tangentielles  $\tau$ , et composantes normales  $\sigma$  de la manière suivante:

$$\overline{\overline{P}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

On applique le théorème de transport de Reynolds sur l'équation (I.16) et on remplace  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$  par leurs équations, on trouve l'équation générale de dynamique des fluides, sous la forme ci-dessous:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dv + \iint_{\Sigma} (\rho \vec{V}) \vec{V} \vec{n} ds = \iint_{\Sigma} \overline{\overline{p}} \vec{n} ds + \iiint_{\Omega} \rho \vec{F} dv \quad (\text{I.18})$$

Après transformation et réarrangement, l'équation (I.18) s'écrit sous la forme différentielle, comme suit:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \nabla \overline{\overline{P}} \quad (\text{I.19})$$

Dans le cas d'un écoulement idéal (sans frottements internes), le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique, et cela devient :

$$\overline{\overline{P}}_{idéal} = - \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Pour le cas d'un fluide incompressible, Newtonien et visqueux, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement représente l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle écrit comme suit :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} (\vec{V} \cdot \nabla) \right] = \rho \vec{F} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{I.20})$$

Pour les écoulements non visqueux ( $\mu=0$ ), l'équation (I.20) est connue sous le nom de l'équation d'Euler à savoir [18-24]:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} (\vec{V} \cdot \nabla) \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} \quad (\text{I.21})$$

### 1.5.3. Equation d'énergie:

L'équation d'énergie est basée sur l'équation thermodynamique, elle est utilisé sous la forme suivante [16-25]:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} (\lambda \vec{\nabla} T) + \Phi \quad (\text{I.22})$$

Où:  $\Phi$  est la fonction de dissipation, représentant l'équivalent thermique de l'énergie mécanique liée à la dissipation visqueuse et les efforts de cisaillement :

$$\Phi = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tau_{ij} = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2$$

$\frac{Dh}{Dt}$  :représente la variation d'enthalpie (dérivée particulière)

$\frac{DP}{Dt}$  :le taux de travail des efforts de pression.

$\nabla(\lambda \nabla T) = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T})$  : le transfert de chaleur par conduction dans le fluide.

$\lambda$  : est le coefficient de conductivité thermique.

En introduisant la chaleur massique à pression constante  $C_p = \frac{\partial h}{\partial t}$  et le coefficient de dilatation cubique à pression constante  $\gamma$ , on écrit l'équation d'énergie sous la forme suivante:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \gamma T \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \Phi \quad (\text{I.23})$$

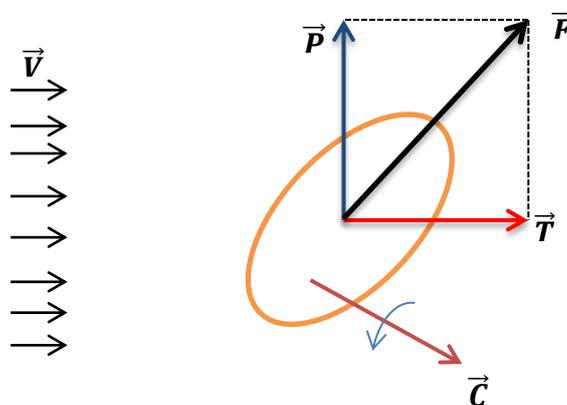
## I.6. Notions de base en aérodynamique:

### I.6.1. Définition:

L'aérodynamique est la science qui a pour objet l'étude des mouvements de l'air autour des corps. En d'autres termes, il s'agit des phénomènes mise en jeu chaque fois qu'il existe un mouvement relatif entre un corps et l'air qui l'entoure. Le corps peut se déplacer dans le fluide immobile (avion en vol) ou être fixe dans le fluide en mouvement (maquette dans une soufflerie) [18].

### I.6.2. Forces et moments aérodynamiques:

L'expérience montre qu'un corps solide en mouvement dans un fluide de vitesse  $\vec{V}$  subit de la part du fluide, des forces de résistance. Ce système de forces qui s'appliquent sur l'obstacle peut se réduire à une force  $\vec{F}$  et un couple  $\vec{C}$ .



**Fig. I.6:** Système de force aérodynamique s'exerçant sur un obstacle [28].

On décompose généralement  $\vec{F}$  en une composante parallèle à  $\vec{V}$ , la traînée d'intensité  $T$ , et une composante perpendiculaire à  $\vec{V}$ , la portance d'intensité  $P$ . Le moment résultant  $\vec{M}$  du système de forces est pris par rapport à un point ou un axe. Les expressions de ces forces dépendent de la densité  $\rho$  du fluide, de la vitesse  $\vec{V}$ , de la taille du profil, et de l'orientation du corps.

$$T = \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \quad (\text{I.24})$$

$$P = \frac{1}{2} C_z \rho S V^2 \quad (\text{I.25})$$

$$C = \frac{1}{2} C_m \rho S V^2 L \quad (\text{I.26})$$

D'où:  $C_x, C_z, C_m$ : sont respectivement les coefficients de traînée, de portance et de couple.

$L$ : Longueur caractéristique de l'obstacle.

$S$ : maître couple de l'obstacle (la surface projetée normalement sur le plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement) [28].

### ***1.6.3. La portance et la traînée:***

#### ***1.6.3.1. La portance:***

La portance est définie comme la résultante des forces exercées par le fluide dans une direction normale à la vitesse de l'écoulement. Elle est la partie utile de la résultante. Dès que celle-ci est égale ou supérieure au poids de l'avion, celui-ci peut se maintenir en équilibre dans l'air. C'est cette composante de la résultante aérodynamique qui maintient l'avion en l'air. La portance est la combinaison d'une surpression (sur l'intrados) et d'une dépression (sur l'extrados) [8-9].

#### ***1.6.3.2. La traînée:***

La traînée par contre, est définie comme la résultante des forces exercées par le fluide dans la direction de la vitesse de l'écoulement. C'est la partie nuisible de cette résultante. Il

faut savoir que plus cette traînée sera faible, plus l'avion avancera facilement. Cette traînée est composée de quatre traînées différentes.

- La traînée de forme : Appelée aussi traînée de profil, elle est due à l'épaisseur du profil.
- La traînée induite : Générée par la différence de pression entre l'intrados et l'extrados entraîne des tourbillons marginaux en bouts d'aile.
- La traînée de frottement : Elle est due à la viscosité de l'air.
- La traînée d'onde : Engendrée lors des écoulements transsoniques, ou apparaissent des ondes de chocs [9].

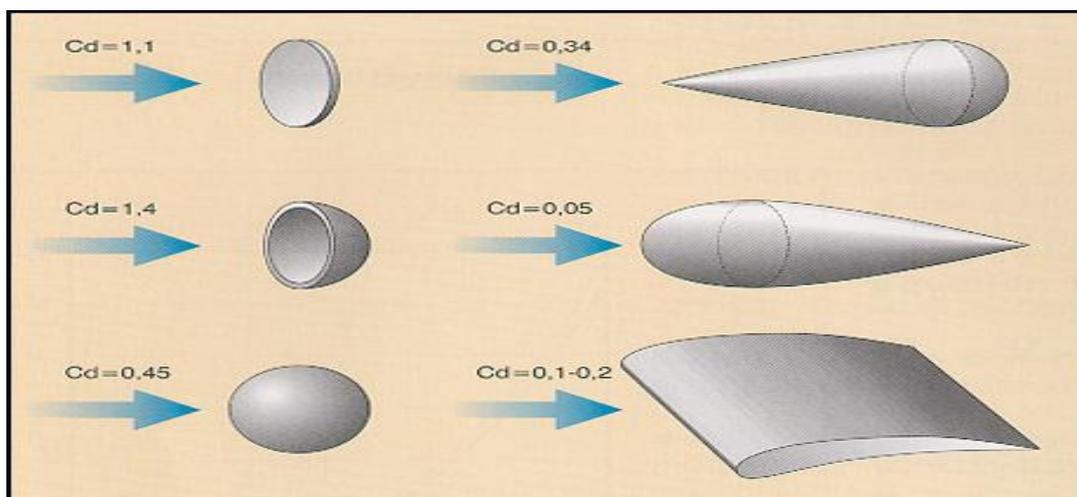
#### ***1.6.4. Coefficients aérodynamiques:***

##### ***1.6.4.1. Coefficient de portance et de traînée:***

L'expérience montre que les coefficients de portance et de traînée varient avec:

- L'angle d'attaque.
- La forme du profil.
- La vitesse relative.
- La masse volumique de l'écoulement.
- La surface de l'obstacle [18].

La figure suivant (**Fig.1.7**), présente le coefficient de traînée pour quelques obstacles.



**Fig.1.7:** Coefficient de traînée utile ( $C_d$ ), pour quelques obstacles aérodynamiques [8].

### ***1.6.4.2. Coefficient de pression (Le nombre d'Euler):***

Le coefficient de pression (ou le nombre d'Euler),  $C_p$ , permet d'indiquer les pressions sous forme adimensionnelle. Il s'agit du rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie. En général, le coefficient de pression, s'écrit sous la forme :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{P_{dy}} = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \quad (\text{I.27})$$

D'où:  $P_{dy}$ ; La pression dynamique,  $P_{dy} = (1/2)\rho V_\infty^2$ , en (N/m<sup>2</sup>).

$P$  et  $P_\infty$ ; sont respectivement la pression locale et la pression initiale de l'écoulement [18].

### ***1.6.5. Les obstacles aérodynamiques:***

On peut classer les obstacles de forme géométrie simple en trois types:

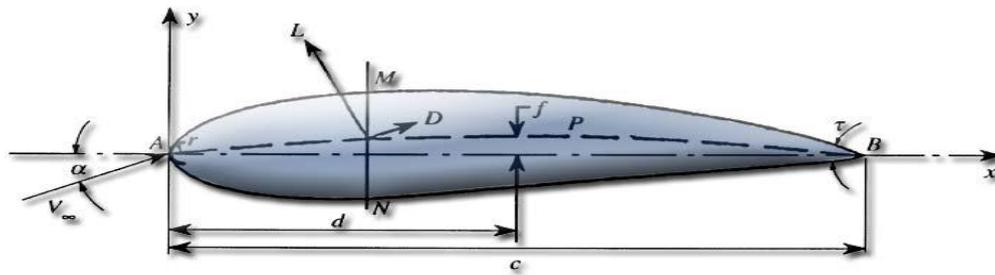
- ✓ Les obstacles à courbure progressive: pour lesquels le point de décollement de la couche limite est susceptible de se déplacer: le modèle géométrique est la sphère ou la cylindre.
- ✓ Les obstacles à arrête vive, pour lesquels le point de décollement de la couche limite est fixe: le modèle géométrique est la plaque plane inclinée sur la direction de la vitesse  $\vec{V}$ .
- ✓ Les obstacles profilés, pour lesquels il n'a pas de décollement de la couche limite: le modèle géométrique est la plaque plane parallèle à  $\vec{V}$  [28].

### ***1.6.6. profils aérodynamiques:***

Plusieurs familles des profils ont été conçues et testées. par exemple: profils JOU-KOWSKI, profils SANDIA, profils GOTTINGEN mais Les plus utilisés de nos jours, sont les profils NACA (National Advisory Comité for Aéronautics). Ils sont couramment utilisés, ce qui les rend pratiques dans la validation des méthodes numériques [18].

#### ***1.6.6.1. Définitions géométriques des profils:***

Une définition géométrique d'un profil aérodynamique (de type NACA) d'une pale est représentée sur la figure suivante:



**Fig.1.8:** Définition géométrique d'un profil d'aile [18].

L'air aborde le profil par le bord d'attaque (A) et le quitte par le bord de fuite (B). La partie supérieure du profil est appelée extrados (AMB) et la partie inférieure intrados (ANB). Le segment qui joint le bord d'attaque et le bord de fuite est appelé corde du profil (c). La distance entre l'intrados et l'extrados est l'épaisseur (NM). La valeur maximale de l'épaisseur divisée par la longueur de la corde donne l'épaisseur relative (on noté par e). La ligne qui joint le bord d'attaque au bord de fuite en passant à égale distance de l'intrados et de l'extrados est appelée corde moyenne (APB). La distance maximale entre la corde et la corde moyenne est appelée flèche du profil. Le rapport entre la flèche et la longueur de la corde est appelé courbure (ou cambrure) relative [10-18].

L'épaisseur relative d'un profil est variée comme suit:

- ✓  $e < 6\%$  : pour un profil mince (avion de chasse)
- ✓  $6\% < e < 12\%$  : pour un profil semi épais (avion de ligne)
- ✓  $e > 12\%$  : pour un profil épais (avion de transport à basse vitesse) [1].

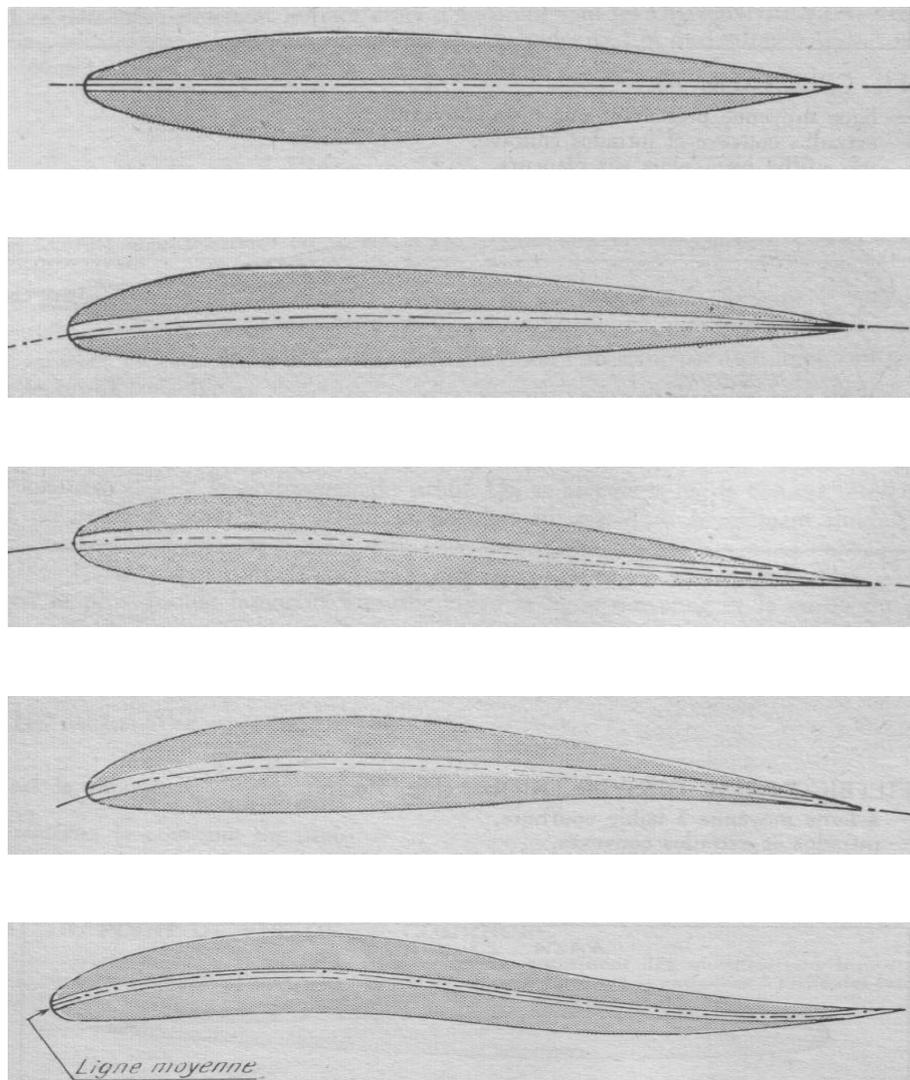
### ***1.6.6.2. Classification géométrique des profils:***

Les différents types de profils sont classés à cinq familles, suivants la forme géométrique générale qu'ils sont [10] :

- **Biconvexe symétrique:** La ligne moyenne est rectiligne (confondue avec la corde).
- **Biconvexe dissymétrique:** La ligne moyenne est à simple courbure (intrados et extrados convexes).

- **Plan convexe:** La ligne moyenne est à simple courbure (intrados plat et extrados convexe).
- **Profils Creux:** La ligne moyenne est à simple courbure (intrados concave, extrados convexes).
- **Profils à Double courbure:** La ligne moyenne est à double courbure.

La figure (I.9), présente les cinq familles lié à la géométrie des profils, organisé comme suite: profil Biconvexe symétrique, profil Biconvexe dissymétrique, profil Plan convexe, Profil Creux, Profil à Double courbure.



**Fig.1.9:** Classification géométrique des profils d'aile [10].

### ***1.6.6.3. Classification les Profils NACA:***

Il y'a plusieurs classifications des profils NACA. Les plus utilisés sont ont des désignations à quatre et, cinq chiffres et laminaire, Ces chiffres dépendent les caractéristiques géométriques du profil (l'épaisseur relative, la corde et la cambrure...etc.) [18].

#### ***1.6.6.3.1 Profils NACA à quatre chiffres:***

Dans cette famille, le premier chiffre indique la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indique la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde. Par exemple: NACA 0015 est un profil symétrique d'épaisseur maximale 15 % [1-18].

#### ***1.6.6.3.2 Profils NACA à cinq chiffres:***

Dans cette famille, le premier chiffre indique le coefficient de portance caractéristique, le deuxième et le troisième chiffre indiquent la position de la cambrure maximale et les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur relative maximale du profil.

Par exemple: NACA 23012 c'est un profil de coefficient de portance = 2, et la position de la cambrure maximale = 30 et l'épaisseur relative maximale = 12% [18].

#### ***1.6.6.3.3 Profils NACA laminaire:***

Le NACA a également étudié une série de profils dont l'écoulement est laminaire sur une majeure partie de sa surface est les a désignés par un ensemble de chiffres significatifs.

Par exemple, pour NACA 66<sub>2</sub> – 215 :

- ✓ Le premier chiffre (6) représente la désignation de la série (profils laminaire).
- ✓ Le douzième chiffre (6) représente la position de la pression minimale (60%).
- ✓ L'indice (2) est la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable (0.2).
- ✓ Le (2) représente le coefficient de portance caractéristique.

- ✓ Les derniers chiffres (15) représentent l'épaisseur relative maximale (15%) [25].

### ***1.7. Ecoulement autour des obstacles:***

L'écoulement autour des obstacles est un phénomène qui se produit fréquemment dans la pratique et nécessaire pour la conception mécanique et thermique de nombreux systèmes en engineering comme: avions, automobiles, bâtiments, composantes électroniques, les aubes de turbine...etc. L'identification et étude des phénomènes hydro et aérodynamiques qui surgissant dans le sillage d'un obstacle restent un sujet d'intérêt dans divers domaines [18].

#### ***1.7.1. Ecoulement parfait autour des obstacles:***

Un corps solide de forme quelconque, en mouvement uniforme dans un fluide parfait incompressible s'étendant à l'infini, ne subit de la part du fluide aucune résistance, ni dans le sens du mouvement ni dans une autre direction, si l'écoulement est à potentiel des vitesses sans circulation. Le déplacement du corps provoque des déformations dans le fluide déformation qui se traduisent par des perturbations de la pression et de la vitesse: quand on s'éteignent rapidement, comme l'inverse du cube des distances.

Si on applique le théorème de quantité de mouvement à une surface de référence  $\Sigma$ , suffisamment grande entourant le corps, l'aire de cette surface varie comme le carré des distances. La somme des contributions apportées par les impulsions et les forces de pression varie donc comme l'inverse des distances, elle tend donc vers zéro quand  $\Sigma$  grandit indéfiniment: la force appliquée au corps solide est donc nulle.

De même si le fluide qui entoure est défini, par exemple s'il est limité par une paroi solide, il peut y avoir interaction entre la paroi et le corps [28-31].

#### ***1.7.2. Ecoulement visqueux autour des obstacles:***

L'expérience montre qu'un corps en mouvement avec une vitesse  $\vec{V}$  dans un fluide réel initialement au repos, subit toujours de la part de ce fluide une résistance qui s'oppose au

mouvement. Un raisonnement qualitatif simple avait conduit "Newton" à cette conclusion, que la résistance devait être proportionnelle à la masse volumique du fluide, la vitesse du corps et son maître-couple, cette proposition ne tient pas compte de la forme du corps notamment de la géométrie de la partie arrière [28-31].

### ***1.7.3. Ecoulement autour des obstacles de révolution simples:***

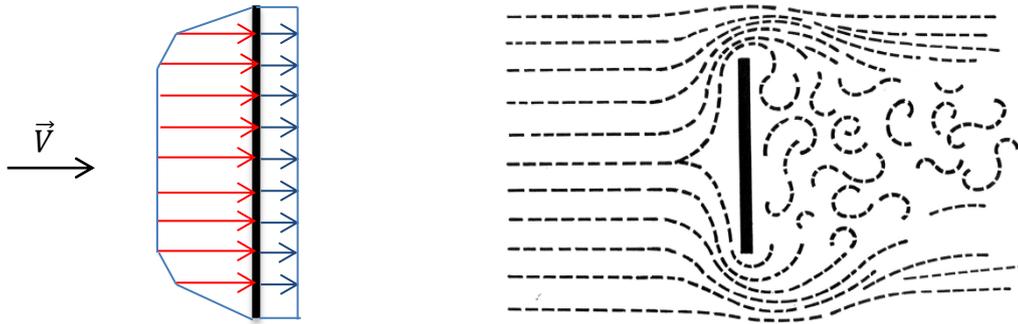
Des scientifiques ont obtenu des résultats expérimentaux intéressants avec les corps à géométrie simple (plan, cylindre, sphère), qui ont conduit à des conclusions fondamentales sur la distribution de la pression et le calcul de la traînée de pression. Ainsi, de 1910 à 1912, Eiffel a effectué de nombreux essais sur les corps à géométrie simple, pour différents valeurs de nombre de Reynolds. Sans aborder les écoulements réels (visqueux) [18].

#### ***1.7.3.1. Ecoulement autour d'un disque plan:***

Soit un disque plan et mince, normal par rapport à la vitesse de l'écoulement  $\vec{V}$  (**Fig. I.10**). Les pressions locales mesurées sur la face amont demeurent à peu près constantes sur une grande partie de la surface, mais décroissent rapidement vers les bords. Sur la face aval, les pressions restent pratiquement constantes. A partir des données expérimentales, on peut calculer graphiquement le coefficient moyenne de pression  $C_p$  sur chaque face. Ainsi, sur la face amont, il y a une surpression et le coefficient de pression est  $C_p = 0.82$  et, sur la face aval, on obtient une dépression dont le coefficient de pression est  $C_p = -0.29$ . Etant donné qu'une surpression sur la face amont et une dépression sur la face aval conduisent à des forces s'appliquant dans le même sens, on détermine comme suit le coefficient de la traînée et de pression:  $C_{xp} = 0.82 - (-0.29) = 1.11$  [10-18].

La valeur de la traînée du disque, mesurée directement, est  $C_x = 1.1$  lorsqu'on prend la surface du disque comme surface de référence. Dans ce cas particulier, la résultante des forces tangentielles de frottement est nulle, parce que les forces de frottement radiales ont une projection nulle et celles qui s'exercent sur la surface latérale sont négligeables, le disque ayant

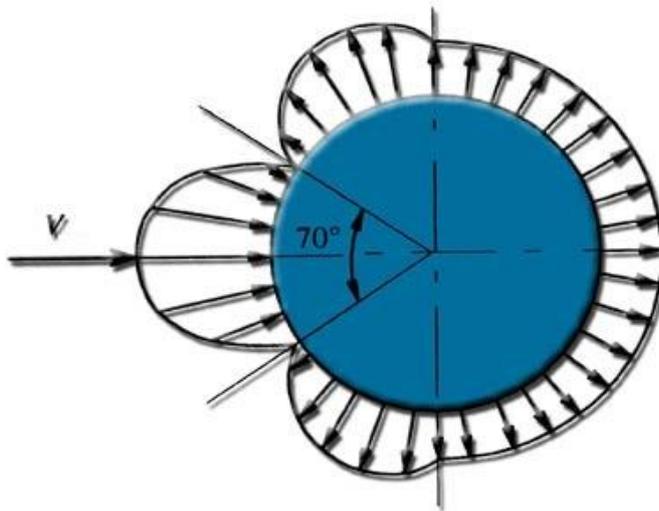
une très faible épaisseur. On constate, lorsqu'on représente l'écoulement visuellement, que les filets fluides décollent sur l'arête du disque, plutôt que la contourner [18].



**Fig. I.10:** distribution de pression et un écoulement autour un disque placé perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement [10].

### 1.7.3.2. Écoulement autour d'une sphère:

Soit une sphère d'un diamètre  $D$  égale à celui du disque précédent. Les forces élémentaires de pression  $y$  sont radiales (**Fig.I.11**):



**Fig. I.11:** Écoulement autour d'une sphère et Distribution de pression [18].

Au premier régime d'écoulement, les décollements s'effectuent un peu en amont du plan diamétral perpendiculaire à  $\vec{V}$ . Si on intègre graphiquement les efforts locaux, on trouve les coefficients moyens de pression appliqués à la surface de la sphère. Ainsi, les surpressions

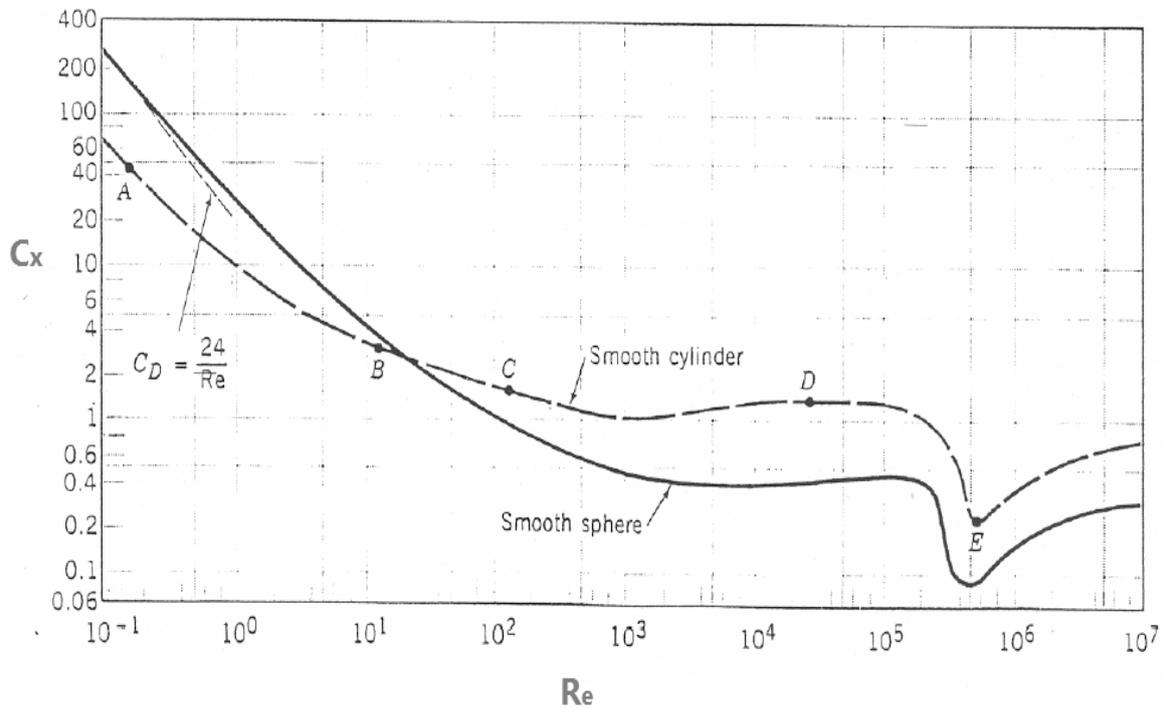
sur une partie de la face amont de la sphère donnent un coefficient de pression  $C_p = 0.225$ . Les dépressions sur le reste de l'hémisphère amont conduisent à  $C_p = -0.179$  et les surpressions sur l'hémisphère aval donnent un valeur  $C_p = -0.465$ , dont le résultat total du coefficient de la traînée est  $C_{xp} = 0.255 - (-0.465) - 0.179 = 0.511$ . On obtient à peu près la même valeur pour le coefficient  $C_d$  lorsqu'on le mesure et la traînée de frottement est encore négligeable [18].

### ***1.7.3.3. Ecoulement autour d'un cylindre:***

Le cylindre est un corps qui présente une forte surface frontale à l'écoulement, à partir de  $Re=50$  la couche limite décolle au niveau du maitre couple du fait de l'action retardatrice du trop fort gradient de pression positif à cet endroit. On dit gradient positif, lorsque la pression près de la paroi augmente dans le sens de l'écoulement. Ce décollement crée un sillage épais de dimension comparable au maitre couple (la plus grande surface frontale présentée à l'écoulement).

La traînée est due essentiellement à la différence de pression régnant entre le point d'arrêt et le sillage. On appelle cette traînée de pression ou traînée de culot. Il est donc évident de choisir le maitre couple ( $S$ ) comme surface permettant de définir le  $C_x$ . ( $S = d.L$  pour le cylindre). Le nombre de Reynolds est défini, lui aussi à partir de la plus grande dimension transversale (le diamètre pour le cylindre):

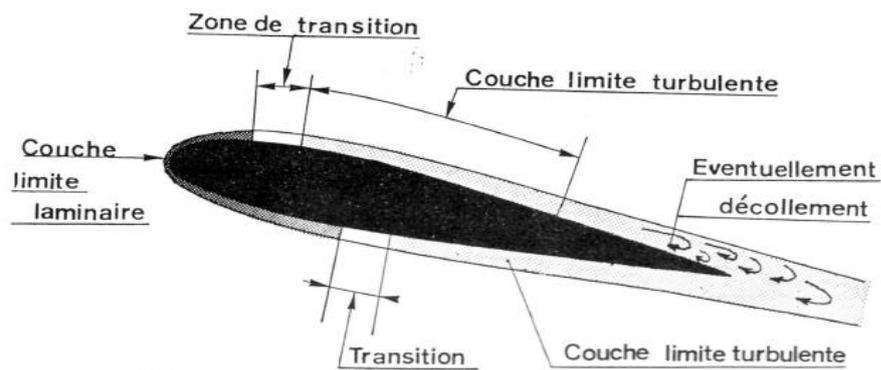
Pour le cylindre le  $Re_c = 4.105$ , le  $C_x$  du premier régime est de 1.2 celui du second est de 0.5. La figure (**Fig.12**) présente la variation du coefficient de traînée en fonction de nombre de Reynolds pour un cylindre et une sphère lisses [10-18].



**Fig. I.12:** Coefficient de traînée  $C_x$  en fonction du nombre de Reynolds ( $Re$ ) pour un cylindre lisse et une sphère lisse [10].

#### I.7.4. Écoulement autour d'un profil d'aile:

Des expériences faites en soufflerie ont permis de déterminer, de façon précise, les phénomènes de l'écoulement de l'air autour d'un profil, par la mesure des pressions et des vitesses.



**Fig. I.13:** Écoulement autour d'un profil d'aile [10].

La couche limite joue un rôle important car elle conditionne directement la résistance de frottement de l'aile. Cette couche limite peut-être laminaire ou turbulente. Dans la plupart des cas, elle commence par être laminaire sur la surface voisine du bord d'attaque puis devient

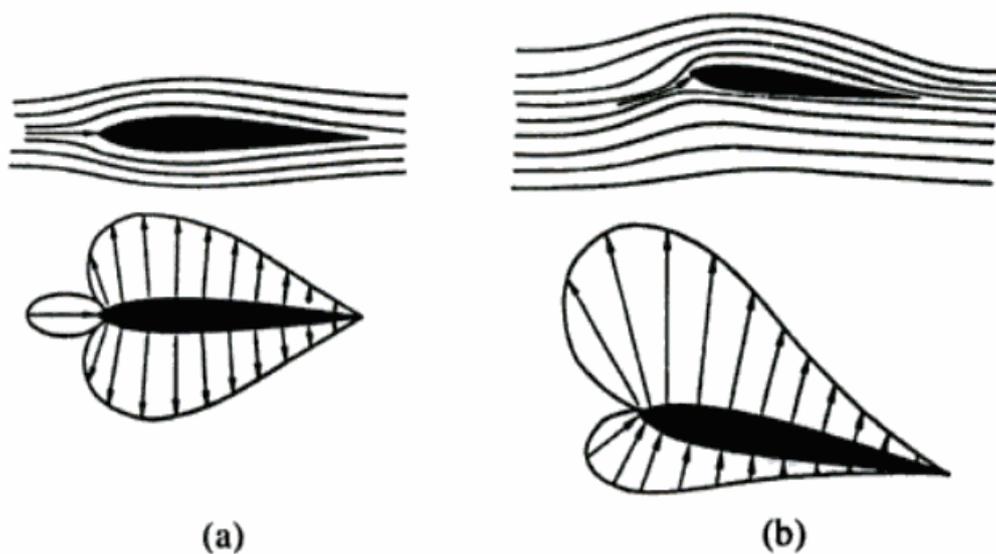
turbulente à partir d'un point appelé point de transition. Ce point de transition n'a pas une position fixe, aussi existe-t-il, en réalité, une zone de transition dont les limites dépendent, en grande partie, de la turbulence de l'atmosphère. Sous certaines conditions, les filets fluides peuvent se séparer de la paroi et le phénomène du décollement apparaît [10].

#### ***1.7.4.1. Écoulement autour d'un profil symétrique:***

Pour un profil symétrique à angle d'attaque nul, l'air s'écoule symétriquement et à la même vitesse sur l'extrados et sur l'intrados du profil, formant une pression égale sur chacune des surfaces (**Fig.14**).

Dans ce cas il n'est pas de portance, mais il y a une traînée provenant du frottement de l'air sur le profil. Lorsque l'angle d'attaque augmente une surpression naît sous l'intrados, où la vitesse est réduite, et une dépression se produit sur l'extrados, où l'écoulement s'accélère.

Ces deux actions s'additionnent et s'ajoutent au frottement de l'air sur le profil pour donner la portance et la traînée. Si l'on augmente encore l'angle d'attaque et que l'on dépasse une certaine valeur ( $\alpha = 12^\circ$ ), les filets d'air décollent et l'extrados devient le siège de tourbillons désordonnés; on dit qu'il y a décrochage (**fig.15**) [14].



**Fig. I.14:** Écoulement des filets fluides autour d'un profil et distribution de la pression  
a)  $\alpha=0^\circ$ ; b)  $\alpha=5^\circ$  à  $10^\circ$  [18].

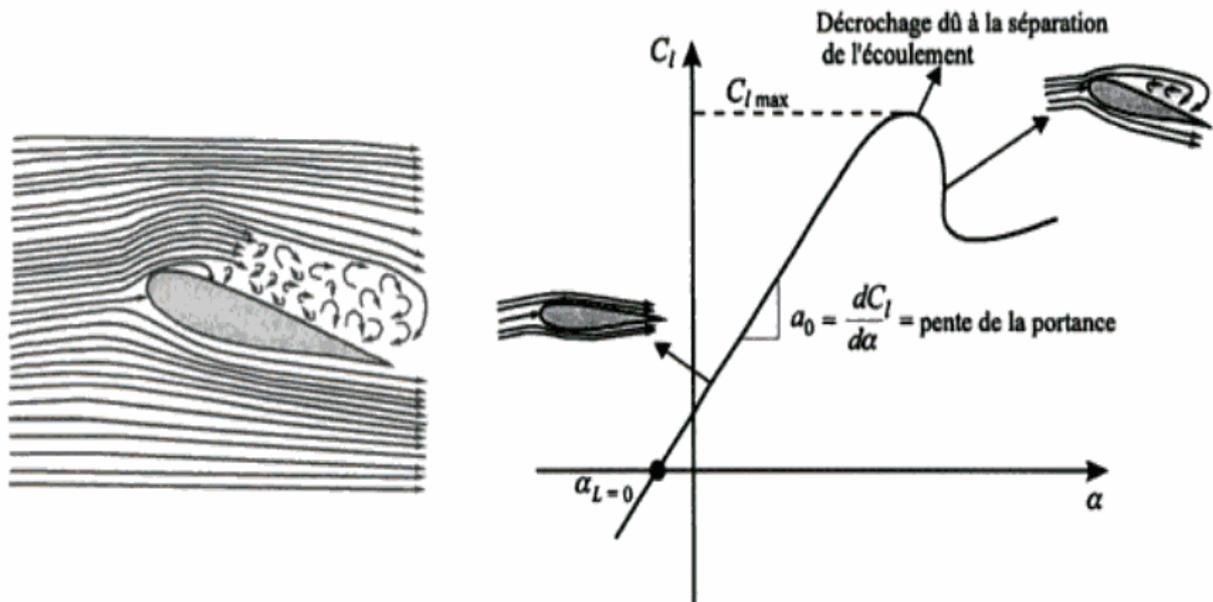


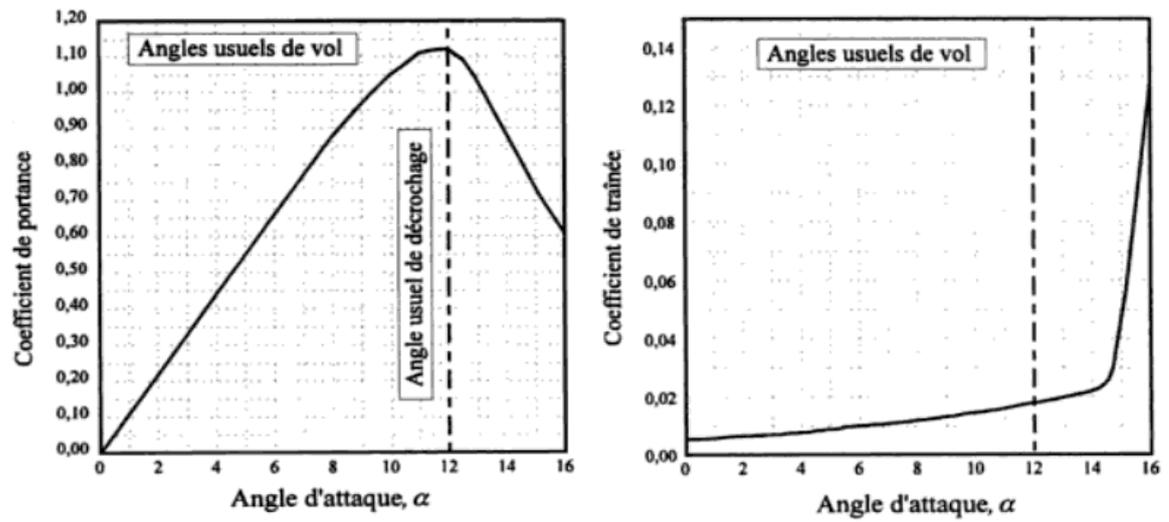
Fig. I.15: Profil symétrique en décrochage statique [18].

