

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat LMD en Génie Civil**

**Spécialité : Modélisation numérique en génie civil**

---

## Éléments Finis pour l'Analyse des Structures Sandwichs

---

Présentée par :  
**Mohamed Ouejdi BELARBI**

Soutenue publiquement le 14 Juin 2015

**Devant le jury composé de :**

Dr. Benmebarek Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. Tati Abdelouahab	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. Guenfoud Mohamed	Professeur	Examineur	Université de Guelma
Dr. Belounar Lamine	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. Hamadi Fodil	Professeur	Examineur	Université de Bechar



# DEDICACE

**J**e dédie ce travail à la

mémoire de mon père, mon exemple, bien aimé, qu'Allah ait son âme pour tous  
ce qu'il m'a donné et appris spécialement la patience et l'amour de la science.

Et ma mère pour son soutien et pour ce qu'elle est.

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'exprime mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur **Abdelouahab TATI**, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a encadré durant la période de la thèse avec grande patience et bonne humeur. Son assistance, sa disponibilité, les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et enfin la confiance qu'il m'a toujours témoigné, m'ont été d'un grand secours pour l'accomplissement de ce travail. Je lui en suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur Sadok BENMEBAREK, Professeur à l'Université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur Mohamed GUENFOUD, Professeur à l'Université de Guelma, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- Monsieur Lamine BELOUNAR, Professeur à l'Université de Biskra, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.
- Monsieur Fodil HAMADI, Professeur à l'Université de Bechar, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à le remercier pour son extrême gentillesse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements aux enseignants du département de Génie Civil de l'Université de Biskra, notamment le Professeur A. Ounis et le Docteur A. ZAATER, qui m'ont soutenu et aidé durant cette période, ainsi que leurs conseils fructueux.

Je tiens aussi à remercier en particulier mon collègue de travail: H. Ounis pour son soutien moral et scientifique durant notre parcours doctoral.

# Publications

En plus de cette thèse de doctorat, ces travaux ont conduit aux publications et communications suivantes:

## ❖ Publications internationales

1. **M. O. Belarbi**, A. Tati, (*In press*), "A new  $C^0$  finite element model for the analysis of sandwich plates using combined theories" International Journal of Structural Engineering.
2. **M. O. Belarbi**, A. Tati, "Bending analysis of composite sandwich plates with laminated face sheets: new finite element formulation". *Accepted Manuscript*, Journal of Solid Mechanics.
3. **M. O. Belarbi**, A. Tati, H. Ounis and A. Benchabane, "Development of a 2D isoparametric finite element model based on the layerwise approach for the bending analysis of sandwich plates" *Submitted to Structural Engineering and Mechanics*, 2014.
4. A. Tati, **M. O. Belarbi**, " A  $C^0$  rectangular element model for sandwich plates analysis using combined theories " *Submitted to Measurement journal*, 2014.
5. **M. O. Belarbi**, A. Tati, " A new  $C^0$  quadrilateral finite element model based on layerwise approach for the analysis of laminated composite and sandwich plates: Bending and free vibration ", 2015 (*To be submitted*).
6. **M. O. Belarbi**, A. Tati, " Free vibration analysis of laminate-faced sandwich plate by a new layerwise finite element formulation", 2015 (*To be submitted*).

## ❖ Communications internationales

7. **M. O. Belarbi**, A. Tati, "Étude du flambement des poutres sandwich par éléments finis" Congrès Algérien de Mécanique (CAM), 25-28 novembre 2013, Mascara-Algérie.

8. **M. O. Belarbi**, A. Tati, A. Khechai, "Efficient layerwise finite element model for multilayer sandwich plates analysis" Sixth International Congress on Design and Modeling of Mechanical Systems (CMSM'2015), Tunisia, March 23-25, 2015, Springer. pp 305-314, DOI: 10.1007/978-3-319-17527-0\_30
9. A. Khechai, A. Tati, **M. O. Belarbi**, Abdelhamid Guettala, " Finite element analysis of stress concentrations in isotropic and composite plates with elliptical holes " Sixth International Congress on Design and Modeling of Mechanical Systems (CMSM'2015), Tunisia, March 23-25, 2015, Springer. pp 427-436, DOI: 10.1007/978-3-319-17527-0\_43

❖ **Communications nationales**

10. **M. O. Belarbi**, A. Tati, H. Ounis, "Finite Element for the Analysis of Sandwich Plates in Bending" JEMGM II, 22 et 23 Avril 2014, Biskra-Algeria.
11. H. Ounis, A. Tati, **M. O. Belarbi**, " Thermal buckling behavior of laminated plates with cut-outs" JEMGM II, 22 et 23 Avril 2014, Biskra-Algeria.
12. **M. O. Belarbi**, A. Tati, H. Ounis, "Étude numérique du flambage des poutres isotropes et des poutres anisotropes" JEGM 29 avril 2013, Biskra-Algérie.
13. **M. O. Belarbi**, A. Tati, "Étude du Flambement des Poutres Sandwichs par MEF' JEMGM' 2013, Biskra-Algérie.
14. H. Ounis, A. Tati, **M. O. Belarbi**, "Flambement thermique des plaques isotropes et composite stratifiées" JEGM 29 avril 2013, Biskra-Algérie.

# Résumé

Dans l'analyse des structures composites et notamment les structures sandwichs, la détermination des déplacements et des contraintes interlaminaires aux interfaces requiert des théories et des modèles d'éléments finis raffinés, capables de donner une meilleure description aux réponses locales. Pour des raisons de coûts élevés en terme de mémoire et de temps de calcul dans le cas des approches tridimensionnelles, les approches bidimensionnelles de type layerwise ont été développées et ont été bien appliquées pour l'analyse des structures composites sandwichs. Cependant, ces approches requièrent un temps de calcul relativement long lorsqu'il s'agit d'un grand nombre de couches.

Dans ce travail de thèse, un nouveau modèle de type layerwise a été développé pour l'analyse du comportement des plaques composites multicouches et notamment les plaques sandwichs. Contrairement à tous les autres modèles layerwise présentés dans la littérature, le nombre de degrés de liberté dans le présent modèle est indépendant du nombre de couches. Le modèle proposé est issu d'une combinaison de deux théories, où la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est adoptée pour modéliser les deux peaux, tandis que l'âme est modélisée en utilisant une théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre. Ces deux théories combinées, satisfont les exigences de continuité des déplacements interlaminaires ainsi que les conditions de compatibilité. Le nouveau modèle permet de calculer les contraintes de cisaillement transversal d'une manière précise sans recours à des facteurs de correction.

Sur la base du modèle proposé, deux éléments finis ont été développés pour l'analyse statique et dynamique des plaques composites stratifiées et sandwichs. Ces éléments sont géométriquement simples et ne possèdent que quatre nœuds et treize degrés de liberté par nœud. La comparaison des résultats obtenus avec des solutions de références, déterminés analytiquement, et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature, a montré la performance et la précision du modèle proposé. Par ailleurs, une étude paramétrique a également été menée pour mettre en évidence l'effet de certains paramètres, sur les comportements de flexion et de vibration des plaques sandwichs multicouches.

## **Mots clés:**

Composites multicouches, Sandwichs, Élément fini, Layerwise, Analyse statique, Dynamique

# Abstract

In the analysis of composite structures, especially sandwich structures, the determination of displacements and interlaminar stresses at the interfaces, requires theories and finite elements models, able to give a better description of the local response. For reasons of high cost in terms of memory and computation time in the case of three-dimensional approaches, the “layerwise” two-dimensional approaches have been developed and have been properly applied for the analysis of multilayer composites structures. However, these approaches require a high computational time when dealing with a large number of layers.

In this thesis, a new layerwise model has been developed for the analysis of the behavior of laminated composite plates and especially sandwich plates. Unlike all other layerwise models, presented in the literature, the number of degrees of freedom in the present model is independent of the number of layers. The proposed model is derived from a combination of two theories; where the first-order shear deformation theory is adopted to model the two face sheets, while the core is modeled using the third-order shear deformation theory. This combined theory satisfies the continuity requirements of interlaminar displacements as well as the compatibility conditions. The new model allows calculating the transverse shear stresses in a precise manner without the use of correction factors.

Based on the proposed model, two finite elements have been developed for static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates. These elements are geometrically simple and have only four nodes and thirteen degrees of freedom per node. The comparison of the results obtained with those given by the three-dimensional elasticity solutions and those obtained by other finite element models available in the literature; showed the performance and accuracy of the proposed model. Moreover, a parametric study was also conducted to investigate the effect of certain characteristic parameters on the bending and free vibration behavior of laminated sandwich plates.

## **Keywords:**

Laminated Composite, Sandwich, Finite element, Layerwise, Static analysis, Dynamic

## المخلص

في تحليل الهياكل المركبة وخاصة هياكل السندويش، تحديد الانتقالات و الاجهادات الموجودة ما بين الطبقات ، يتطلب نظريات ونماذج من العناصر المحدودة المطورة، القدرة على إعطاء وصف أفضل للاستجابات المحلية. نظرا للتكلفة العالية من حيث الذاكرة وحساب الوقت في حالة نهوج ثلاثية الأبعاد، فان نهوج ثنائية الأبعاد من نوع لايرويز تم تطويرها و تطبيقها بشكل صحيح لتحليل الهياكل المركبة متعددة الطبقات. لكن يجدر بنا ان نذكر ان هذه النهوج تتطلب حساب طويل نسبيا في حالة وجود عدد كبير من الطبقات.

في هذه الأطروحة، تم تطوير نموذج جديد من نوع لايرويز من اجل تحليل سلوك الصفائح المركبة و خاصة صفائح السندويش. خلافا لجميع نماذج لايرويز الأخرى، المقدمة في المراجع، فان عدد درجات الحرية في هذا النموذج هو مستقل عن عدد الطبقات. النموذج المقترح هو ناتج من مزيج نظريتين؛ نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى التي اعتمدت لنمذجة اثنين من الطبقات القشرية، في حين ان نظرية تشوه القص من الدرجة الثالثة اعتمدت لنمذجة الطبقة الوسطى. هاتين النظريتين تلبيان متطلبات استمرارية الانتقالات بين الصفائح وكذلك شروط التوافق. النموذج الجديد يسمح بحساب إجهادات القص بطريقة دقيقة من دون استخدام عوامل التصحيح.

بناء على النموذج المقترح، تم تطوير عنصرين محددين من اجل تحليل السلوك الستاتيكي والديناميكي للصفائح المركبة و صفائح السندويش. هذان العنصران يتميزان ببساطة الشكل الهندسي كما انهما لا يحتويان الا على اربعة عقد و ثلاثة عشر درجة حرية لكل عقدة. مقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول التحليلية وتلك التي تم الحصول عليها من قبل نماذج العناصر المحدودة ، المتاحة في المراجع، أظهرت الاداء الجيد و اثبتت دقة النموذج المقترح. من ناحية أخرى، أجريت دراسة بارومترية لإظهار تأثير بعض المعلمات على سلوك الانحناء والاهتزاز لصفائح الساندويش متعدد الطبقات.