#### I.7.4.2 Courbes de portance et de traînée pour un profil symétrique:

Des coefficients déterminés en fonction de l'angle d'attaque permettent de représenter les caractéristiques de portance et de traînée d'un profil d'aile: le coefficient de portance et le coefficient de traînée.

La figure (I.16) explique la variation de ces coefficients selon les divers angles d'attaque. A un angle d'attaque nul, la portance est nulle; c'est la caractéristique des profils symétriques (profil NACA 0012 dans ce cas).

Par la suite, le coefficient de portance augmente d'une manière brusque linéaire avec l'angle d'attaque, il atteint un maximum puis décroît brusquement par la suite en raison de phénomène de décrochage. Dans le cas du coefficient de traînée, la variation avec l'angle d'attaque est d'abord lente, puis devient de plus en plus forte, particulièrement lorsqu'apparaît le décrochage. Toutefois, contrairement à la portance, la traînée n'est jamais nulle, mais elle passe par un minimum. Les variations de la portance et de la traînée sont d'un intérêt particulier pour les concepteurs d'avions et pour les pilotes également, car celle indiquent d'un manière claire les caractéristiques aérodynamiques de l'aile [18].



**Fig. I.16:** Courbes de portance et de traînée en fonction de l'angle d'attaque pour un profil NACA 0012  $Re=10^6$  [18].

# *Chapitre II*

---

*FORMULATION MATHEMATIQUE DU  
PROBLEME*

---

## Chapitre II

### FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

#### II.1. Définition géométrique:

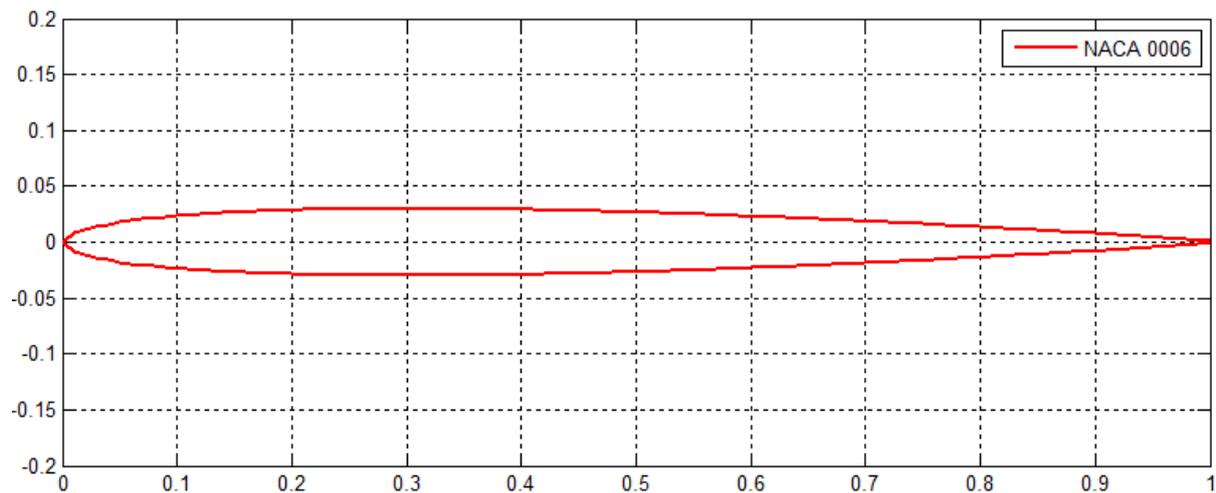
Notre travail consiste à l'étude numérique d'un écoulement potentiel autour d'un profil d'aile mince symétrique (de type NACA 0006). La fonction géométrique des profils de type NACA est donné par la relation suivante [7]:

$$Y(x) = \tau(ax^{1/2} + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) \quad (\text{II.1})$$

$$a = 1.4779155; \quad b = -0.624424; \quad c = -1.727016; \quad e = -0.489769; \quad d = 1.384087;$$

Et ;  $\tau$ : l'épaisseur relative. Dans notre cas ;  $\tau = 0.06$ .

La figure (II-1) présente la forme du profil mince choisit qu'il pouvons-nous tracé à partir la relation (II-1).



**Fig.II-1** : présentation géométrique du profil choisie; profil NACA 0006.

## II.2. Modèle Mathématique:

### II.2.1. Les hypothèses du problème:

Les hypothèses simplificatrices appliquées dans notre étude sont :

- L'écoulement est bidimensionnel suivant (x,y).
- Le fluide est idéal (non visqueux), compressible.
- L'écoulement est potentiel (irrotationnel)
- L'écoulement est stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .
- Les propriétés physiques sont supposées constantes.

### II.2.2. Mise en équations :

On considère l'écoulement irrotationnel (potentiel), stationnaire et idéal (non visqueux) d'un fluide compressible s'écoule autour d'un obstacle mince dans un système de coordonnées cartésien à deux dimensions.

Nous utiliserons la théorie générale de ces écoulements qui permet une description des écoulements subsoniques, transsoniques, supersoniques et hypersoniques.

Pour trouver l'équation générale de la dynamique des gaz, nous assemblons les équations de base (les équations fondamentales de mécanique des fluides) pour cet écoulement.

Avant l'application des équations fondamentales de mécanique des fluides sur notre cas, on va voir quelques opérateurs en coordonnées cartésiennes somme suite [23]:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II. 2})$$

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{II. 3})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{II. 4})$$

### II.2.2.1. Equation de continuité :

Comme on a vu dans le chapitre précédent, cette équation est obtenue en appliquant le principe de la conservation de la masse dans les directions x, y et z, donc :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla}(\rho\vec{q}) = 0 \quad (\text{II. 5})$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}(\vec{q}) + \vec{q}\vec{\nabla}(\rho) = 0 \quad (\text{II. 6})$$

Avec :  $\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j}$

Après l'application des hypothèses précédentes on obtient [1-19]:

$$\rho\vec{\nabla}(\vec{q}) + \vec{q}\vec{\nabla}(\rho) = 0 \quad (\text{II. 7})$$

### I.2.2.2. Equation de quantité de mouvement :

Dans notre cas, la forme de l'équation de quantité de mouvement est comme suit :

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} + \vec{q}\nabla\vec{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla\vec{P} + \vec{f} \quad (\text{II. 8})$$

On néglige les forces massique ( $\vec{f} = \vec{0}$ ), et après l'application des hypothèses précédentes, on obtient [1-19] :

$$\vec{q}\nabla\vec{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla\vec{P} \quad (\text{II. 9})$$

### II.2.2.3. Equation d'énergie :

L'équation d'énergie est obtenue en appliquant le principe de la conservation de l'énergie au fluide en mouvement dans la direction : x, y et z.

Puisque l'écoulement est isentropique ( $S=cst$ ), la forme d'équation d'énergie qui gouverne notre écoulement s'écrit sous la forme ci-dessous :

$$\frac{DE}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = T \frac{DS}{Dt} = 0 \quad (\text{II. 10})$$

Avec  $T \neq 0$ , et après l'application de nos hypothèses précédentes, on obtient :

$$\frac{DS}{Dt} = q \vec{\nabla} S = 0 \quad (\text{II. 11})$$

On rappelle également qu'un écoulement isentropique est un écoulement :

- ✓ Adiabatique : il n'y a pas de transfert thermique dans le fluide.
- ✓ Réversible : il n'y a pas de phénomène dissipatif c-à-d pas d'effet visqueux, de conductivité thermique ou diffusion de masse [1-3-19].

Dans ce cas :

$$c^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_s = \gamma RT \quad (\text{II. 12})$$

Où :  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifique  $\frac{c_p}{c_v}$ .

#### II.2.2.4. Equation d'état :

L'équation d'état thermodynamique, est donnée par :

$$P = P(\rho, S) \quad (\text{II. 13})$$

$$\vec{\nabla} P = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \vec{\nabla} \rho + \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \vec{\nabla} S \quad (\text{II. 14})$$

Cette dernière équation après multiplication scalaire par  $\vec{q}$ , prendra la forme :

$$\vec{q} \vec{\nabla} P = \vec{q} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \vec{\nabla} \rho + \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \vec{q} \cdot \vec{\nabla} S \quad (\text{II. 15})$$

Puisque l'écoulement est isentropique ( $S=cst$ ) :

$$\vec{q} \cdot \vec{\nabla} P = c^2 \cdot \vec{q} \vec{\nabla} \rho \quad (\text{II.16})$$

On cherche à obtenir une seule équation faisant intervenir de vecteur vitesse, c'est pour ça on multiplie l'équation de continuité (II.7) par  $\left(\frac{c^2}{\rho}\right)$ , l'équation d'Euler (II.9) par  $(-\vec{q})$  et l'équation d'état thermodynamique (II.16) par  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} c^2 \vec{\nabla} \vec{q} + \frac{\vec{q} c^2}{\rho} \vec{\nabla} \rho = 0 \\ -\vec{q} [\vec{q} \vec{\nabla} \vec{q}] - \frac{\vec{q}}{\rho} \vec{\nabla} P = 0 \\ \frac{\vec{q}}{\rho} \vec{\nabla} P - \frac{c^2}{\rho} \vec{q} \vec{\nabla} \rho = 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Par addition des équations précédentes on aura :

$$-\vec{q} [\vec{q} \vec{\nabla} \vec{q}] + c^2 \vec{\nabla} \vec{q} = 0 \quad (\text{II.21})$$

- Cette dernière équation est connue sous le nom de (L'équation générale de la dynamique des gaz). En coordonnées cartésiennes, cette équation devient :

$$-u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uv \frac{\partial u}{\partial y} - uv \frac{\partial v}{\partial x} - v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Et après arrangement, nous obtenons l'équation générale de la dynamique des gaz pour un écoulement stationnaire, idéal et bidimensionnel (x,y) [1-3]:

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II.23})$$

### II.2.2.5. Equation du potentiel de vitesse :

Si l'écoulement est irrotationnel, il existe un potentiel de vitesse  $\varphi$  tel que :

$$\vec{q} = \vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II. 24})$$

On peut écrire l'équation générale de la dynamique des gaz en fonction de comme  $\varphi$  suit :

$$\left[ c^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II. 25})$$

Alors:

$$\left[ c^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0 \quad (\text{II. 26})$$

Cette équation est l'équation du potentiel de vitesse qui s'exprime uniquement par rapport à la fonction  $\varphi$ . puisque l'on a l'équation d'énergie applicable entre la vitesse amont et la vitesse du fluide au voisinage du profil (**Annexe C**) [1-9-21]:

$$U_\infty^2 + \frac{2}{\gamma-1} C_\infty^2 = q^2 + \frac{2}{\gamma-1} C^2 \quad (\text{II. 27})$$

$$\text{Avec } q^2 = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2$$

Il en résulte:

$$C^2 = C_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2} \left[ U_\infty^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{II. 28})$$

### II.3. Théorie des petites perturbations :

Les équations exactes décrites aux paragraphes précédents sont très complexes et ne permettent pas l'analyse générale. Ainsi, pour obtenir une vue d'ensemble des phénomènes physiques associés à un écoulement compressible et idéal, on est contraint d'introduire des

simplifications. Nous porterons donc principalement notre attention sur le problème de la description d'un écoulement parallèle et homogène légèrement perturbé par la présence d'un profil ou d'un obstacle classique. Dans ce contexte et pour le cas d'un écoulement irrotationnel, il est avantageux d'introduire un potentiel  $\phi$  représentant la perturbation due à la présence de l'obstacle.

Si un écoulement homogène et parallèle de vitesse  $U_\infty$  est orienté dans la direction  $(\vec{i})$  d'un repère cartésien. Le potentiel total  $\phi$  s'écrit:

$$\phi = U_\infty x + \varphi \quad (\text{II. 29})$$

Les composantes de vitesse deviennent :

Si l'on se place dans le cadre de petites perturbations induites par le profil en écoulement compressible et pour un angle d'incidence nul, alors:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty + u_k \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_k \end{cases} \quad (\text{II. 30})$$

Les vitesses de perturbation  $u_k = u - U_\infty$ ; et  $v_k = v$  associées au potentiel  $\varphi$  sont supposées être petites par rapport à  $U_\infty$ , de telle sorte que [1-21] :

$$\frac{u_k}{U_\infty} = \frac{u - U_\infty}{U_\infty} \ll 1 \quad \frac{v_k}{U_\infty} \ll 1 \quad (\text{II. 31})$$

En introduisant (II. 29) dans (II. 26) , on obtient :

$$\left[ c^2 - \left( U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \left( U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{II. 32})$$

Le terme  $c^2$  est exprimé en fonction de  $\varphi$ , au niveau de la relation (II. 28).

Si les vitesses de perturbation selon (II. 31) sont faibles, il est possible de négliger plusieurs termes en l'équation (II. 32). Ainsi, si les termes carrés du type  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ ,  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$  ...etc, formés par les produits de vitesse de perturbation sont en premier lieu négligés, on obtient à partir de l'équation (II. 32), (II. 28) :

$$\left[C_{\infty}^2 - (\gamma - 1)U_{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - U_{\infty}^2 - 2U_{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left[C_{\infty}^2 - (\gamma - 1)U_{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2U_{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0 \quad (\text{II. 33})$$

Après division par  $C_{\infty}^2$  et après réarrangement de l'équation, il découle :

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = M_{\infty}^2(\gamma - 1) \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + M_{\infty}^2(\gamma - 1) \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2M_{\infty}^2 \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad (\text{II. 34})$$

Où ;  $M_{\infty} = \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}}$  représente le nombre de Mach de l'écoulement parallèle et homogène.

Si  $M_{\infty}$  tend vers à 1, le premier terme dans l'équation (II. 34) devient petit et il n'est alors possible de négliger le premier terme du nombre de droite de cette équation. Par contre les autres termes subsistant dans le nombre de droite sont petits en comparaison de terme  $(\partial^2\varphi/\partial y^2)$ , et peuvent donc être négligés. Dans ce cas on obtient alors l'équation [1-21]:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = M_{\infty}^2(\gamma - 1) \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \quad (\text{II. 35})$$

L'équation (II. 35) représente la forme appropriée de (II. 34) pour un écoulement transsonique bidimensionnel. Cette équation est une équation non linéaire son type mathématique liée directement au nombre de Mach de l'écoulement parallèle et homogène ( $M_{\infty}$ ) [21]. Le type d'équation aux dérivées partielles est donné selon (Annexe D)

- Si  $M_{\infty} > 1$  (ou  $q > c$ ) ; l'équation (II. 35) devient hyperbolique.

- Si  $M_\infty = 1$  (ou  $q = c$ ) ; l'équation (II. 35) devient parabolique.
- Si  $M_\infty < 1$  (ou  $q < c$ ) ; l'équation (II. 35) devient elliptique.

Dans le cas où l'écoulement est subsonique ou supersonique on peut négliger les termes de l'ordre supérieur dans l'équation (II. 34). Dans ce cas l'équation prendra forme de (équation de Prandtl Glauret) [1]:

$$[1 - M_\infty] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II. 36})$$

Cette équation n'est pas exacte, ce n'est qu'une approximation pour de petites perturbations autour d'un profil, c'est-à-dire:

- Un corps mince à faible angle d'incidence :
- Un élément subsonique ( $M < 0,8$ ) où supersonique ( $1.2 < M < 5$ ), mais l'équation n'est plus valable pour les écoulements transsoniques où hypersoniques.

L'équation (II. 36) toujours de type elliptique [1-19].

#### II.4. Ecriture adimensionnelle:

On introduisant des paramètres pour transformer les équations (II. 35) et (II. 36) en des équations sans dimensions. On définit donc une liste de grandeurs physique de référence, par exemple la largeur L du tablier d'un pont en tant que longueur de référence.

Soit :

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{U_\infty L} \Rightarrow \varphi = \varphi^* U_\infty L$$

$$X = \frac{x}{L} \Rightarrow x = XL$$

$$Y = \frac{y}{L} \Rightarrow y = YL$$

Après le remplacement des paramètres, Les équations (II.35) et (II.36) deviennent respectivement [1]:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial Y^2} = M_\infty^2 (\gamma - 1) \frac{\partial \varphi^*}{\partial X} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial X^2} \quad (\text{II. 37})$$

$$[1 - M_\infty^2] \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial Y^2} = 0 \quad (\text{II. 38})$$

### II5. Le coefficient de pression :

Le coefficient de pression est par définition :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{q_\infty} \quad (\text{II. 39})$$

Avec la pression dynamique qui s'écrit sous la forme :

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma P_\infty}{\gamma P_\infty} \rho_\infty U_\infty^2$$

$$q_\infty = \frac{\gamma}{2} P_\infty \left( \frac{\rho_\infty}{\gamma P_\infty} \right) U_\infty^2$$

$$q_\infty = \frac{\gamma}{2} P_\infty \frac{U_\infty^2}{\alpha_\infty^2}$$

$$q_\infty = \frac{\gamma}{2} P_\infty M_\infty^2$$

En remplaçant cette expression dans  $C_p$  il vient :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left( \frac{P}{P_\infty} - 1 \right) \quad (\text{II. 40})$$

Par ailleurs, on peut écrire l'équation d'énergie sous la forme :

$$T + \frac{V^2}{2C_p} = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2C_p}$$

Comme  $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$  il vient :

$$T - T_\infty = \frac{U_\infty^2 - V^2}{2 \frac{\gamma R}{\gamma - 1}}$$

Et comme  $a^2 = \gamma R T$  alors :

$$\frac{T}{T_\infty} - 1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma R T_\infty} (U_\infty^2 - V^2)$$

$$\frac{T}{T_\infty} - 1 = \frac{\gamma - 1}{2c_\infty^2} (U_\infty^2 - V^2)$$

Si l'on réécrit  $V$  en fonction des fluctuations de vitesse :

$$V^2 = (U_\infty + u_k)^2 + v_k^2$$

D'où :

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2c_\infty^2} (2u_k U_\infty + u_k^2 + v_k^2)$$

Si l'on remplace l'expression de la température par la pression :

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2c_\infty^2} (2u_k U_\infty + u_k^2 + v_k^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left( \frac{2u_k}{U_\infty} + \frac{u_k^2 + v_k^2}{U_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

En linéarisant cette expression du type :

$$\frac{P}{P_\infty} = (1 - \varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \approx 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \varepsilon$$

Avec  $\varepsilon \ll 1$  il vient :

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \left( \frac{2u_k}{U_\infty} + \frac{u_k^2 + v_k^2}{U_\infty^2} \right) \right] \quad (\text{II. 41})$$

On remplace l'expression (II. 40) dans l'équation (II. 41), on trouve donc :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \left( \frac{2u_k}{U_\infty} + \frac{u_k^2 + v_k^2}{U_\infty^2} \right) - 1 \right)$$

Donc, le coefficient de pression ( $C_p$ ) s'écrit sous la forme :

$$C_p = - \left( \frac{2u_k}{U_\infty} + \frac{u_k^2 + v_k^2}{U_\infty^2} \right)$$

On néglige le terme carré  $\left(\frac{u_k^2 + v_k^2}{U_\infty^2}\right)$  devant le terme  $\left(\frac{u_k}{U_\infty}\right)$ , on obtient [21] :

$$C_p = - \left( \frac{2u_k}{U_\infty} \right) = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II. 42})$$

# *Chapitre III*

---

*APPROCHE NUMERIQUE DE CALCUL*

---

# Chapitre III

## APPROCHE NUMERIQUE DE CALCUL

### III.1. Introduction:

Pour résoudre un problème de la mécanique des fluides il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut s'exprimer en mots et phrases qu'il est nécessaire de traduire en expressions mathématiques. Lorsque le problème est ainsi bien posé, il est alors possible de le résoudre soit mathématiquement (solution analytique) ou numériquement (solution numérique). Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux Dérivées Partielles: « E.D.P. » associées aux conditions initiales et aux limites), ne peuvent être déterminées dans le cas général sauf dans certains cas classique connus depuis bien longtemps. Dans le cas général où il y'a des difficultés si l'on résout les équations aux drivées partielles qui régissent les phénomènes étudiés, on fait appel aux méthodes numériques, **le principe de ces méthodes est de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques**. Il y'a trois méthodes numériques qui sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations aux drivées partielles régissant les écoulements. Ces méthodes sont :

- la méthode des différences finies
- la méthode des éléments finis
- la méthode des volumes finis.

Le problème de l'écoulement potentiel et bidimensionnel, autour d'un profil d'aile est modélisé, comme cela a été vu dans le chapitre II, par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. La résolution de ces équations est souvent très difficile et les méthodes analytiques suffisent rarement à obtenir les solutions désirées. On utilise donc des méthodes numériques telles celles des diffé-

rences finies, des volumes finis, des éléments finis. Pour la résolution de notre problème nous avons choisi la méthode des différences finies (vu la régularité du problème).

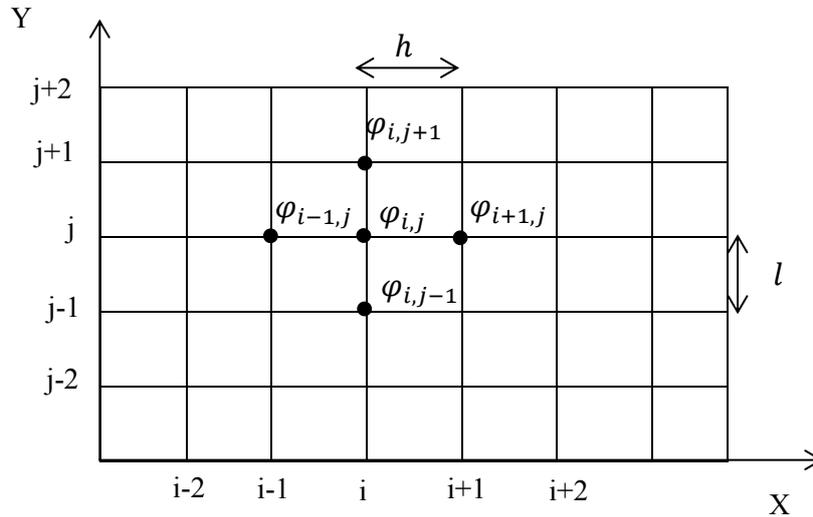
### ***III.2. La méthode des différences finies:***

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques, elle a été introduite en 18<sup>ème</sup> siècle par Euler, elle s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple (Kalla, 1999). Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toutes ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. A l'aide de la méthode des différences finies l'équation aux dérivées partielles sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est appliquée sur tous les noeuds de la grille de calcul, donc on obtient un système d'équation algébrique comportant autant d'équations que d'inconnues, résolu par une méthode appropriée [13].

Avant de discrétiser les équations différentielles, il est nécessaire de couvrir le domaine de calcul avec un maillage.

### ***III.3. Représentation du problème sous forme de grille :***

La technique de résolution d'équation différentielle aux dérivées partielles est de remplacer les dérivées par des quotients différences, pour obtenir une équation discrétisée qui correspond à chaque nœud d'intégration et où les valeurs de fonction cherchée sont inconnues, la résolution de ces équations simultanées fournit les valeurs approchées de la fonction cherchée [13].



**Fig.III-1:** Représentation le problème sous forme de grille [13].

### III.4. Discrétisation du problème par la méthode des différences finies :

L'approximation des dérivées de la méthode des différences finies peut être exprimé en trois schémas numérique (gauche, droite et centré), ce dernier est choisi pour la discrétisation les équations du problème étudié. On peut exprimer donc l'approximation de la méthode basé sur un schéma centré, comme de suit [13] :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} \tag{III. 1}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{l^2} \tag{III. 2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h} \tag{III. 3}$$

Si on introduisant l'approximation des dérivées dans les équations gouvernantes le problème (II. 35) et (II. 36), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi^*_{i+1,j} + \varphi^*_{i-1,j} + B\varphi^*_{i,j+1} + B\varphi^*_{i,j-1} - 2(B+1)\varphi^*_{i,j} - C\varphi^{*2}_{i+1,j} + 2C\varphi^*_{i,j}\varphi^*_{i+1,j} \\ - 2C\varphi^*_{i,j}\varphi^*_{i-1,j} + C\varphi^{*2}_{i-1,j} = 0 \end{aligned} \tag{III. 4}$$

Avec ;  $B = \left(\frac{h}{l}\right)^2 (1 - M_\infty^2)^{-1}$  ;  $C = M_\infty^2(\gamma + 1) \left(2h(1 - M_\infty^2)\right)^{-1}$

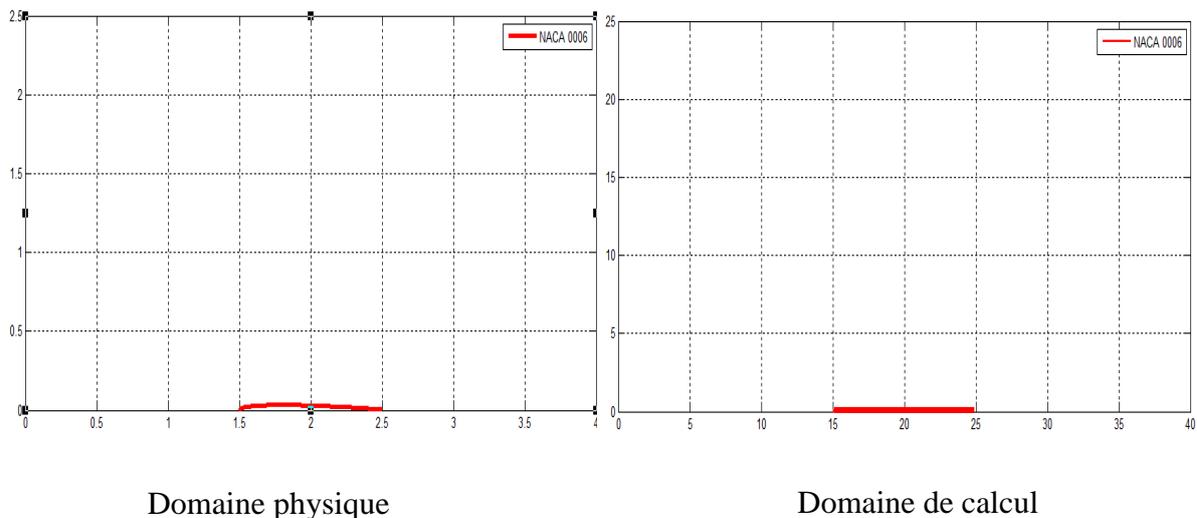
$$\varphi^*_{i+1,j} + \varphi^*_{i-1,j} + A\varphi^*_{i,j+1} + A\varphi^*_{i,j-1} - 2(A+1)\varphi^*_{i,j} = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Avec ; } A = \left(\frac{h}{l}\right)^2 (1 - M_\infty^2)^{-1}$$

### III.5. Transformation du domaine physique au domaine de calcul:

Pour la résolution numérique de notre problème, il faut transformer le domaine réel que nous voulons étudier à un domaine de calcul, le domaine d'étude choisit est un domaine rectangulaire de (4 mètre) suivant la direction (X) et (5 mètre) dans le sens des (Y), le profil situé entre (1.5 et 2.5 mètre) suivant (X), et sur l'axe (Y=0). Comme le domaine est symétrique on peut se contenter de la partie supérieure du domaine d'étude.

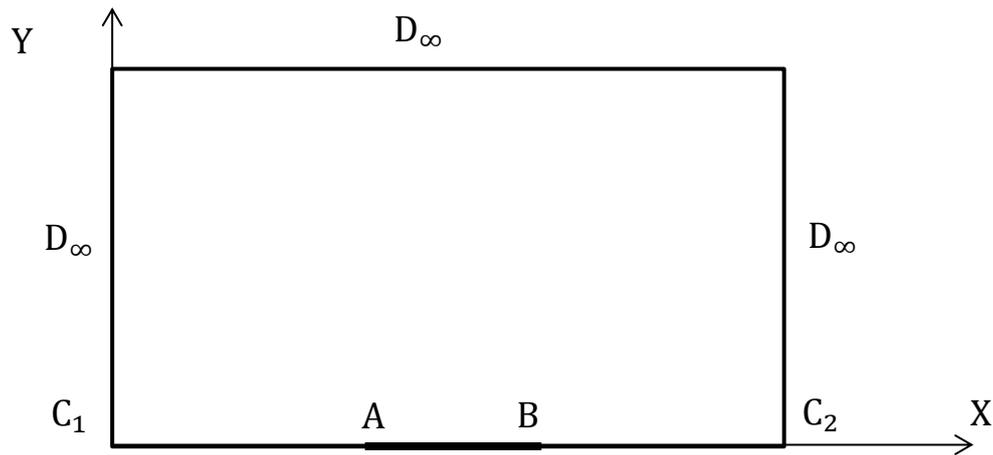
Pour transformer le domaine d'étude on choisit (40) points dans le sens des (X), et (25) points dans le sens des (Y). autrement dit le pas choisit est carré ( $h = l = 0.1$ ).



**Fig.III-2:** Transformation du domaine d'étude.

### III.6. Les conditions aux limites :

La résolution des problèmes de mécanique des fluides n'est possible que lorsque les conditions aux limites sont conjointement appliquées aux frontières du domaine d'étude. Ces conditions sont liées à degrés des équations différentielles.



**Fig.III-3:** Les frontières de domaine d'étude.

Les conditions aux limites sont :

- Sur  $D_\infty$  ;  $\varphi^*(x, y) = 0$
- Sur  $[C_1, A]$  et  $[B, C_2]$  ;  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} = 0$ , à cause de la symétrie.
- Sur la ligne du profil  $[A, B]$  :

Condition de glissement exige que : le vecteur de vitesse ( $\vec{q}$ ) est perpendiculaire au vecteur normale ( $\vec{n}$ ), alors :

$$\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}F} = 0 \Rightarrow \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{III. 6})$$

- Le vecteur vitesse s'écrit ;

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}F}$ , s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix}$$

○ On remplace dans (III. 6), on obtient :

$$\left(1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 7})$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\right) \cdot \left[ \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right] \quad (\text{III. 8})$$

Pour la ligne de courant on a :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dX + \frac{\partial F}{\partial y} dY = 0 \quad (\text{III. 9})$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right] = \frac{dY}{dX} \quad (\text{III. 10})$$

On remplace dans (III. 8), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\right) \cdot \frac{dY}{dX} \quad (\text{III. 12})$$

Pour que ;  $\frac{u_k}{u_\infty} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \ll 1$  ; on néglige  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x}$  donc (III. 12) devient [1]:

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \cong \left(\frac{dY}{dX}\right)_{Y=0} \quad (\text{III. 13})$$

- Pour le domaine discrétisé, les conditions aux limites peut s'écrire sous les formes suivantes:

- $i = 0$  ;  $1 < j < 25$  ;  $\varphi^*_{i,j} = 0$
- $i = 41$  ;  $1 < j < 25$  ;  $\varphi^*_{i,j} = 0$
- $j = 26$  ;  $1 < i < 40$  ;  $\varphi^*_{i,j} = 0$
- $j = 1$  ;  $0 < i < 15$  ;  $\varphi^*_{i,j-1} = \varphi^*_{i,j+1}$
- $j = 1$  ;  $15 \leq i \leq 25$  ;  $\varphi^*_{i,j+1} - \varphi^*_{i,j-1} = 2.l.F'(X)$  ; avec :  $X = i.h$
- $j = 1$  ;  $25 < i < 40$  ;  $\varphi^*_{i,j-1} = \varphi^*_{i,j+1}$

### III.7. Affectation des variables :

Pour la résolution numérique de l'équation(III. 4), (III. 5), on introduire une variable

X représente la fonction  $\varphi^*$ , telle sorte que :

$$\varphi_{1,1}^* = X(1); \quad \varphi_{2,1}^* = X(2); \quad \varphi_{i,j}^* = X(k); \quad \varphi_{i-1,j}^* = X(k-1);$$

$$\varphi_{i+1,j}^* = X(k+1); \quad \varphi_{i,j-1}^* = X(k-40); \quad \varphi_{i,j+1}^* = X(k+40);$$

Les équations (III. 4) et (III. 5) devient alors respectivement :

$$F(k) = X(k+1) + X(k-1) + B.X(K+40) + B.X(k-40) - 2(B+1).X(k) \\ + C.X^2(k+1) + 2C.X(k).X(k+1) - 2C.X(k).X(k-1) + C.X^2(k-1) \quad (\text{III. 14})$$

$$F(k) = X(k+1) + X(k-1) + AX(K+40) + AX(k-40) - 2(A+1)X(k) \quad (\text{III. 15})$$

### III.8. Les équations aux nœuds :

#### III.8.1. Dans le cas subsonique :

- La première ligne :

✓ Au nœud (1) :

$$F(1) = x(2) + 2x(41) - 2.(A+1).x(1)$$

✓ Aux nœuds de (2) à (14) et de (26) à (39) :

$$F(k) = x(k+1) + x(k-1) + 2 \times A1.x(k+40) - 2.(A+1).x(k)$$

✓ Aux nœuds de (15) à (25)

$$F(k) = x(k+1) + x(k-1) + 2 \times A.x(k+40) - 2.(A+1).x(k) \\ - 0.012.A \times (0.5 \times 1.74779155.(0.1 \times (k-14.5))^{-1/2} - 0.624424 \\ + 2 \times (-1.727016) \times 0.1 \times (k-14.5) + 3 \times 1.384087 \\ \times ((0.1 \times (k-14.5))^2) + 4 \times (-0.489769) \times (0.1 \times (k-14.5))^3)$$

✓ Au nœud (40) :

$$F(40) = x(39) + A.x(80) - 2 \times (A+1).x(40)$$

- La deuxième ligne :

✓ Au nœud (41) :

$$F(41) = x(42) + A.x(81) + A.x(1) - 2 \times (A + 1).x(40)$$

✓ Aux nœuds de (42) à (79) :

$$F(k) = x(k + 1) + x(k - 1) + Ax(K + 40) + Ax(k - 40) - 2(A + 1).x(k)$$

✓ Au nœud (80) :

$$F(80) = x(79) + A.x(120) + A.x(40) - 2.(A + 1).x(80)$$

• La dernière ligne :

✓ Au nœud (961) :

$$F(961) = x(962) + A.x(921) - 2.(A + 1).x(961)$$

✓ Aus nœuds de (962) à (999) :

$$F(k) = x(k + 1) + x(k - 1) + A.x(k - 40) - 2.(A + 1)x(k)$$

✓ Au nœud (1000) :

$$F(1000) = x(999) + A.x(960) - 2.(A + 1).x(1000)$$

### III.8.2 Dans le cas transsonique :

• La première ligne :

✓ Au nœud (1) :

$$F(1) = x(2) + 2.B.x(41) - 2.(1 + B).x(1) - C.x^2(2) + 2.C.x(1).x(2)$$

✓ Aux nœuds de (2) à (14) et de (26) à (39) :

$$F(x) = x(k + 1) + x(k - 1) + 2.B.x(k + 40) - 2.(1 + B).x(K) - C.x^2(k + 1) + 2.C.x(k).x(k + 1) - 2.C.x(k).x(k - 1) + C.x^2(k - 1)$$

✓ Aux nœuds de (15) à (25)

$$F(k) = x(k + 1) + x(k - 1) + 2.B.x(k + 40) - 2.(1 + B).x(k) - C.x^2(k + 1) + 2.C.x(k).x(k + 1) - 2.C.x(k).x(k - 1) + C.x^2(k - 1) - 0.012.B \times (0.5 \times 1.74779155.(0.1 \times (k - 14.5))^{-1/2} - 0.624424 + 2 \times (-1.727016) \times 0.1 \times (k - 14.5) + 3 \times 1.384087 \times ((0.1 \times (k - 14.5))^2) + 4 \times (-0.489769) \times (0.1 \times (k - 14.5))^3)$$

✓ Au nœud (40) :

$$F(40) = x(39) + 2.B.x(80) - 2.(1+B).x(40) - 2.C.x(40).x(39) + C.x^2(39)$$

• La deuxième ligne :

✓ Au nœud (41) :

$$F(x) = x(42) + B.x(81) + B.x(1) - 2.(1+B).x(41) - C.x^2(42) + 2.C.x(41).x(42)$$

✓ Aux nœuds de (42) à (79) :

$$F(k) = x(k+1) + x(k-1) + B.x(K+40) + B.x(k-40) - 2(B+1).x(k) \\ + C.x^2(k+1) + 2C.x(k).X(k+1) - 2C.x(k).X(k-1) + C.x^2(k-1)$$

✓ Au nœud (80) :

$$F(80) = x(79) + B.x(120) + B.x(40) - 2.(1+B).x(80) - 2.C.x(80).x + C.x^2(79)$$

• La dernière ligne :

✓ Au nœud (961) :

$$F(961) = x(962) + B.x(921) - 2.(1+B).x(961) - C.x^2(962) + 2.C.x(961).x(962)$$

Aus nœuds de (962) à (999) :

$$F(k) = x(k+1) + x(k-1) + B.x(k-40) - 2.(1+B).x(k) \\ - C.x^2(k+1) + 2.C.x(k).x(k+1) - 2.C * x(k).x(k-1) + C.x(k-1).2$$

✓ Au nœud (1000) :

$$F(1000) = x(999) + B.x(960) - 2.(1+B).x(1000) - 2.C.x(1000).x(999) \\ + C.x^2(999)$$

### III.9. Méthode de résolution (Méthode de Newton-Raphson) :

Soit un système de deux équations non linéaire  $f_1$  et  $f_2$  :

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \quad \text{(III.16)}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Soit  $(x_1^0 + x_2^0)$ , une approximation initiale de la solution de ce système. Cette approximation initiale est cruciale est doit toujours être choisie avec soin le but de ce qui suit

est de déterminer une correction  $(\delta x_1 + \delta x_2)$  à  $(x^0_1 + x^0_2)$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2) &= 0 \\ f_2(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 17})$$

Pour déterminer  $(\delta x_1 + \delta x_2)$ , il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions :

$$0 = f_1(x^0_1 + x^0_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_2 + \dots \quad (\text{III. 18})$$

$$0 = f_2(x^0_1 + x^0_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_2 + \dots$$

Dans les relations précédentes (III.18), les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égale à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant, pour déterminer  $(\delta x_1 + \delta x_2)$ , il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_2 = -f_1(x^0_1 + x^0_2) \quad (\text{III. 19})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2)\delta x_2 = -f_2(x^0_1 + x^0_2)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0_1 + x^0_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0_1 + x^0_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x^0_1 + x^0_2) \\ f_2(x^0_1 + x^0_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 20})$$

Ce système linéaire s'écrit également sous forme plus compacte:

$$J(x^0_1 + x^0_2)\delta \vec{x} = -\vec{R}(x^0_1 + x^0_2) \quad (\text{III. 21})$$

Où  $J(x^0_1 + x^0_2)$ , désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice Jacobienne évaluée au point  $(x^0_1 + x^0_2)$  ; où  $\delta \vec{x}$  est le vecteur des corrections relatives à chaque variable, et  $-\vec{R}(x^0_1 + x^0_2)$  est le vecteur résiduel évalué en  $(x^0_1 + x^0_2)$ . Le déterminant de la

matrice Jacobienne est appelé le Jacobien. Le Jacobien doit bien entendu être différent de 0

Pour que la matrice Jacobienne soit inversible. On pose en suite :

$$\begin{aligned}x^1_1 &= x^0_1 + \delta x_1 \\x^1_2 &= x^0_2 + \delta x_2\end{aligned}\tag{III. 22}$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution de système non linéaire. On cherchera par la suite de corriger  $(x^1_1, x^1_2)$ , d'une nouvelle quantité  $(\delta \vec{x})$ , et ce jusqu'à la convergence. De manière plus générale on pose [2]:

$$J(\vec{x}^i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \end{bmatrix}\tag{III. 23}$$

C'est-à-dire la matrice Jacobienne évaluée au point ;  $\vec{x}^i = (x^i_1, x^i_2, \dots, x^i_n)$ . De plus on pose :

$$\vec{R}(\vec{x}^i) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^i) \\ f_2(\vec{x}^i) \\ \dots \\ f_n(\vec{x}^i) \end{bmatrix}; \quad \delta \vec{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_n \end{bmatrix}\tag{III. 24}$$

Pour en arriver à l'algorithme suivant :

### III.9.1. L'algorithme de la méthode de résolution:

L'algorithme de la méthode de Newton-Raphson est donné par [2] :

1. Etant donnée  $\varepsilon$ , un critère d'arrêt ;
2. Etant donnée  $N$ , le nombre maximale d'itérations ;
3. Etant donnée  $\vec{x}^0 = [x^0_1 \ x^0_2 \ \dots \ x^0_n]^T$ , une approximation initiale de la solution du système ;
4. Résoudre le système linéaire :

$$J(\vec{x}^i) \delta \vec{x} = -\vec{R}(\vec{x}^i)$$

Et poser :

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \delta\vec{x}$$

5. Si :  $\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}^{i+1}\|} < \varepsilon$ ; et  $\|\vec{R}(\vec{x}^{i+1})\| \leq \varepsilon$ ;

- Convergence atteinte.
- Ecrire la solution  $\vec{x}^{i+1}$
- Arrêt

6. Si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint :

- Convergence non atteinte en  $N$  itérations.
- Arrêt.