### الكلمات المفتاحية:

الهياكل المركبة من عدة طبقات، سندويش، العناصر المحدودة ، لايرويز، السلوك الستاتيكي، ديناميكي

# Table des matières

Résumé .....	i
Abstract .....	ii
ملخص .....	iii
Table des matières .....	iv
Liste des figures .....	ix
Liste des tableaux .....	xiv
Introduction générale .....	1
1. Introduction .....	1
2. Objective de la thèse .....	3
3. Plan de la thèse .....	3

## **PARTIE I. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

### **Chapitre 1: Aperçu sur l'évolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites sandwichs**

1.1 Introduction .....	6
1.2 Modèles et théories de structures sandwichs multicouches .....	8
1.2.1 Modèles tridimensionnels (3D) .....	8
1.2.2 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D) .....	8
1.2.2.1 Approche de monocouche équivalente (approximation globale)	9
1.2.2.1.1 Théorie classique des plaques .....	10
1.2.2.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre .....	11
1.2.2.1.2.1 Facteurs de correction du CT .....	13
1.2.2.1.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur .....	14
1.2.2.2 Approche par-couche ou couche discrète (approximation local)	23

1.2.2.2.1 Théories Zig-Zag .....	26
1.2.2.2.2 Théories Global-Local d'ordre supérieur (GLHSDT) ...	30
1.2.2.3 Modèles à cinématique enrichie .....	33
1.3 Modèles éléments finis des structures sandwichs multicouches .....	35
1.3.1 Éléments finis basés sur les théories du premier ordre .....	35
1.3.2 Éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur .....	37
1.3.3 Éléments finis basés sur l'approche Layerwise .....	40
1.3.4 Éléments finis basés sur la théorie de Zig- Zag .....	46
1.4 Conclusion .....	49

**PARTIE II DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEAU MODELE  
D'ELEMENTS FINIS SANDWICH SUR LA BASE DE L'APPROCHE  
LAYERWISE.**

**Chapitre 2 Proposition d'un nouveau modèle layerwise pour l'analyse des  
structures sandwichs et des multicouches**

2.1 Introduction .....	52
2.2 Formulation du modèle proposé .....	53
2.2.1 Cinématique du présent modèle .....	53
2.2.1.1 Champ de déplacement de la couche central (âme) .....	53
2.2.1.1.1 Relation cinématique de la couche centrale .....	54
2.2.1.2 Champ de déplacement des peaux .....	55
2.2.1.2.1 Relation cinématique des peaux .....	57
2.2.2 Loi de comportement d'un stratifiée .....	59
2.2.2.1 Les efforts résultants dans l'âme .....	61
2.2.2.1.1 Résultantes en membrane .....	61
2.2.2.1.2 Moments de flexion et de torsion .....	61
2.2.2.1.3 Résultantes d'ordre supérieur (second ordre) .....	61
2.2.2.1.4 Résultantes d'ordre supérieur (troisième ordre) .....	62
2.2.2.1.5 Résultantes en cisaillement .....	62
2.2.2.1.6 Résultantes d'ordre supérieur en cisaillement .....	62
2.3 Conclusion .....	65

## **Chapitre 3 Développement d'un nouvel élément fini rectangulaire (RSFT52) pour l'analyse des plaques sandwichs et multicouches**

3.1	Introduction .....	67
3.2	Formulation de l'élément RSFT52 .....	68
3.2.1	Description .....	68
3.2.2	Approximation nodale des coordonnées .....	68
3.2.3	Évaluation de la matrice de rigidité .....	72
3.2.3.1	Matrice de rigidité de l'âme .....	73
3.2.3.2	Matrice de rigidité des deux peaux .....	74
3.3	Validation numérique de l'élément RSFT52 .....	75
3.3.1	Conditions aux limites adoptées .....	75
3.3.2	Plaques isotropes .....	75
3.3.2.1	Plaque isotrope carrée simplement appuyée sous chargement uniforme .....	76
3.3.2.2	Plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée .....	77
3.3.3	Plaques stratifiées .....	78
3.3.3.1	Plaque carrée à trois couches sous chargement sinusoïdal .....	78
3.3.3.2	Plaques carrée à trois et cinq couches sous chargement uniforme	80
3.3.3.3	Plaques stratifiées à neuf couches sous chargement doublement sinusoïdal .....	83
3.3.4	Plaques sandwichs .....	84
3.3.4.1	Plaque sandwich carrée symétrique sous chargement sinusoïdal	84
3.3.4.2	Plaque sandwich carrée sous chargement uniforme .....	89
3.3.4.3	Plaque sandwich carrée avec des peaux composites stratifiées pour différents types de conditions aux limites .....	90
3.3.4.4	Plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées alternées (angle-ply) soumise à une charge uniformément répartie .....	92
3.3.4.5	Comparaison avec des résultats expérimentaux sur des plaques sandwichs rectangulaires ayant des peaux stratifiées de type CFRP	97
3.3.4.6	Étude Paramétriques .....	100
3.4	Conclusion .....	104

## **Chapitre 4 Développement d'un nouvel élément fini isoparamétrique (QSFT52) en introduisant la technique de déformation naturelle**

4.1	Introduction .....	106
4.2	Construction d'un élément isoparamétrique .....	107
4.2.1	Définition .....	107
4.2.2	Transformation géométrique .....	107
4.2.3	Approximation nodale des coordonnées .....	108
4.2.4	Fonctions d'interpolations de l'élément réel .....	110
4.3	Formulation de l'élément QSFT52 .....	111
4.3.1	Description .....	111
4.3.2	Approximation nodale des coordonnées de l'élément QSFT52 .....	112
4.3.3	Introduction de la méthode des déformations naturelle de substitution ...	115
4.3.4	Évaluation de la matrice de rigidité .....	117
4.3.4.1	Matrice de rigidité de l'âme .....	117
4.3.4.2	Matrice de rigidité des deux peaux .....	119
4.4	Performance et efficacité de l'élément QSFT52 .....	119
4.4.1	Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée et soumise à un chargement uniformément réparti .....	120
4.4.2	Plaque sandwich carrée simplement appuyée sous chargement doublement Sinusoïdal .....	122
4.4.3	Plaque sandwich carrée encastree et soumise à une charge uniformément répartie .....	123
4.4.4	Plaque sandwich carrée sous chargement uniformément réparti .....	131
4.4.5	Plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées alternés (angle-ply) ...	131
4.5	Conclusion .....	132

**PARTIE III APPLICATION D'ELEMENT QSFT52 POUR L'ETUDE  
DYNAMIQUE DES PLAQUES SANDWICHS ET DES STRATIFIEES**

**Chapitre 5 Vibration libre des plaques sandwichs et des composites stratifiées**

5.1	Introduction .....	137
5.2	Revue des travaux antérieurs sur l'analyse dynamique des plaques multicouches et des sandwichs .....	137
5.3	Formulation de la matrice masse consistante élémentaire du modèle QSFT52 ..	141
5.4	Tests de validation .....	146
5.4.1	Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites ...	146
5.4.2	Plaques composites stratifiées carrées à trois, cinq et neuf couches .....	146
5.4.3	Plaque sandwich carrée simplement appuyée .....	148
5.4.4	Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques .....	150
5.4.5	Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques .....	156
5.4.6	Vibration libre des plaques sandwichs stratifiées en utilisant un mousse de PVC dans l'âme .....	157
5.4.7	Vibration libre des plaques composites stratifiées biaisées (skew plate) ....	158
	Conclusion générale et perspectives .....	167
	Références bibliographiques .....	170

# Liste des figures

## CHAPITRE 1

### APERÇU SUR L'ÉVOLUTION DES THÉORIES AUX ÉLÉMENTS FINIS POUR LA MODÉLISATION DES COMPOSITES SANDWICHES

<b>Figure 1.1 :</b>	Sandwich typique .....	7
<b>Figure 1.2 :</b>	Modélisation schématique d'une stratifiée par le modèle monocouche et layerwise .....	9
<b>Figure 1.3 :</b>	Description de déplacement du modèle: monocouche équivalente (à gauche) et par couche (à droite). Cas linéaire et non-linéaire .....	9
<b>Figure 1.4 :</b>	Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff .....	10
<b>Figure 1.5 :</b>	Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin .....	12
<b>Figure 1.6 :</b>	Variation de déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à gauche) et la théorie du premier ordre (à droite) .....	13
<b>Figure 1.7 :</b>	Géométries de non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT .....	15
<b>Figure 1.8 :</b>	Schéma de l'approche par-couche .....	23
<b>Figure 1.9 :</b>	Représentation des déplacements et des fonctions d'approximation linéaire utilisée dans la théorie Layerwise .....	25
<b>Figure 1.10:</b>	Géométrie et notations employées dans les théories en Zig-Zag .....	27
<b>Figure 1.11 :</b>	Champ de déplacement des modèles Zig-Zag du premier ordre .....	28
<b>Figure 1.12 :</b>	Champ de déplacement des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur .....	28

<b>Figure 1.13 :</b>	Système des coordonnées, ordre de couche d'une plaque multicouche .....	31
<b>Figure 1.14 :</b>	Élément triangulaire à 16 nœuds et leurs degrés de liberté [215] .....	37
<b>Figure 1.15 :</b>	Élément triangulaire à 6 nœuds de Polit [228] .....	39
<b>Figure 1.16 :</b>	Élément triangulaire à 13 nœuds de Rezaiee [232] .....	40
<b>Figure 1.17 :</b>	Élément d'Oskooei and Hansen [244] .....	42
<b>Figure 1.18 :</b>	Élément brique de Ramtekkar et al. [245] .....	42
<b>Figure 1.19 :</b>	Élément prismatique de Demiray [247] .....	43
<b>Figure 1.20 :</b>	Élément (3D) de Linke et al. [249] .....	44
<b>Figure 1.21 :</b>	Élément triangulaire à 45 nœuds de Ramesh [250] .....	45
<b>Figure 1.22 :</b>	Élément solide de Darilmaz [252] .....	46
<b>Figure 1.23 :</b>	Élément brique à 8 nœuds de Cho [157] .....	47
<b>Figure 1.24 :</b>	Schéma de stratification générale et la configuration de déplacement	48

## CHAPITRE 2

### PROPOSITION D'UN NOUVEAU MODELE LAYERWISE POUR L'ANALYSE DES STRUCTURES SANDWICHES ET DES MULTICOUCHES

<b>Figure 2.1 :</b>	Géométrie et notations d'une plaque sandwich .....	53
<b>Figure 2.2 :</b>	Cinématique du modèle proposé .....	55
<b>Figure 2.3 :</b>	Les axes de référence ( $X, Y, Z$ ); et les axes de fibre du couche (1,2,3) .....	59

## CHAPITRE 3

### DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI RECTANGULAIRE (RSFT52) POUR L'ANALYSE DES PLAQUES SANDWICHES ET DES MULTICOUCHES

<b>Figure 3.1 :</b>	La géométrie de l'élément RSFT52 et les variables cinématiques nodales correspondantes .....	68
<b>Figure 3.2 :</b>	Plaque rectangulaire ayant une maille de $m \times n$ .....	76
<b>Figure 3.3 :</b>	Plaque stratifiée carrée à trois couches, simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	79
<b>Figure 3.4 :</b>	Convergence du déplacement transversal d'une plaque carrée starifiée à trois couches, simplement appuyée, sous doublement chargement sinusoïdal ( $h/a = 0.25$ ) .....	81
<b>Figure 3.5 :</b>	Plaque stratifiée carrée à neuf couches .....	83
<b>Figure 3.6 :</b>	Plaque sandwich carrée symétrique sous chargement doublement sinusoïdal .....	84
<b>Figure 3.7 :</b>	Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	88
<b>Figure 3.8 :</b>	Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	88
<b>Figure 3.9 :</b>	Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	89
<b>Figure 3.10 :</b>	Plaque sandwich avec des peaux stratifiées .....	90
<b>Figure 3.11 :</b>	Plaques sandwichs avec différentes séquences d'empilement .....	98
<b>Figure 3.12 :</b>	Effet de l'épaisseur de l'âme ( $h_c$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) avec différentes conditions aux limites .....	102

<b>Figure 3.13 :</b>	Effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) encasté et simplement appuyée .....	103
<b>Figure 3.14 :</b>	Effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) simplement appuyée .....	103
<b>Figure 3.15 :</b>	Effet du rapport d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) de la peau et le rapport ( $h_c/h$ ), sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0°/90°/0°/C/0°/90°/0°) simplement appuyée .....	104

## CHAPITRE 4

### DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI ISOPARAMETRIQUE (QSFT52) EN INTRODUISANT LA TECHNIQUE DE DEFORMATION NATURELLE