7. Retour à l'étape 4.

### III.10. Tableaux des valeurs utilisées :

#### III.10.1. pour le cas subsonique :

$M_\infty$	A
<b>0.1</b>	1.01010101
<b>0.2</b>	1.041666667
<b>0.279</b>	1.08441169
<b>0.3</b>	1.098901099
<b>0.4</b>	1.19047619
<b>0.5</b>	1.333333333
<b>0.6</b>	1.5625

**Tableau III-1:** les valeurs utilisées (cas subsonique).

#### III.10.2. pour le cas transsonique :

$M_\infty$	B	C
<b>0.7</b>	1.96078	11.5294
<b>0.8</b>	2.77778	21.3333
<b>0.87</b>	4.11353	37.3624
<b>0.9</b>	5.26316	51.1579

**Tableau III-1:** les valeurs utilisées (cas transsonique).

**III.11. Détermination des caractéristiques ( $q$ ,  $M$ ,  $C_p$  et  $T$ ) :****III.11.1. la vitesse d'écoulement  $\vec{q}$  :**

$$q = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y}\right)^2}$$

$$q \equiv C(k) = ((1. + 5.* (X(k + 1) - X(k - 1))) ** 2 + 5.* (x(k + 40) - x(k - 40)) ** 2) ** 0.5 \quad (\text{III.25})$$

**III.11.2. la composante axiale de la vitesse:**

$$U = 1 + \frac{\partial \varphi^*}{\partial X}$$

$$U \equiv V1(k) = (1. + 5.* (x(k + 1) - x(k - 1))) \quad (\text{III. 26})$$

**III.11.3. la composante verticale de la vitesse:**

$$V = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y}$$

$$V \equiv V2(k) = 5.* (x(k + 40) - x(k - 40)) \quad (\text{III. 27})$$

**III.11.4. Le nombre de Mach local:**

$$M_{local} = \frac{q}{C} = \frac{q}{\left[C_{\infty}^2 + \frac{\gamma - 1}{2} [q^2]\right]^{1/2}}$$

$$\gamma = 1.4; \quad C_{\infty} = \frac{U_{\infty}}{M_{\infty}}$$

$$M_{local} \equiv R2(k) = C(k)/(1./Minf ** 2 + 0.2 * (1. -(C(k) ** 2))) ** 0.5 \quad (\text{III. 28})$$

**III.11.5. Le coefficient de pression:**

$$C_p \cong -2 \frac{\partial \varphi^*}{\partial X}$$

$$C_p \equiv gG(k) = -10. * (X(k + 1) - X(k - 1)) \quad (\text{III. 29})$$

### III.11.6. La température:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{local}^2}$$

$$T \equiv T1(k) = 1./ (1. + 0.2 * (R2(k) ** 2)) \quad (\text{III. 30})$$

# *Chapitre IV*

---

*RESULTATS ET DISCUSSIONS*

---

## *Chapitre IV :*

### *Résultats et discussions*

#### *IV.1. Interprétation des résultats :*

Après avoir résolu les équations différentielles gouvernantes le problème, dont l'inconnue est la perturbation du potentiel, on a remarqué que la variation le long de l'axe de symétrie ( $Y=0$ ) tracée sur la figure (IV-1) est une fonction croissante négativement dans la partie amont du bord d'attaque et positivement sur le profil, puis elle décroît juste après le bord de fuite pour s'amortir et tendre vers zéro loin du profil.

Cette loi de variation se redresse progressivement pour s'annuler en s'éloignant vers l'infini dans le sens des ordonnées positives ; ( $Y=0.2, Y=0.5, Y=1$  et  $Y=2.4$ ), ceci traduit l'effet remarqué de l'obstacle sur la valeur de la fonction du potentiel, autrement dit la perturbation se sent près du profil.

Les courbes représentés sur les figures (IV-1) jusqu'à (IV-5), montrent que : proche du profil, la perturbation augmente pour atteindre sa valeur maximale et ce pour différents valeurs du nombre de Mach. Par contre, l'effet du profil sur la perturbation diminue ou s'éloignant du profil.

Pour comprendre le comportement cinématique de l'écoulement via l'aile on a préféré la représentation de la composante verticale ( $V$ ) sur l'extrados. D'après les figures (IV-6), (IV-7), on remarque que la composante verticale décroît progressivement dès le point d'arrêt pour atteindre la valeur nulle où l'épaisseur est maximale puis elle suit la même loi de variation mais avec des valeurs négatives, le comportement reflète exactement la déformation de la ligne de courant passant par le profil.

Pour mieux comprendre comment la ligne de courant épouse la forme du profil mince symétrique (NACA 0006), il est préférable de tracer la composante axiale ( $U$ ) du

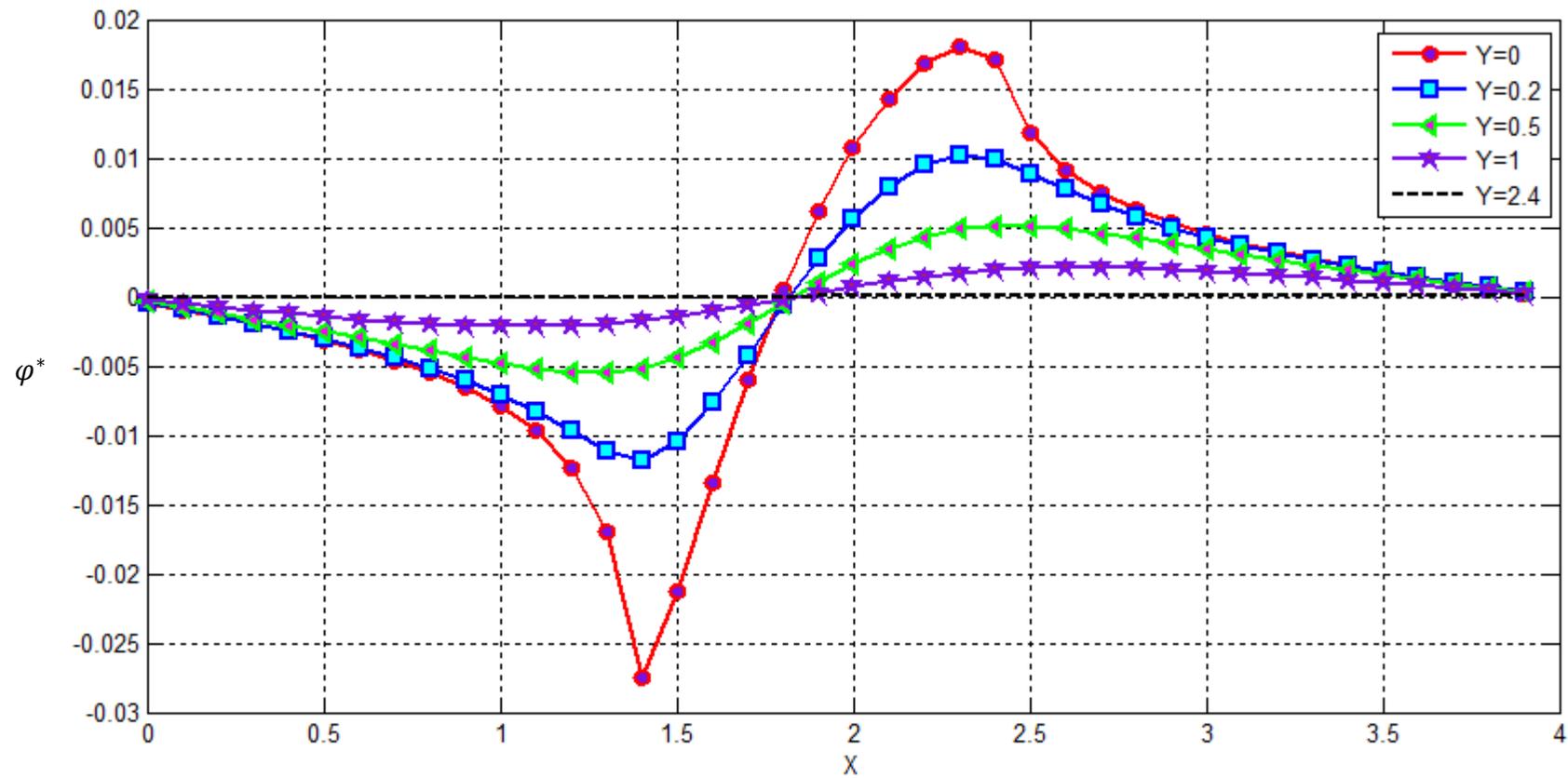
vecteur vitesse. D'après les figures (IV-8), (IV-9) et (IV-10), on peut dire que la vitesse axiale prend une forme croissante positive en allant juste après du bord d'attaque vers l'épaisseur maximale, et après l'épaisseur maximale la vitesse ( $U$ ) commence à décroître vers le bord de fuite et après le bord de fuite la vitesse ( $U$ ) est stable. Ce comportement cinématique traduit la décélération du mouvement.

Les courbes (IV-11) jusqu'à (IV-15) montrent la variation du nombre de Mach local en fonction de ( $X$ ), on remarque que la loi de variation de ce nombre adimensionnel suit presque la même loi de variation de la vitesse axiale ( $U$ ) de l'écoulement. On peut dire aussi que la variation du nombre de Mach, suivant la direction de l'écoulement peut atteindre la valeur transitoire pour passer de régime subsonique incompressible au régime subsonique compressible pour le nombre de Mach ( $M_\infty = 0.279$ ). On remarque aussi que la valeur du nombre de Mach ( $M_\infty = 0.870$ ) est une valeur critique de variation du régime d'écoulement transsonique au régime sonique.

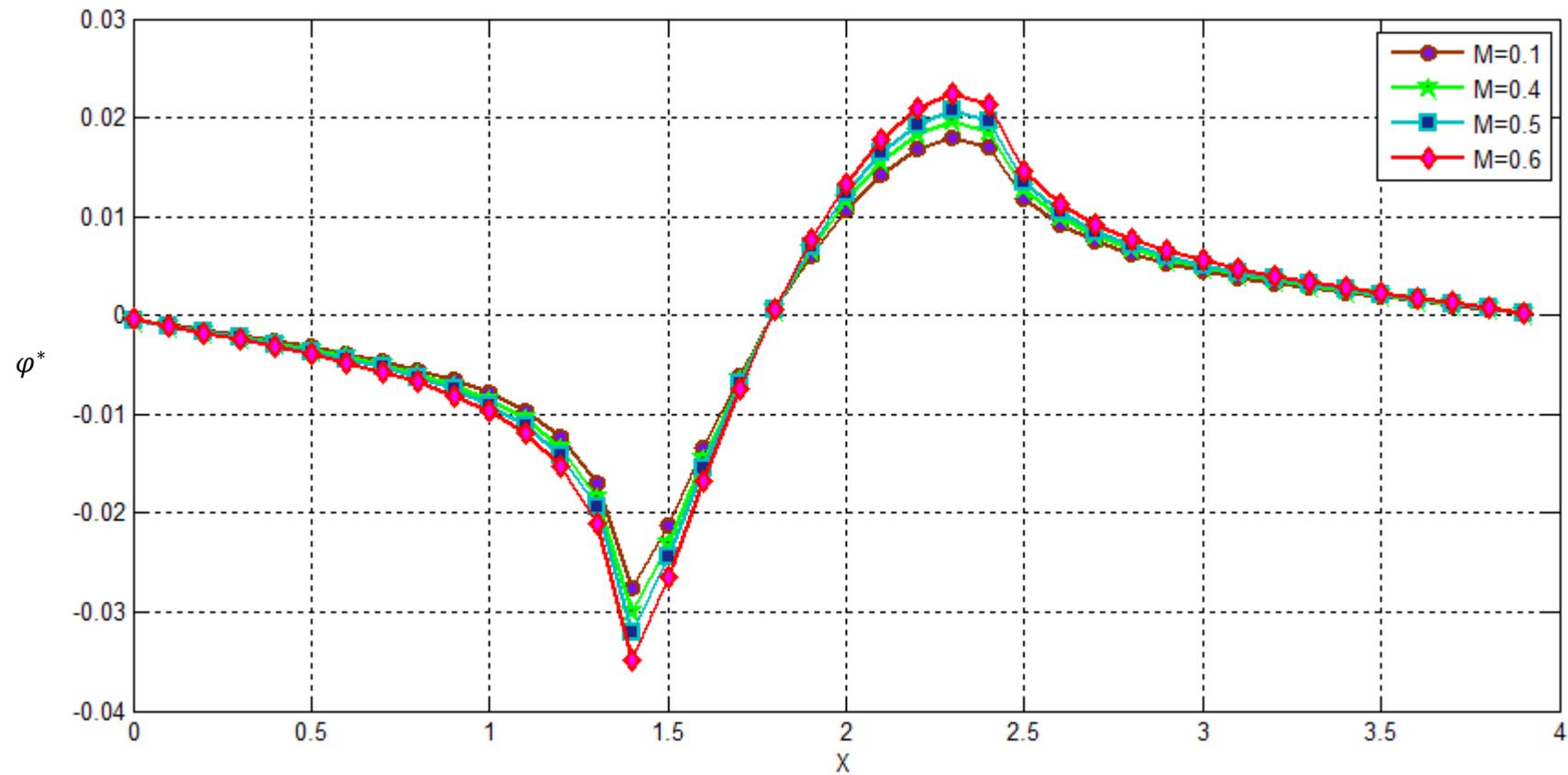
Les figures (IV-16), (IV-17) et (IV-18) présentent la variation du coefficient de pression sur l'extrados (qui traduit le rapport entre la variation de pression statique et la pression dynamique) qui passe de la valeur maximale au voisinage du bord d'attaque à une valeur minimale près de l'épaisseur relative maximale ; puis elle croît d'une manière continue jusqu'au bord de fuite, ceci explique l'influence du champ de vitesse sur le nombre adimensionnel de pression entrant en jeu.

Finalement les courbes (IV-19), (IV-20) et (IV-21) présentent la variation de la température en fonction de ( $X$ ) avant le bord d'attaque. On remarque que la loi de variation de température sur la ligne ( $Y=0$ ) est la plus remarquable, ce qui explique le choc des particules causé par le point d'arrêt.

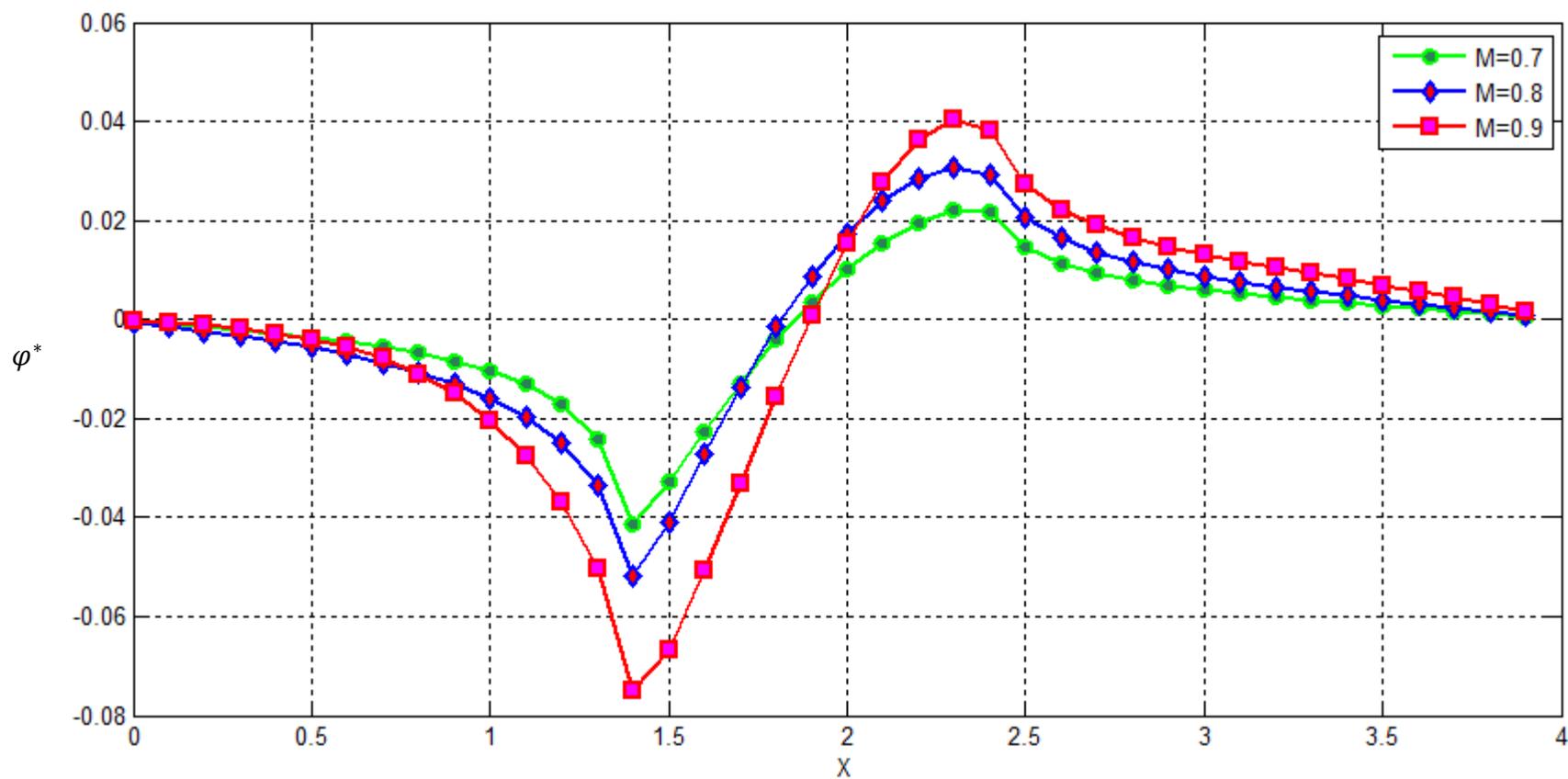
### IV.2. Variation de la perturbation :



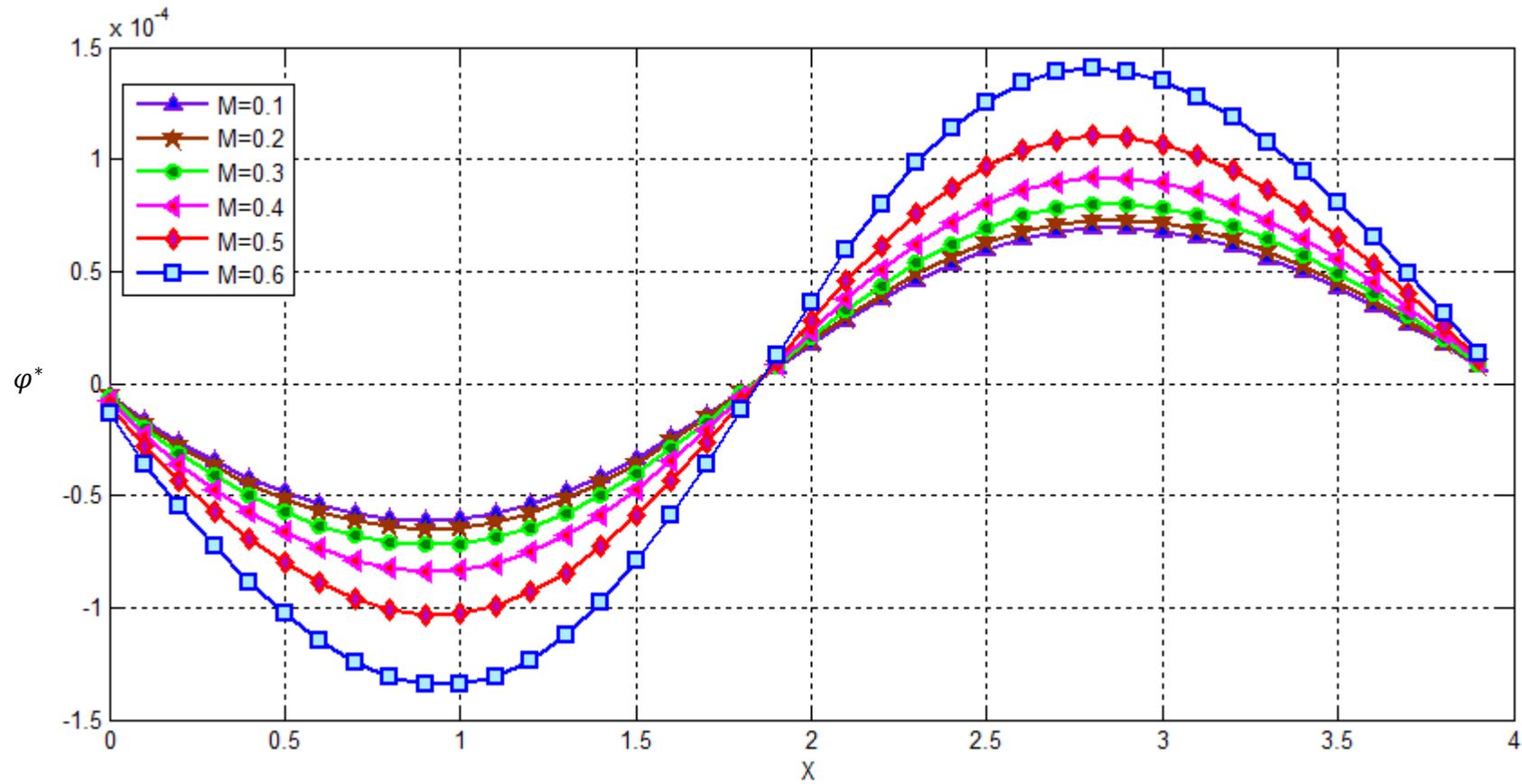
**Fig.VI-1:** Variation de la perturbation en fonction de  $X$  pour Mach  $M_\infty = 0.1$



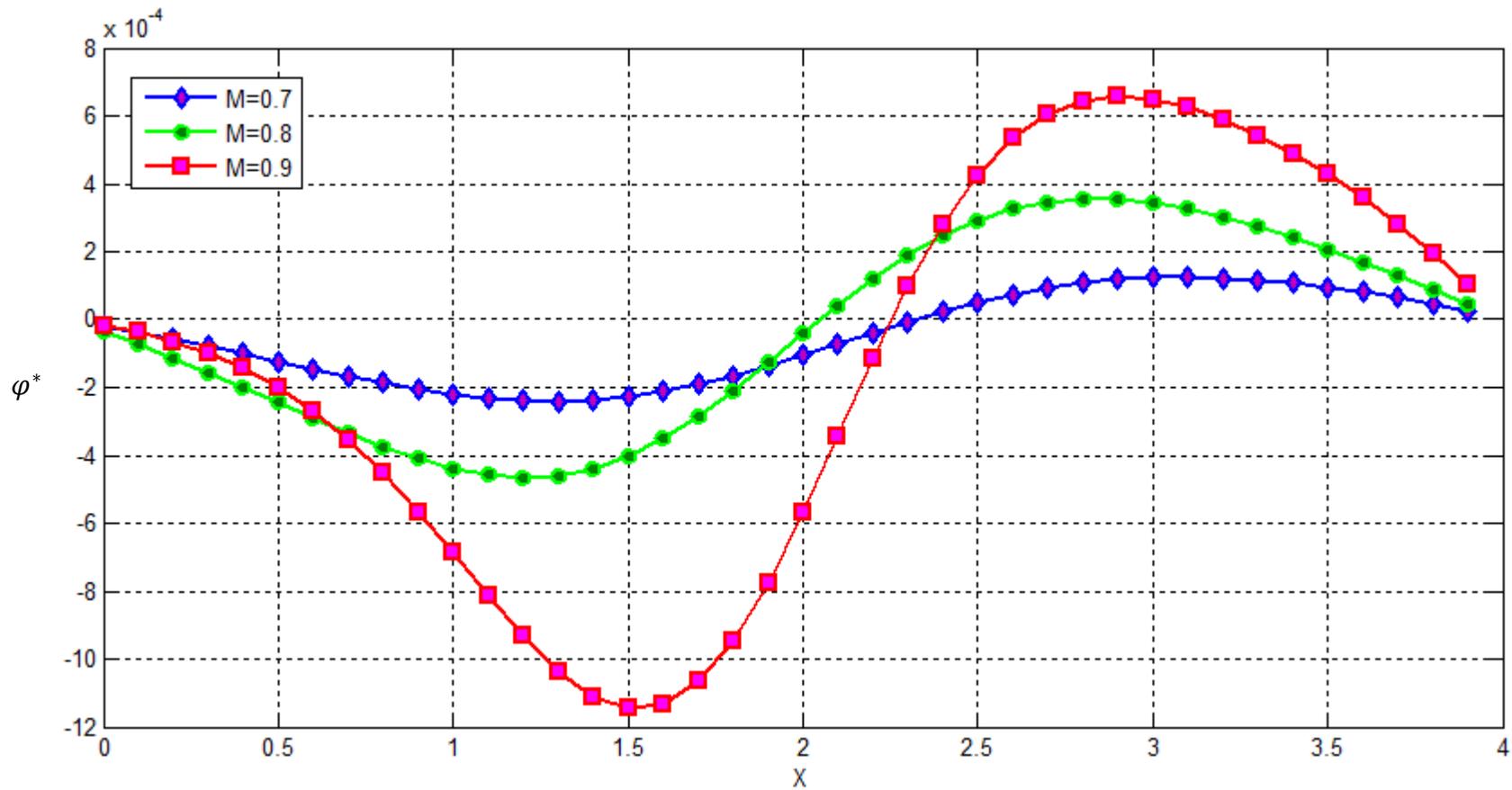
**Fig.VI-2:** Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas subsonique à  $Y=0$



**Fig.VI-3:** Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas transsonique à Y=0

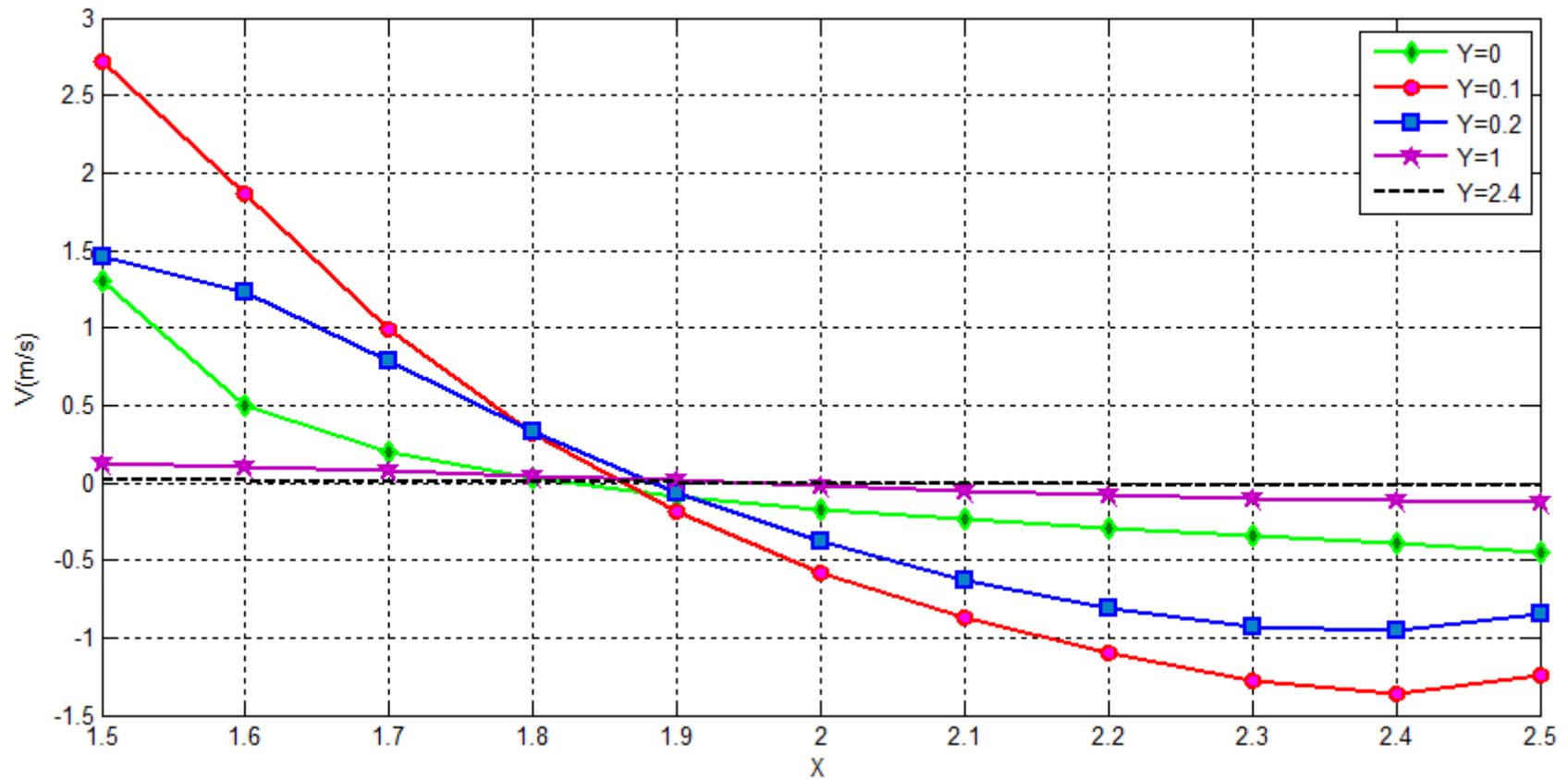


**Fig.VI-4:** Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas subsonique à Y=2.4

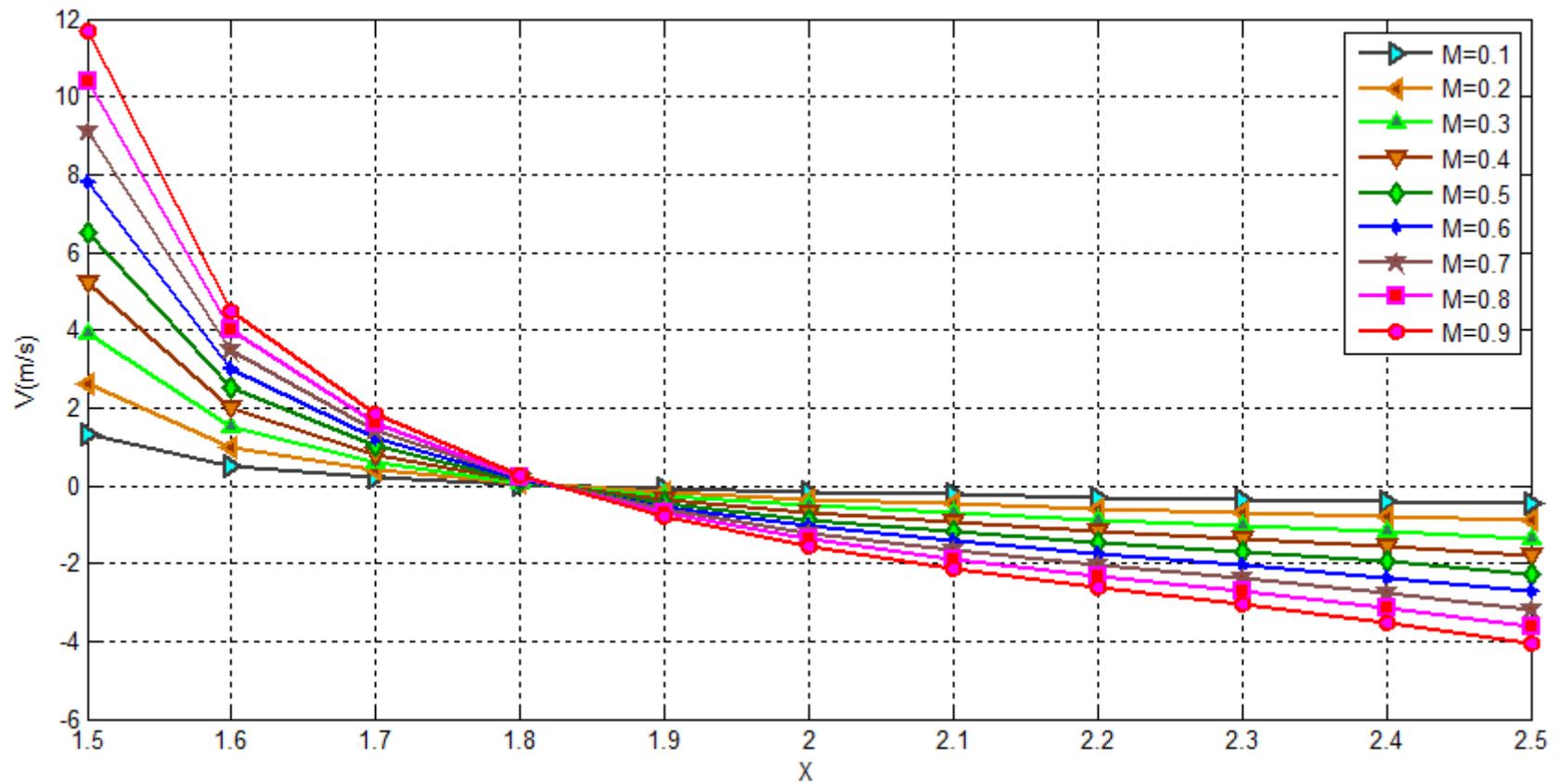


**Fig.VI-5:** Variation de la perturbation en fonction de X, pour différents nombre de Mach dans le cas transsonique à Y=2.4