<b>Figure 4.1 :</b>	Transformation géométrique de l'élément réel vers l'élément parent.	108
<b>Figure 4.2 :</b>	La géométrie de l'élément QSFT52 et les variables cinématiques nodales correspondantes .....	111
<b>Figure 4.3 :</b>	Position du point de prélèvement pour les composantes: $\gamma_{xz}^{f(A)}$ (à gauche) et $\gamma_{yz}^{f(A)}$ (à droite) .....	116
<b>Figure 4.4 :</b>	Plaque biaise simplement appuyée avec un maillage de $m \times n$ .....	120
<b>Figure 4.5 :</b>	Distribution des contraintes planes (a) $\bar{\sigma}_{xx}$ et (b) $\bar{\sigma}_{yy}$ , à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ( $h/a = 0.1$ ) .....	127
<b>Figure 4.6 :</b>	Distribution des contraintes planes (a) $\bar{\sigma}_{xx}$ , (b) $\bar{\sigma}_{yy}$ et (c) $\bar{\tau}_{xy}$ , à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ( $h/a = 0.25$ ) .....	129
<b>Figure 4.7 :</b>	Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) encastée sous chargement uniforme .....	129

## CHAPITRE 5

### VIBRATION LIBRE DES PLAQUES SANDWICH ET DES COMPOSITES STRATIFIEES

<b>Figure 5.1 :</b>	Effet du nombre de couches et le rapport d'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une Plaque stratifiée carrée simplement appuyée .....	150
<b>Figure 5.2 :</b>	Plaque sandwich carrée simplement appuyée avec des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) pour différents rapport d'épaisseur - Comparaison des fréquences naturelles .....	162
<b>Figure 5.3 :</b>	Plaque sandwich carrée simplement appuyée avec des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) pour différents rapport ( $h_c/h_f$ ) - Comparaison des fréquences naturelles .....	162
<b>Figure 5.4 :</b>	Plaque sandwich simplement appuyée ayant des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) avec différents rapport d'aspect ( $a/b$ ) - Comparaison des fréquences naturelles .....	163

# Liste des tableaux

## CHAPITRE 1

### APERÇU SUR L'ÉVOLUTION DES THÉORIES AUX ÉLÉMENTS FINIS POUR LA MODÉLISATION DES COMPOSITES SANDWICHES

<b>Tableau 1.1 :</b> Quelques modèles d'ordre supérieur .....	19
---	----

## CHAPITRE 3

### DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI RECTANGULAIRE (RSFT52) POUR L'ANALYSE DES PLAQUES MULTICOUCHES ET DES SANDWICHES

<b>Tableau 3.1 :</b> Détails de conditions aux limites utilisées pour les exemples numériques .....	76
<b>Tableau 3.2 :</b> Déflexion normalisé ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée .....	77
<b>Tableau 3.3 :</b> Déflexion normalisé et contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ), d'une plaque isotrope simplement appuyée ( $E = 1 \text{ GPa}$ , $\nu = 0.2, 0.3$ et $0.4$ ) .....	78
<b>Tableau 3.4 :</b> Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques stratifiées .....	79
<b>Tableau 3.5 :</b> Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0/90/0) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	80
<b>Tableau 3.6 :</b> Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0/90/0), simplement appuyée, sous chargement uniforme .....	81
<b>Tableau 3.7 :</b> Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à cinq .....	82

	couches (0/90/90/90/0), simplement appuyée, sous chargement uniforme .....	
<b>Tableau 3.8 :</b>	Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à neuf couches (0/90/0/90/0/90/0/90/0) simplement appuyée, sous chargement doublement sinusoïdal .....	83
<b>Tableau 3.9 :</b>	Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques sandwichs .....	84
<b>Tableau 3.10:</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique (f/c/f), simplement appuyée, sous chargement doublement sinusoïdal .....	86
<b>Tableau 3.11:</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée (f/c/f), sous chargement réparti uniforme .....	91
<b>Tableau 3.12:</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich ayant des peaux stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90), sous chargement doublement sinusoïdal, avec différents types de conditions aux limites .....	93
<b>Tableau 3.13:</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich ayant des peaux stratifiées non-symétriques ( $\theta/\theta+90/C/\theta/\theta+90$ ), simplement appuyée, sous un chargement uniformément distribué .....	96
<b>Tableau 3.14:</b>	Spécifications des matériaux .....	99
<b>Tableau 3.15:</b>	Propriétés des matériaux de peaux (CFRP) .....	99
<b>Tableau 3.16:</b>	Propriétés des matériaux de l'âme .....	99
<b>Tableau 3.17:</b>	Propriétés des matériaux de l'adhésif .....	99
<b>Tableau 3.18:</b>	Déflexion ( $w$ ) d'une plaque sandwich rectangulaire ayant des peaux stratifiées, sous chargement réparti uniforme .....	100
<b>Tableau 3.19:</b>	Propriétés des matériaux utilisés .....	101

## CHAPITRE 4

### DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI ISOPARAMETRIQUE (QSFT52) EN INTRODUISANT LA TECHNIQUE DE DEFORMATION NATURELLE

<b>Tableau 4.1 :</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée sous chargement uniforme ..	121
<b>Tableau 4.2 :</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique (f/c/f) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal .....	124
<b>Tableau 4.3 :</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique (f/c/f) encastée sous chargement uniforme .....	130
<b>Tableau 4.4 :</b>	Propriétés mécaniques utilisés dans l'exemple 4.4.4 .....	131
<b>Tableau 4.5 :</b>	Déplacement transversal ( $w$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique (f/c/f) sous chargement uniforme .....	133
<b>Tableau 4.6 :</b>	Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées ( $f(\theta/\theta + 90)/c/f(\theta/\theta + 90)$ ), simplement appuyée et soumise un chargement uniforme .....	134

## CHAPITRE 5

### VIBRATION LIBRE DES PLAQUES SANDWICH ET DES COMPOSITES STRATIFIEES

<b>Tableau 5.1 :</b>	Fréquences propres ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites .....	147
<b>Tableau 5.2 :</b>	Effet de l'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) de plaques stratifiées carrées (0/90/.../0) simplement appuyées .....	149
<b>Tableau 5.3 :</b>	Fréquence propre fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une plaque sandwich carrée (f/c/f) simplement appuyée .....	151
<b>Tableau 5.4 :</b>	Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple 5.4.4	149
<b>Tableau 5.5 :</b>	Fréquence propre non-dimensionnelle, pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques (0/90/C/90/0) .....	152
<b>Tableau 5.6 :</b>	Fréquence propre non-dimensionnelle, pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétrique $[0/90/0/90/0/90/0/90/C/]_{\text{Sym}}$ .....	153
<b>Tableau 5.7 :</b>	Fréquences propres non-dimensionnelles d'une plaque sandwich carrée ayant des peaux composites stratifiées symétriques (0/90/C/90/0) avec différents types de conditions aux limites ...	154
<b>Tableau 5.8 :</b>	Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple 5.4.5	156
<b>Tableau 5.9 :</b>	Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'épaisseurs (a/h) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiée non-symétrique (0/90/C/0/90) .....	159

<b>Tableau 5.10:</b>	Fréquence propre non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ), pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90) avec différents rapports d'épaisseurs ( $a/h$ ) .....	160
<b>Tableau 5.11:</b>	Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports ( $h_c/h_f$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90) .....	161
<b>Tableau 5.12:</b>	Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'aspects ( $a/b$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux stratifiées non-symétrique (0/90/C/0/90) .....	161
<b>Tableau 5.13:</b>	Propriétés mécaniques des peaux et de l'âme (HEREX - C70.130)	163
<b>Tableau 5.14:</b>	Fréquences propres non-dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque sandwich carrée avec différentes séquences d'empilement dans les peaux .....	164
<b>Tableau 5.15:</b>	Fréquences propres non-dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ), pour différents modes, d'une plaque composite stratifiée carrée biaise (90/0/90/0/90) avec deux types de conditions aux limites (SSSS et CCCC) .....	165

# Introduction générale

## 1. Introduction

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton). Ces derniers temps, les ingénieurs civils ont exploité les avantages d'utilisation des matériaux composites et spécialement les plastiques renforcés par des fibres de verre dans la réparation du béton.

Parmi les composites les plus convoités, on peut distinguer deux grandes catégories de matériaux composites structuraux: les stratifiés et les sandwichs. Les stratifiés sont des matériaux couramment rencontrés dans les éléments structuraux. Ces derniers sont constitués par l'empilement de plusieurs couches où chaque couche peut avoir une orientation différente, i.e. les caractéristiques mécaniques varient selon les directions considérées. Les sandwichs sont des structures composites dont l'utilisation connaît un essor important. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes: deux peaux fines, généralement stratifiées, possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction), collées sur une âme épaisse, légère et de faibles caractéristiques mécaniques (mousse, bois) dont le rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure.

Malgré les nombreux avantages que présentent ces matériaux, leur comportement est assez complexe à cause des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Parmi ces complexités liées à l'hétérogénéité, l'effet de cisaillement transverse est

prédominant et joue un rôle essentiel, car il est considéré comme étant la cause de plusieurs modes de ruptures comme le délaminage au niveau des interfaces, fissure transverse, etc. Cet effet devient beaucoup plus complexe dans le cas des structures sandwichs car la variation des propriétés mécaniques entre le cœur et les peaux est très importante.

Par conséquent, la précision dans la détermination des contraintes de cisaillement transverse est nécessaire lors de la conception des structures composites multicouches. En effet, de nos jours, plusieurs investigations ont été accomplies dans ce domaine afin de résoudre le problème en question.

Toutes les théories et les approches développées à ce jour pour l'analyse des éléments de structures composites et notamment de sandwichs, présentent des limites de performances ou des difficultés dans les moyens de calcul. On cite à titre d'exemple, les modèles monocouche équivalente (approximation globale), dont les variables sont introduites pour toute la plaque/coque. Par conséquent, ces modèles sont incapables de prédire avec précision le comportement local des structures multicouches y compris les endommagements. L'approche monocouche équivalente englobe essentiellement trois théories bien connues: la théorie classique des stratifiés, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, qui néglige l'effet de cisaillement transverse, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin et les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur basées sur l'approximation non linéaire des déplacements.

Pour ces raisons, des modèles plus précis, basés sur une description par-couche, (layerwise, i.e. approximation locale), ont été proposés. Cette description est plus répondeuse car chaque couche est traitée individuellement, en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces. Cependant, ces modèles exigent énormément de temps de calcul, notamment lorsque la plaque stratifiée est constituée d'un grand nombre de couche, puisque le nombre d'inconnues augmente d'une manière proportionnelle avec l'augmentation du nombre de couches.

La méthode des éléments finis s'est imposée dans les dernières années comme étant une méthode puissante et efficace, ce qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse de comportement complexe des structures sandwichs composites. La plupart des modèles éléments finis, basés sur les théories sus-citées, sont pratiquement difficile à mettre en œuvre.

Par conséquent, les ingénieurs doivent choisir entre les modèles éléments finis classiques moins coûteux mais moins précis au niveau local et ceux raffinés et sophistiqués mais trop coûteux en terme de temps de calcul. Ces difficultés ont amené les chercheurs à développer d'autres modèles d'éléments finis assurant un meilleur compromis entre la précision et le faible coût. Toutefois, ce domaine requiert des recherches importantes et plus approfondies sur les modèles d'éléments finis qui sont capables d'analyser d'une manière plus précise le comportement de ces structures.

## **2. Objectif de la thèse**

L'objectif principal de cette thèse est le développement d'un nouveau modèle sandwich, basé sur l'approche layerwise mais en gardant tous les avantages de l'approche monocouche, e.g. le nombre de degrés de liberté est indépendant du nombre de couches. Sur la base de ce nouveau modèle, on procède à la création de deux éléments finis en assurant un meilleur compromis entre la précision et le faible coût. Ces éléments développés seront destinés à l'analyse des différents types de comportements (statique et dynamique) des structures en matériaux isotropes, composites stratifiées et plus spécialement les structures sandwichs. Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est d'étudier l'influence de différents paramètres sur la variation du déplacement transversal ainsi que les fréquences naturelles d'une plaque sandwich, tels que le rapport d'épaisseur, les combinaisons de conditions aux limites, le rapport d'aspect, le degré d'anisotropie des sandwichs, etc.