*IV.3. Variation de vitesse verticale (V):*



**Fig.VI-6:** Variation de la vitesse verticale en fonction de X, Mach  $M_\infty = 0.1$



**Fig.VI-7:** Variation de la vitesse verticale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0

#### IV.4. Variation de la vitesse axiale ( $U$ ) :

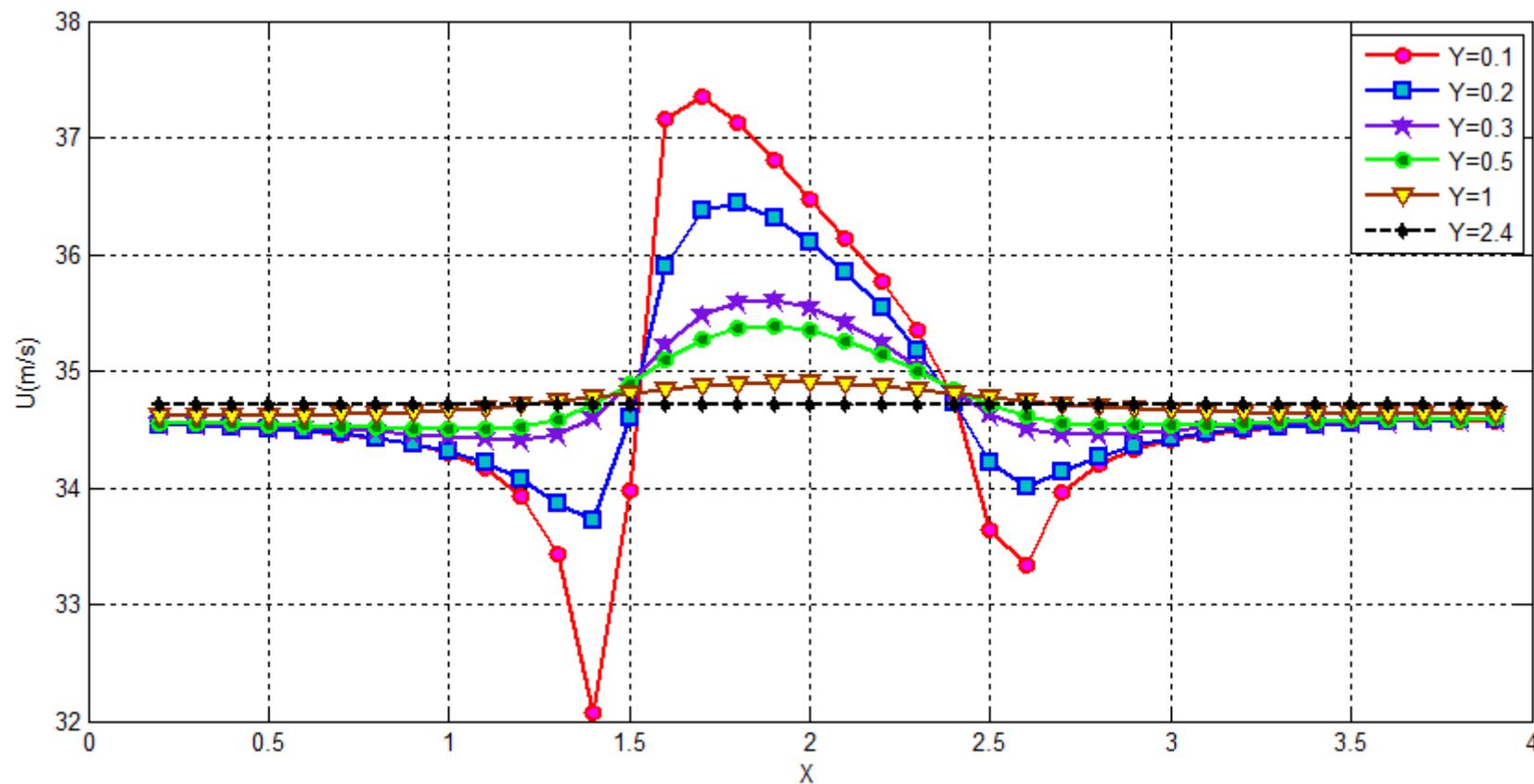
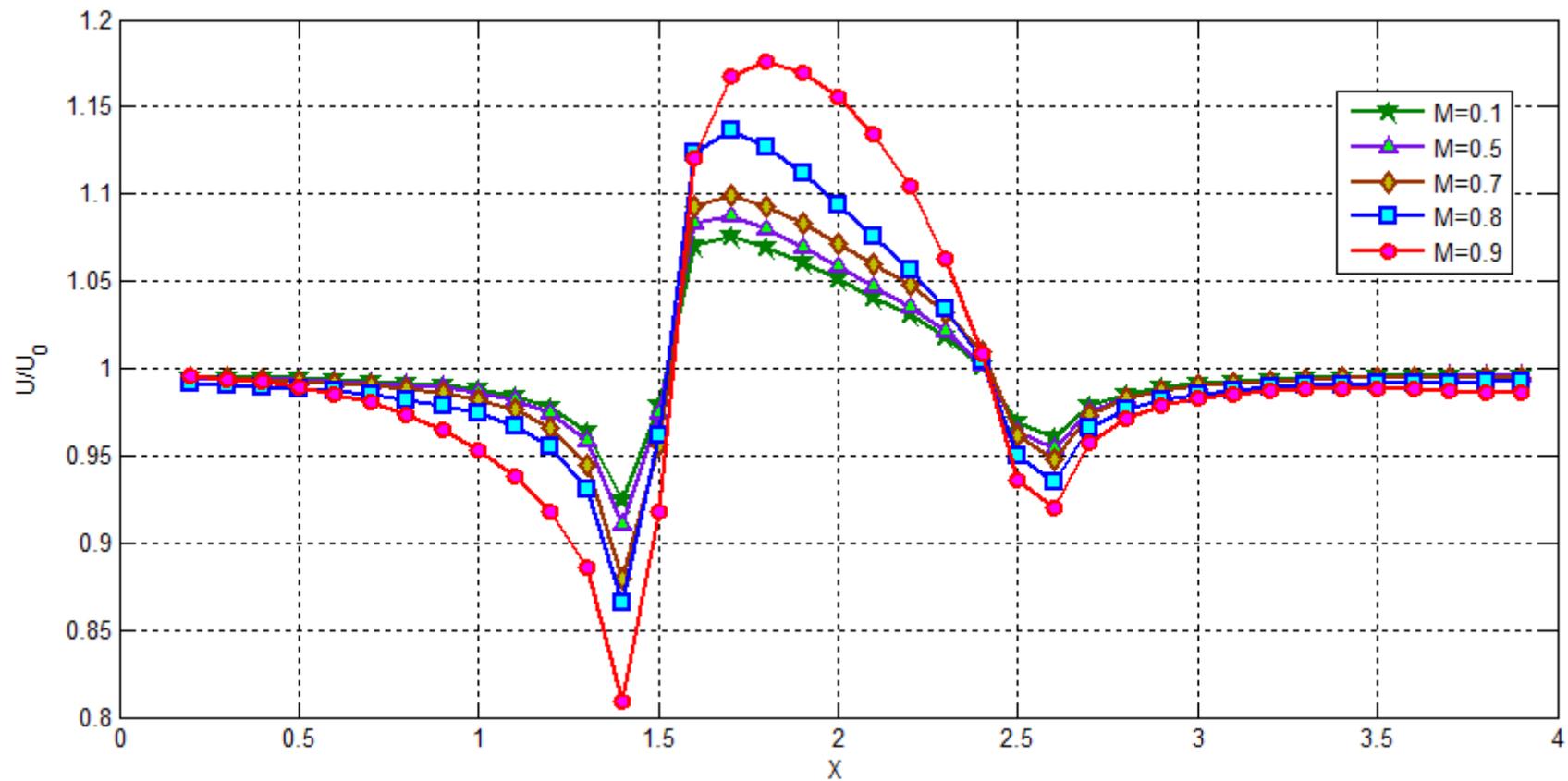
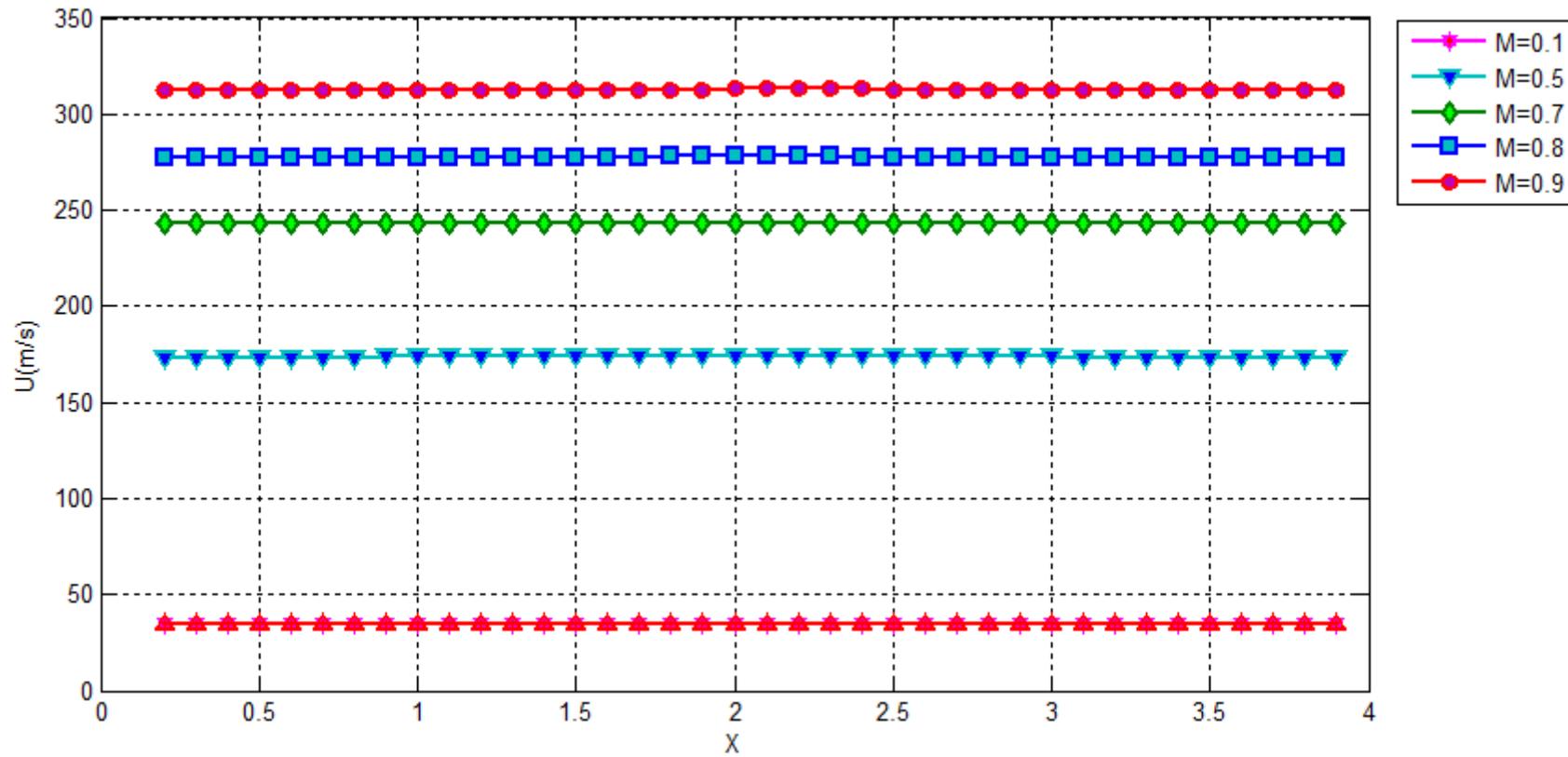


Fig.VI-8: Variation de la vitesse axiale en fonction de X Mach ,  $M_\infty = 0.1$



**Fig.VI-9:** Variation de la vitesse axiale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0



**Fig.VI-10:** Variation de la vitesse axiale en fonction de  $X$ , pour différents nombre de Mach à  $Y=2.4$

### IV.5. Variation du nombre de Mach local :

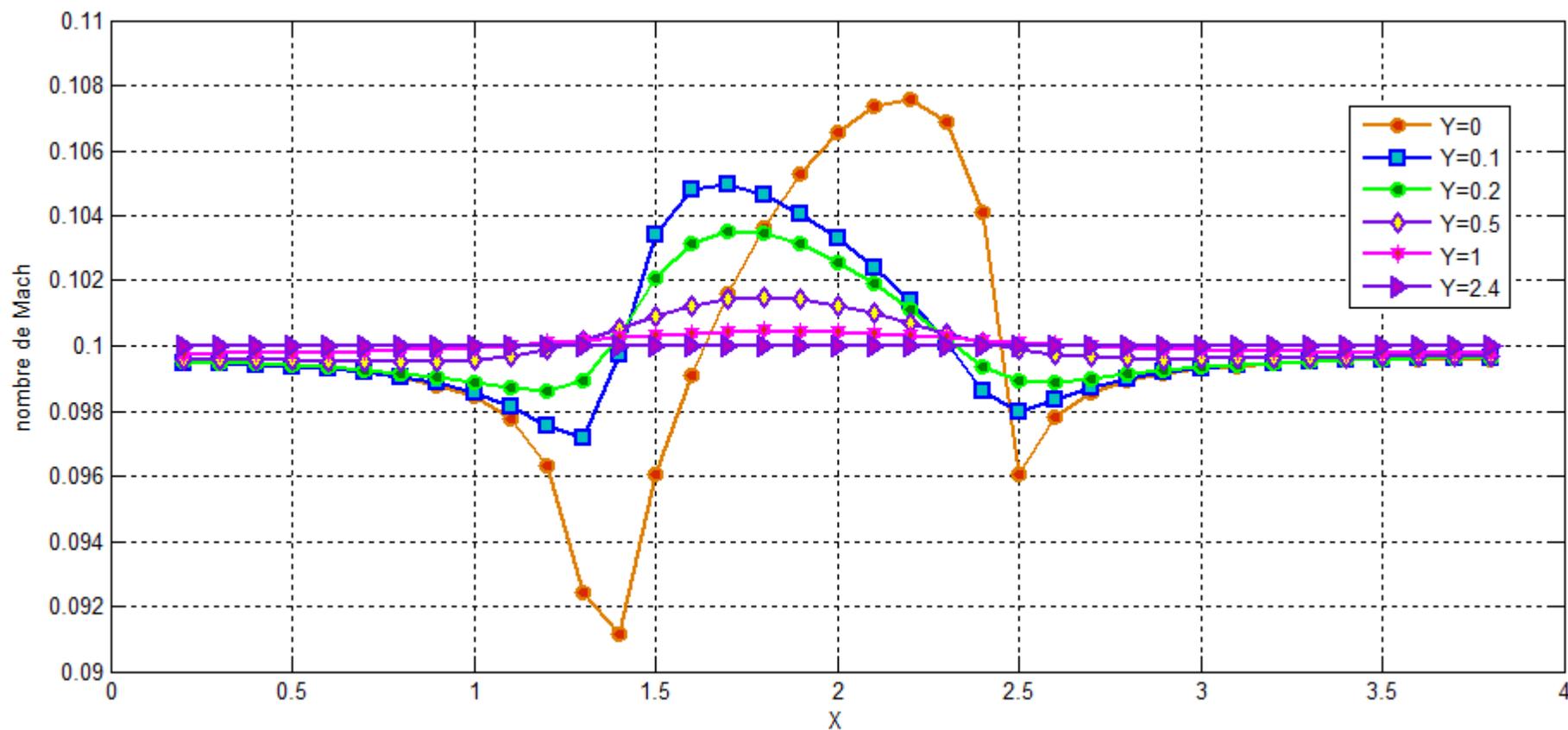
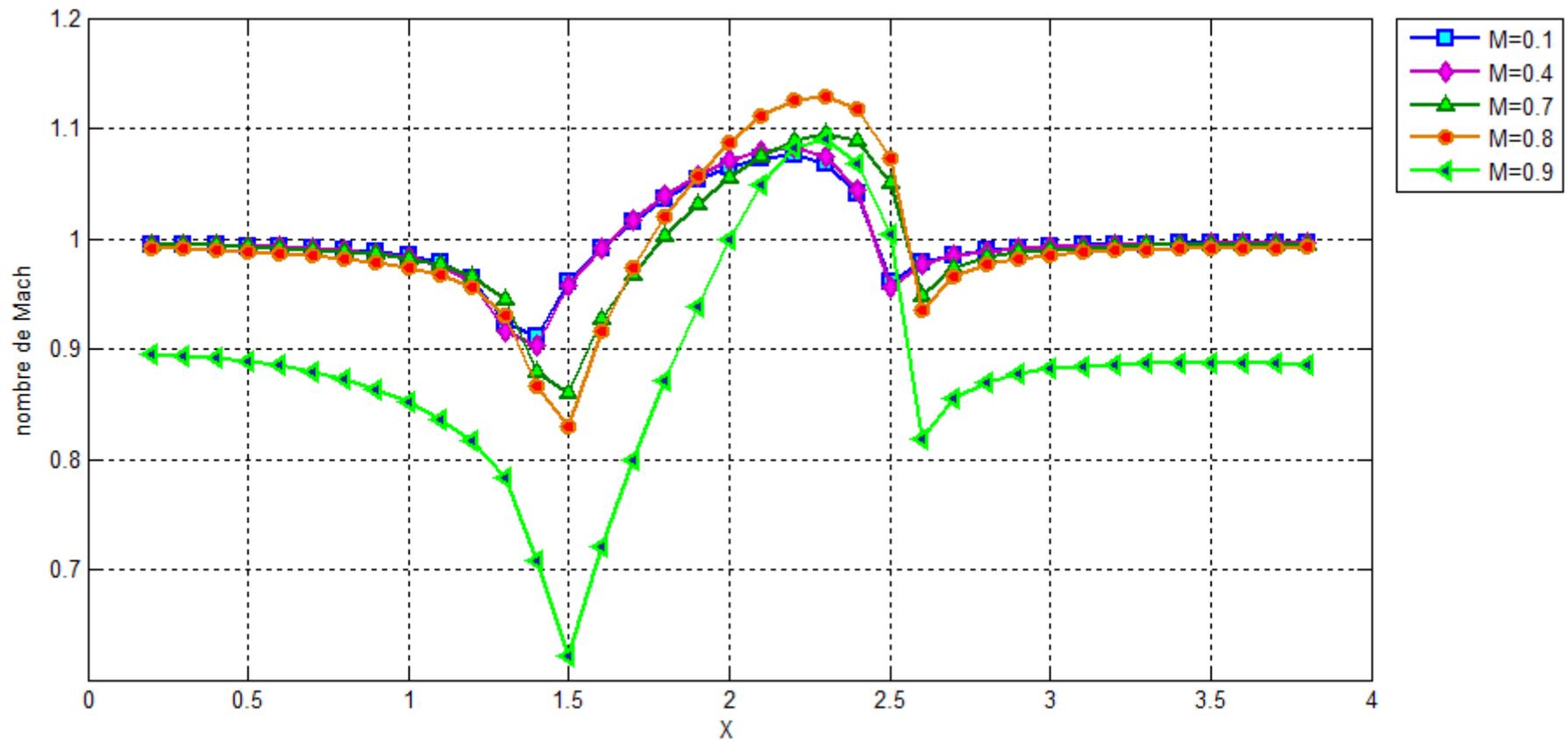
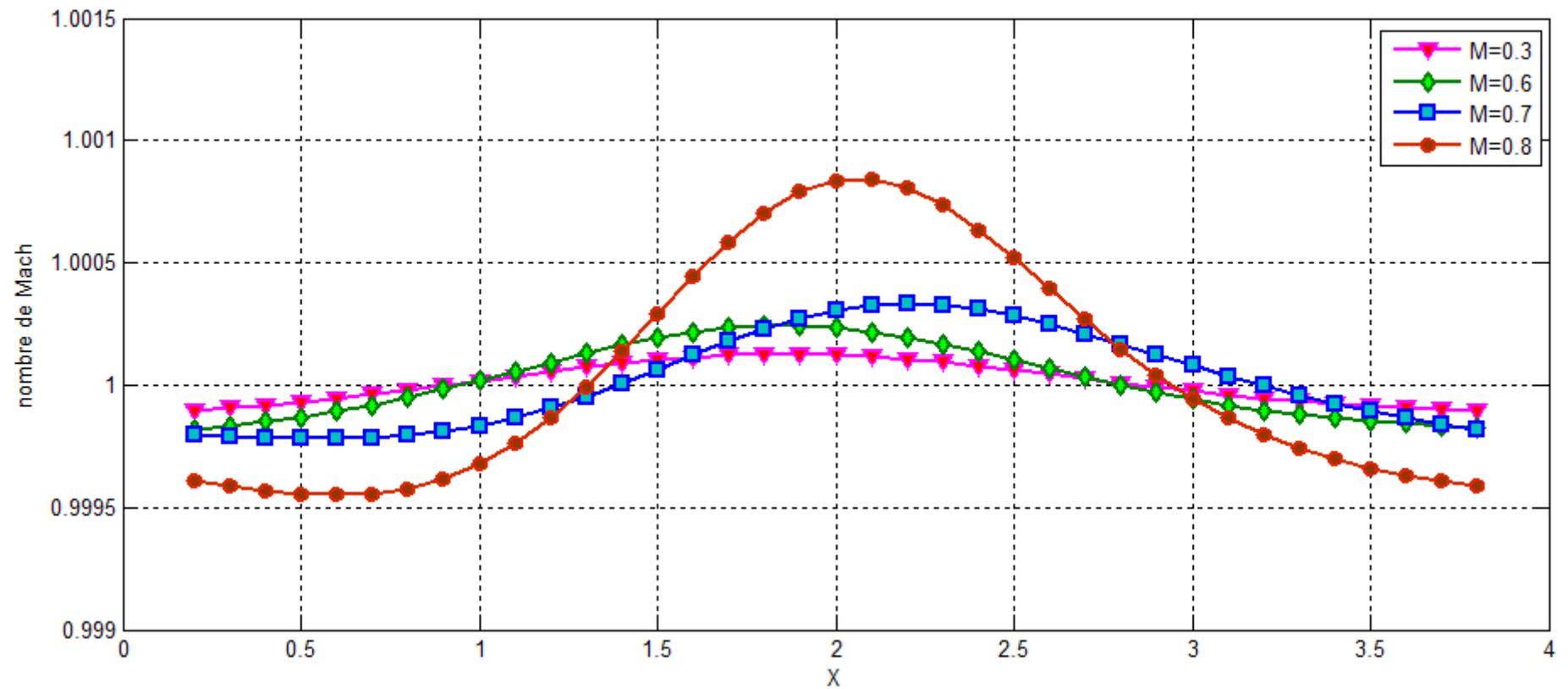


Fig.VI-11: Variation du nombre de Mach en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$



**Fig.VI-12:** Variation de la vitesse axiale en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0



**Fig.VI-13:** Variation du nombre de Mach local en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4

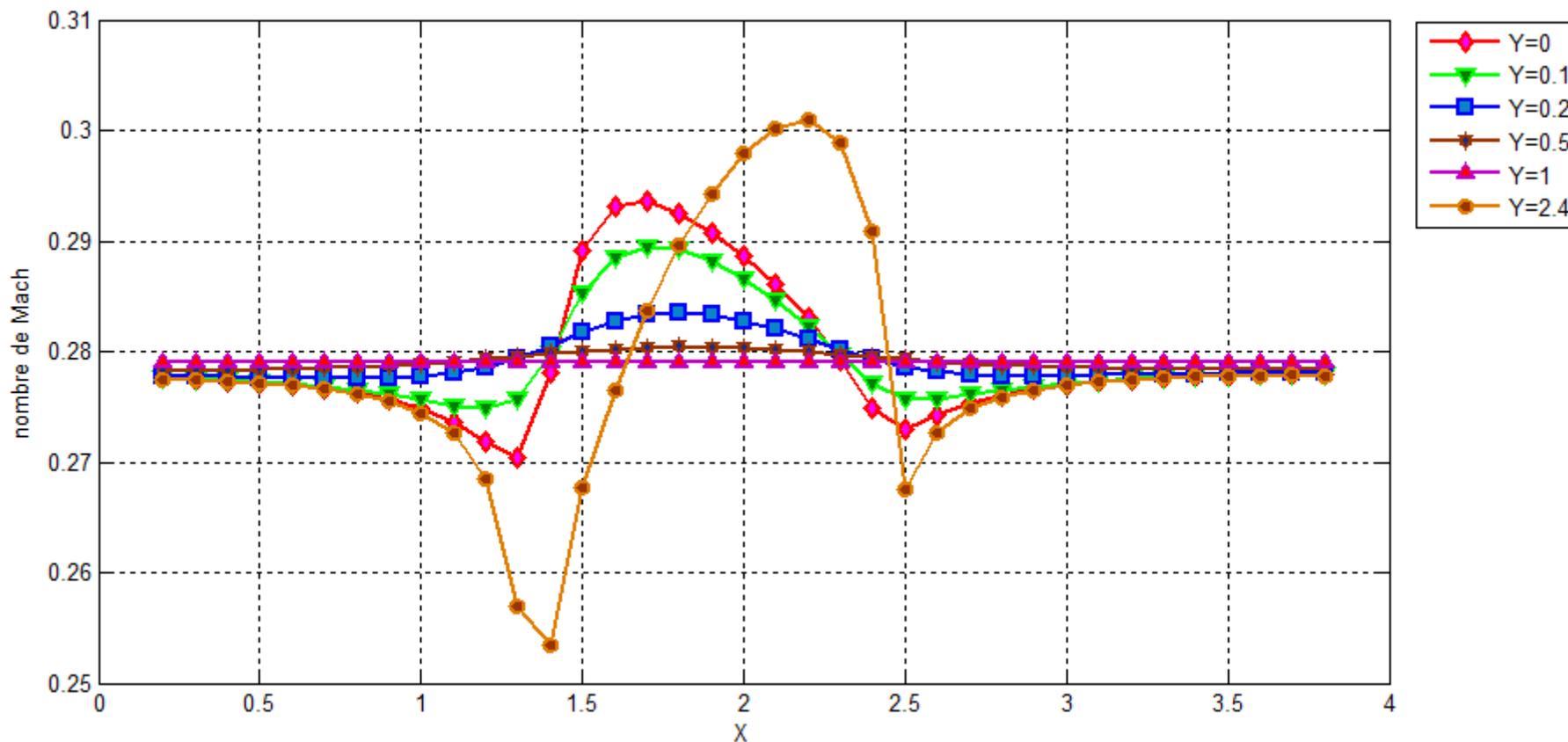


Fig.VI-14: Variation du nombre de Mach local en fonction de X,  $M_{\infty} = 0.279$

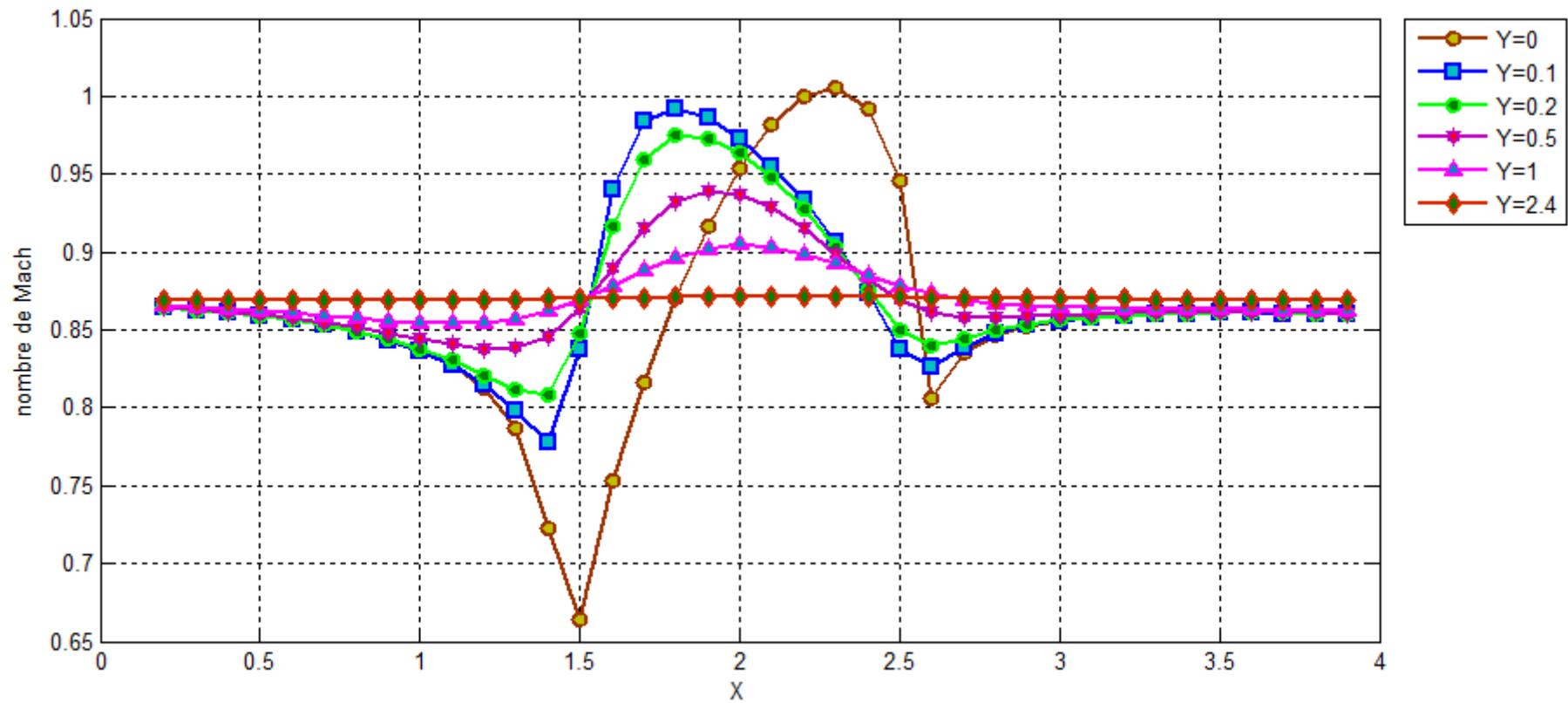
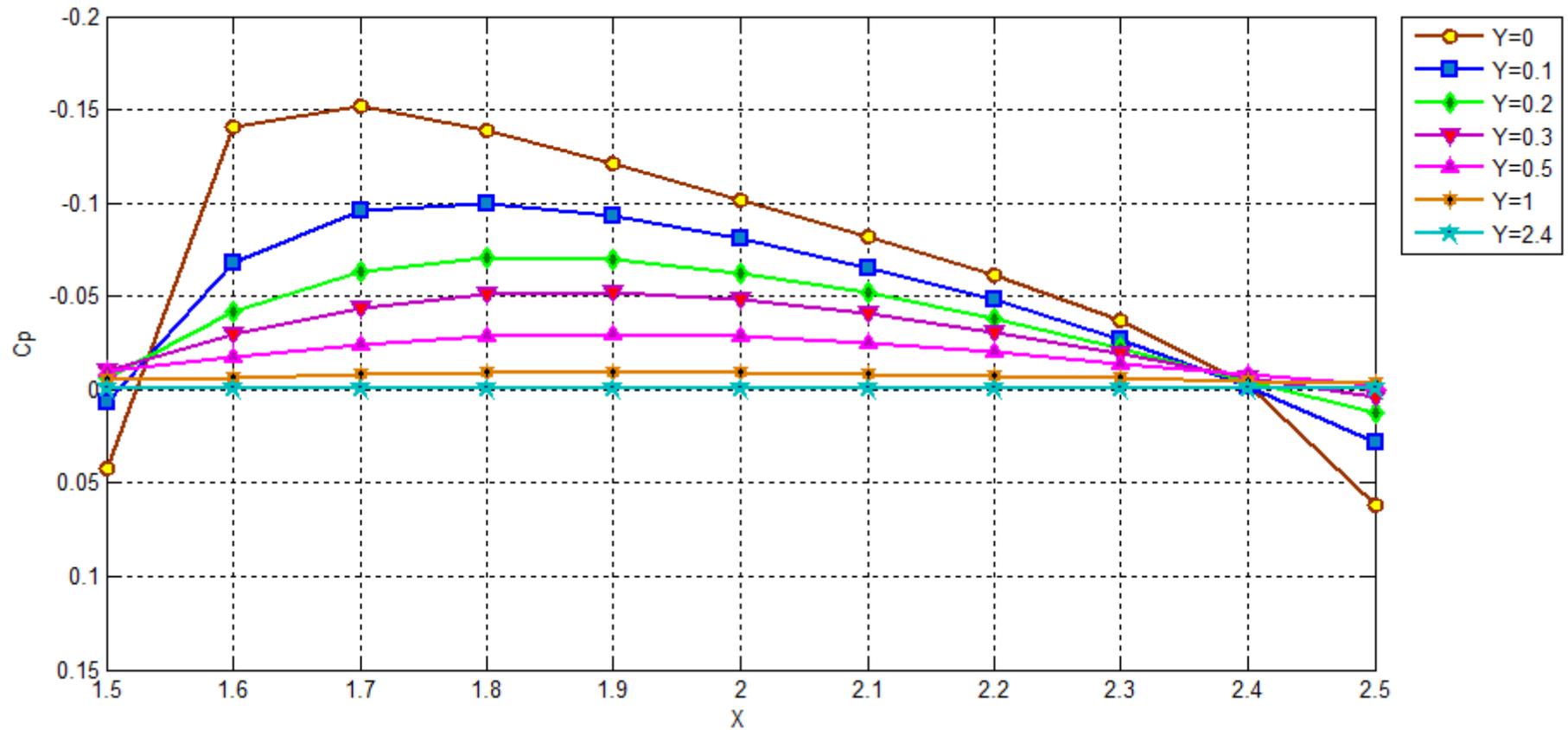
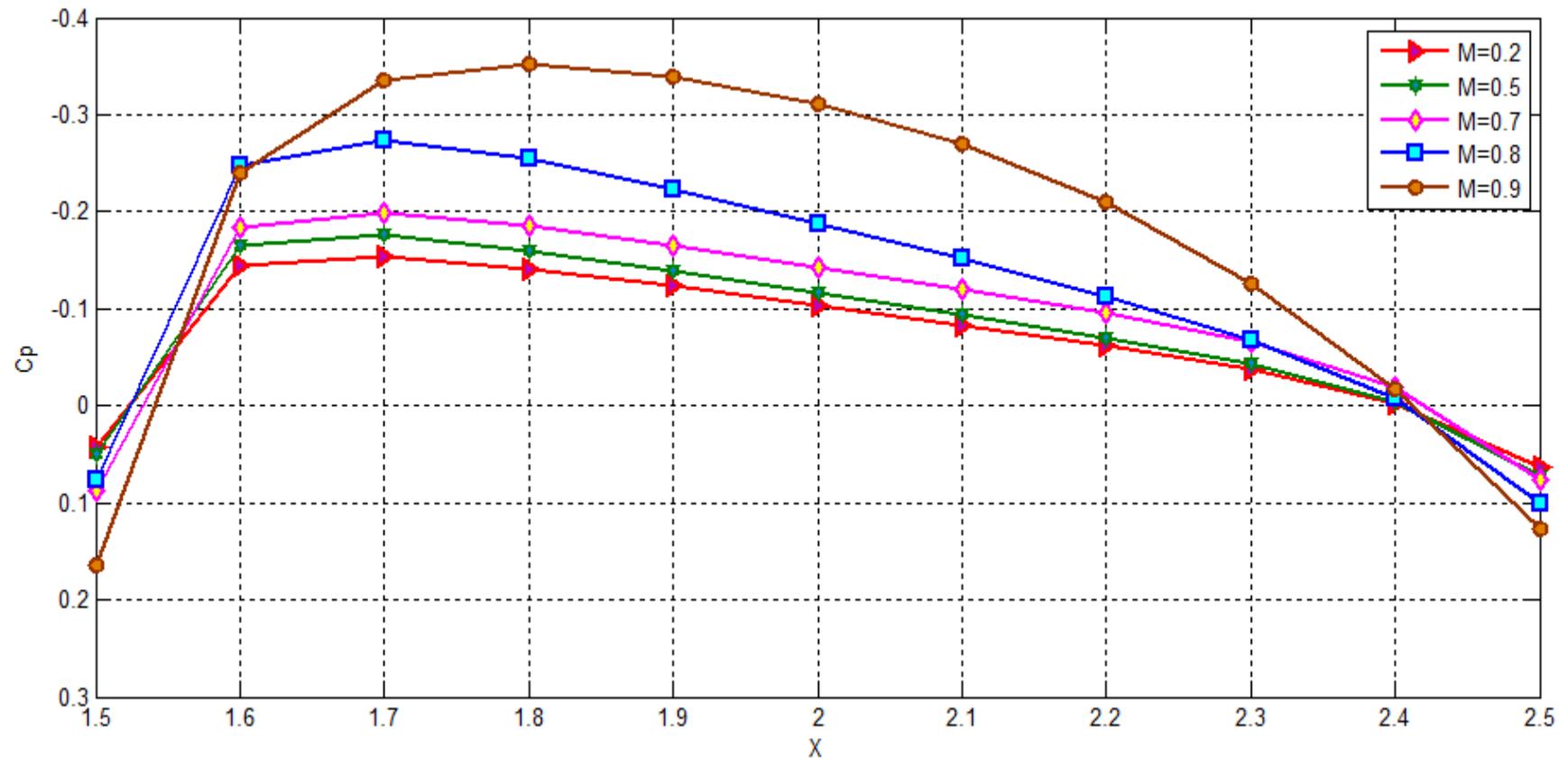


Fig.VI-15: Variation du nombre de Mach local en fonction de X,  $M_\infty = 0.870$

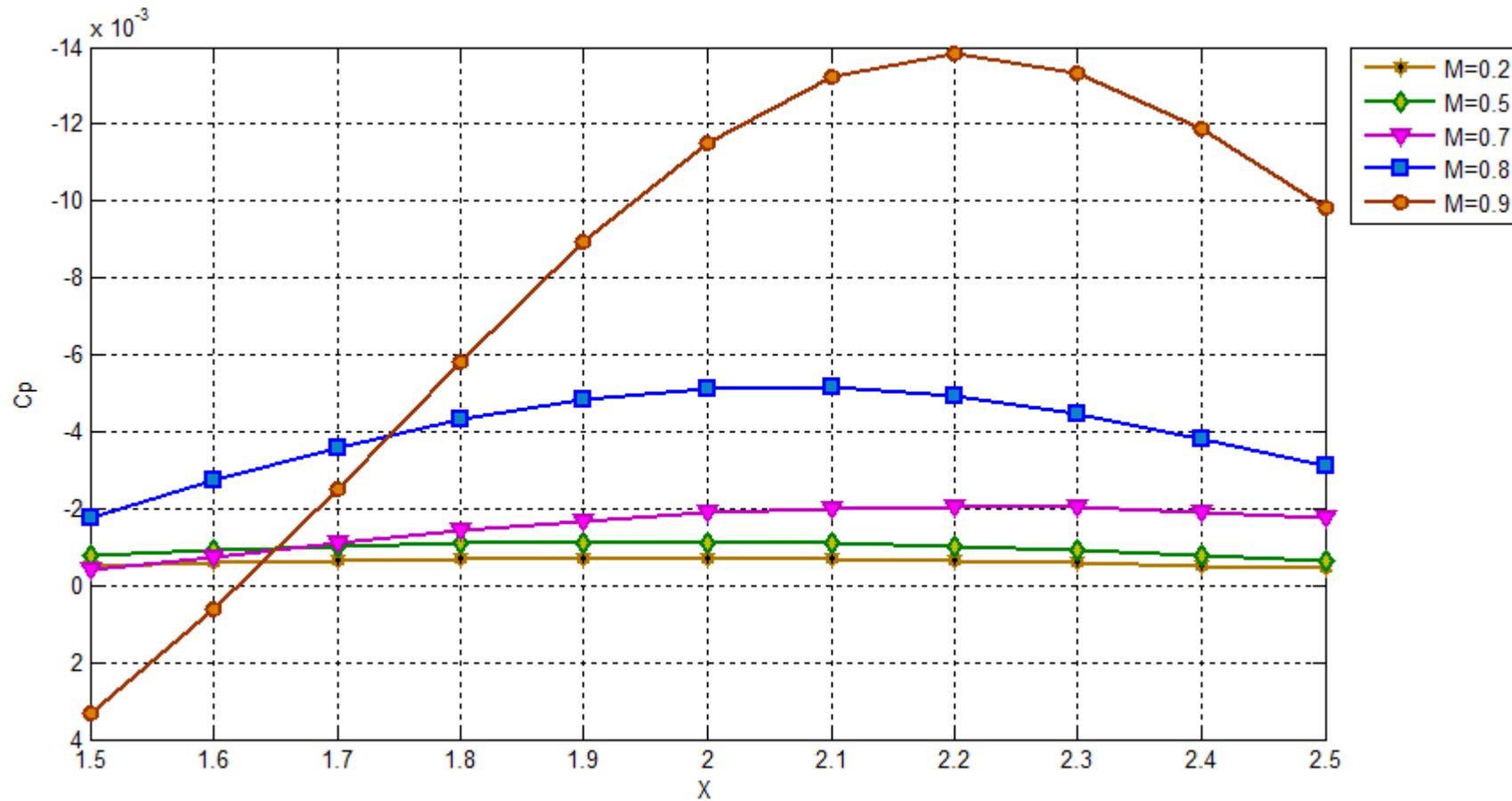
*IV.6. Variation du coefficient de pression :*



**Fig.VI-16:** Variation du coefficient de pression en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$

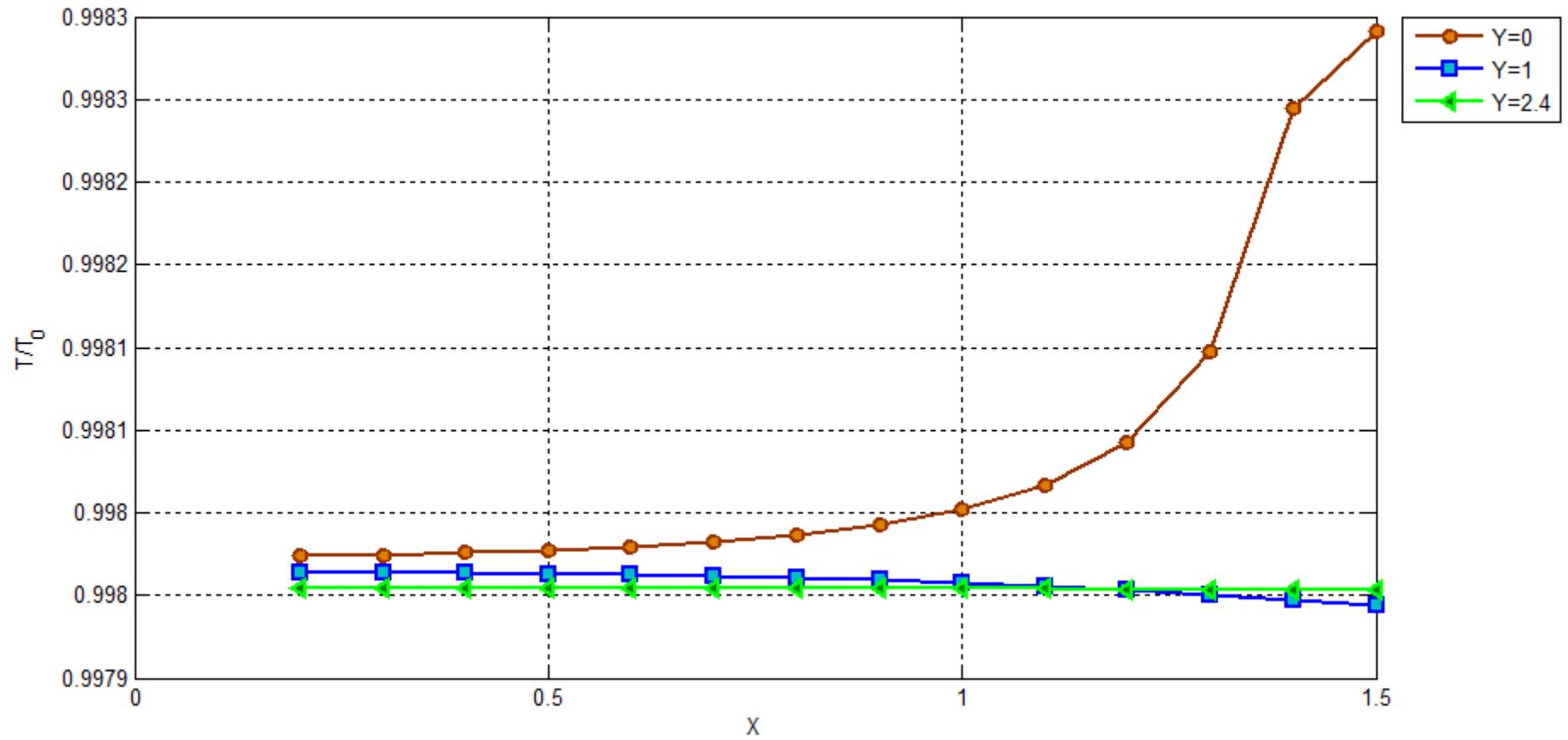


**Fig.VI-17:** Variation du coefficient de pression en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0

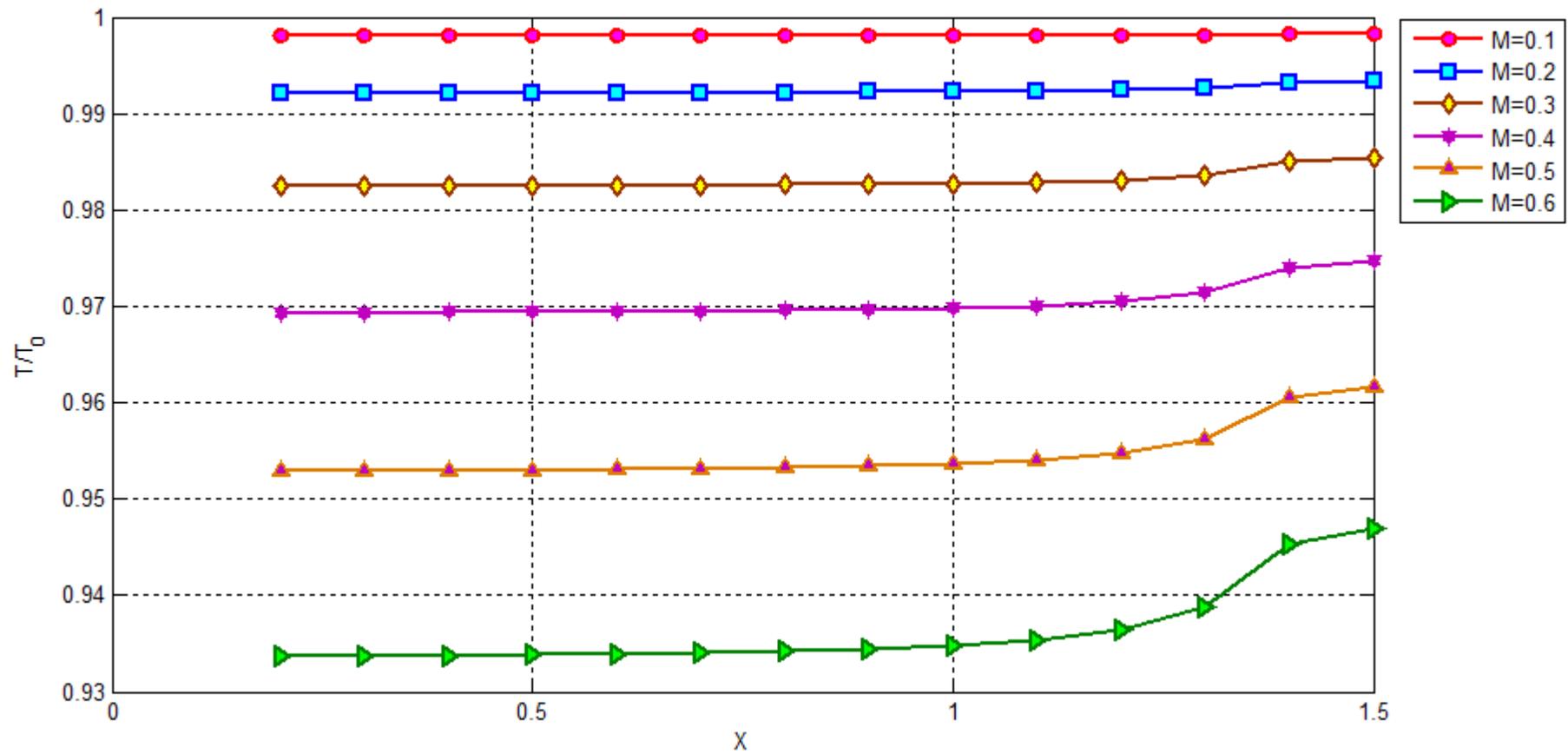


**Fig.VI-18:** Variation du coefficient de pression en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4

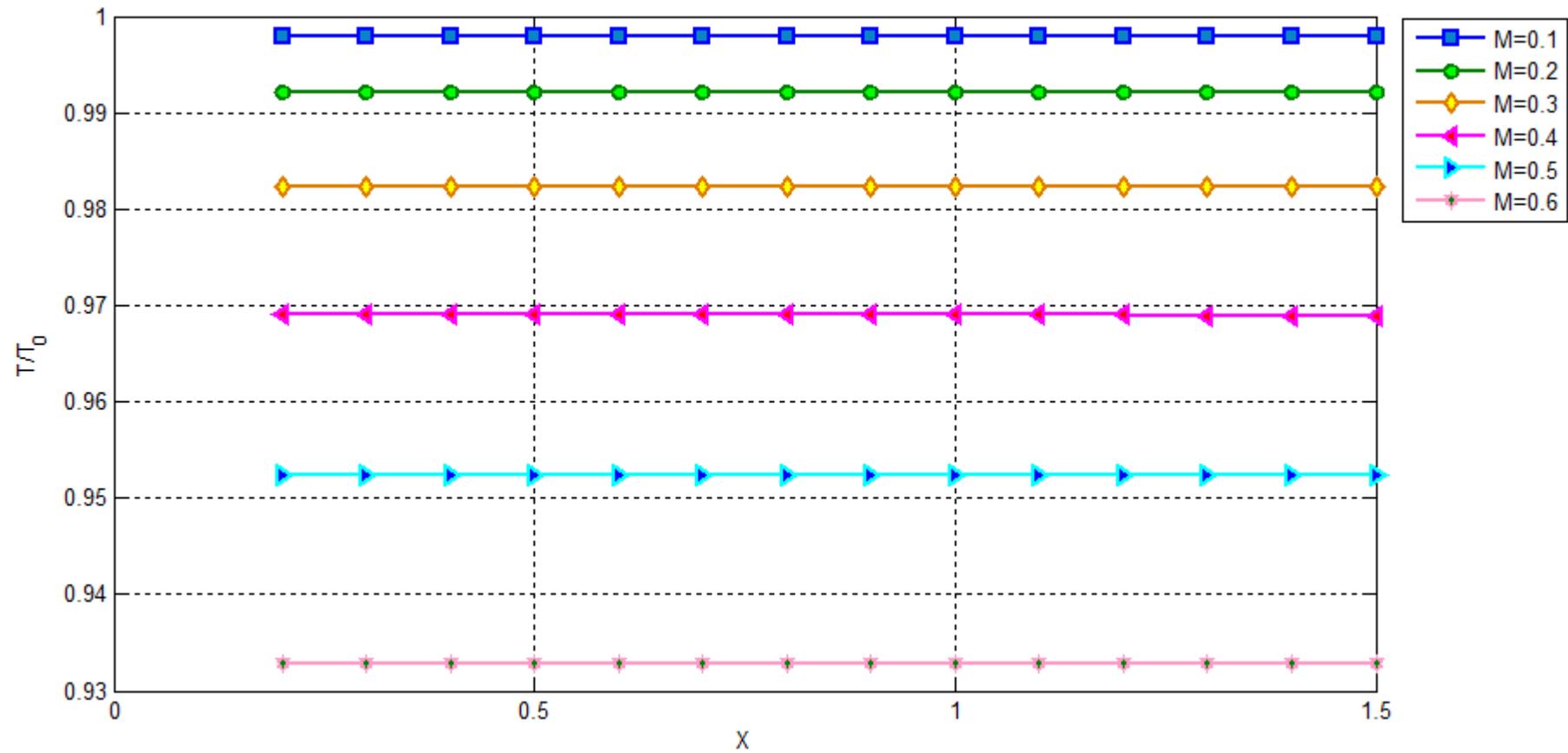
*IV.7. Variation de la Température :*



**Fig.VI-19:** Variation de température en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$



**Fig.VI-20:** Variation de température en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=0



**Fig.VI-21:** Variation de température en fonction de X, pour différents nombre de Mach à Y=2.4

# *Chapitre V*

---

*VALIDATIO DES RESULTATS*

---

# Chapitre V

## VALIDATIONS DES RESULTATS

### V.1. Introduction:

Pour valider les résultats trouvés par la méthode des différences finies, on fait recours au code de calcul Fluent utilisant comme mailleur GAMBIT. Les principales étapes à suivre lors du travail sur le logiciel de simulation numérique des écoulements Fluent nécessitent la connaissance de certaines notions théoriques de base. Ces notions, concernent notamment, les définitions des principales équations régissant l'écoulement (voir **Annexe E**).

L'objectif de ce chapitre est la validation numérique des résultats obtenus par notre programme et celles calculées par le solveur « Fluent v 6.3.26 ». Pour cela on choisit un seul cas pour chaque régime. Dans le cas de l'écoulement subsonique (on choisit  $M_\infty = 0.1$ ), et dans le où l'écoulement est transsonique (on choisit  $M_\infty = 0.9$ ). Et pour le cas d'un écoulement supersonique (on choisit  $M_\infty = 3$ ). Les deux cas de régimes choisis ( $M_\infty = 0.1$ ,  $M_\infty = 0.9$ ) sont comparer avec ceux calculé par le solveur « Fluent v 6.3.26 ».

Notre programme a pris en considération un domaine d'étude de 1000 équations à 1000 inconnues avec un maillage carrée (pas = 0.1 ), les résultats trouvées reflètent bien le sens physique du phénomène.

Il est à noter que les lois de variations tracées à partir de nos résultats sont en bon accord dans leur ensemble avec selles tracées en utilisant le solveur « Fluent v 6.3.26 ». De point de vue numérique une légère différence entre les valeurs des différent caractéristiques a été remarquée entre nos résultats et celles calculées par le solveur, ce qui explique à notre avis l'effet du raffinement du maillage (pas de solveurs = 0.001 = 1 % taille ou pas choisi).

V.2. Les champs de vitesse, de pression, de nombre de Mach et de température

V.2.1. Cas subsonique ( $M_\infty = 0.1$ ):

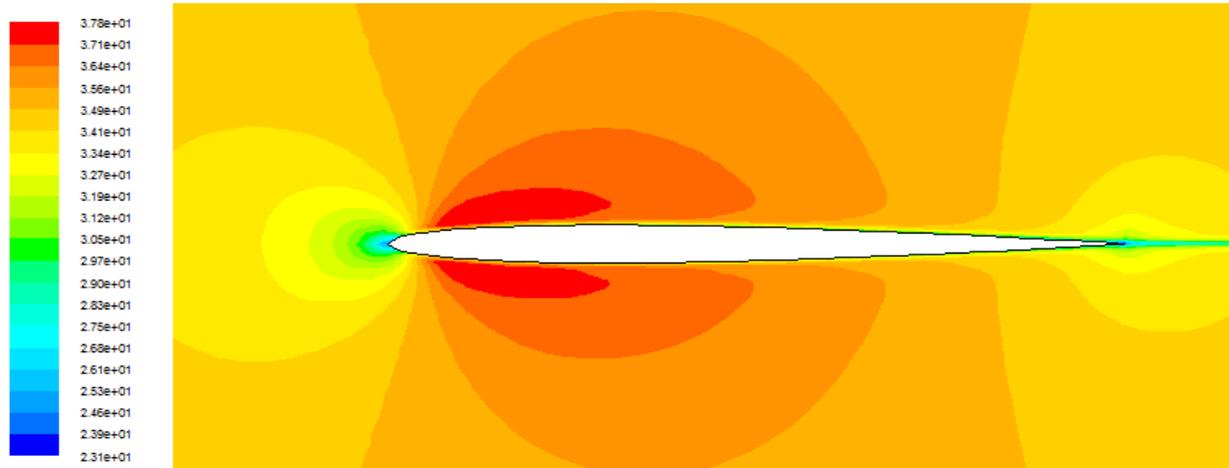


Fig.V-1 : Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.1$

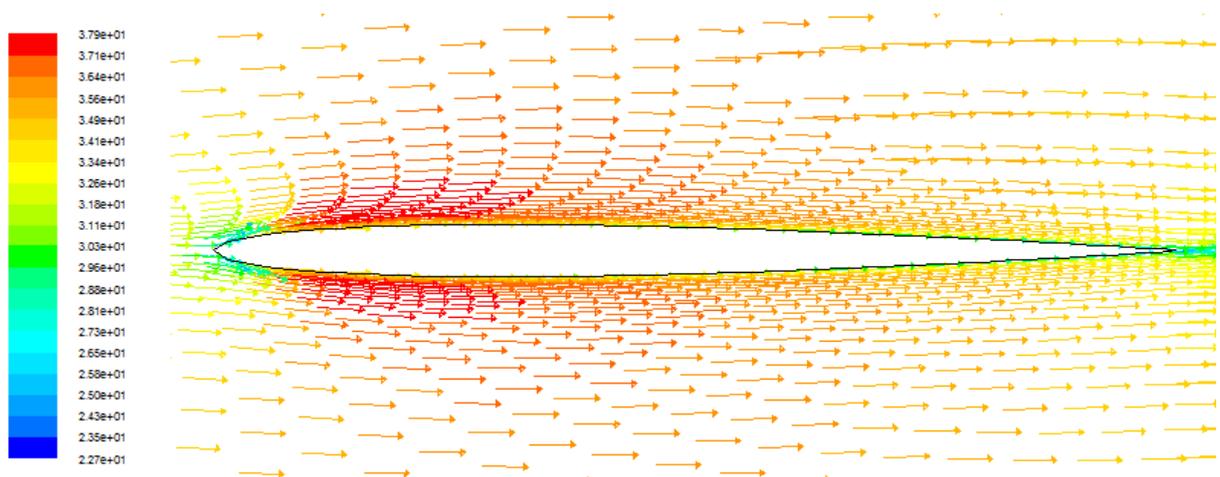


Fig.V-2: vecteurs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.1$

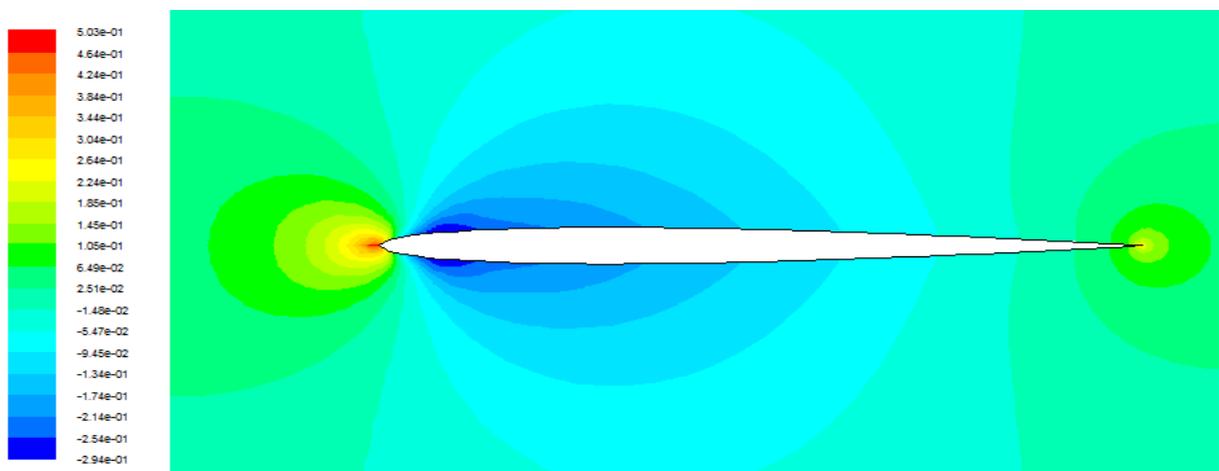


Fig.V-3 : Champs de coefficient de pression autour du profil NACA 0006,  $M_\infty = 0.1$

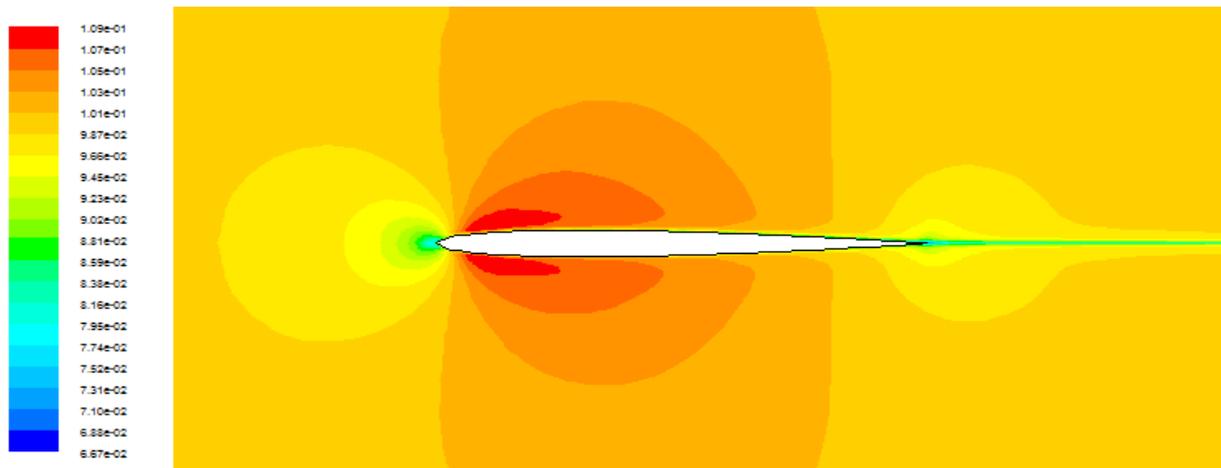


Fig.V-4: Nombre de Mach local autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.1$

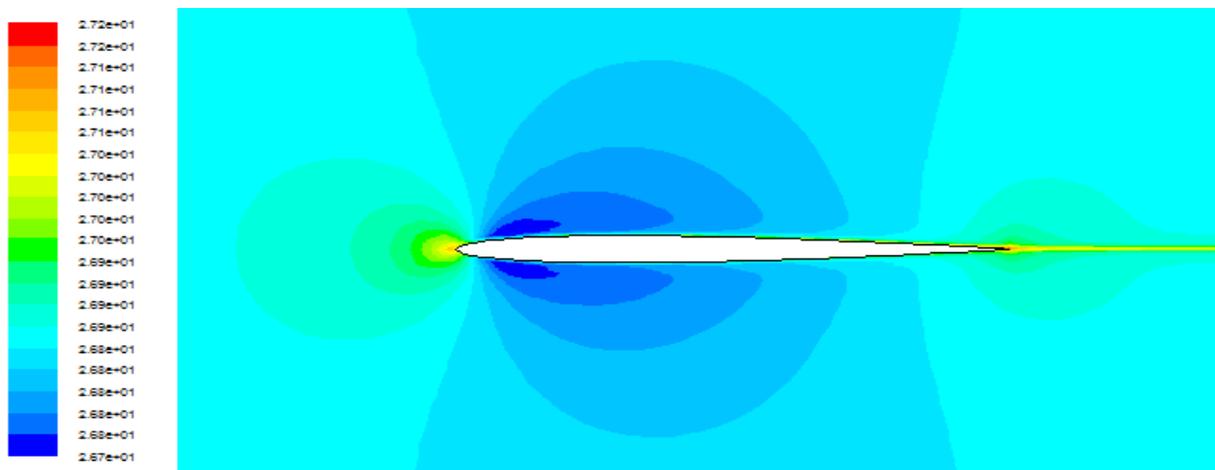


Fig.V-5: Champs de température autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.1$

V.2.2. Cas transsonique ( $M_\infty = 0.9$ ):

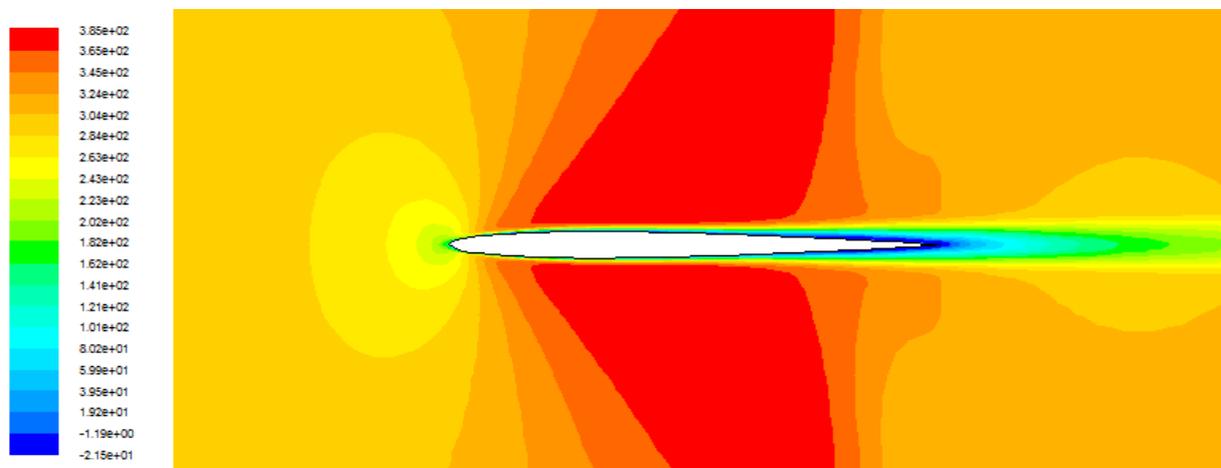


Fig.V-6: Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.9$

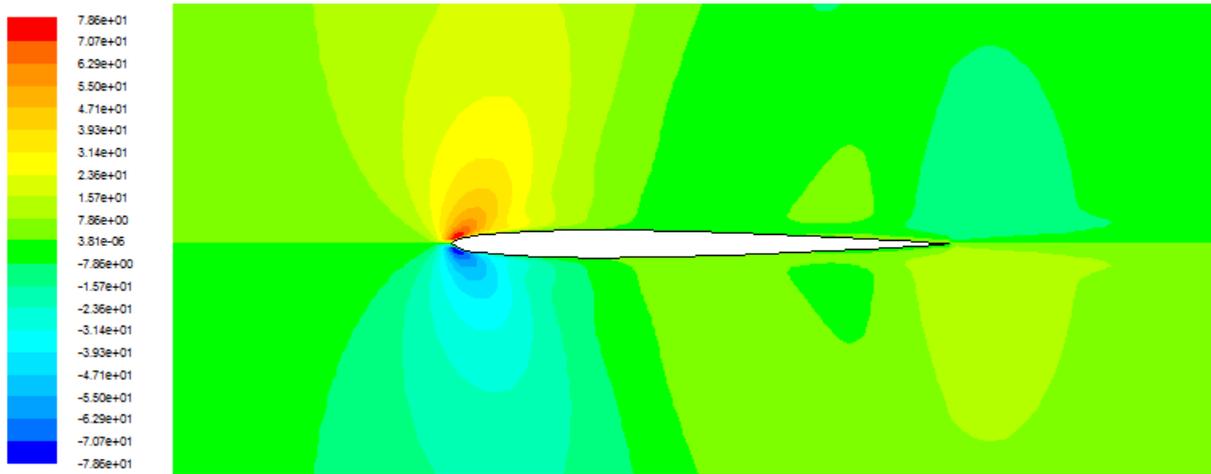


Fig.V-7: Champs de vitesse verticale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.9$

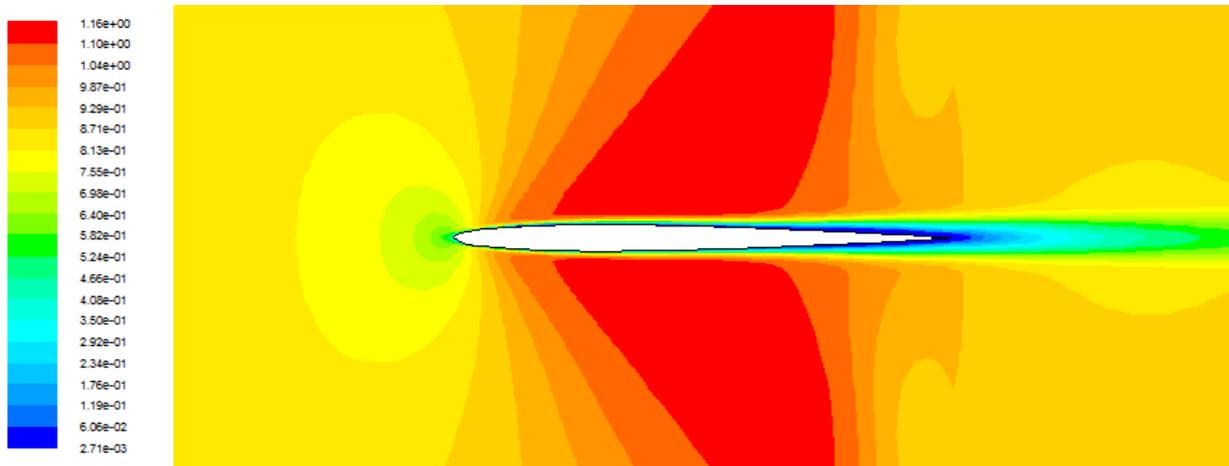


Fig.V-8: Champs de nombre de Mach local autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.9$

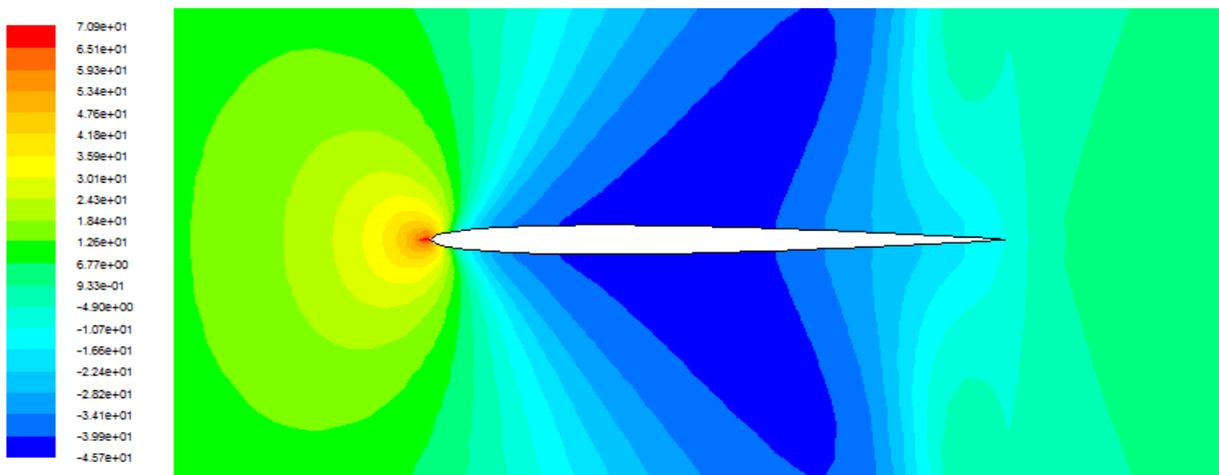


Fig.V-9: Champs u coefficient de pression autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 0.9$

V.2.3. Cas supersonique ( $M_\infty = 3$ ):

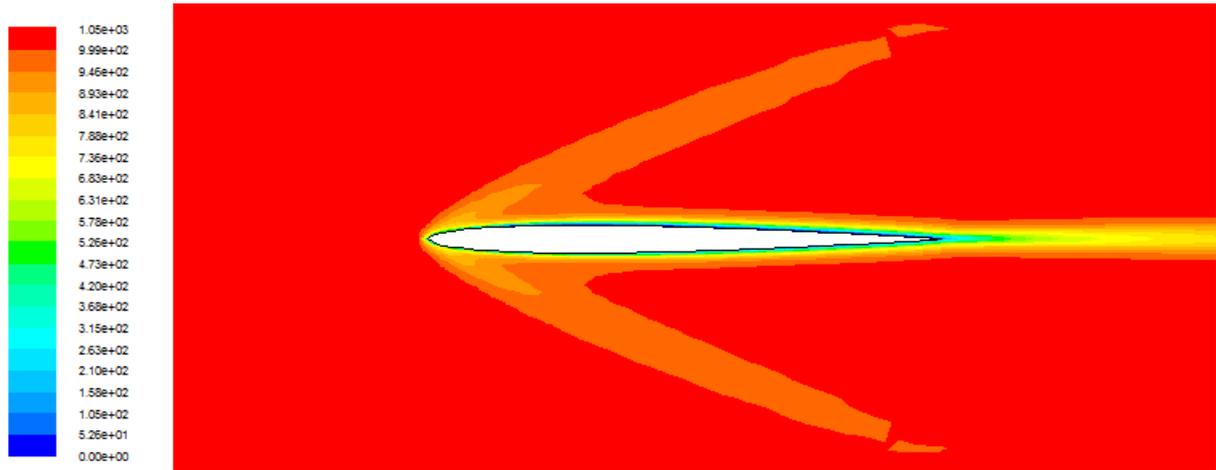


Fig.V-10: Champs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$

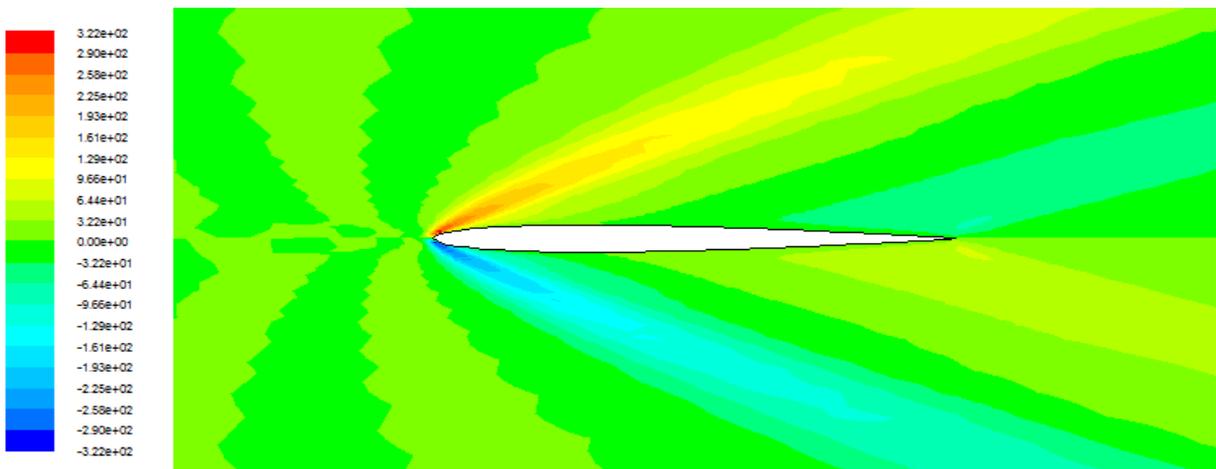


Fig.V-11: Champs de vitesse verticale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$

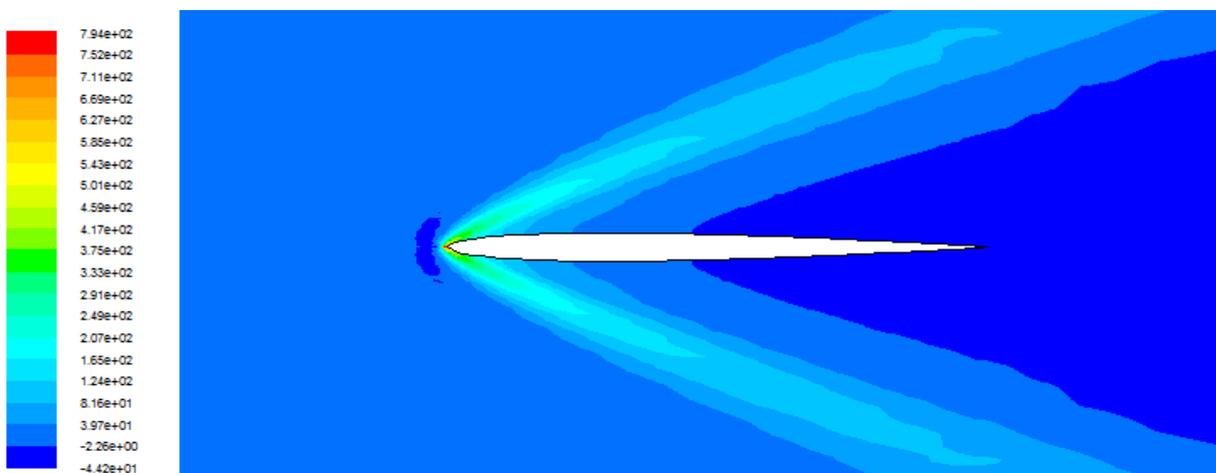


Fig.V-12: Champs du coefficient de pression autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$



Fig.V-13: Champs du nombre de Mach autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$

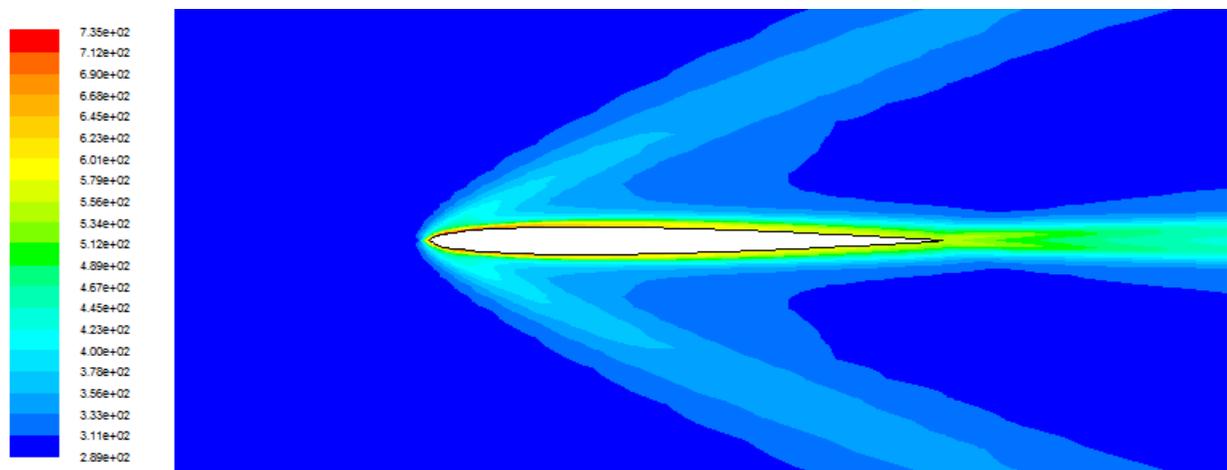


Fig.V-14: Champs de température autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$