## **3. Plan de la thèse:**

Le travail de cette thèse est divisé en trois grandes parties:

### **Partie I : Synthèse bibliographique**

**Le premier chapitre** est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour l'élaboration de la problématique de cette thèse. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions générales concernant les matériaux sandwichs composites, ainsi qu'une synthèse sur les approches, les théories et les différents modèles d'éléments finis qui servent à analyser le comportement des structures composites multicouches et des structures sandwich en particulier.

**Partie II : Développement d'un nouveau modèle d'éléments finis sandwich sur la base de l'approche layerwise**, articulée autour de trois chapitres :

**Le deuxième chapitre** est consacré à la formulation théorique d'un nouveau modèle de plaque sandwich multicouches, basé sur l'approche layerwise, i.e. combinaison de deux théories: (i) la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), pour modéliser les deux peaux; et (ii) la théorie du troisième ordre (TSDT), pour la modélisation de l'âme. Ces deux théories combinées, satisfont les exigences de continuités des déplacements interlaminaires ainsi que les conditions de compatibilité. Dans le présent modèle, les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires.

**Le troisième chapitre** porte sur le développement et la validation d'un nouvel élément fini de forme rectangulaire (RSFT52), simple et peu coûteux en temps de calcul. Cet élément est défini par quatre nœuds avec treize degrés de liberté par nœud. Il est créé sur la base du modèle layerwise, proposé dans le second chapitre. Les contraintes de cisaillement transversal sont calculées directement en utilisant les équations constitutives plutôt que les équations d'équilibres. L'efficacité et la performance de cet élément, en terme de convergence et de stabilité, sont évaluées à travers une série d'applications en flexion de plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs symétrique / non symétrique, avec différents cas de chargement, de géométrie et de conditions aux limites.

**Le quatrième chapitre** est consacré à la généralisation de l'élément rectangulaire (RSFT52) pour l'analyse des structures ayant des formes plus arbitraires en faisant introduire la notion d'isoparamétrie. Ainsi, un nouvel élément fini quadrilatère isoparamétrique (QSFT52) basé sur le modèle layerwise, présenté dans le deuxième chapitre, a été formulé. La bonne performance de cet élément, en statique, a été clairement démontrée à travers une série d'exemples numériques.

### ***Partie III : Application de l'élément QSFT52 pour l'étude dynamique des plaques sandwichs et des stratifiées***

**Le cinquième chapitre** sera consacré à la validation de l'élément QSFT52, développé au quatrième chapitre, dans la résolution des problèmes dynamiques (vibration libre) des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwich (symétrique/non symétrique). Les résultats des fréquences propres seront comparés à ceux déterminés analytiquement et ceux obtenus à l'aide d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

Finalement, le travail se termine par une conclusion générale résumant les résultats obtenus et par des perspectives.

# **PARTIE I**

## **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

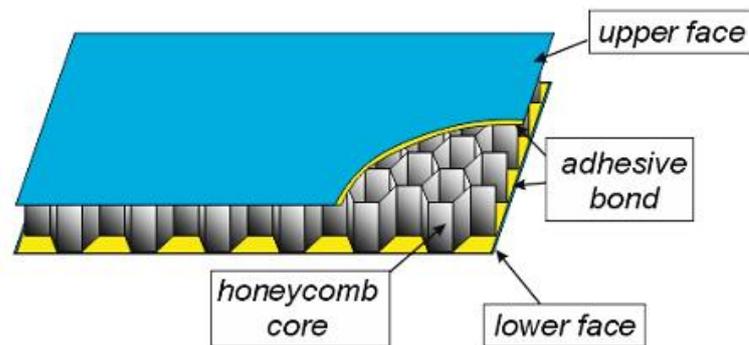
# Chapitre 1

## Aperçu sur l'évolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites sandwichs

### 1.1 Introduction

De nos jours, les composites stratifiées reçoivent une attention considérable et deviennent de plus en plus incontournables dans divers domaines de technologie comme les constructions civiles, la marine, le transport, la navigation et les applications aérospatiales, grâce à leurs rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'autres qualités. Ces qualités permettent le développement des structures légères possédant des rigidités membranaires et flexionnelles très importantes.

Parmi les composites les plus convoités, on notera les structures sandwichs dont l'utilisation prend une allure ascendante depuis un demi-siècle. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes. Deux peaux fines, très rigides (métal, composite stratifié, contreplaqué, etc.), qui ont un module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction. Entre ces deux peaux, il y a une couche épaisse (bois, mousses organiques, nid d'abeilles, balsas, etc.) dite âme (ou cœur) ayant une faible masse volumique et de faibles caractéristiques mécaniques. Son rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement ainsi que de maintenir l'écartement entre les peaux, ce qui permet d'augmenter les moments quadratiques de flexion. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure (Fig.1.1). Cette configuration donne à la structure sandwich une résistance et une rigidité spécifique avec une faible densité. Pour avoir plus d'informations et de détails sur ces matériaux et leurs applications, le lecteur pourra consulter les ouvrages: Reddy [1, 2], Kollár et Springer [3], Vinson [4], Zenkert [5], Plantema [6]. Jones [7], Carlsson et Kardomateas [8]



**Fig.1.1** Sandwich typique [9]

Les premières analyses des structures sandwichs qui sont rapportées dans la littérature, ont débuté juste après la deuxième guerre mondiale. En 1948, Libove et Batdorf [10] ont développé une théorie de petit déplacement ‘small deflection theory’ pour les plaques sandwichs anisotropes. Ce travail a été effectué sous le comité consultatif national pour l’aéronautique ‘the National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)’. Dans la même année, Reissner [11] a fourni des solutions théoriques aux problèmes à grands déplacements. Il suppose que les deux peaux ayant une épaisseur très petite, reprennent uniquement les efforts membranaires, tandis que l’âme ne subit que les contraintes de cisaillement transverse. En 1950, Reissner [12] a utilisé le même principe de Libove [10] pour étudier les coques sandwichs. En revanche, Hoff [13] et Eringen [14] dérivent l’équation différentielle pour étudier la flexion et le flambement des plaques sandwichs, en utilisant le principe des déplacements virtuels. En 1951, Yen et *al.* [15] présentent une étude pour les plaques sandwichs simplement supportées soumises à deux types de chargements (uniformément réparti et concentré). Ils ont intégré les équations différentielles pour obtenir le déplacement transversal. Une autre étude a été faite par Gerard [16] pour les plaques sandwichs épaisses. D’autre part, Ericksen [17] a calculé la flèche et les contraintes des panneaux sandwichs sous chargement normal. En 1958, l’auteur [18] a publié un rapport pour analyser les structures sandwichs non-symétriques avec des peaux d’épaisseur inégale. Dans les années soixante, Cheng [19] a présenté les mêmes théories de Reissner, mais dans cette étude, le matériau utilisé pour l’âme était orthotrope. Lin et Yokota [20] ont calculé le moment de flexion et la flèche d’un panneau sandwich sous deux chargements combinés (compression biaxiale et pression). En 1967, Liaw et Little [21] ont considéré une plaque sandwich composée de ( $n$ ) membranes isotropes ayant différentes épaisseurs et ( $n-1$ ) cœurs. Cette étude a été reprise par Azar [22] pour les matériaux orthotropes.

Cependant, à cause de leurs complexités et hétérogénéités, le comportement de ce type de matériaux requiert d'avantage d'investigations et de modélisations tant expérimentales que numériques.

## 1.2 Modèles et théories de structures sandwichs multicouches

Toutes les théories et les approches développées à ce jour pour l'analyse des éléments de structures conçus à base de ces matériaux, telle que les plaques et les coques minces ou épaisses, présentent des limites de performances ou des difficultés dans les moyens de calcul. Dans ce contexte, de nombreux travaux d'investigations ont été menés à travers les années, dans l'objectif d'améliorer les différentes approches afin de prévoir les réponses statiques et dynamiques ainsi que la stabilité de ces structures. Selon lesquelles on peut distinguer deux modèles principaux: le modèle tridimensionnel (3D) et le modèle bidimensionnel (2D).

### 1.2.1 Modèles tridimensionnels (3D)

L'approche tridimensionnelle vise à donner des résultats plus précis, utilisés notamment comme référence, mais peu d'auteurs ont adopté cette approche à cause de son coût en terme de temps de calcul et en capacité de mémoire pour le stockage de la base des données requise qui est plus importante que celle dans l'analyse bi-dimensionnelle, (Pagano [23, 24], Jones [25], Srinivas et Rao [26, 27], Noor et *al.*[28, 29] et Kant et Swaminathan [30]). De plus, les solutions 3D sont difficiles à obtenir dans la majorité des cas de géométrie et de conditions aux limites. Parmi les solutions d'élasticité 3D, on trouve l'article de Pagano [24] qui a proposé une solution d'élasticité tridimensionnelle, sous forme de série sinusoïdale, pour le problème de flexion des plaques stratifiées rectangulaires. Une autre solution a été présentée par Noor et *al.* [28] pour le flambement et la vibration libre de panneaux sandwichs.

### 1.2.2 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)

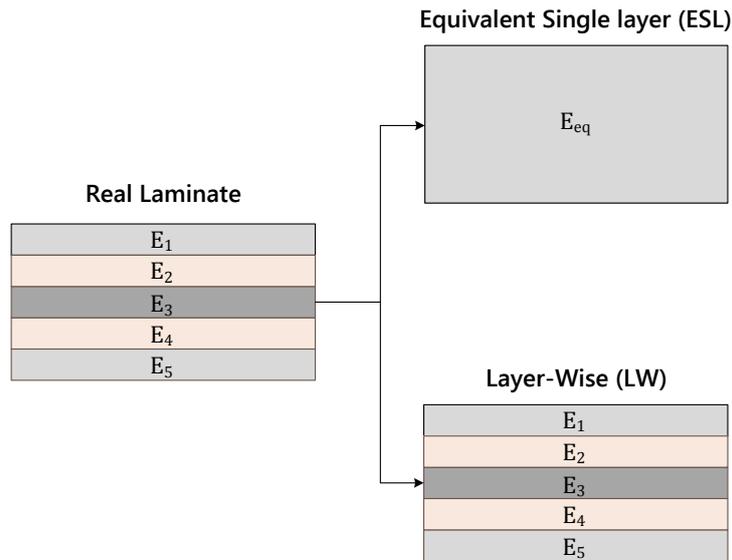
À ce jour, l'utilisation des modèles bidimensionnels (2D) est préférable dans la plupart des applications liées à l'analyse des structures multicouches. En fait, ces modèles sont plus pratiques que les modèles 3D en termes de simplicité dans la modélisation et d'efforts de calcul nécessaires. Parmi ces modèles, deux familles peuvent être distinguées (Fig.1.2):

- Approche monocouche équivalente (ESL)<sup>1</sup>;
- Approche par-couche (LW)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Equivalent Single Layer Approach

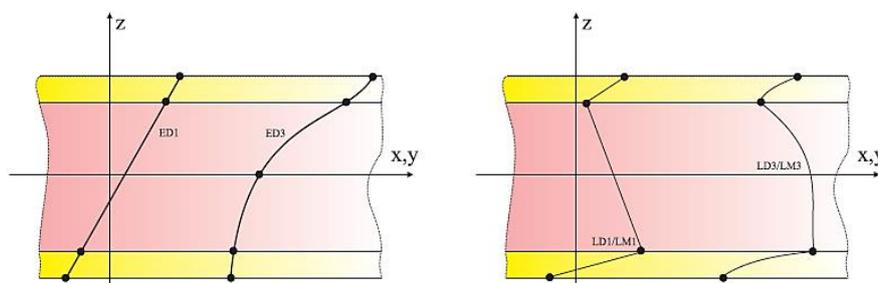
<sup>2</sup> Layer-Wise Approach



**Fig.1.2** Modélisation schématique d'une stratifiée par le modèle monocouche et layerwise

### 1.2.2.1 Approche de monocouche équivalente (approximation globale)

Dans l'approche monocouche équivalente, qui est la plus adoptée par les chercheurs, la plaque multicouche hétérogène est traitée comme une seule couche homogène équivalente via la technique d'homogénéisation, voir [31-34]. Les variables de cette approche sont introduites pour toute la plaque. Cela va conduire à un nombre de degrés de libertés indépendant par rapport au nombre de couches (Fig.1.3). Selon Reddy [35], les théories du modèle ESL fournissent une description suffisamment précise de la réponse globale de stratifié (i.e. la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant). Les principaux avantages des modèles ESL sont leur simplicité inhérente et leur faible coût de calcul, dû au petit nombre des variables dépendantes.