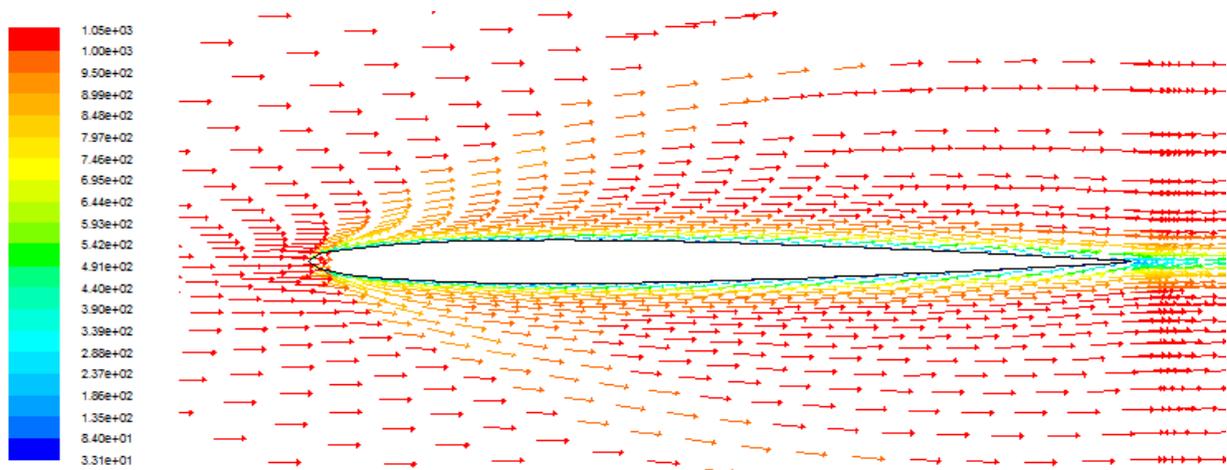
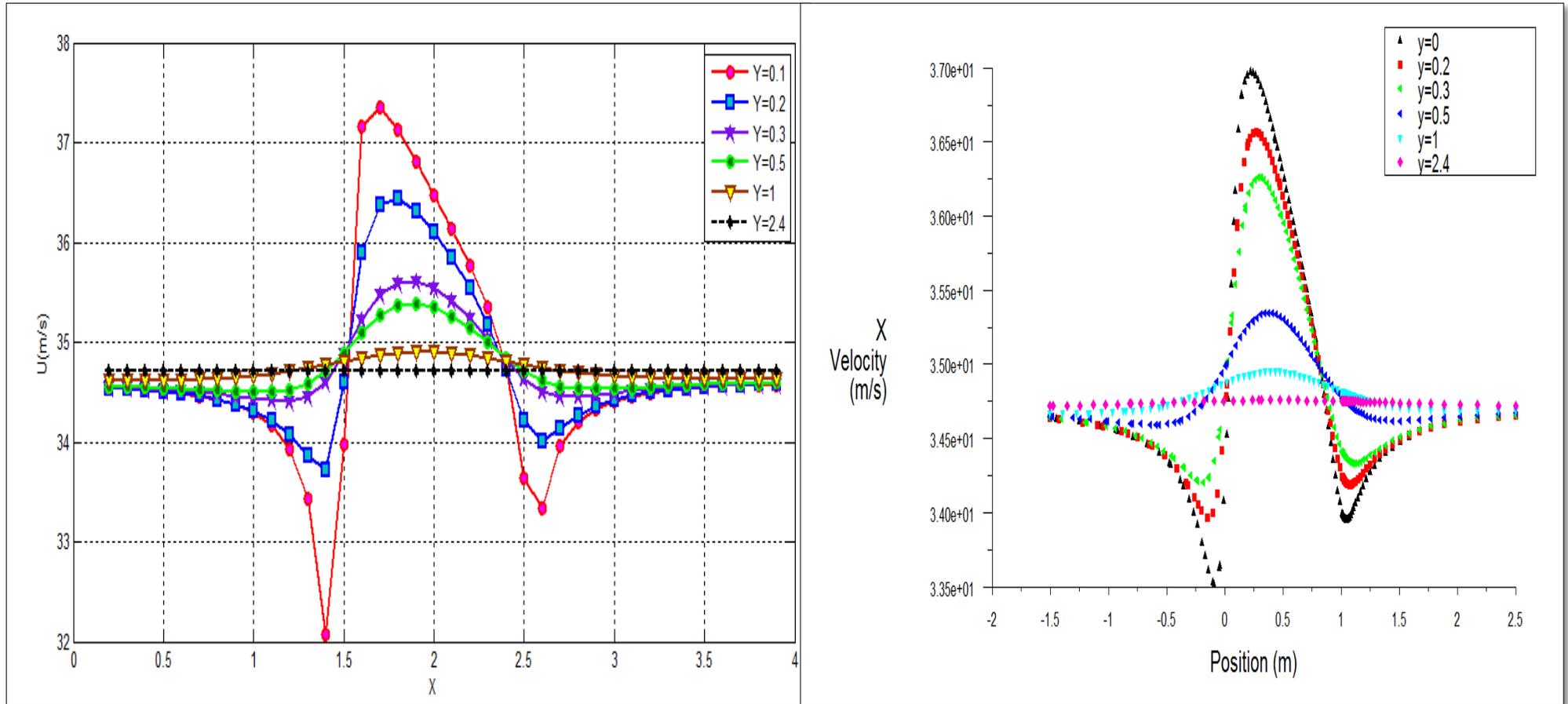


Fig.V-15 : Vecteurs de vitesse axiale autour du profil NACA 0006, pour  $M_\infty = 3$

V.3. Comparaison des résultats obtenus :

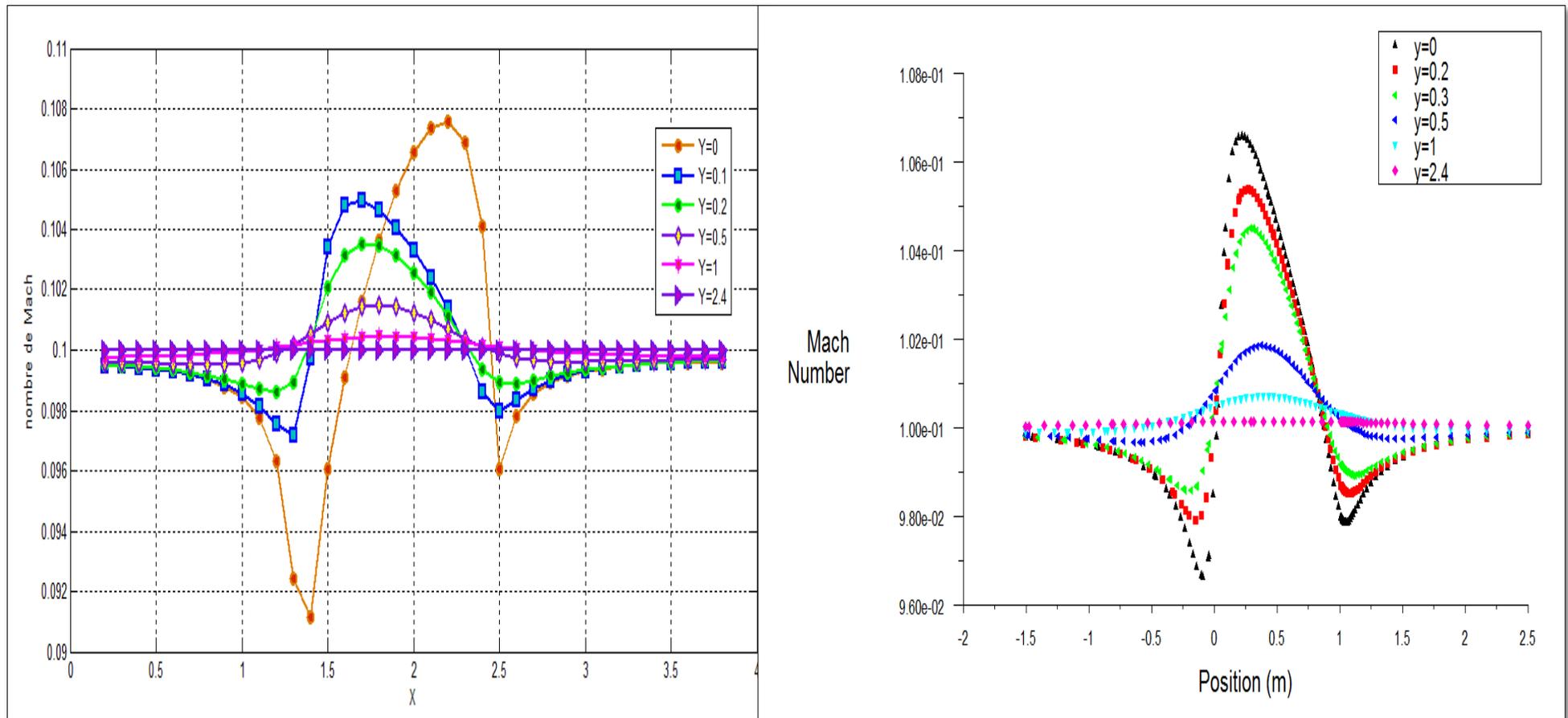
V.3.1. Dans le cas subsonique ( $M_\infty = 0.1$ ):



*Nos résultats*

*Fluent résultats*

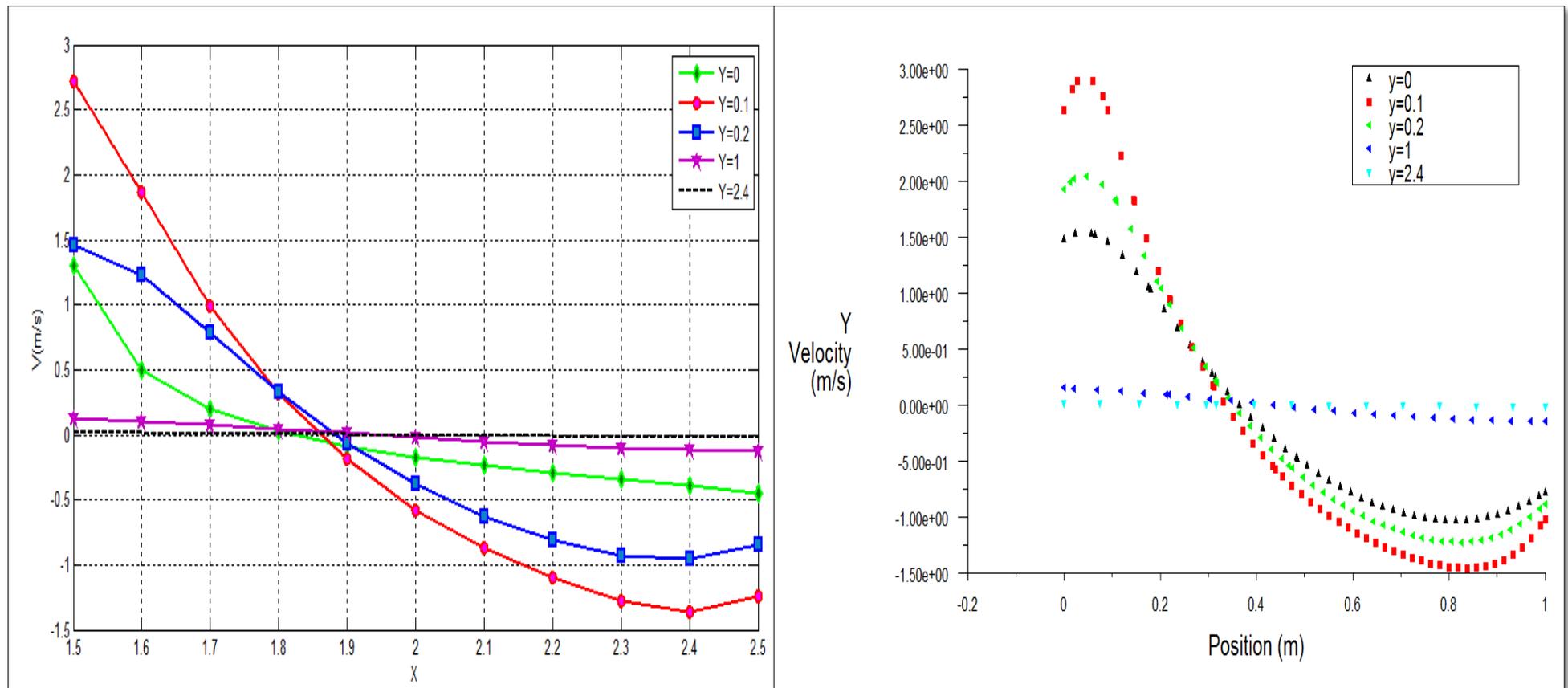
**Fig.V-16:** Comparaison de variation de vitesse axiale en fonction de  $X$ ,  $M_\infty = 0.1$



*Nos résultats*

*Fluent résultats*

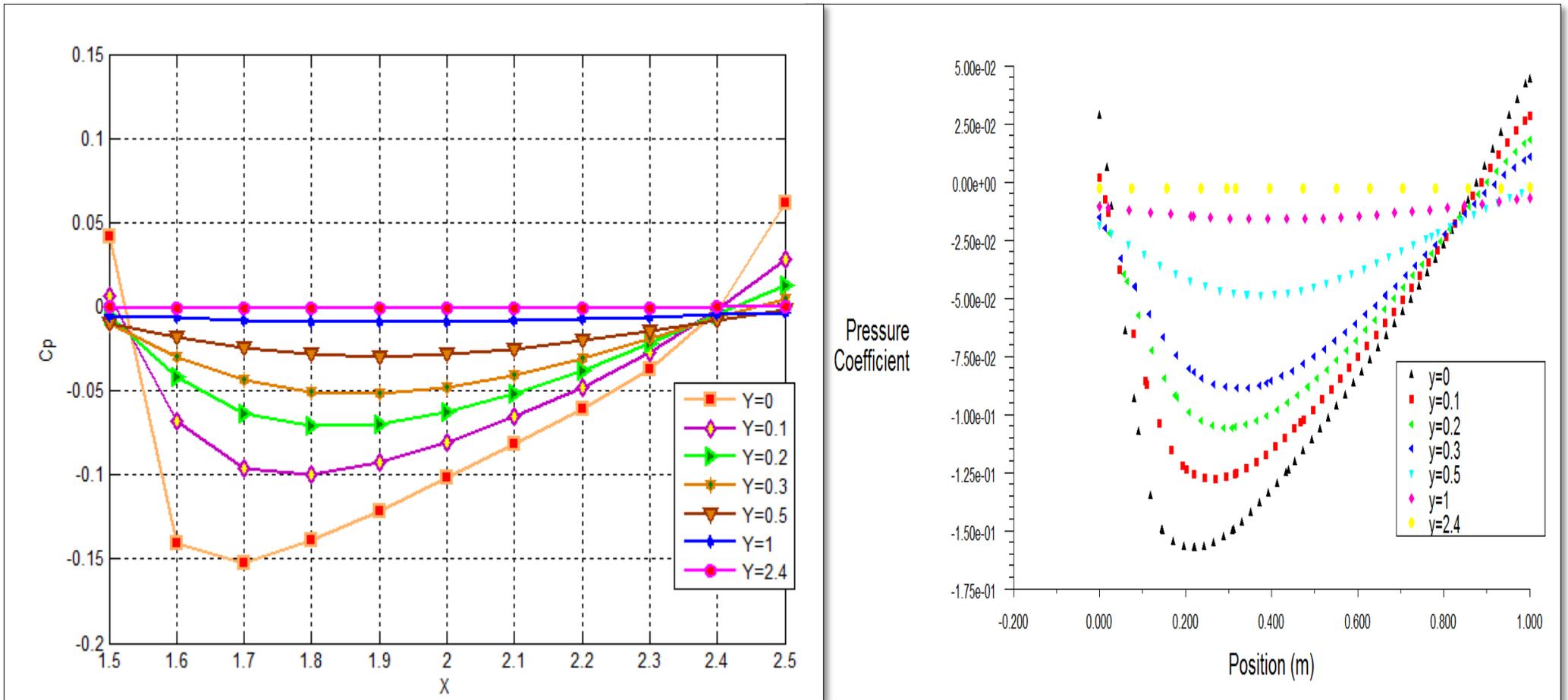
**Fig.V-17:** Comparaison de variation du nombre de Mach local en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$



*Nos résultats*

*Fluent résultats*

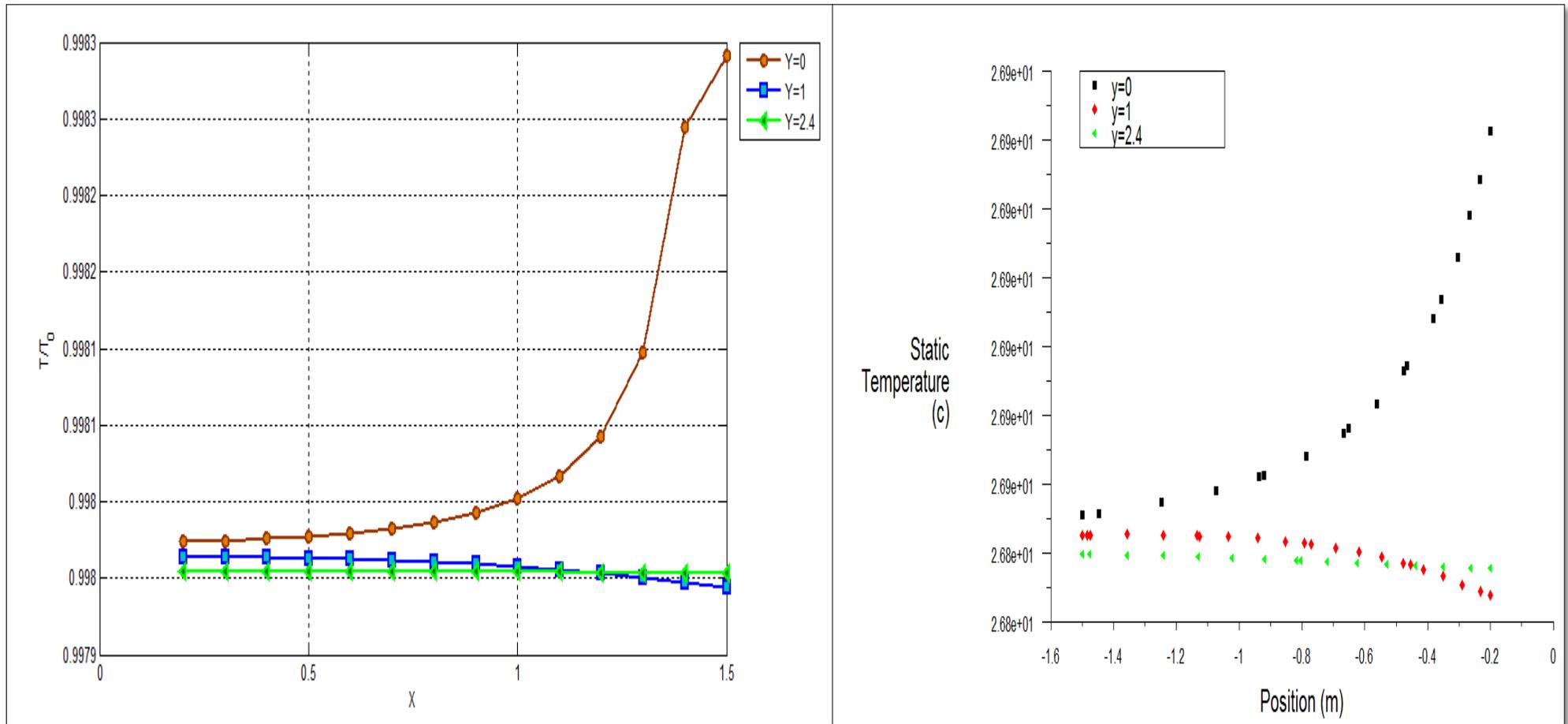
**Fig.V-18:** Comparaison de la vitesse verticale en fonction de  $X$ ,  $M_\infty = 0.1$



*Nos résultats*

*Fluent résultats*

**Fig.V-19:** Comparaison du coefficient de pression en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$

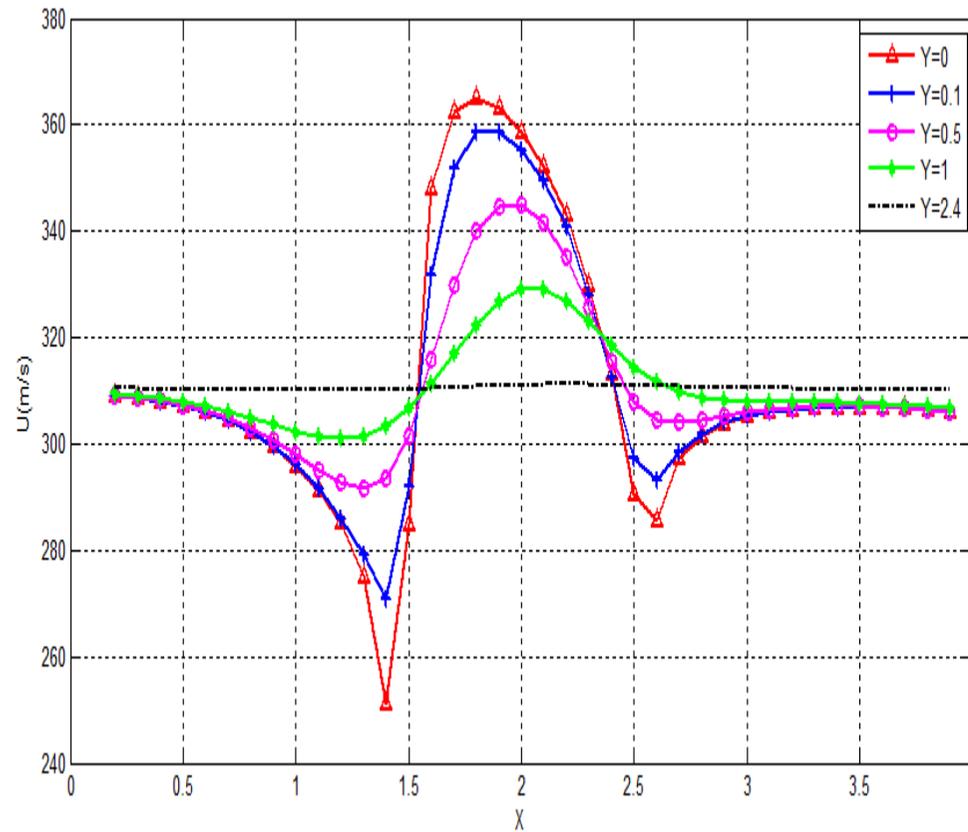


*Nos résultats*

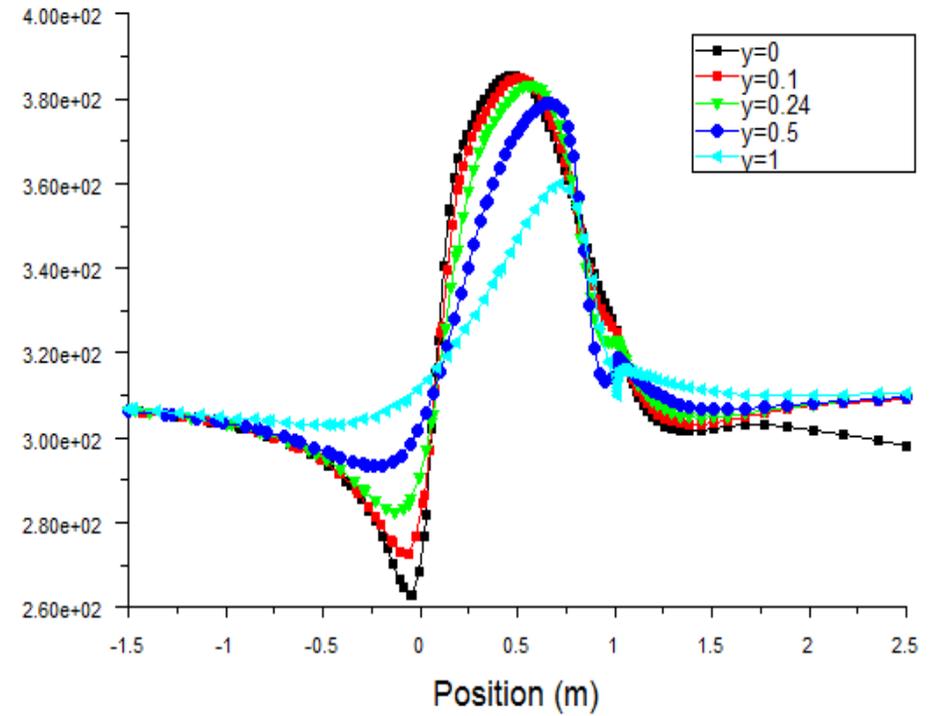
*Fluent résultats*

**Fig.V-20:** Comparaison la variation de température en fonction de X,  $M_\infty = 0.1$

V.3.2. Dans le cas transsonique ( $M_\infty = 0.9$ ):

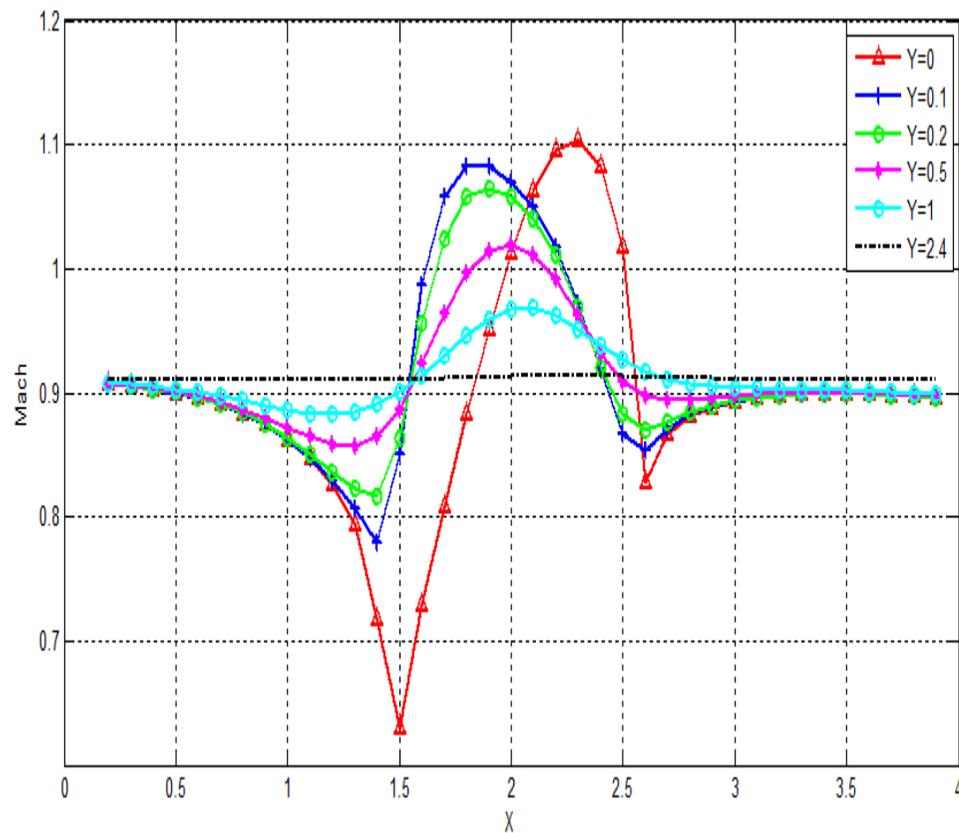


Nos résultats

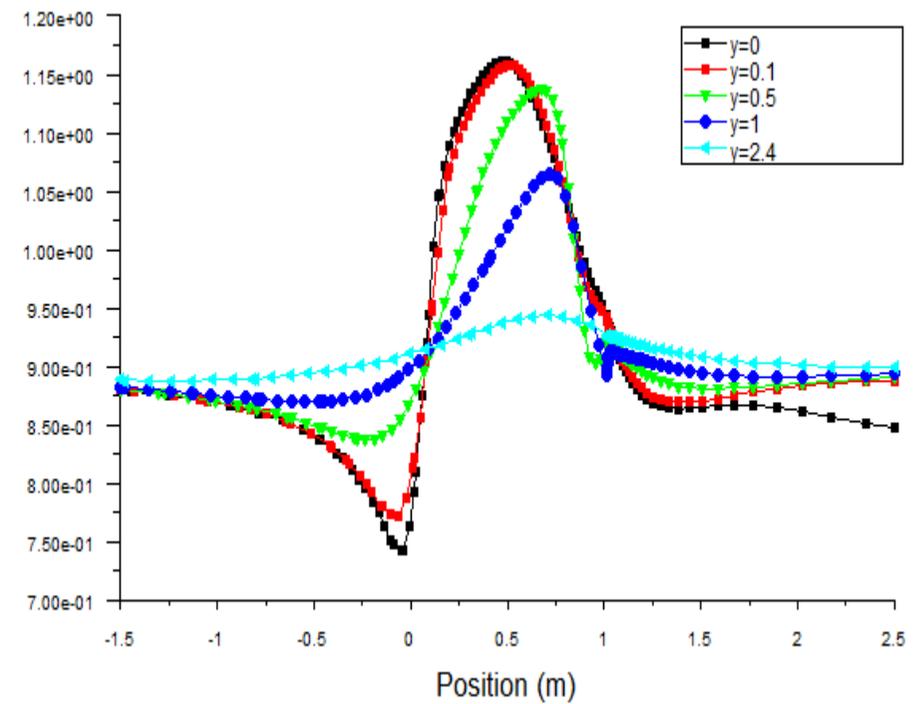


Fluent résultats

Fig.V-21: Comparaison la variation de vitesse axiale en fonction de X,  $M_\infty = 0.9$