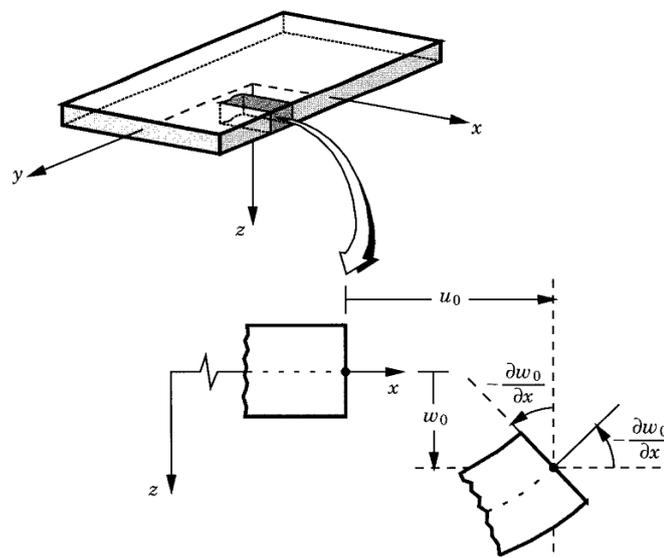
**Fig.1.3** Description du déplacement du modèle: monocouche équivalente (à gauche) et par-couche (à droite). Cas linéaire et non-linéaire [36]

Dans cette approche, on peut distinguer trois théories bien connues, à savoir:

- Théorie classique des plaques (CLPT)<sup>3</sup>
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)<sup>4</sup>
- Théories d'ordres supérieurs (HSDT)<sup>5</sup>

### 1.2.2.1.1 Théorie classique des plaques

La théorie classique de plaque est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff [37] en 1850, puis elle a été poursuivie par Love [38] au début du XXe siècle, voir [7, 39-47]. Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donné des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses. L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Fig.1.4). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse (CT)<sup>6</sup> ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) et les déformations/contraintes normales ( $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ ).



**Fig. 1.4** Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [2]

<sup>3</sup> Classical Lamination Plate Theory

<sup>4</sup> First order Shear Deformation Theory

<sup>5</sup> Higher order Shear Deformation Theory

<sup>6</sup> Cisaillement Transverse

La cinématique de cette théorie peut s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où

$u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont les composantes des déplacements dans le plan moyen.

$w_{,x}$  et  $w_{,y}$  sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions.

Cependant, cette théorie n'est pas adéquate pour l'analyse des composites multicouches et notamment les structures sandwichs (inadaptée pour la modélisation du cœur), à cause de l'effet du cisaillement transverse. Cet effet joue un rôle très important sur le comportement de ces structures, puisque les rapports entre les modules de Young et les modules de cisaillement sont compris entre 20 et 50 dans les matériaux composites modernes et entre 2,5 et 3,0 dans les matériaux isotropes [48]. En plus, l'effet du cisaillement est la cause de différents modes de rupture comme le délaminage au niveau des interfaces, fissure transverse, etc., alors que, une prédiction précise des contraintes de cisaillement interlaminaires est nécessaire dans l'analyse des défaillances des composites sandwichs.

Étant donné l'importance de la question, Libove et Batdorf [10], Yang et *al.* [49] et Whitney [50], ont étendu la théorie de Reissner [51], Mindlin [52], dans le cas de plaques isotropes épaisses, pour introduire l'effet de cisaillement dans les plaques sandwichs et les plaques stratifiées anisotropes. Cela est devenu ce qu'on appelle "théorie de déformation en cisaillement du premier ordre" (FSDT) ou la théorie de la plaque de déformation en cisaillement uniforme (USDPT)<sup>7</sup> [4, 53-58].

### 1.2.2.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

La théorie du premier ordre (FSDT) peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CLPT). Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse suivante de Reissner-Mindlin: les lignes normales au plan médian avant déformation restent

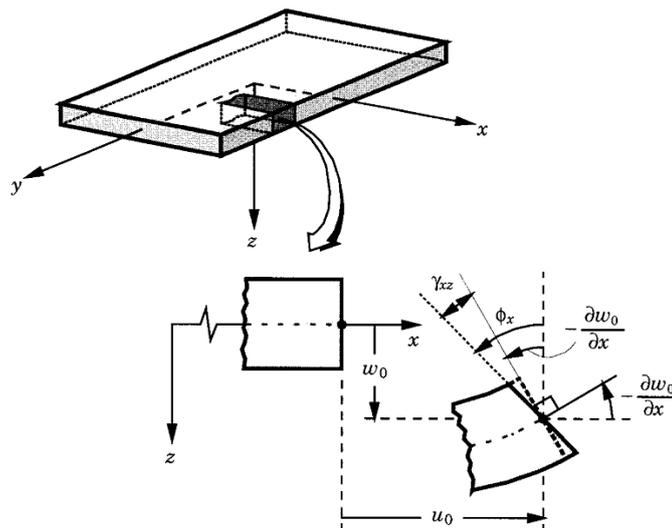
<sup>7</sup> Uniform Shear Deformation Plate Theory

droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l'effet du cisaillement transverse), (Fig.1.5). Ils ont également supposé que la contrainte normale ( $\sigma_z$ ) est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes (l'hypothèse de déformation plane). Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre s'écrit comme suit:

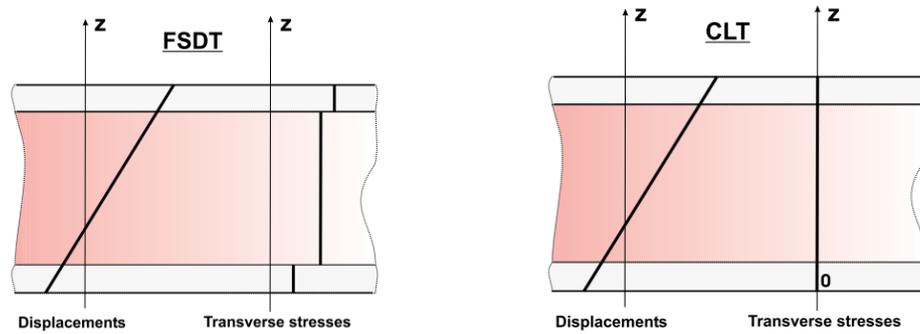
$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations de la normale autour des axes  $(x, y)$ , respectivement

À partir de l'équation (1.2), nous remarquons que les composantes de déplacements plans ( $u, v$ ) varient d'une manière linéaire suivant l'axe  $z$ , tandis que la composante de déplacement transversal ( $w$ ) est constante. Cela va conduire à un état de contrainte/déformation de cisaillement transverse constant sur toute l'épaisseur de la plaque (Fig.1.6), alors que, selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), les contraintes de cisaillement transverse sont plutôt quadratiques à travers l'épaisseur [59]. Cette déficience est corrigée par l'introduction de ce qu'on appelle les facteurs de correction de cisaillement transverse [48, 60-65].



**Fig. 1.5** Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [2]



**Fig.1.6** Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) [66]

#### 1.2.2.1.2.1 Facteurs de correction du CT:

Les facteurs de correction du CT (FC), notés  $k$ , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal. Pour les matériaux isotropes homogène, le premier concept de FC a été présenté par Reissner [51, 53, 67]. Il a proposé une valeur de  $5/6$  qui est largement utilisée, en employant une méthode de calcul basée sur des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique. Puis, Mindlin [52] a proposé une valeur de  $k = \pi^2/12$ , en utilisant la méthode d'analyse dynamique pour la première fois (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en CT ou de vitesse de propagation d'ondes de flexion [68]). Une autre méthode a été présentée par Ayad [69] pour calculer les facteurs de correction. Il les évalue par une comparaison entre l'énergie de cisaillement obtenue via les équations d'équilibre et celle obtenue par la théorie du premier ordre.

Par ailleurs, les facteurs de correction pour les composites stratifiés et les sandwichs dépendent essentiellement des propriétés matérielles du matériau (module de Young, coefficient de poisson, etc.), du rapport d'aspect, de la forme des fibres ainsi que leurs orientations, de la géométrie du stratifiée, du nombre de stratification et les conditions aux limites, ce qui rend ces facteurs difficiles à déterminer. Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les facteurs de correction dans ces matériaux. La méthodologie la plus courante est basée sur la comparaison de certaines réponses (l'énergie de déformation de CT, la vitesse de propagation d'une onde de flexion, la fréquence naturelle du mode de

vibration, etc.) prédite par la théorie du premier ordre et celles obtenues par la théorie d'élasticité tridimensionnelle [49, 56, 61, 70-72]. Yu [73] a utilisé une méthode basée sur la comparaison des fréquences naturelles (les fréquences obtenues par la théorie d'élasticité 3D et celles obtenues par la théorie du premier ordre) pour les plaques sandwichs.

Whitney [58] a publié une analyse précise pour calculer les facteurs de correction des plaques stratifiées symétriques/antisymétriques et les plaques sandwichs. Il les identifie par une méthode basée sur des considérations des flexions cylindriques. L'auteur a montré que, les facteurs de correction de CT ne s'approchent pas de la valeur classique 5/6, quand le nombre de couches du stratifié augmente. La même remarque a été trouvée par Madabhushi-Raman et Davalos [64]. Dans l'article de Vlachoutsis [60], les facteurs de correction de CT dans le cas sandwich, sont estimés à partir d'une expression analytique, il montre que le rapport d'anisotropie ( $E_f/E_c$ ) influe sur les valeurs des FC. Certains auteurs, dont Pai [48], ont présenté une nouvelle formulation de FC, en comparant les résultantes des contraintes de cisaillement exactes et l'énergie de déformation de cisaillement avec ceux déterminées par la théorie du premier ordre. L'article de Birman et Bert [62] résume les différentes méthodes concernant la détermination de ces facteurs pour les poutres/plaques isotropes et sandwichs.

### 1.2.2.1.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur:

Pour pallier les limitations rencontrées dans les deux théories précédentes (i.e., détermination des contraintes de CT et leurs distributions au sens de l'épaisseur de la plaque), des théories raffinées dites "théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur" (HSDT), ont été proposées par de nombreux chercheurs [74-83]. Ces théories sont basées sur une variation non-linéaire du champ de déplacement (Fig.1.7), afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de CT. En addition, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation [55].

Selon Touratier [84], un grand nombre de modèles d'ordre supérieur a été développé en utilisant une méthode basée sur le développement en série de puissances (série de Taylor qui a été initialement utilisée par Hildebrand et *al.* [85] en 1949) du champ de déplacement. Basset [86] en 1890, semble avoir été le premier à suggérer cette idée. L'équation (1.3) présente l'expression générale de ce champ qui s'écrit comme suit:



où  $(\psi_x, \psi_y)$  sont des termes de second ordre.