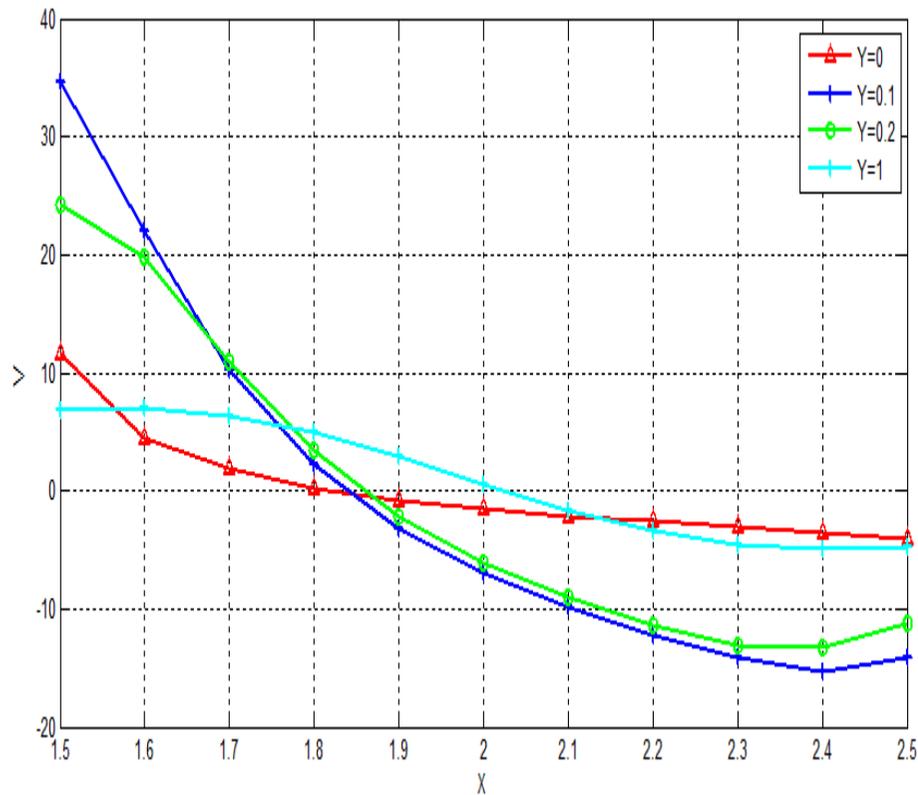


*Nos résultats*

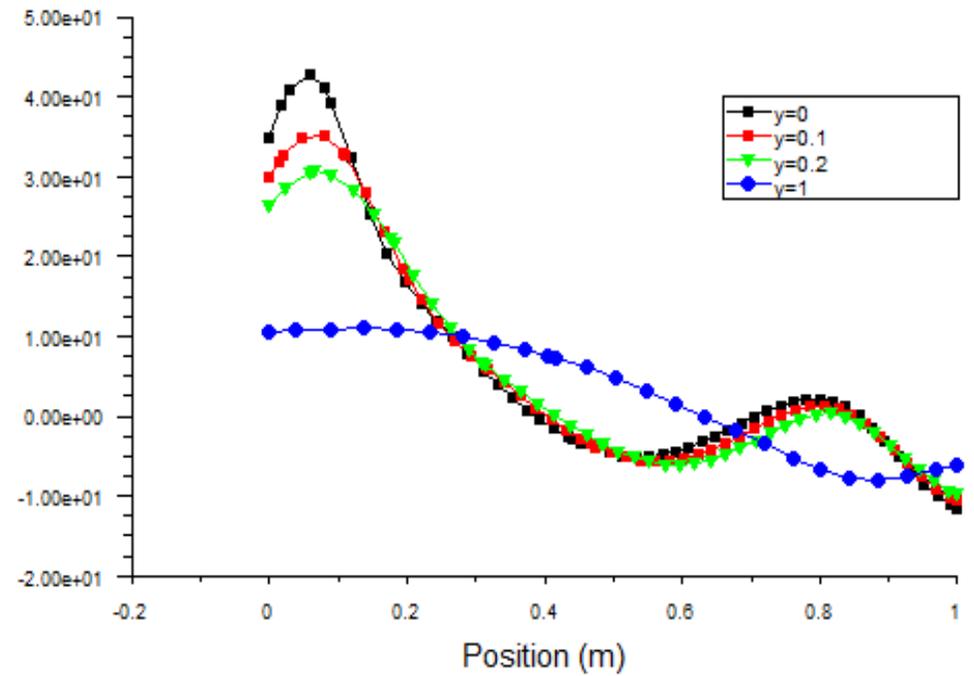


*Fluent résultats*

**Fig.V-22: Comparaison la variation du nombre de Mach local en fonction de X,  $M_\infty = 0.9$**

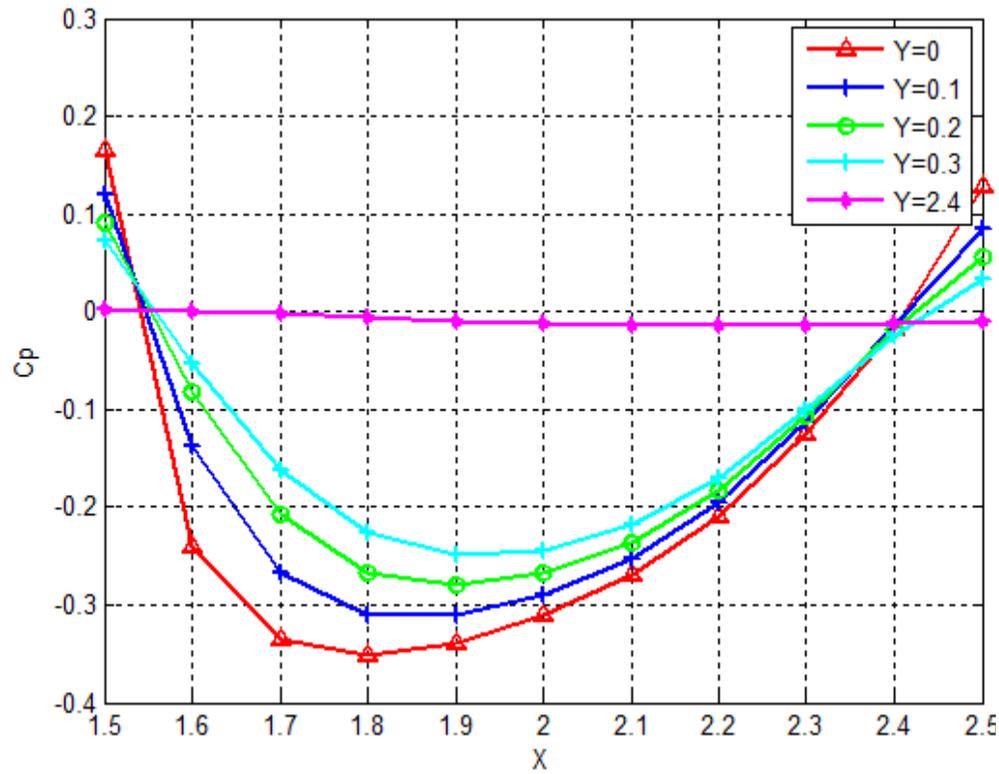


*Nos résultats*

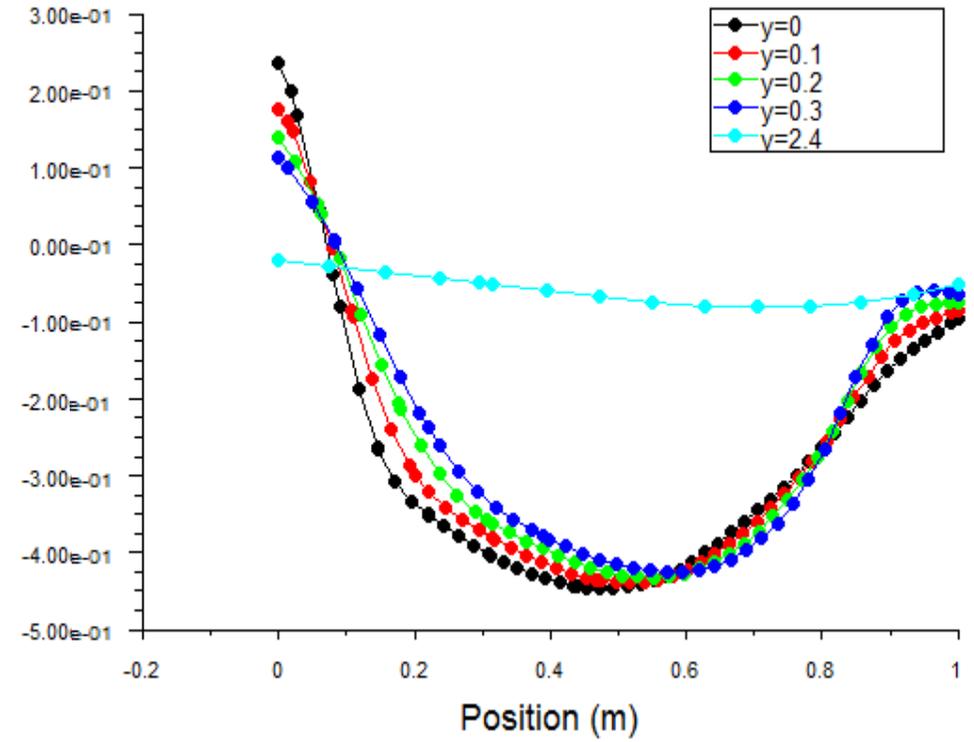


*Fluent résultats*

**Fig.V-23:** Comparaison la variation de vitesse verticale en fonction de X,  $M_\infty = 0.9$

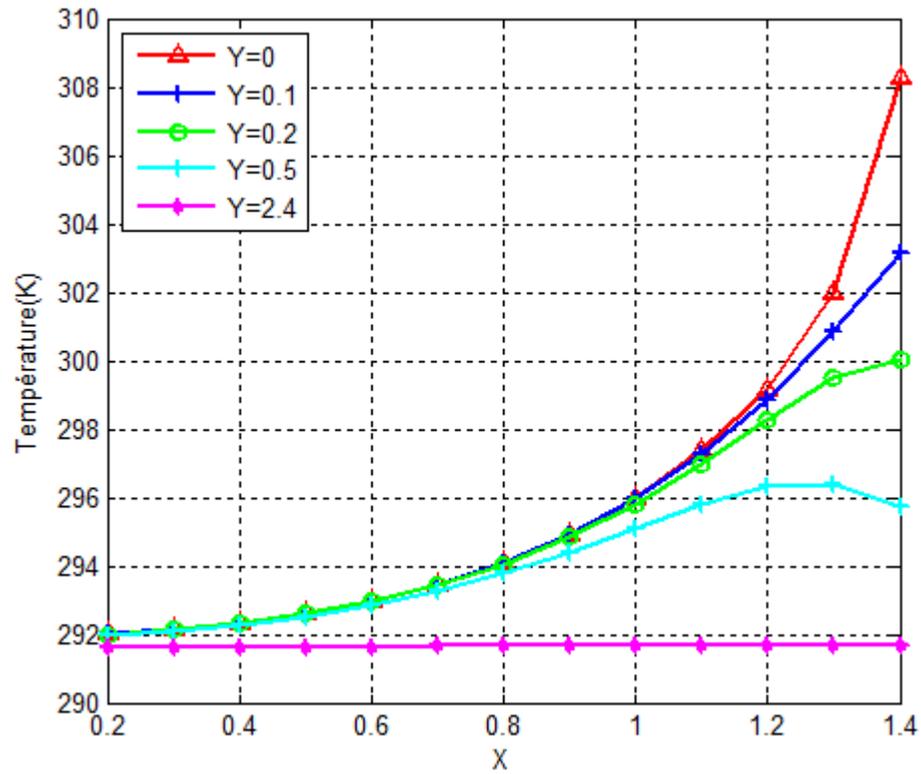


*Nos résultats*

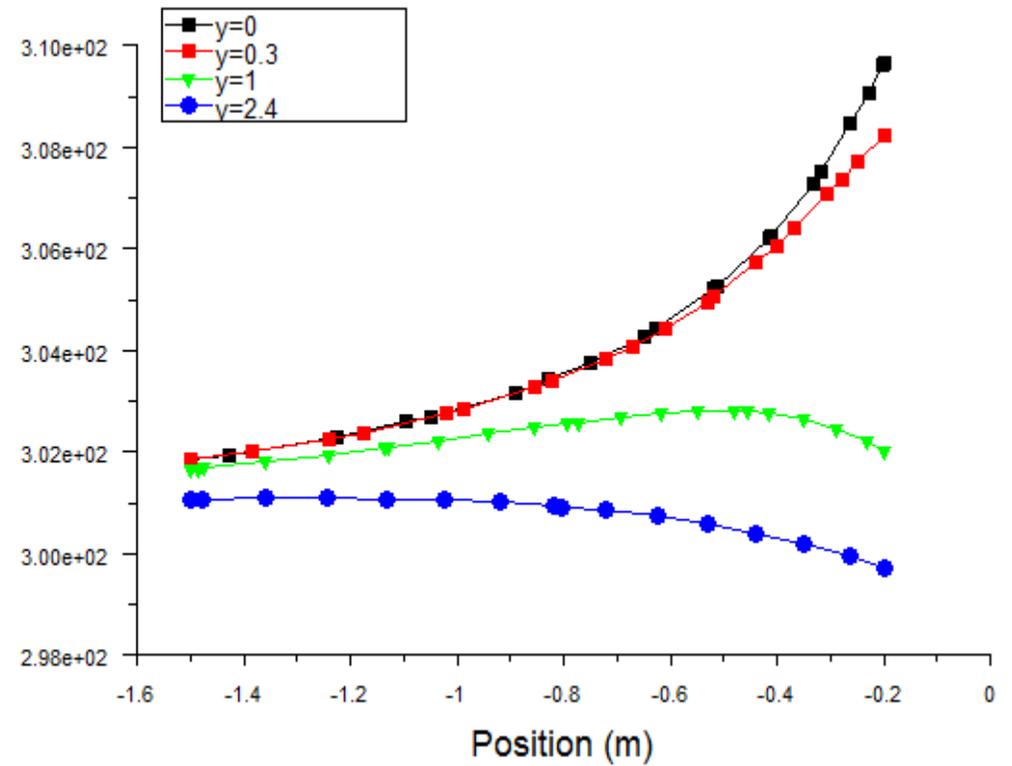


*Fluent résultats*

**Fig.V-24:** Comparaison la variation du coefficient de pression en fonction de  $X$ ,  $M_\infty = 0.9$

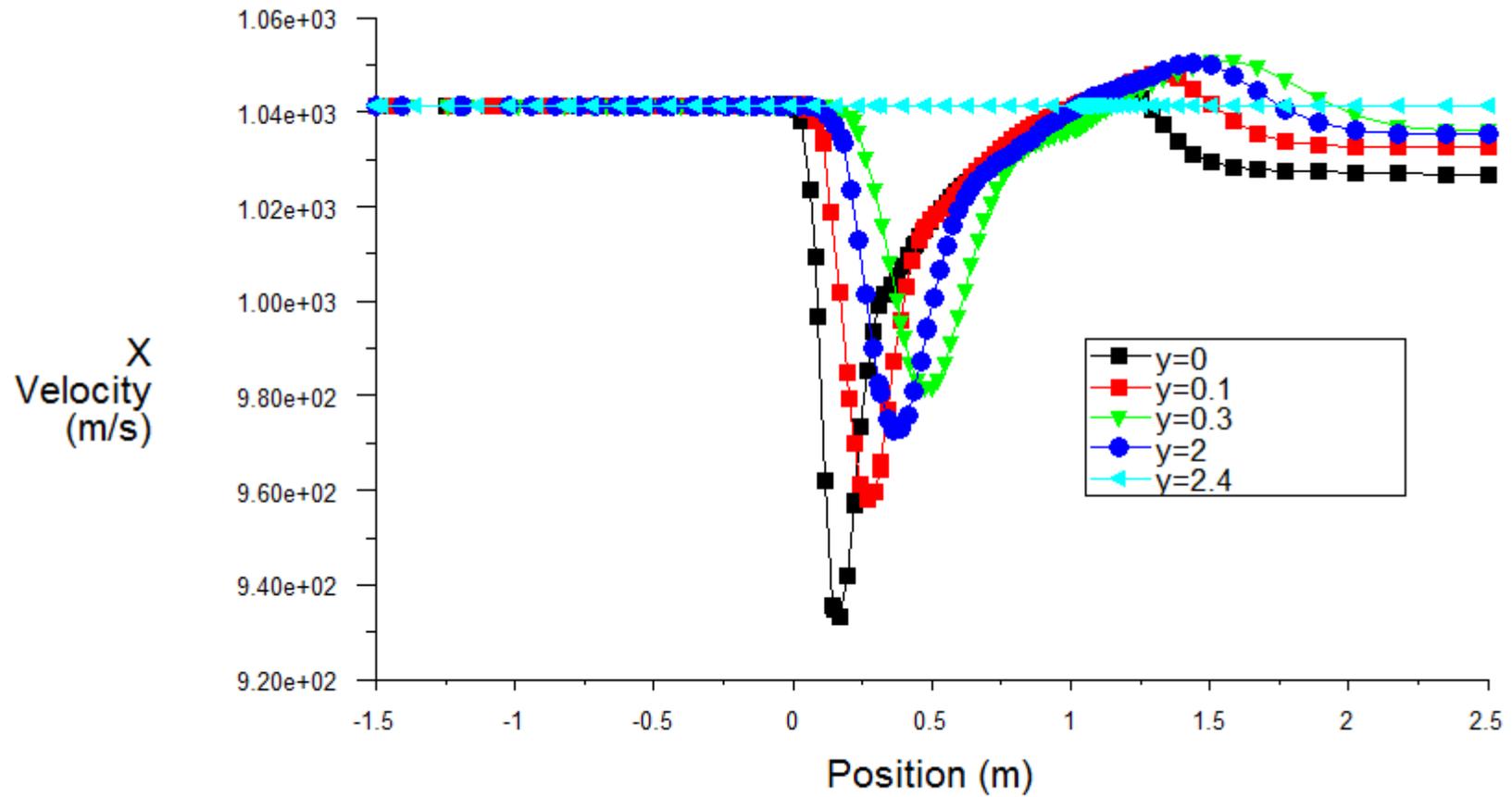


*Nos résultats*



*Fluent résultats*

**Fig.V-25:** Comparaison la variation de température en fonction de X,  $M_\infty = 0.9$

*V.4. Les courbes dans le cas supersonique :***Fig.V-26:** Variation de vitesse axiale en fonction de X, pour le nombre de Mach  $M_\infty = 3$

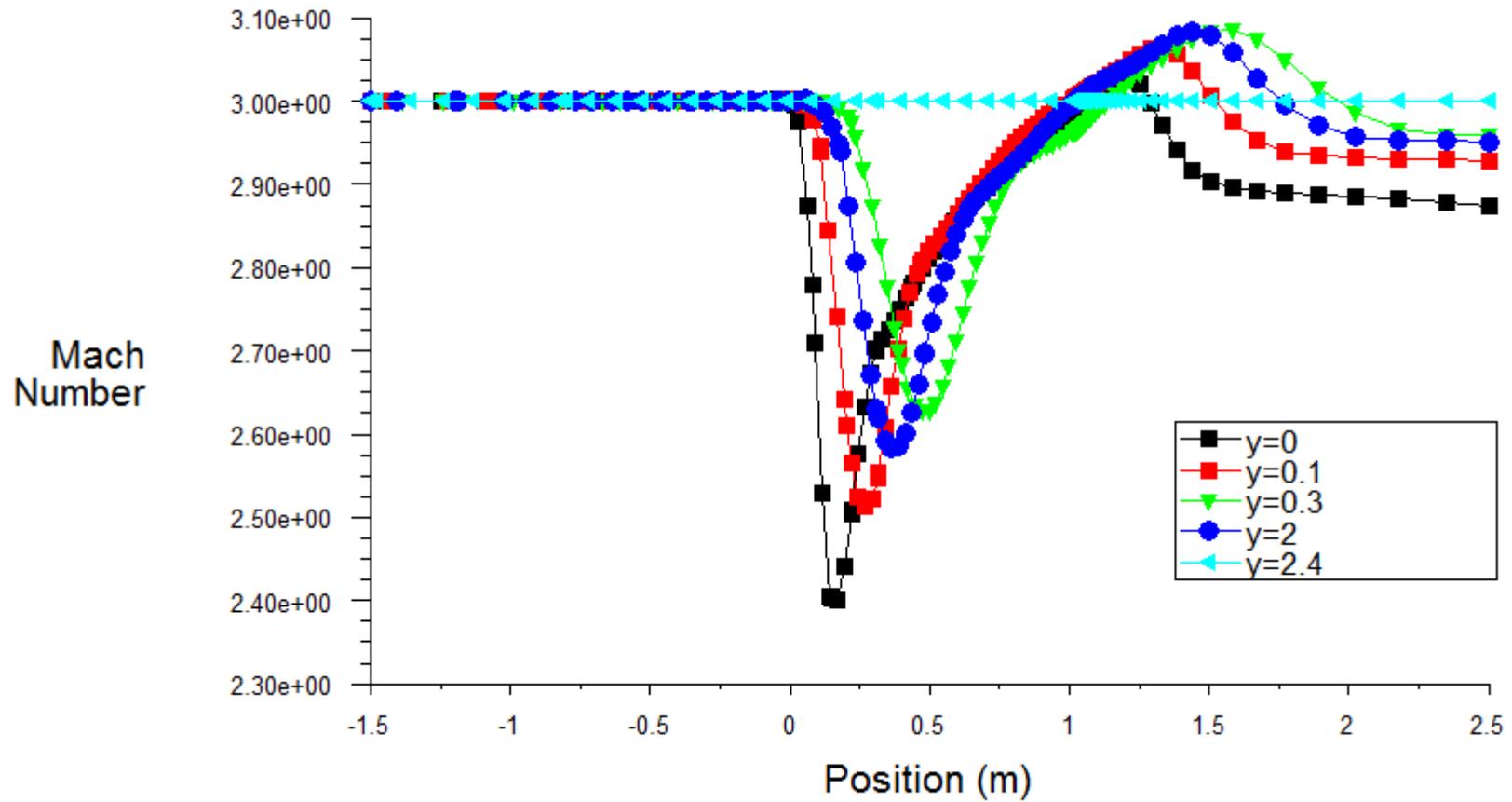
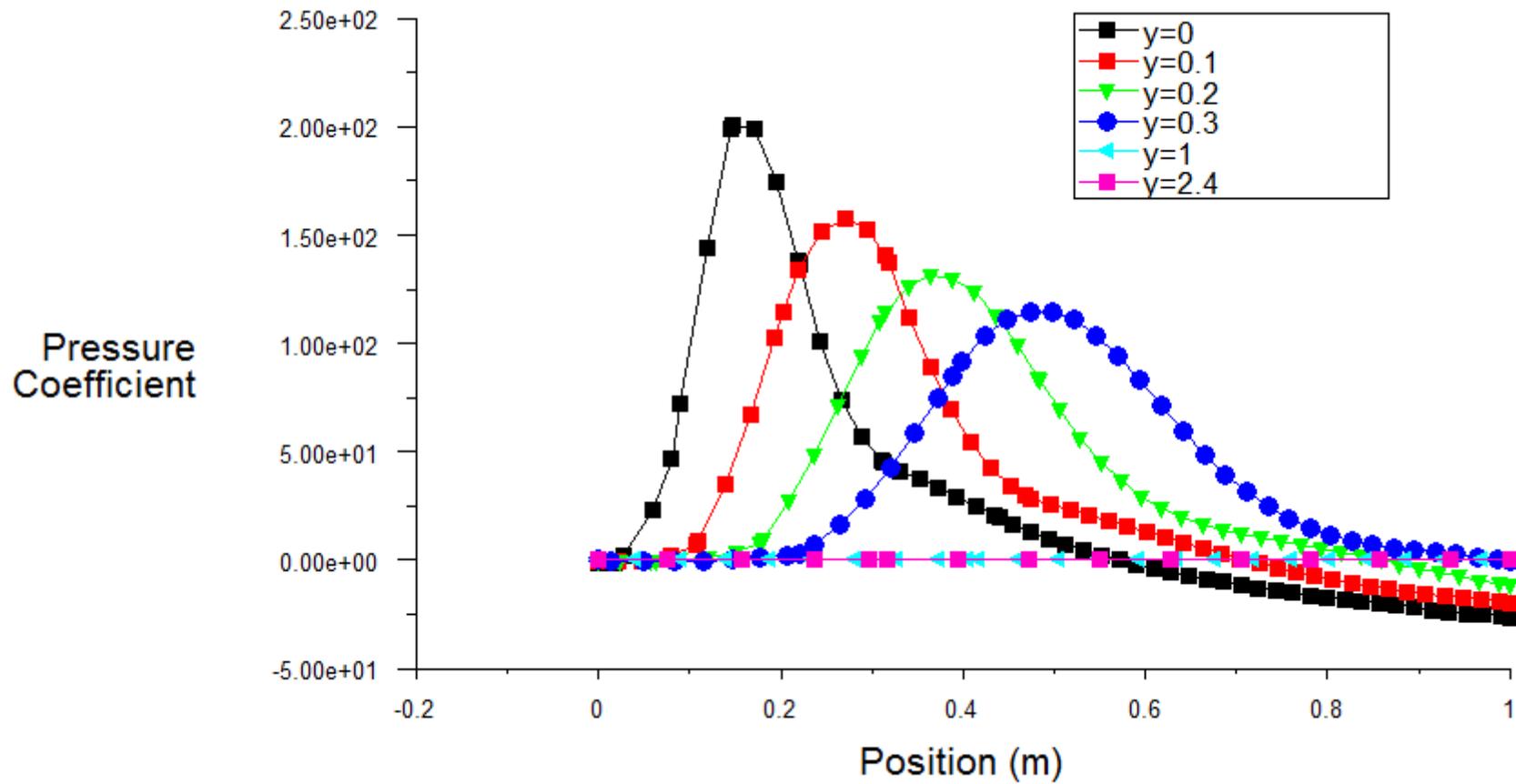


Fig.V-27: Variation de nombre de Mach local en fonction de X, pour  $M_\infty = 3$



**Fig.V-28:** Variation du coefficient de pression sur l'Extrados en fonction de X, pour  $M_\infty = 3$

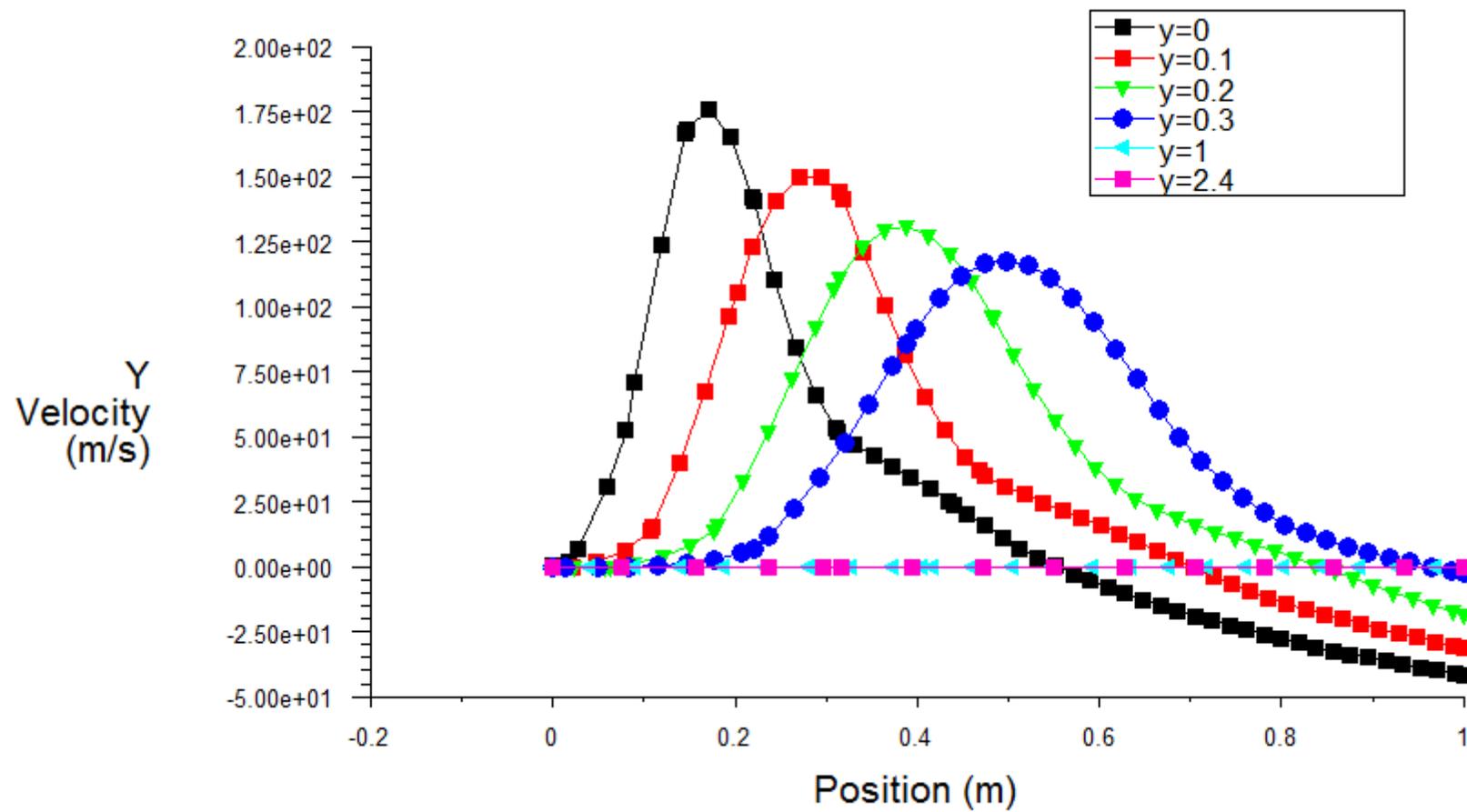


Fig.V-29: Variation de vitesse verticale sur l'Extrados en fonction de X, pour  $M_\infty = 3$

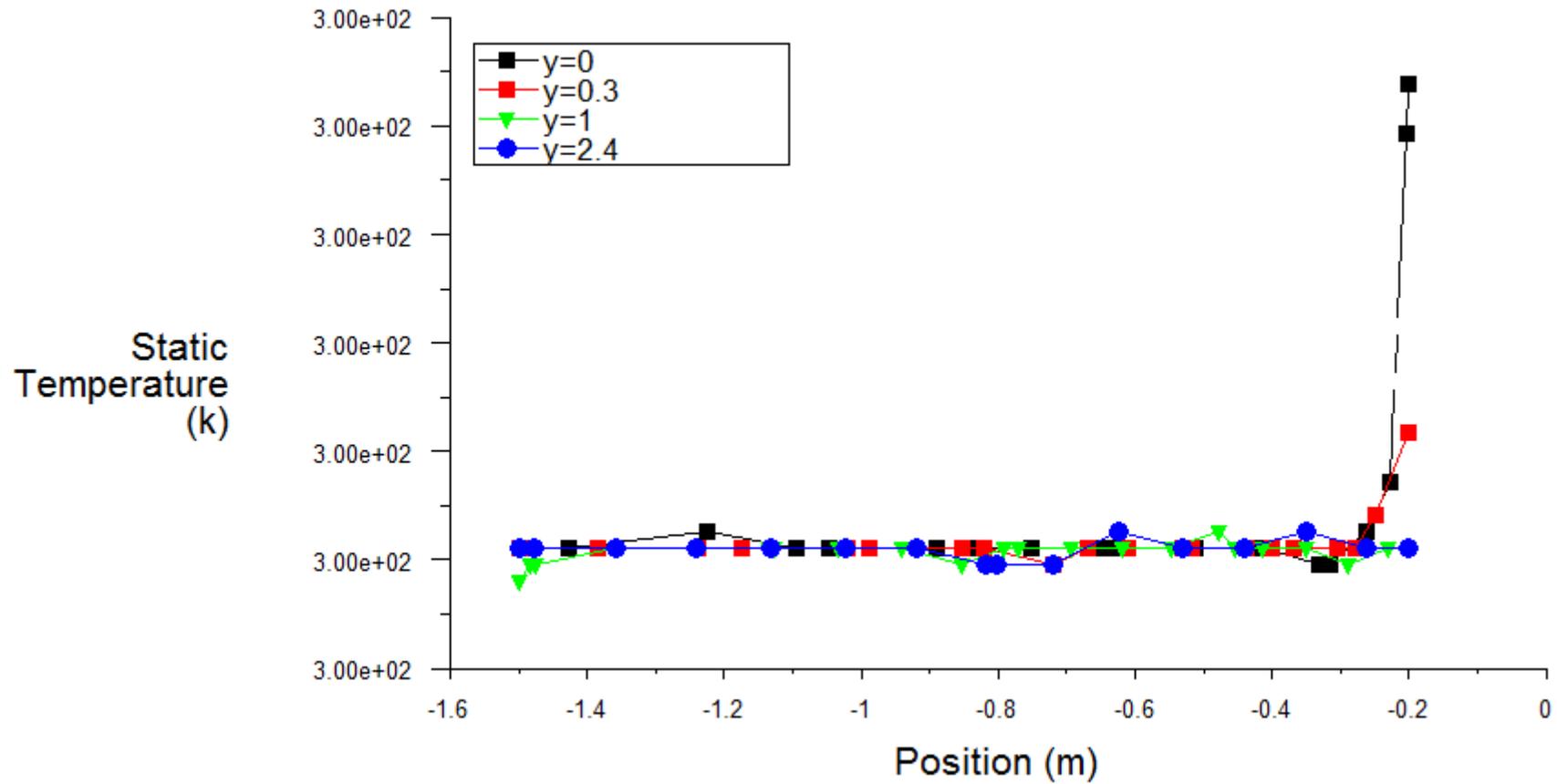


Fig.V-30: Variation de température en fonction de X, pour  $M_\infty = 3$

---

***CONCLUSION***  
***GENERALE***

---

## *Conclusion générale*

Dans ce travail, on a étudié numériquement l'écoulement potentiel, bidimensionnel et stationnaire autour d'un obstacle mince profilé pour les différents types d'écoulements (subsonique incompressible, subsonique compressible et transsonique).

Le premier travail effectué est de formuler mathématiquement le problème, en utilisant les équations de base pour un écoulement irrotationnel permanent, pour trouver une seule équation dans chaque cas d'écoulement. On a remarqué que l'équation est linéaire pour le cas de l'écoulement subsonique, et non linéaire pour le cas de l'écoulement transsonique.

Nous avons fixé un domaine d'étude qui présente une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, pour cela on a effectué le traitement numérique seulement sur l'Extrados. Puis on a discrétisé les équations gouvernantes du problème par la méthode des différences finies basé sur un schéma centré, pour les transformer à un système d'équations algébriques (linéaire ou non linéaire) dont les inconnues sont les perturbations du potentiel des vitesses produit par la forme du profil.

La résolution numérique de ce système d'équations algébriques fournit les caractéristiques de l'écoulement autour de l'obstacle choisit à chaque point du domaine de calcul et donne le maximum d'informations sur le comportement de fluide en écoulement.

Nous nous sommes principalement intéressés par la distribution de la perturbation autour de profil dans chaque cas de l'écoulement. L'étude a permis aussi de voir l'influence du nombre de Mach ( $M_\infty$ ) sur la perturbation. On a conclu que l'augmentation de ce dernier nombre augmente l'intensité de perturbation produit par le profil. Cette augmentation de perturbation produit l'augmentation de la vitesse de l'écoulement.

La détermination du nombre de Mach local est un problème important en aérodynamique à cause de l'importance de savoir le point critique du nombre de Mach pour la transition d'un régime à l'autre.

La distribution du coefficient de pression (qui traduit le rapport entre la variation de pression statique et la pression dynamique) autour de profil a été déterminée numériquement sur l'Extrados. Le traitement numérique montre que la variation passe de la valeur maximale au voisinage du bord d'attaque à une valeur minimale près de l'épaisseur relative maximale, puis elle croit d'une manière continue jusqu'au bord de fuite. Ceci explique l'influence du champ de vitesse sur le nombre adimensionnel de pression entrant en jeu.

On a remarqué que sur l'axe de symétrie ( $Y=0$ ) est plus précisément en amont du profil NACA, une légère augmentation de température ce qui explique le choc des particules causé par le point d'arrêt.

En fin, et après la comparaison les résultats obtenues dans notre travail avec les résultats trouvés par le solveur « Fluent v 6.3.26 », on peut dire que les résultats obtenues sont en concordances avec ceux trouvés par le solveur, Sauf le cas supersonique qu'on a pas eu assez de temps pour déterminer, la répartition de la perturbation  $\phi$ , c'est pour quoi on recommande nos collègues des prochaines promotions de traiter la partie restante.

## Références bibliographiques :

- 📖 [1] **A. Brima**, « Mécanique des fluides et Aérodynamique », cours de Master I, Département Génie mécanique, Université de Biskra, 2012-2013.
- 📖 [2] **ANDRE Fortin**, « Analyse numérique pour ingénieurs Editions de l'école polytechnique de Montréal, 2007.
- 📖 [3] **ANDRE Lallemand**, « Ecoulements monodimensionnels des fluides compressibles », Université de Lyon, France.
- 📖 [4] **BEDJEGHIT EL-Houas**, « Etude expérimentale et numérique d'un écoulement autour d'obstacles carré et cylindrique », Thèse université de Constantine, 2010.
- 📖 [5] **BELGHAR Nouredine**, « Analyse de l'influence du sillage engendré par l'aile sur les caractéristiques de la configuration infirmée : aile-fuselage-empennage », thèse université de Constantine, octobre 2011.
- 📖 [6] **BOUBEKRI Mahmoud**, « Ecoulement incompressible sur un objet solide sous la forme d'un ellipse », Thèse université de Constantine.
- 📖 [7] **C.A .J. Fletcher**, « Computational techniques for fluid dynamics », vol.1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- 📖 [8] **Cengel / Cimbala**, « Mécanique des fluides : Ecoulements Externes », Université de Québec, 2009.
- 📖 [9] **CHERRAD Adel Eddine**, « Etude de l'écoulement transsonique autour d'un obstacle », thèse université de Batna, 2012.
- 📖 [10] **DANIEL Cauvin**, « Aérodynamique, Mécanique du vol », Université Aéronautique Jean Mermoz, France, 1990.
- 📖 [11] **DAWEI Liu, YUANJING Wang, DEHUA Chen, XIN Peng and XING Xu**, « Numerical investigation on the Reynolds number effects of supercritical airfoil », Procedia Engineering Journal, pp 103-109, 2012.
- 📖 [12] **E. Carson Yates**, « Integral-equation methods in steady and unsteady subsonic, transonic and supersonic aerodynamics for interdisciplinary design », Engineering analysis with boundary elements, vol.12, pp 175-184, 1993.
- 📖 [13] **GEGOIRE Allaire**, « Analyse numérique et optimisation », Editions de l'Ecole polytechnique, Paris, 2005.

- [14] **HAMDI T.Hemdan and ABDULFATAH A.Selim**, « Supersonic flow past pointed-Nose thin airfoils », Journal of Acta Astronautica vol.26, N° 5, pp 317-323,1992.
- [15] **HUA Shan, LI Jiang and CHAOQUN Luis**, « Direct numerical solution of flow separation around a NACA 0012 airfoil », Journal of Computers & Fluids, vol.34, pp 1096-1114, 2004.
- [16] **INGEL Ryhming**, « Dynamique des fluides », Presses Polytechniques et universitaires Romandes, 2004.
- [17] **ION Paraschivoiu, MICHEL Prud'homme, LUC Robillard et PARTICK Vasseur**, « Mécanique des fluides », Presses internationales polytechnique, Ecole de Montréal, Canada, 2003.
- [18] **ION Paraschivoiu**, « Aérodynamique subsonique », Editions de l'école polytechnique de Montréal (Québec), Canada, 1998.
- [19] **J. Goodon Leishman**, « Principles of helicopter aerodynamics », presses Université de combridge, 2006.
- [20] **LEIFUR Leifsson and SLAWOMIR Kozeil**, Multi-fidelity design optimization of transonic airfoils using physics-based surrogate modeling and shape-preserving response prediction », Journal of Computational science, vol.1, pp 98-106, 2010.
- [21] **MARC Buffat**, « Cours de dynamique des gaz », université Claude Bernard, Lyon 1, 2007.
- [22] **MOHAMED Hafez and Essam Wahba**, « Simulations of viscous transonic flows over lifting airfoils and wings », Journal of Computers & Fluids, vol.36, pp 39-52, 2007.
- [23] **PASCAL Ardonceau**, « A nodel boundary elements formulatio application to the solution of the Laplace equation for irrotational flow », Comptes Rendus Mécanique-Journal, vol.337, pp 208-217, 2009.
- [24] **PIERRE Louis**, « Mécanique des fluides à masse volumique variable », Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1997.
- [25] **R.K. Zeytounian**, « Mécanique des fluides fondamentale », Université de Lille, France, 1991.
- [26] **RAYMOND Brun**, « Manuel du Mécanicien et du Thermicien », Editions Techip, Paris, 1977.
- [27] **RIADH Ben Hamouda**, « Notions de mécanique des fluides », Centre de publication universitaire, Tunis, 2008.
- [28] **SAMIR Khene**, « Mécanique des fluides », publications de l'université Badji Mokhtar, Annaba, 2000.

- 📖 [29] **STEPHANE Chausse**dent, «Statique et dynamique des fluides», université d'Angers, novembre 2011.
- 📖 [30] **W Ogana**, « Transonic integro-differential and integral equation with artificial viscosity », Engineering analysis with boundary elements, vol.6, N° 3, 1989.
- 📖 [31] **X. Carbonneau, J. Cazalbou, P. Chassaing et L. Joly** « Mécanique des fluides PC-PSI »Editions Bréal, 2005.

---

# ***ANNEXE***

---

## Annexe A :

### *Théorème de transport de Reynolds*

Considérons une grandeur scalaire fonction des coordonnées de l'espace et du temps :  $f(\vec{r}, t)$  sur le volume  $V_s$  d'un système de particules fluides l'intégration de  $f(\vec{r}, t)$  s'écrit:

$$F = \iiint_{V_s} f(\vec{r}, t) dV \quad (\text{A.1})$$

Si l'on souhaite évaluer les variations de  $F$  dans le temps, il nous faut calculer

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_s(t)} f(\vec{r}, t) dV \quad (\text{A.2})$$

Le problème est qu'ici  $V_s$  est une fonction du temps :

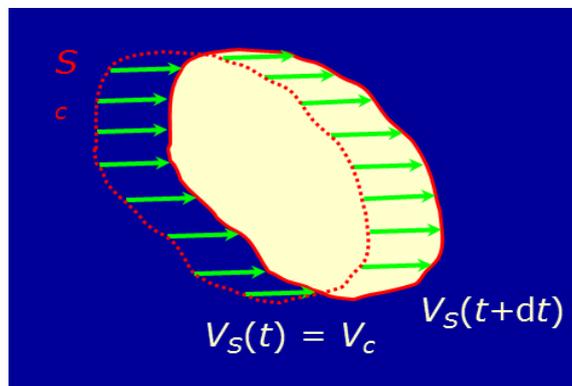
En effet, le système de particules fluides est en mouvement.

La parade consiste à utiliser un volume fixe (volume de contrôle), délimité par une surface  $S_c$  (surface de contrôle) à travers laquelle on pourra comptabiliser le flux de  $f$  :

$$\frac{dF}{dt} = \iiint_{V_s} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S_c} f \vec{V} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.3})$$

$\iiint_{V_s} \frac{\partial f}{\partial t} dV$  = dérivée locale, variation instantanée de  $f$  dans le volume de contrôle

$\iint_{S_c} f \vec{V} \cdot \vec{n} ds$  = dérivée convective, flux de  $f$  à travers la surface de contrôle.



**Fig.A.1:** Théorème de transport de Reynolds [29].

Prenons un exemple concret :  $f(\vec{r}, t) \equiv \rho(\vec{r}, t)$ , masse volumique d'un fluide.

Dans ce cas :

$$F = \iiint_{V_S} f(\vec{r}, t) dV \equiv \iiint_{V_S} \rho(\vec{r}, t) dV = M \quad (\text{A.4})$$

M : masse de  $V_S$

La variation de masse s'exprime donc comme :

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{V_C} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_C} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.5})$$

D'où :

$$\iiint_{V_C} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{variation de masse due aux variations instantanées de } \rho$$

$$\iint_{S_C} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \text{Variation de masse due au flux massique à travers la surface de contrôle.}$$

**Annexe B :*****Théorème d'Ostogradeski***

Le théorème d'Ostogradeski est une formule permettant de transformation d'une intégrale de surface en une intégrale de volume :

Soit un vecteur  $\vec{A}$ , le théorème d'ostogradeski s'écrit :

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV \quad (\text{B.1})$$

Prenons un exemple concret :  $\vec{A} = \rho \vec{V}$

Dans ce cas la formule d'ostogradeski s'écrit :

$$\iint_{S_c} (\rho \vec{V}) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) \, dV \quad (\text{B.2})$$

Il s'en suit :

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \iint_{S_c} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \iiint_{V_c} \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) \, dV \quad (\text{B.4})$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) \right) \, dV \quad (\text{B.5})$$

Avec ;  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V})$ : L'équation de continuité .

### Annexe C :

#### *Écriture particulière de l'équation d'énergie :*

Equation d'énergie peut être s'écrit :

$$Q - W = h_2 - h_1 + \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (\text{C.1})$$

Avec

$h_2 - h_1 = \Delta h$  ; la variation de l'enthalpie spécifique.

Si l'écoulement adiabatique ( $Q=0$ ), pas de travail avec l'extérieur ( $W=0$ ) et que l'on néglige la variation d'énergie potentielle ( $g(z_2 - z_1)=0$ ). On trouve

$$h_2 - h_1 + \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} = 0 \quad (\text{C.2})$$

D'autre ;part on a :  $h_2 - h_1 = Cp(T_2 - T_1)$

l'équation (C.1) devient alors :

$$cpT_1 + \frac{q_1^2}{2} = cpT_2 + \frac{q_2^2}{2} \quad (\text{C.3})$$

Comme :  $R = Cp - Cv$  ;  $y = \frac{Cp}{Cv}$

D'on a donc :  $R = Cp(1 - \frac{1}{y}) \Rightarrow Cp = R \cdot \frac{y}{y-1}$

On à :  $c = \sqrt{yRT}$  ;  $T = \frac{C^2}{yR}$

Alors l'équation d'énergie devient :

$$R \cdot \frac{y}{y-1} \cdot \frac{c_1}{yR} + \frac{q_1^2}{2} = R \cdot \frac{y}{y-1} \cdot \frac{c_2}{yR} + \frac{q_2^2}{2} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{c_1^2}{y-1} + \frac{q_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{y-1} + \frac{q_2^2}{2} \quad (\text{C.5})$$

$$\Leftrightarrow c_1^2 + \frac{y-1}{2} q_1^2 = c_2^2 + \frac{y-1}{2} q_2^2 \quad (\text{C.6})$$

Et, pour la vitesse à l'infini amont  $q_\infty$  et la vitesse du fluide au voisinage du profil on trouve :

$$U_\infty^2 + \frac{y-1}{2} q_\infty^2 = C^2 + \frac{y-1}{2} q^2 \quad (\text{C.7})$$

## Annexe D :

### *Types des équations aux dérivées partielles*

Soit une fonction  $\varphi$  de deux variables  $x, y$ .

Les équations aux dérivées partielles du second ordre s'écrivent :

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + E \frac{\partial \varphi}{\partial x} + F \frac{\partial \varphi}{\partial y} + G\varphi = 0 \quad (\mathbf{D.1})$$

Où  $A, B$  et  $C$  sont ne dépendent que de  $(x, y)$ .

Il ya trois types d'équation de dérivées partielles représentés par l'équation **(D.1)**

Selon la quantité  $\Delta = B^2 - 4AC$

- Si  $(\Delta < 0)$ , l'équation **(D.1)** est dite du type elliptique.
- Si  $(\Delta = 0)$ , l'équation **(D.1)** est dite de type parabolique.
- Si  $(\Delta > 0)$ , l'équation **(D.1)** est dite de type hyperbolique.

## *Annexe E :*

### *Présentation des logiciels Gambit et Fluent*

Le calcul numérique a été réalisé à l'aide du code de calcul « FLUENT v 6.3.26 », qui utilise la méthode des volumes finis. Avant de résoudre le problème il faut d'abord l'identifier par module de maillage « Gambit v 2.4.6 ». Dans ce qui suit, seront décrits la construction de la géométrie du domaine d'étude, la génération de son maillage ainsi que l'incorporation des conditions aux limites telles qu'elles ont été élaborées dans le mailleur « Gambit v 2.4.6 » et le solveur « FLUENT v 6.3.26 ».