Une année plus tard, les mêmes auteurs [88] ont développé une autre théorie de second ordre, dans laquelle les composantes de déplacement dans le plan  $(u, v)$  varient linéairement, et la composante de déplacement transversal  $(w)$  varie d'une manière quadratique à travers l'épaisseur  $(\omega_i^{(2)} = \omega_i^{(3)} = \omega_i^{(4)} = 0 \text{ et } \omega_z^{(3)} = 0)$  pour étudier les coques stratifiées cylindriques. La même cinématique a été utilisée par Kwon et Akin [89] et Fares [90]. Nelson et Lorch [77] ont proposé également une théorie de déformation en cisaillement d'ordre deux en utilisant un polynôme quadratique pour les trois composantes de déplacement  $(\omega_i^{(3)} = \omega_i^{(4)} = 0)$ . Tessler [91] a développé une nouvelle théorie de second ordre pour l'analyse élastostatique linéaire de plaques composites stratifiées épaisses, où les déplacements plans sont linéaires et le déplacement transversal est quadratique à travers l'épaisseur. Sacco et Reddy [92] ont appliqué la même cinématique de Whitney et Sun [79] pour analyser les plaques multicouches en flexion. Ces derniers ont constaté que l'inclusion des termes de second ordre ne s'est pas améliorée de manière significative par rapport à la solution linéaire obtenue par la théorie de FSDT, à cause de l'absence de la variation quadratique des contraintes de CT.

Plusieurs auteurs ont alors développé d'autres théories d'ordre supérieur de plaque en se basant sur l'équation (1.3). En 1975, Reissner [93] a remarqué que les polynômes d'ordre trois pourraient être capables de rapprocher la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque, en modifiant le champ de déplacement choisi initialement en 1945. En 1977, Lo et *al.* [75], reprennent cette fois de façon complète le champ de déplacement de Reissner [93].

Levinson [94] et Murthy [81] ont repris l'idée de Reissner [93] et Lo et *al.* [75], pour présenter une théorie modifiée de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT)<sup>9</sup> similaire, dans le but d'analyser les plaques isotropes et les composites stratifiées, respectivement. Mais dans ces théories, les auteurs utilisent les équations d'équilibre qui sont variationnellement incompatibles avec les déplacements. En 1984, Reddy [78] fut le premier à obtenir les équations d'équilibre d'une manière compatible en utilisant le principe des déplacements virtuels. Il développe un modèle plus simple et efficace pour les plaques

---

<sup>9</sup> Third-Order Shear Deformation Theories

composites multicouches, en se basant sur la théorie TSDT ( $\omega_i^{(4)} = 0$  et  $\omega_z^{(1)} = \omega_z^{(2)} = \omega_z^{(3)} = 0$ ), où les composants de champ de déplacement membranaires sont des fonctions cubiques et le déplacement transversal est supposé constant selon l'épaisseur de la plaque (Eq.1.5).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où les termes  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$ , ont la même signification physique que ceux mentionnés dans la théorie du premier ordre, ils dénotent les déplacements et les rotations de la normale sur le plan ( $z=0$ ), respectivement. Les paramètres  $(\psi_x, \psi_y, \zeta_x$  et  $\zeta_y)$  sont des termes d'ordre supérieur dont l'interprétation physique est difficile [95].

Reddy a utilisé les conditions de nullité des contraintes de cisaillement  $(\tau_{xz}, \tau_{yz})$  sur les faces supérieures et inférieures de la plaque qui ont été proposées pour la première fois par Levinson [94] dans l'analyse des plaques isotropes et par Murthy [81] et Bert [96] dans l'analyse des plaques stratifiées. Ces conditions permettent de réduire le nombre de variables additionnelles de déplacement (élimination de  $\xi$  et  $\zeta$ ). Donc, le champ de déplacement de l'équation (1.5) contiendra des paramètres ayant une signification physique comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $h$  est l'épaisseur totale de la plaque.

La théorie de Reddy est devenue très populaire parce qu'elle donne une meilleure précision pour les contraintes de cisaillement transversal, et se traduisent par une distribution parabolique de ces contraintes, sans recours à des facteurs de correction. En plus, le nombre de variables est le même que dans la théorie FSDT (Cinq variables indépendantes). Cette

théorie est aussi connue sous le nom de "la théorie de la plaque de déformation en cisaillement parabolique (PSDPT)<sup>10</sup>".

Certains auteurs, dont Senthilnathan et *al.* [97], ont utilisé cette théorie de Reddy pour l'analyse du flambage des plaques isotropes et composites. Ils ont enrichi la composante de déplacement normal en introduisant des variables supplémentaires comme suit:

$$w(x, y, z) = w_f(x, y) + w_c(x, y) \quad (1.7)$$

où les notations  $f$  et  $c$  indiquent les contributions de la flexion et du cisaillement transverse au déplacement normal, respectivement.

Lee et *al.* [98] ont utilisé autrement la cinématique de Reddy pour l'analyse non-linéaire des plaques isotropes épaisses.

En outre, Rohwer [99] a présenté une étude comparative de sept modèles basés sur des théories différentes (CLPT, SSDT et HSDT) pour l'analyse des plaques composites multicouches. Il a aussi montré les avantages et les limites de ces modèles et a conclu d'après les résultats obtenus que la théorie de la plaque de Reddy est une bonne alternative parmi toutes les théories en cisaillement de déformation d'ordre supérieur dans la littérature. Selon Ferreira et *al.* [100], la théorie de Reddy est le meilleur choix pour les théories HSDT et reste toujours la théorie la plus simple et la plus populaire dans l'analyse des plaques composites stratifiées.

Kant et Swaminathan [30] ont proposé des solutions analytiques pour l'analyse statique des plaques composites et des sandwichs simplement appuyées. Ils ont présenté deux modèles d'ordre supérieur où le champ de déplacement est défini de telle façon que les trois composantes  $(u, v, w)$  soient cubiques pour le premier modèle et pour le deuxième modèle les deux composantes membranaires  $(u, v)$  soient cubiques et la composante transversale  $(w)$  soit constante sur l'épaisseur de la plaque. La comparaison a été faite avec des solutions d'élasticité (3D) données par Pagano [24] et d'autres modèles trouvés dans la littérature [54, 78, 97]. Cette comparaison a montré la précision et la fiabilité de ces deux modèles dans le calcul de déplacement transversal et les contraintes. Un résumé de quelques modèles d'ordre supérieur discuté précédemment est donné dans le tableau 1.

---

<sup>10</sup>Parabolic Shear Deformation Plate Theory

**Tableau 1.1** Quelques modèles d'ordre supérieur

Théories	Déformation dans le plan	Déformation de cisaillement transverse	Déformation normale transversale
Whitney et Sun [79]	Quadratique	Linéaire	Constant
Whitney et Sun [88]	Linéaire	Linéaire	Linéaire
Nelson et Lorch [77]	Quadratique	Linéaire	Linéaire
Lo et <i>al.</i> [75]	Cubique	Quadratique	Linéaire
Kant [82]	Cubique	Quadratique	Linéaire
Reddy [78]	Cubique	Quadratique	Zéro
Bert [96]	Cubique	Quadratique	Zéro
Krishna Murty [101]	Cubique	Quadratique	Zéro

Dans la littérature, il existe un certain nombre de modèles basés sur des théories non-polynomiales [84, 102-110]. Ces modèles permettent de décrire le gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque, et donnent ainsi une distribution adéquate pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversal. En 1877, Levy [103] a développé une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses pour la première fois, en utilisant des fonctions sinusoïdales (i.e. fonctions trigonométriques) dans le champ de déplacement. Mais, l'efficacité de cette théorie de plaque particulière n'a pas été validée pour plus d'un siècle [111]. Stein [108] a évalué cette théorie pour l'appliquer dans les plaques isotropes de forme modifiée. Plus tard, Stein et Jegley [112] ont étudié l'effet de cisaillement transverse dans la flexion cylindrique de plaques composites stratifiées, en utilisant la théorie de la plaque de déformation en cisaillement trigonométrique (TSDPT)<sup>11</sup>. Ils ont prouvé que cette théorie prédit les contraintes avec plus de précision que les autres théories.

Touratier [84] a proposé un nouveau modèle, qui est largement utilisé dans les plaques stratifiées et sandwichs, en se basant sur la théorie TSDPT. L'auteur a utilisé une fonction sinusoïdale pour décrire la cinématique de son modèle où le champ de déplacement est donné par les expressions suivantes :

<sup>11</sup> Trigonometric Shear Deformation Plate Theory

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \psi_x \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \psi_y \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

D'après l'équation (1.8), on remarque que ce modèle se rapproche beaucoup des modèles à base de polynômes d'ordre supérieur. Selon Nguyen [113], les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

En 1997, Idblbi *et al.* [114] ont présenté une étude comparative entre la théorie de Reddy (PSDPT), celle de Touratier [84] (TSDPT) et les théories classiques (CLPT et FSDT), pour la flexion et la vibration des plaques multicouches (Cross-Play et Sandwich). Ils ont montré que le modèle raffiné de type sinus est préférable, en particulier lorsque les exigences de continuité interlaminaire sont incluses.

Un nouveau modèle basé sur une autre théorie nommée la théorie de la plaque de déformation en cisaillement hyperbolique (HSDPT)<sup>12</sup> a été développé par Soldatos [115] pour l'analyse des plaques monocliniques homogènes. L'auteur a utilisé la fonction sinus hyperbolique pour les composantes membranaires tandis que le déplacement transversal est considéré comme constant à travers l'épaisseur. La cinématique de ce modèle est de la forme suivante:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) + h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \psi_x \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) + h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \psi_y \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Soldatos et Timarci [116] ont unifié la théorie HSDPT pour les plaques composites multicouches. Le principal avantage de cette théorie unifiée est la capacité de modifier la répartition des contraintes transversales [117]. Il existe d'autres travaux notamment ceux de Karama *et al.* [110] qui ont proposé une nouvelle fonction dite "exponentielle" pour les

<sup>12</sup> Hyperbolic Shear Deformation Plate Theory

poutres composites stratifiées. Elle est plus tard étendue aux plaques stratifiées [118]. Les fonctions exponentielles s'avèrent beaucoup plus riches que les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) dans leur série de développement de Fourier [110]. Elle est communément connue par la théorie de plaque de la déformation en cisaillement exponentielle (ESDPT)<sup>13</sup> dont le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) + ze^{-2(z/h)^2} \psi_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) + ze^{-2(z/h)^2} \psi_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance paires et impaires de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" (Touratier [84]) ne permet qu'un développement en puissances impaires [113].

En 2006, Aydogdu [117] a présenté une étude dans laquelle il a comparé les différentes théories d'ordre supérieur (PSDPT, TSDPT, HSDPT et ESDPT) avec la théorie d'élasticité tridimensionnelle. L'auteur a montré que le déplacement transversal et les contraintes sont mieux prédits par la théorie ESDPT, tandis que les deux théories PSDPT et HSDPT donnent des prédictions plus précises des fréquences naturelles et des charges critiques de flambement par rapport à d'autres théories.