#### *E.1. Le pré processeur Gambit :*

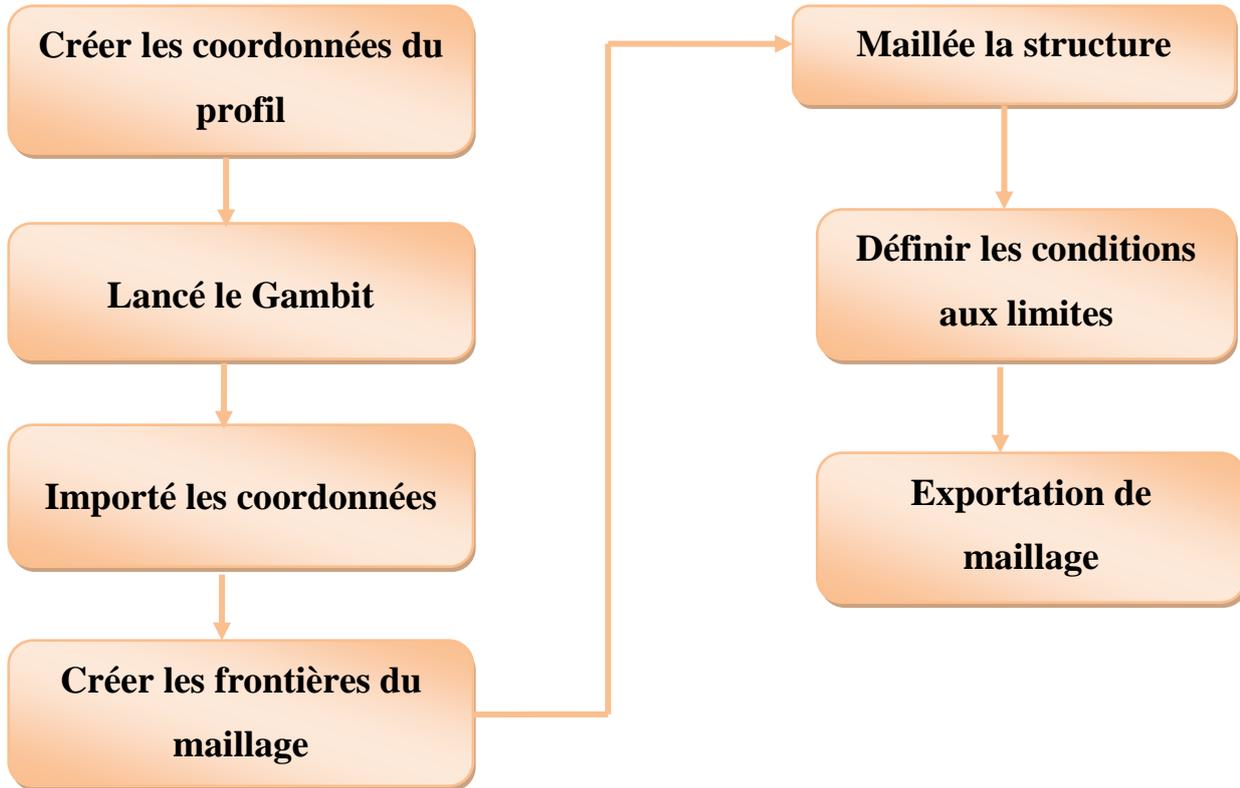
C'est un pré processeur intègre pour l'analyse en CFD (Computational fluid dynamics), il est utilisé pour construire une géométrie et générer son maillage (structuré ou non structuré, en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou axisymétriques), il peut réaliser des maillages complexe en deux ou trois dimensions avec des maillages rectangulaires ou triangulaires.

Les options de génération de maillage de Gambit proposent une flexibilité de choix. On peut décomposer la géométrie en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon Gambit génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite.

Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites.

##### *E.1.1. Le procédé de création de la géométrie dans le GAMBIT :*

La façon de création de la géométrie d'un profil d'aile dans notre travail par le pré processeur Gambit peut être vu sur la figure (E.1).



**Fig.E.1:** Le processus de génération d'un maillage dans le GAMBIT.

#### *E.1.1.1. Les étapes de génération de maillage :*

Puisque la géométrie d'aile est définie par un ensemble de points, La géométrie du profil est définie par une centaine de points pour l'extrados. La liste des coordonnées a été dérivée par l'équation de la géométrie du profil symétrique de type « NACA 0006 » programmées dans Matlab, Les coordonnées étant définies, ils doivent être dénombrés dans un document de texte.

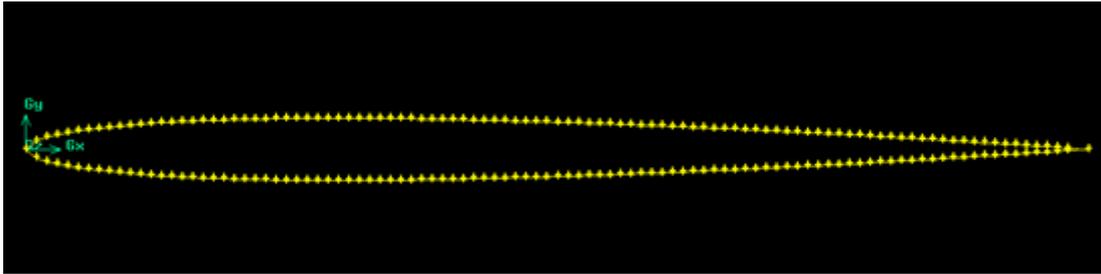
#### *E.1.1.2. Créer la géométrie du profil :*

Une fois que le GAMBIT est ouvert, on choisit le type de **Solver**, c'est-à-dire le type de logiciel (ici FLUENT v 6.3.26).

Le document doit maintenant importer les coordonnées dans le GAMBIT. Ceci est fait en choisissant :

**file > Import > ICEM imput...**

La figure suivante présente les points du profil de type NACA0006 sur la fenêtre du Gambit.



**Fig.E.1:** la géométrie du profil importé.

### *E.1.1.3. Créer les frontières du maillage :*

La géométrie externe de maillage doit maintenant être créée. Ceci est fait en choisissant le bouton Vertex, comme suit.

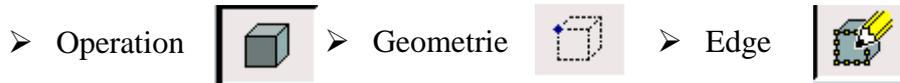


Puis, on usité les points suivants :

points	coordonées
<b>A</b>	<b>(1, 11.5, 0)</b>
<b>B</b>	<b>(12, 11.5, 0)</b>
<b>C</b>	<b>(12, 0, 0)</b>
<b>D</b>	<b>(12, -11.5, 0)</b>
<b>E</b>	<b>(1, -11.5, 0)</b>
<b>F</b>	<b>(-10.5, 0, 0)</b>

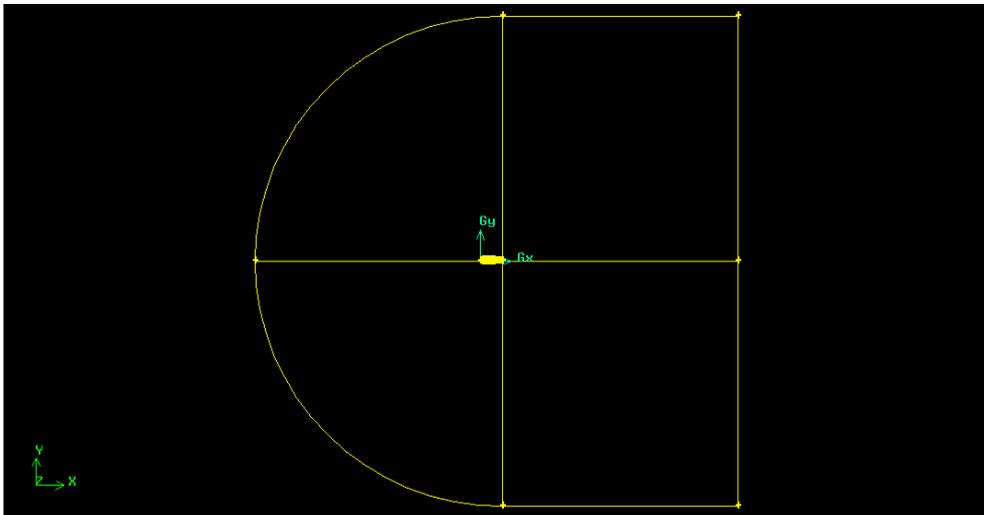
Ces points doivent maintenant être reliés pour créer la structure qui doit être formée.

On commence par sélectionner le bouton :



- Interpolation des vertex par une courbe de type **NURBS**, pour les point du profil.
- les points après le bord de fuite sont reliés de type **Straight**.
- Les points avant le bord de fuite sont reliés de type **Arc**.

On obtient la figure suivante :



**Fig.E.2:** les frontières du maillage.

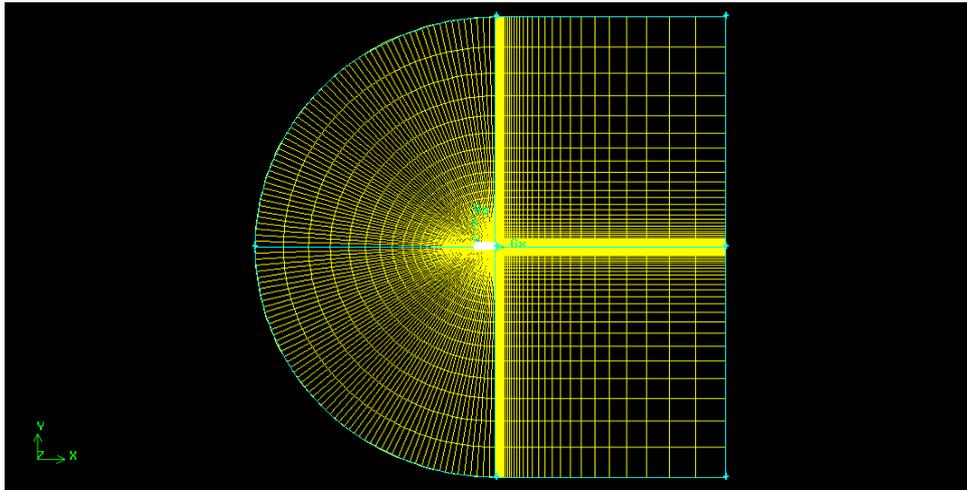
#### ***E.1.1.4. Création de maillage :***

On commence par sélectionner les boutons **Mesh**, et on utilise les divisions ci-dessous :



- **Interval Count ( spacing : 50 ); ratio : 1.15**, pour les lignes de type **Straight** .
- **Interval Count ( spacing : 60 ); ratio : 1**, pour les lignes de type **Arc**.

On obtien la figure suivante :

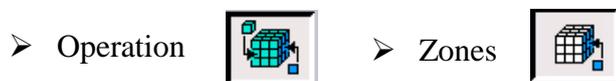


**Fig.E.3:** représentation du maillage complet.

### ***E.1.1.5. Spécification des conditions aux limites:***

Maintenant on peut définir les conditions aux limites puisque le maillage est complet.

Ceci est fait en choisissant :



On choisit le type de chaque partie du domaine d'étude comme suit :

- Le profil est de type **WALL** (mur ou paroi solide).
- les lignes avants le profil sont de type **Pressure-far-field** (la Pression loin du champ).
- La ligne après le profil est de type **Pressure-outlet**.

### ***E.1.1.6. Exportation du maillage produit par GAMBIT :***

Une fois que la géométrie a été créée, que les conditions aux limites ont été définies, on exporte le maillage. Ceci est fait en choisissant **file > Export > Mesh**, pour que le FLUENT soit capable de lire et de l'utiliser.

## ***E.2. Le code Fluent :***

FLUENT est un logiciel informatique de la mécanique du fluide dynamique (CFD) pour simuler les problèmes d'écoulement de fluide et du transfert de chaleur dans des géométries complexes. Il présente une grande flexibilité des résultats et une adaptation avec n'importe quel type de maillage. Il emploie la méthode du volume fini pour résoudre les équations régissant un écoulement de fluide. Il fournit les possibilités d'étudier différents types d'écoulements physiques tels qu'incompressibles ou compressibles, non visqueux ou visqueux, laminaires ou turbulents, etc....

Le traitement des données à l'aide de « Fluent v 6.3.26 » se fait principalement grâce aux menus suivants :

- **file** : pour les opérations concernant les fichiers (lecture, sauvegarde, importation... etc.)
- **Grid** : pour la vérification et la manipulation du maillage et de la géométrie.
- **Define** : pour définir les phénomènes physiques, les matériaux et les conditions aux limites.
- **Solve** : pour choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisations, les facteurs de sous relaxation, les critères de convergence et pour initialiser et procéder au calcul.
- **Adapt** : pour l'adaptation du maillage selon plusieurs paramètres.
- **Surface** : pour créer des points, des lignes et des plans nécessaires à l'affichage des résultats.
- **Display et Plot** : pour l'exploitation des résultats.
- **Report** : pour afficher des rapports contenant les détails du problème traité.
- **Parallel** : pour le calcul parallèle.
- **Help** : pour l'exploitation du contenu du code.

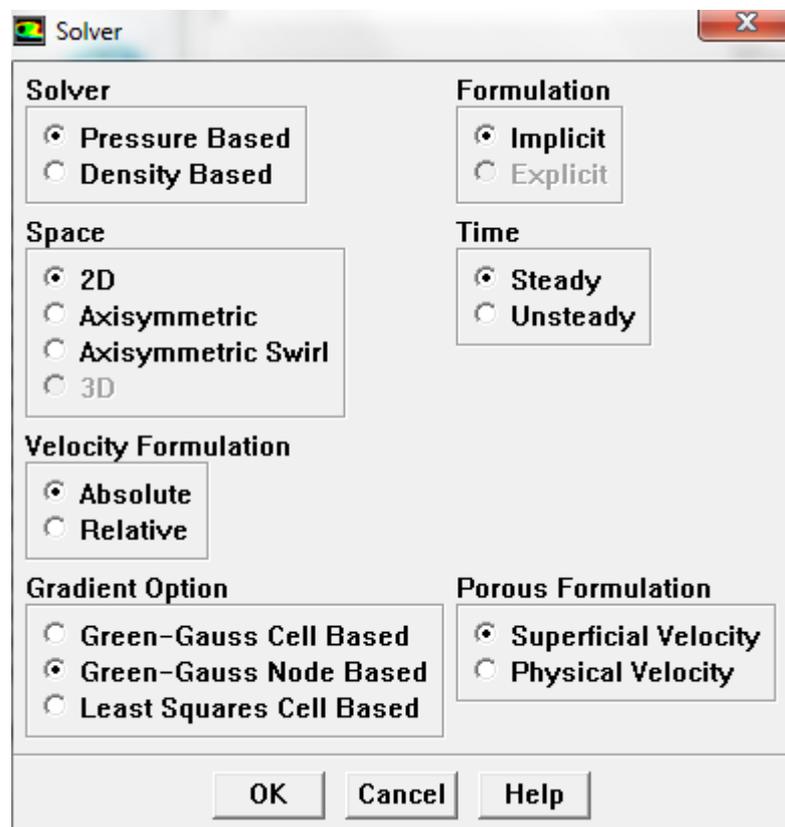
### E.2.1. Définir le modèle de solution :

#### Define > models > solver ...

Les possibilités offertes sur « Fluent » pour définir le type du solveur sont : Coupled-Implicit, Coupled-Explicit, ou Segregated-Implicite.

- La formulation « **Segregated** » c à d isolée (Implicite).
- La formulation « **Coupled** » c à d couplée (Implicite ou Explicite).

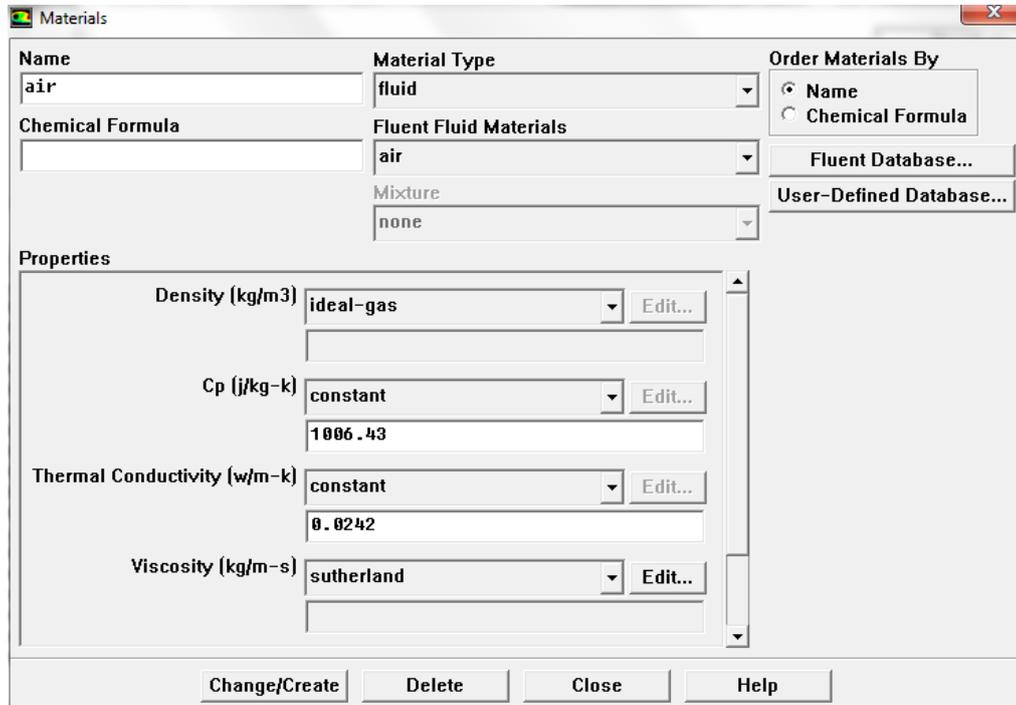
Dans ce travail on a choisir la formulation « **Coupled-Implicite** » par ce que ce mode a été conçu principalement pour les écoulements compressibles à grandes vitesses (Mach élevés) cette formulation est fortement recommandée pour les écoulements transsoniques, En général, le solveur : « **Coupled-Implicit** » est recommandé par rapport au « solveur : **Coupled -Explicit** ». En gros, il est à noter que le temps nécessaire pour le solveur : « **Coupled-Implicit** » est deux fois plus rapide et il nécessite une capacité mémoire deux fois plus que celle du solveur : « **Coupled-Explicit** ».



### E.2.2. Définir la matière :

#### Define > Materiels...

Dans notre cas, on va étudier l'air et le supposer comme un gaz idéal



### E.2.3. Schéma de discrétisation :

Quand la formulation « **coupled** » est utilisée, les équations sont résolues en utilisant par défaut le schéma **upwind second ordre**.

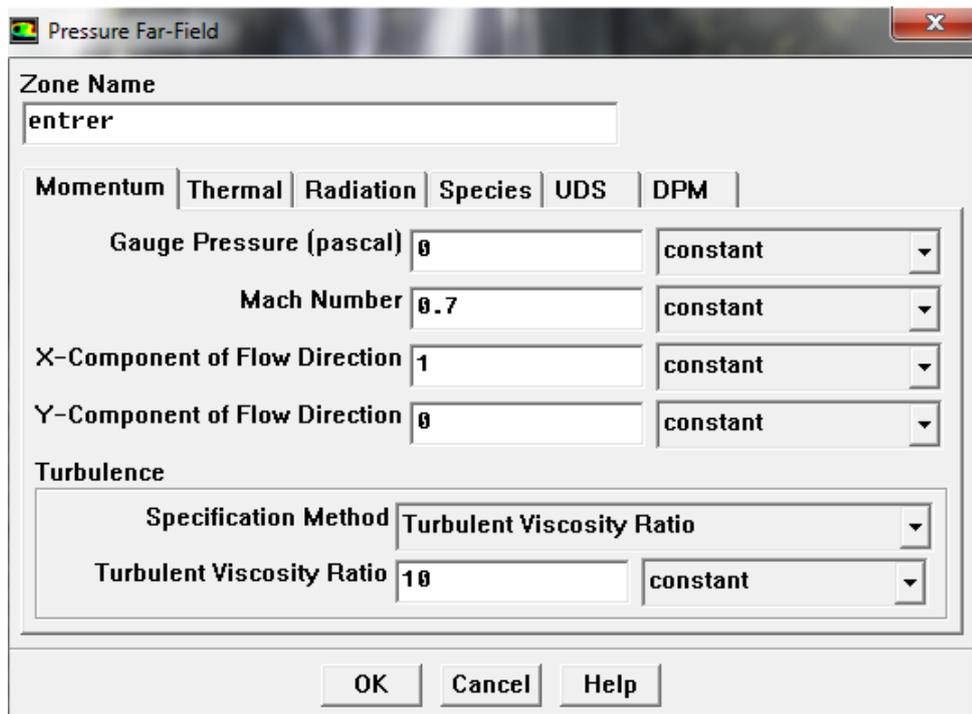
### E.2.4. Schéma de discrétisation :

La procédure d'itération nécessite que toutes les variables soient initialisées avant le Démarrage du calcul. Une initialisation "réaliste" améliore la stabilité et la vitesse de convergence.

### E.2.5. Définir les conditions de fonctionnement

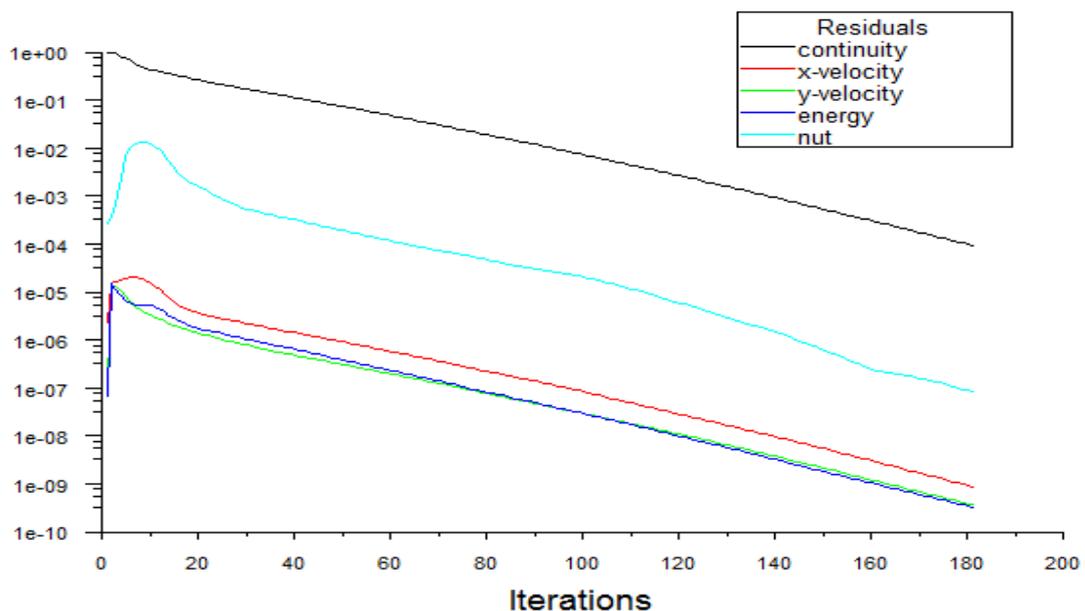
Le paramètre joue un rôle dans notre travail est le nombre de Mach, on peut changer

ce nombre à partir : **Define > Boundary conditions ...**



### *E.2.6. La convergence :*

A la convergence, Toutes les équations de conservation discrétisées (quantité de mouvement, énergie, etc.), se conforment dans chaque cellule à une tolérance spécifiée. Le Suivi de la convergence se fait avec les résidus. En général, une décroissance d'un ordre  $10^{-3}$  la convergence atteinte pour la plus part de cas de nombre de Mach à une valeur d'ordre 181 :











```

108 continue
    F(1000)=x(999)+A1*x(960)-2*B*x(1000)
        RETURN
        END
cccccccccccccccccccc subroutine VIT (X,C) ccccccccccccccccccccccccccccccccc
    SUBROUTINE VIT(X,C)
        DIMENSION X (1200),C(1200)

c
        DO 49 k=2,14
            C(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
49        CONTINUE
c
        DO 50 k=15,25
            C(k)=((1.+5.*X(k+1)-X(k-1))**2+(0.0120*(+0.5*1.74779155*
                +(0.1*(k-14.5))**(-0.5)-0.624424+2.
                +*(-1.727016)*(0.1*(k-14.5))+3.*1.384087*(0.1*(k-14.5))**2+4.
                +*(-0.489769)*(0.1*(k-14.5))**3)**2)**0.5
50    CONTINUE
c
        DO 51 k=26,39
            C(k)=(1.+5.*(X(k+1)-X(k-1)))
51    CONTINUE
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    do 77 i=0,22
        NG=42+(40*i)
        ND=ng+37
        do 88 k=ng,nd
            C(k)=((1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))**2
                ++5.*(X(k+40)-X(k-40))**2)**0.5
88        continue
77    continue
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
    DO 53 k=962,999
        C(k)=(1.+5.*(X(k+1)-X(k-1)))
53    CONTINUE
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    write(7,*) ('***** vitesse *****')
        do 2 i=0,24
            do 1 j=(i*40+2),(39+i*40)
                WRITE(7,*) C(j)
1    CONTINUE
            write(7,*) ('*****')
2    continue
C
        RETURN
        END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    subroutine MACH (X,R1,R2) ccccccccccccccccccccccccccccccccc
        subroutine Mach (X,R1,R2)
            dimension X(1000),R1(1000),R2(1000)
            real,parameter::Minf=0.1

c
            do 1 k=2,14
                R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
                R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2))**0.5
1            continue
c

```

```

DO 2 k=15,25
R1(k)=((1.+5.*X(k+1)-X(k-1))**2+(+0.0120*(+0.5*1.74779155*
+(0.1*(k-14.5))**(-0.5)-0.624424+2.
+*(-1.727016)*(0.1*(k-14.5))+3.*1.384087*(0.1*(k-14.5))**2+4.
+*(-0.489769)*(0.1*(k-14.5))**3)**2)**0.5
R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
2 CONTINUE
c

DO 3 k=26,39
R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
3 CONTINUE
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do 77 i=0,22
NG=42+(40*i)
ND=ng+37
do 88 k=ng,nd
R1(k)=((1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))**2
++5.*(X(k+40)-X(k-40))**2)**0.5
R2(k)=R1(k)/(1./Minf**2+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
88 continue
77 continue
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
do 6 k=962,999
R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
R2(k)=R1(k)/(1./Minf**2+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
6 continue
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
write(8,*) ('***** Mach *****')
do 22 i=0,24
do 11 j=(i*40+2),(38+i*40)
WRITE(8,*) R2(j)*Minf
11 CONTINUE
write(8,*) ('*****')
22 continue
RETURN
END

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
subroutine cp(x,g)
dimension X(1000),gG(1000)
c
do 1 k=2,39
gG(k)=-10.*(X(k+1)-X(k-1))
1 continue
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do 77 i=0,23
NG=42+(40*i)
ND=ng+37
do 88 k=ng,nd
gG(k)=-10.*(X(k+1)-X(k-1))
88 continue
77 continue
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c

```



```

+(0.1*(k-14.5))**(-0.5)-0.624424+2.
+*(-1.727016)*(0.1*(k-14.5))+3.*1.384087*(0.1*(k-14.5))**2+4.
+*(-0.489769)*(0.1*(k-14.5))**3)
50 CONTINUE
C
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do 77 i=0,22
      NG=42+(40*i)
      ND=ng+37
      do 88 k=ng,nd
        V2(k)=5.*(X(k+40)-X(k-40))
88      continue
77 continue
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
write(11,*) ('***** V *****')
      do 13 i=0,23
do 12 j=(15+40*i),(25+40*i)
Write(11,*) V2(j)
12 continue
WRITE(11,*) ('*****')
13 continue

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      RETURN
      END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
subroutine Temp (X,R1,R2,T1) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
subroutine Temp (X,R1,R2,T1)
dimension X(1000),R1(1000),R2(1000),T1(1000)
real,parameter::Minf=0.1
c
do 1 k=2,14
R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))**0.5
T1(k)=1./(1.+0.2*(R2(k)**2))
1 continue
c
DO 2 k=15,25
R1(k)=((1.+5.*X(k+1)-X(k-1))**2+(+0.0120*(+0.5*1.74779155*
+(0.1*(k-14.5))**(-0.5)-0.624424+2.
+*(-1.727016)*(0.1*(k-14.5))+3.*1.384087*(0.1*(k-14.5))**2+4.
+*(-0.489769)*(0.1*(k-14.5))**3)**2)**0.5
R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))**0.5
T1(k)=1./(1.+0.2*(R2(k)**2))
2 CONTINUE
c
DO 3 k=26,39
R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
R2(k)=R1(k)/((1./(Minf**2))+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))**0.5
T1(k)=1./(1.+0.2*(R2(k)**2))
3 CONTINUE
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do 77 i=0,22
      NG=42+(40*i)
      ND=ng+37
      do 88 k=ng,nd
        R1(k)=((1.+5.*(X(k+1)-X(k-1)))**2
+5.*(X(k+40)-X(k-40))**2)**0.5

```

```

      R2(k)=R1(k)/(1./Minf**2+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
      T1(k)=1./(1.+0.2*(R2(k)**2))
88      continue
77      continue
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
  do 6 k=962,999
      R1(k)=1.+5.*(X(k+1)-X(k-1))
      R2(k)=R1(k)/(1./Minf**2+ 0.2*(1.-(R1(k)**2)))*0.5
      T1(k)=1./(1.+0.2*(R2(k)**2))
6      continue
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
  write(12,*) ('***** Température *****')
      do 22 i=0,24
  do 11 j=(i*40+2),(38+i*40)
      WRITE(12,*) T1(j)
11      CONTINUE
  write(12,*) ('*****')
22      continue
RETURN
      END
```

## Annexe G :

## Quelques résultats

Pour  $M_\infty = 0.1$  ( $Y=0$ ) ; DELTA= 0.003 ; XTOL=0.000001 ; FTOL= 0.01;

$\phi^*$	$U/U_0$	Mach	$T/T_0$
-4.770088E-04	9.950356E-01	9.948494E-02	9.928289E-01
-9.665107E-04	9.948494E-01	9.945624E-02	9.917629E-01
-1.469883E-03	9.945623E-01	9.941559E-02	9.902411E-01
-1.996637E-03	9.941559E-01	9.935965E-02	9.879657E-01
-2.557423E-03	9.935964E-01	9.928289E-02	9.843035E-01
-3.165453E-03	9.928289E-01	9.917630E-02	9.776733E-01
-3.838138E-03	9.917629E-01	9.902411E-02	9.633285E-01
-4.599667E-03	9.902411E-01	9.879657E-02	9.242327E-01
-5.485551E-03	9.902411E-01	9.879657E-02	9.242327E-01
-6.551459E-03	9.879657E-01	9.843035E-02	9.116670E-01
-7.892405E-03	9.843035E-01	9.776733E-02	9.605543E-01
-9.690760E-03	9.776733E-01	9.633285E-02	9.911057E-01
-1.235775E-02	9.633285E-01	9.242327E-02	1.015960
-1.702506E-02	9.633285E-01	9.242327E-02	1.036473
-2.751121E-02	9.242327E-01	9.116670E-02	1.052932
-2.122555E-02	9.789976E-01	9.605543E-02	1.052932
-1.341299E-02	1.070491	9.911057E-02	1.065344
-6.027449E-03	1.075990	1.015960E-01	1.073336
5.093120E-04	1.069612	1.036473E-01	1.075650
6.088417E-03	1.060579	1.052932E-01	1.068676
1.068581E-02	1.050882	1.065344E-01	1.041148
1.428217E-02	1.050882	1.065344E-01	1.041148
1.679786E-02	1.040969	1.073336E-01	9.602861E-01
1.797746E-02	1.030560	1.075650E-01	9.782280E-01
1.708292E-02	1.030560	1.075650E-01	9.782280E-01
1.180871E-02	1.018476	1.068676E-01	9.854892E-01
9.140144E-03	1.001425	1.041148E-01	9.891753E-01
7.454309E-03	9.691563E-01	9.602861E-02	9.913687E-01
6.237986E-03	9.602861E-01	9.782280E-02	9.928097E-01
5.289358E-03	9.782280E-01	9.854892E-02	9.938154E-01
4.511723E-03	9.854892E-01	9.891753E-02	9.945442E-01
3.851282E-03	9.891753E-01	9.913687E-02	9.950839E-01
3.274800E-03	9.913687E-01	9.928097E-02	9.954860E-01
2.760126E-03	9.928097E-01	9.938154E-02	9.957811E-01
2.291569E-03	9.928097E-01	9.938154E-02	9.957811E-01
1.857332E-03	9.938154E-01	9.945443E-02	9.959819E-01
1.447790E-03	9.945442E-01	9.950839E-02	9.960726E-01
1.053704E-03	9.950839E-01	9.954860E-02	9.959472E-01
6.623192E-04	9.954860E-01	9.957811E-02	9.959392E-02
2.431530E-04	9.957811E-01	9.959819E-02	9.980208E-01

Pour  $M_\infty = 0.6$  ( $Y=0$ ) ; DELTA= 0.0005 ; XTOL=0.0000001 ; FTOL= 0.001;

----- $\phi^*$ -----	----- U/U <sub>0</sub> -----	----- Mach -----	----- T/T <sub>0</sub> -----
-4.170409E-04	9.932653E-01	5.960518E-01	9.910806E-01
-1.112458E-03	9.934196E-01	5.959021E-01	9.897636E-01
-1.763963E-03	9.931701E-01	5.956223E-01	9.878859E-01
-2.428535E-03	9.927037E-01	5.952153E-01	9.850916E-01
-3.129935E-03	9.920253E-01	5.946484E-01	9.806283E-01
-3.887770E-03	9.910805E-01	5.938582E-01	9.725942E-01
-4.724858E-03	9.897636E-01	5.927315E-01	9.548714E-01
-5.671655E-03	9.878858E-01	5.910550E-01	9.018304E-01
-6.772134E-03	9.850915E-01	5.883770E-01	8.890944E-01
-8.094477E-03	9.806281E-01	5.835565E-01	9.516009E-01
-9.753807E-03	9.725940E-01	5.729228E-01	9.892666E-01
-1.196882E-02	9.548711E-01	5.410983E-01	1.020053
-1.523497E-02	9.018300E-01	5.334567E-01	1.045512
-2.099455E-02	9.722832E-01	5.709606E-01	1.065953
-3.486888E-02	1.090968	5.935600E-01	1.081391
-2.653787E-02	1.095401	6.120318E-01	1.091385
-1.667541E-02	1.086754	6.273074E-01	1.094432
-7.457743E-03	1.075340	6.395720E-01	1.086030
6.754449E-04	1.063240	6.488345E-01	1.050398
7.610264E-03	1.050928	6.548308E-01	9.494010E-01
1.332342E-02	1.038059	6.566589E-01	9.731904E-01
1.779590E-02	1.023204	6.516179E-01	9.821280E-01
2.093518E-02	1.002231	6.302390E-01	9.866197E-01
2.243673E-02	9.605705E-01	5.696406E-01	9.893120E-01
2.138125E-02	9.494011E-01	5.839142E-01	9.910941E-01
1.455078E-02	9.731904E-01	5.892769E-01	9.923450E-01
1.126146E-02	9.821281E-01	5.919719E-01	9.932553E-01
9.188851E-03	9.866197E-01	5.935872E-01	9.939315E-01
7.687060E-03	9.893121E-01	5.946565E-01	9.944367E-01
6.512788E-03	9.893121E-01	5.94070E-01	9.948076E-01
5.549461E-03	9.910942E-01	5.954070E-01	9.950582E-01
4.731610E-03	9.923450E-01	5.959532E-01	9.950582E-01
4.018459E-03	9.923450E-01	5.963590E-01	9.951606E-01
3.382670E-03	9.932553E-01	5.966620E-01	9.949183E-01
2.804770E-03	9.939316E-01	5.966620E-01	9.949183E-01
2.270022E-03	9.944368E-01	5.968846E-01	5.967333E-01
1.766290E-03	9.948076E-01	5.970350E-01	9.335315E-01
1.281667E-03			
7.984139E-04			
2.653400E-04			

## Résumé:

Le travail consiste à étudier théoriquement l'écoulement via un obstacle mince (méthode numérique + solveur Fluent). Notre attention sera principalement portée sur le problème de la description d'un écoulement parallèle et homogène. Dans ce contexte et pour le cas d'un écoulement irrotationnel, un potentiel perturbé  $\phi$  du à la présence de l'obstacle sera introduit. La formulation mathématique du problème conduira pour différents nombres de Mach à des équations différentielles (linéaires ou non linéaires) à résoudre. La solution trouvée pour chaque intervalle de nombre de Mach permettra de bien comprendre le comportement de l'écoulement dans le domaine d'étude choisi.

**Mots clés:** Etude numérique, Théorie de petite perturbation, Obstacle mince, Nombre de Mach.

---

## ملخص:

يهتم الموضوع بدراسة نظرية (طريقة عددية + برنامج Fluent) لجريان مار عبر جسم انسيابي. حيث ينصب اهتمامنا أساساً حول دراسة وتعريف الجريان المتوازي والمتجانس. في نفس السياق وفي حالة الجريان اللادوار، أخذنا بعين الاعتبار وجود كمون السرعة  $\phi$  الناتج عن وجود العائق أو الجسم الإنسيابي. ان التمثيل الرياضي للمسألة تحت مختلف أعداد Mach يعبر عنه بمعادلات تفاضلية للمشتقات الجزئية (خطية وغير خطية) المراد حلها. ان حل المعادلات السابقة الذكر، تسمح بالفهم الجيد لسلوك الجريان في مجال الدراسة.

**الكلمات المفتاحية:** دراسة عددية، نظرية الاضطرابات الصغيرة، جسم إنسيابي، عدد Mach.

---

## Abstract:

The work allows to studying theoretically (numerical method + solver Fluent) the flow around the profile. Our attention will be principally taken on the description of the parallel and homogeneous flow. In the same context and in the case of the potential flow, we will take the perturbed function  $\phi$  caused by the presence of the profile. The mathematical formulation of the problem gives for different Mach number several forms of differential equations as (linear or non linear). The solution found for each Mach number interval allows a good understanding of the flow behaviors inside the study field.

**Key words :** Numerical study, Small perturbation theory, Thin obstacle, Mach number.