Généralement, afin d'augmenter la précision des résultats, une croissance dans le degré du polynôme de l'équation (1.3) peut être une alternative. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement" [119]. La forme du déplacement proposée à travers l'épaisseur est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

<sup>13</sup> Exponential Shear Deformation Plate Theory

$f(z)$  peut être considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Selon cette fonction  $f(z)$ , nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont chronologiquement décrits comme suit:

Ambarsumyan [44]	$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Kaczkowski [120], Panc [121] et Reissner [122]	$f(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Levinson [94], Murthy [81] et Reddy [78]	$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Levy [103], Stein [108] et Touratier [84]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right)$
Soldatos [115]	$f(z) = h \sinh \left( \frac{z}{h} \right) - z \cosh \left( \frac{1}{2} \right)$
Karama et al. [110, 118]	$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$
Ferreira et al. [123]	$f(z) = \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right)$
Aydogdu [102]	$f(z) = z \alpha^{-2(z/h)^2 / \ln \alpha}, \quad \alpha > 0$
Mantari et al. [124]	$f(z) = z \alpha^{-2(z/h)^2}$
Mantari et al. [125]	$f(z) = \tan(mz)$
Mantari et al. [106]	$f(z) = \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) e^{m \cos(\pi z/h)}$
Mantari et Guedes Soares [126]	$f(z) = \sinh \left( \frac{z}{h} \right) e^{m \cosh(z/h)}$
Grover et al. [127]	$f(z) = \sinh^{-1} \left( \frac{rz}{h} \right) - z \frac{2r}{h \sqrt{r^2 + 4}}, \quad r = 3$
Sahoo et Singh [128]	$f(z) = \cot^{-1} \left( \frac{rh}{z} \right) - \frac{4r}{h(4r^2 + 1)}, \quad r = 0.46$

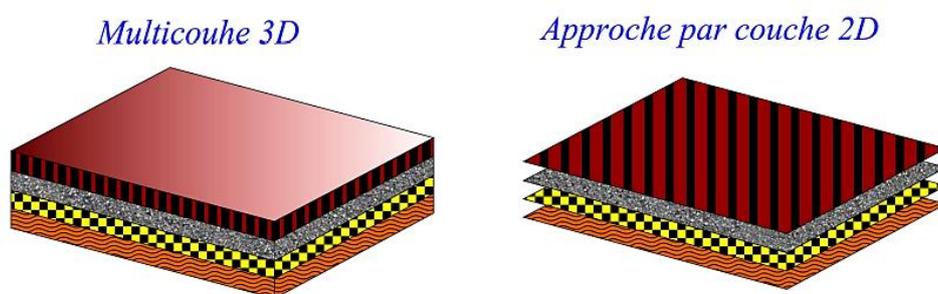
Les théories issues d'une approche monocouche équivalente sont incapables de décrire et prédire avec précision le comportement local des structures sandwichs y compris les

endommagements. Par exemple, la répartition des contraintes interlaminaires entre les couches, délaminages, etc. Ainsi, le problème majeur qui prévalait encore dans cette approche est la discontinuité des contraintes de cisaillement transversal au niveau des interfaces, qui est d'une grande importance dans la conception des structures. Ces constatations ont motivé les chercheurs à développer d'autres théories qui permettent une définition des champs par couche.

### 1.2.2.2 Approche par-couche ou couche discrète (approximation locale)

Les théories mentionnées ci-dessus ne parviennent pas à prédire et décrire avec précision les déformations et les contraintes locales, parce que ces dernières dépendent de la rigidité élastique des couches constitutives et leur ordre d'empilement. Par conséquent, l'utilisation d'une description par-couche devient indispensable pour l'obtention d'une description complète en 3D des états des contraintes et des déformations dans les stratifiés. Les modèles de type layerwise supposent des champs de déplacement séparément propres à chaque couche matérielle plutôt qu'une cinématique globale. Ces derniers consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

Dans cette approche, chaque couche est traitée individuellement (Fig.1.8), en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces. On applique à chaque sous structure la théorie du premier ordre ou une théorie d'ordre supérieur, ce qui conduit à un nombre de variables dépendant du nombre de couches. Les équations de mouvement sont écrites pour chaque couche constitutive, alors que les conditions d'interface sur les déplacements et les variables de contraintes transversales, sont présentées comme étant supplémentaires [129].



**Fig.1.8** Schéma de l'approche par-couche [130]

Le développement des théories basées sur l'approche par-couche (layerwise) a été lancé par Kao et Ross [131], Srinivas [132], Sun et Whitney [133], Swift et Heller [134], Seide [135] et d'autres auteurs [136-142]. Kao et Ross [131] ont fait une première tentative pour les poutres sandwichs multi-cœurs. Par la suite, Srinivas [132] a présenté une théorie de stratifiée discrète pour l'analyse des plaques multicouches. Dans son modèle, les composantes de déplacements plans sont considérées linéaires pour chaque couche et le déplacement transversal est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque. Sun et Whitney [133] ont utilisé la même idée dans une autre procédure pour l'obtention de la réponse dynamique des plaques stratifiées. Ils ont considéré la cinématique de la théorie FSDT pour chaque couche séparément. Le champ de déplacement pour  $k^{\text{th}}$  couche est exprimé comme suit:

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_0^k(x, y) + z\phi_x^k(x, y) \\ v^k(x, y, z) &= v_0^k(x, y) + z\phi_y^k(x, y) \\ w^k(x, y, z) &= w_0^k(x, y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

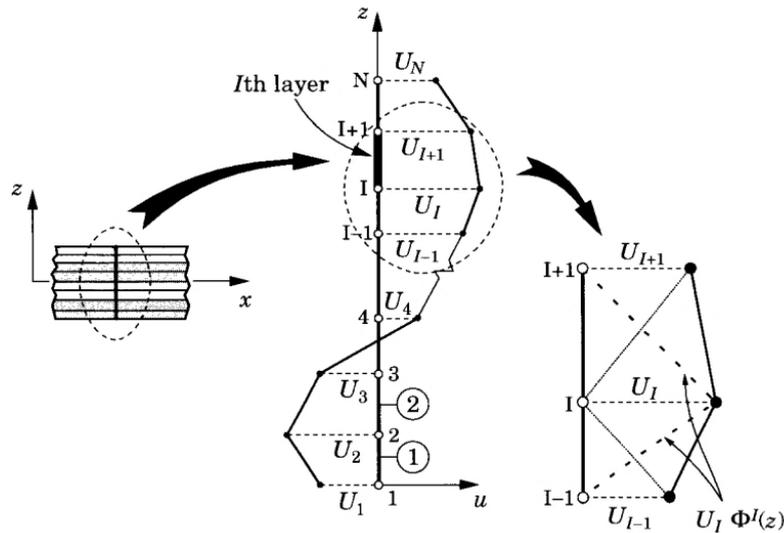
Les auteurs utilisent les conditions de continuité des contraintes de cisaillement au niveau des interfaces afin de réduire le nombre d'inconnues à cinq, qui est le même que le FSDT quel que soit le nombre de couches. Dans cette analyse, les facteurs de correction de cisaillement de Mindlin sont utilisés.

Ren [143] et Kassapoglou et Lagace [144, 145], se sont concentrés sur l'estimation de contraintes d'interface en construisant une cinématique plus riche, basée sur l'approche en contraintes. Ils ont supposé que les composantes de contraintes de CT sont quadratiques pour chaque couche et continues au niveau de l'interface. La même approche a été adoptée par Yin [146, 147] pour déterminer les contraintes interlaminaires.

En 1987, Reddy [136] a proposé une approximation par-couche, plus fine, des champs de déplacement suivant l'épaisseur d'une multicouche (Fig.1.9). Ce modèle est basé sur l'idée que les déplacements peuvent être représentés comme une combinaison linéaire des produits de fonctions des coordonnées dans le plan et les fonctions de l'épaisseur. Le champ de déplacement correspondant dans la  $k^{\text{ème}}$  couche s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
u^k(x, y, z) &= \sum_{j=1}^n U_j^k(x, y) \phi_j^k(z) \\
v^k(x, y, z) &= \sum_{j=1}^n V_j^k(x, y) \phi_j^k(z) \\
w^k(x, y, z) &= \sum_{j=1}^n W_j^k(x, y) \phi_j^k(z)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

où  $u^k$ ,  $v^k$  et  $w^k$  représentent les composantes des déplacements de la couche  $k$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement;  $\phi_j^k(z)$  sont des fonctions d'interpolation de Lagrange (1D) continues selon les coordonnées de l'épaisseur.



**Fig.1.9** Représentation des déplacements et des fonctions d'approximation linéaire utilisée dans la théorie Layerwise [2]

Cho et al. [140, 141] ont présenté une théorie dite "Cho et al. Higher order, Individual-Layer Theory" pour l'analyse des contraintes thermiques dans les plaques composites stratifiées. Ils ont utilisé la cinématique suggérée par Lo et al. [75] pour l'appliquer à chaque couche séparément. Cette théorie satisfait la compatibilité des déplacements et les conditions de l'équation d'équilibre de contraintes de cisaillement au niveau de l'interface. Le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
u_k(x, y, z_k) &= u_{0k}(x, y) + z_k u_{1k}(x, y) + z_k^2 u_{2k}(x, y) + z_k^3 u_{3k}(x, y) \\
v_k(x, y, z_k) &= v_{0k}(x, y) + z_k v_{1k}(x, y) + z_k^2 v_{2k}(x, y) + z_k^3 v_{3k}(x, y) \\
w_k(x, y, z_k) &= w_{0k}(x, y) + z_k w_{1k}(x, y) + z_k^2 w_{2k}(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{1.14}$$

où  $n$  est le nombre de couches du stratifié.

Plus tard, un nouveau modèle basé sur la théorie layerwise d'ordre supérieur a été proposée par Lee et *al.* [148] pour la flexion des plaques composites stratifiées. Les auteurs ont supposé que les composantes des déplacements dans le plan possèdent une variation cubique pour chaque couche, ainsi, une variation quadratique pour les contraintes de cisaillement avec des valeurs nulles aux surfaces libres (Eq.1.15). Dans ce modèle, la continuité des déplacements plans et les contraintes de cisaillement transversal au niveau des interfaces est assurée. On note également que le nombre de variables étant le même que celui de la théorie de Mindlin (FSDT).

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_0^k - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \phi_x^k \\ v^k(x, y, z) &= v_0^k - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \phi_y^k \\ w^k(x, y, z) &= w_0^k(x, y), \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.15)$$

Bien que la performance de l'approche layerwise soit bonne en termes de précision, lorsqu'il s'agit de l'estimation et la représentation des contraintes interlaminaires. Cependant, cette approche requiert un temps de calcul relativement long, puisque le nombre d'inconnues augmente d'une manière proportionnelle avec l'augmentation du nombre de couches. Ce qui a amené les chercheurs à développer d'autres théories raffinées en assurant un compromis significatif entre la précision des solutions et le faible temps de calcul.

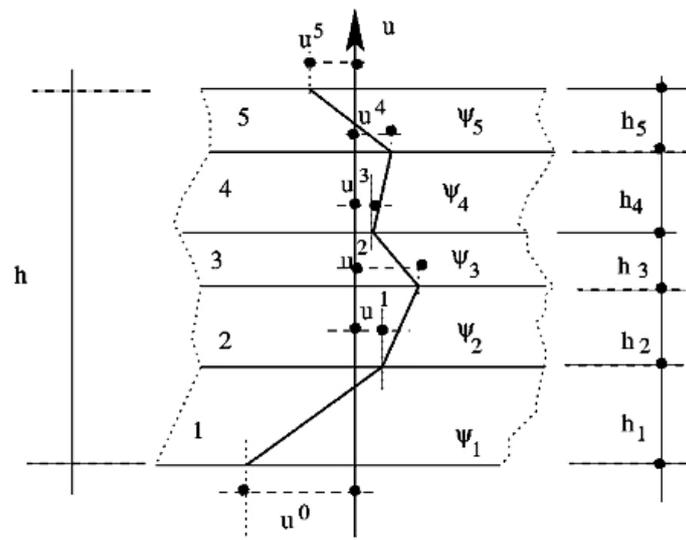
#### 1.2.2.2.1 Théories Zig-Zag

Pour remédier au problème de temps de calcul élevé dans les théories de plaques à couche discrète, Di Sciuva [149, 150], Murakami [151], Cho et Parmerter [152, 153], Lu et Liu [154] et d'autres auteurs, ont présenté des modèles raffinés de type Zig-Zag (ZZT)<sup>14</sup> dont les déplacements plans ont une variation linéaire [149, 150, 155-157] (Figs.1.10, 1.11) ou d'ordre supérieur [151-153, 158-166] (Fig.1.12), par morceaux, dans la direction de l'épaisseur. L'avantage principal du champ de déplacements des modèles Zig-Zag réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente [119].

---

<sup>14</sup> Zig-Zig Theories

Dans ces modèles, les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement transversal aux niveaux d'interfaces (entre les peaux et l'âme) sont respectées dans quelques travaux. Et le plus important, est que le nombre de variables cinématiques est indépendant du nombre de couches (comme dans l'approche ESL). L'idée fondamentale dans le développement de théories en Zig-Zag consiste à prendre un certain modèle de déplacement (ou de contraintes) dans chaque couche, puis d'utiliser les conditions de compatibilité et de l'équilibre d'interface pour réduire le nombre de variables inconnues [129].



**Fig.1.10** Géométrie et notations employées dans les théories en Zig-Zag [167]

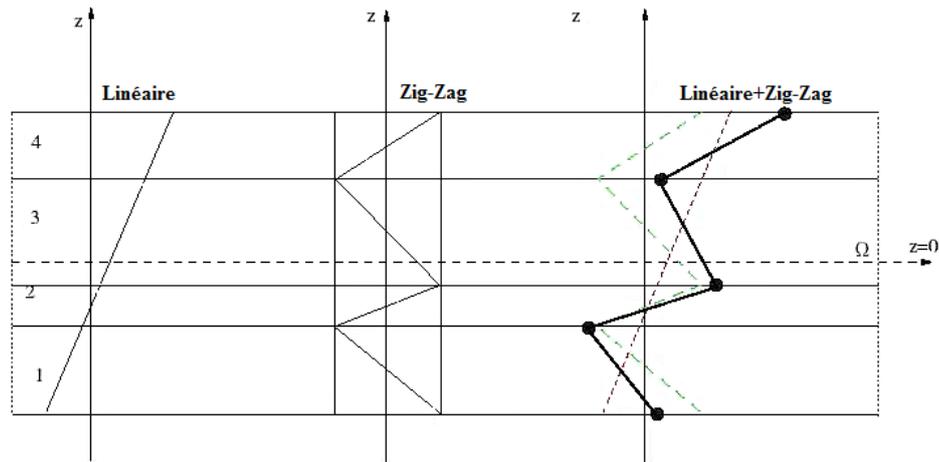
Historiquement, la plupart des contributions significatives concernant les théories de Zig-Zag sont originaires de l'école russe. En 2003, Carrera [167] a présenté un aperçu historique détaillé sur les théories Zig-Zag pour l'analyse des plaques et des coques en matériaux multicouches, dans lequel les trois théories fondamentales ont été abordées, à savoir: la théorie multicouche de Lekhnitskii (LMT)<sup>15</sup>, la théorie multicouche d'Ambartsumian (AMT)<sup>16</sup> et la théorie multicouche de Reissner (RMT)<sup>17</sup>.

Les théories LMT et AMT décrivent l'effet Zig-Zag par l'introduction de conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverses à travers les équations constitutives de chaque couche et les relations entre la déformation et le déplacement. Par contre, la RMT utilise les équations indépendantes dans la théorie [168].

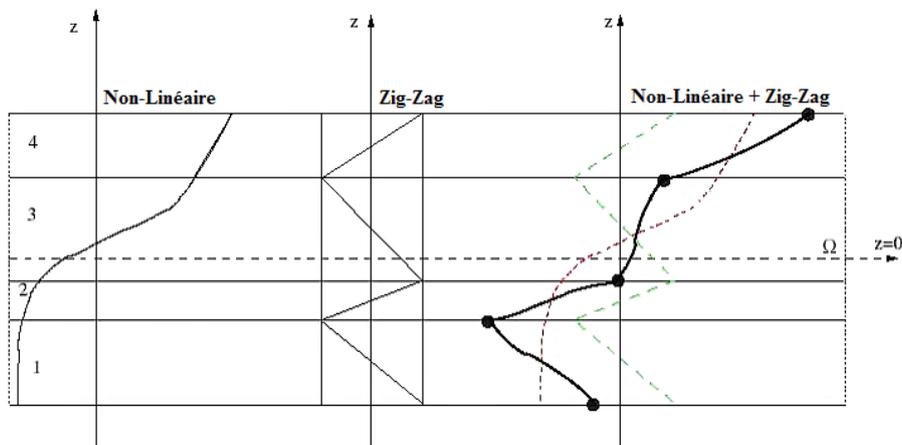
<sup>15</sup> Lekhnitskii Multilayered Theory

<sup>16</sup> Ambartsumian Multilayered Theory

<sup>17</sup> Reissner Multilayered Theory



**Fig.1.11** Champ de déplacements des modèles Zig-Zag du premier ordre [168]



**Fig.1.12** Champ de déplacements des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur [168]

En 1935, Lekhnitskii [169] a été le premier à proposer la théorie de Zig-Zag pour les structures multicouches. Elle est obtenue par la résolution d'un problème d'élasticité des poutres cantilevers. Dans cette théorie, l'auteur décrit la forme en Zig-Zag d'un champ de déplacement dans le sens de l'épaisseur et l'équilibre des contraintes transversales aux interfaces. En outre, des contributions exceptionnelles dans l'analyse des sous structures (plaques/coques) composites ont été établies par Ambartsumian [170, 171]. En 1969, Whitney [50] a par la suite étendu la théorie multicouche d'Ambartsumian aux problèmes de plaques stratifiées anisotropes, symétriques et non-symétriques. Sur la base de la théorie AMT, Di Sciuva [149] a développé une théorie de type Zig-Zag pour les plaques multicouches anisotropes. Dans ce modèle, les composantes des déplacements plans possèdent une distribution linéaire par morceaux dans le sens de l'épaisseur de la plaque, ainsi la continuité

des déplacements et des contraintes de cisaillement transversal aux interfaces est satisfaite (la déformation transversale normale est négligée). Deux ans après, l'auteur a appliqué son modèle (LZZ)<sup>18</sup> aux problèmes de flexion, vibration libre et flambage, des plaques composites multicouches [150].

En 1986, Murakami [151] propose un nouveau modèle, en utilisant la théorie variationnelle de Reissner [172]. Il a introduit dans le modèle de plaque de Reissner-Mindlin une fonction de type Zig-Zag (MZZF)<sup>19</sup>. Dans ce modèle, le champ de déplacement globale de la théorie FSDT est superposé avec celui de type Zig-Zag dans le sens de l'épaisseur, afin d'avoir les composantes des déplacements plans (Eq.1.16).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + M(z)u^{zz}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + M(z)v^{zz}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.16)$$

où la fonction  $M$  de Murakami est définie selon la formule suivante:

$$M(z) = (-1)^k \zeta_k \text{ avec } \zeta_k = \frac{2z_k}{h_k}$$

$\zeta_k$  est la coordonnée adimensionnelle d'un point situé sur la couche  $k$ ,  $u^{zz}$  et  $v^{zz}$  sont les amplitudes effectives de l'effet du zig-zag, ayant le sens de déplacements.

Une année plus tard, Toledano et Murakami [173, 174] ont développé cette théorie en ajoutant des termes du deuxième et troisième ordre au champ de déplacement de Murakami, afin d'enrichir leur cinématique (Eq.1.17).

$$u_i(x, y, z) = u_{i0} + z\psi_i + z^2\xi_i + z^3\zeta_i + (-1)^k \zeta_k u^{zz}(x, y), \quad i \in \{x, y, z\} \quad (1.17)$$

En 1995, Carrera [175] a généralisé la théorie de zig-zag de Murakami jusqu'à l'ordre  $n$ , en considérant le champ de déplacement suivant:

$$u_i(x, y, z) = u_{i0} + z\phi_i^{(1)} + z^2\phi_i^{(2)} + \dots + z^N\phi_i^{(N)} + M(z)u_i^{zz}(x, y), \quad i \in \{x, y, z\} \quad (1.18)$$

Dans le même contexte, Cho et Parmerter [152, 153] ont fourni une théorie efficace de type Zig-Zag en combinant la théorie d'ordre supérieur de Reddy avec celle de Di Sciuva

<sup>18</sup> Linear Zig-Zag model

<sup>19</sup> Murakami's Zig-Zag Function

[150]. Par ailleurs, Di Sciuva et Gherlone [176] ont proposé une théorie de zig-zag d'ordre supérieur (HZZT)<sup>20</sup>, capable de calculer les contraintes de cisaillement transversal à partir des équations constitutives. Cette théorie conduit à une variation parabolique des contraintes de cisaillement par morceaux qui s'annulent sur les surfaces supérieure et inférieure.

Pour avoir plus d'informations et de détails sur les différentes approches, théories et modèles d'éléments finis, des revues bibliographiques exhaustives, servant à analyser le comportement des structures composites multicouches et notamment les structures sandwichs, sont accessibles et sont données par [9, 35, 36, 59, 95, 114, 117, 129, 177-186].

### 1.2.2.2 Théories Global-Local d'ordre supérieur (GLHSDT)<sup>21</sup>

Étant donné que les théories mentionnées ci-dessus présentent des limitations dans la prédiction des contraintes de cisaillement transversal directement à partir des équations constitutives, des théories nommées "théorie Global-Local d'ordre supérieur" (GLHSDT), basées sur des hypothèses de superposition double (global-local), ont été proposées pour surmonter ces limitations. Dans cette théorie, le nombre de variables est indépendant du nombre de couches (pour plus de détails, on peut consulter les deux références [185, 186]). Li et Liu [187] furent les premiers à initier des travaux concernant cette approche. Les auteurs ont proposé un modèle, où les conditions de continuités de déplacements et ceux des contraintes de cisaillement interlaminaires sont satisfaites (Eq.1.19). Ainsi, les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les deux faces libres de la plaque sont également imposées (Eq.1.20). Ce modèle est capable de prédire avec précision les contraintes de cisaillement transversal directement à partir des équations constitutives. Dans les travaux [185, 188-194], les auteurs ont utilisé la technique de superposition double (global-local), pour prédire les contraintes interlaminaires dans les structures multicouches.

$$u^{k-1} \Big|_{z=z_k} = u^k \Big|_{z=z_k}, \quad \tau_{xz}^{k-1} \Big|_{z=z_k} = \tau_{xz}^k \Big|_{z=z_k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots, n \quad (1.19)$$

$$\tau_{xz} \Big|_{z=z_n} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{xz} \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (1.20)$$

Le champ de déplacement peut être écrit comme suit:

<sup>20</sup> Higher order Zig-Zag Theory

<sup>21</sup> Global-Local Higher order Shear Deformation Theory

$$\begin{aligned}
u^k(x, y, z) &= u_G(x, y, z) + u_L^k(x, y, z) \\
v^k(x, y, z) &= v_G(x, y, z) + v_L^k(x, y, z) \\
w^k(x, y, z) &= w_G(x, y, z)
\end{aligned}
\tag{1.21}$$

où  $u_G, v_G$  et  $w_G$  sont les composantes globales du déplacement,  $u_L$  et  $v_L$  sont les composantes locales,  $k$  représente la  $k^{\text{ème}}$  couche .

avec

$$\begin{aligned}
u_G(x, y, z) &= u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + z^3u_3(x, y) \\
v_G(x, y, z) &= v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2v_2(x, y) + z^3v_3(x, y) \\
w_G(x, y, z) &= w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2w_2(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

et

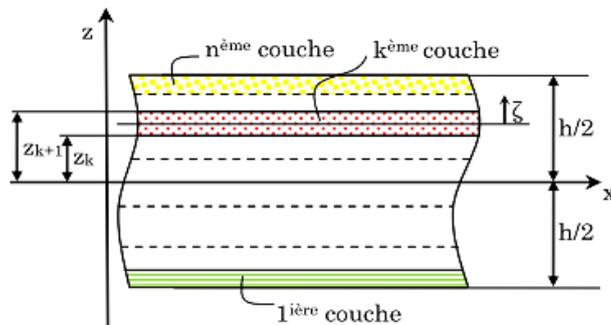
$$\begin{aligned}
u_L^k(x, y, z) &= u_0^k + u_1^k \xi_k \\
v_L^k(x, y, z) &= v_0^k + v_1^k \xi_k
\end{aligned}
\tag{1.23}$$

$\xi_k$  est la coordonnée locale dans la direction d'épaisseur de la couche  $k$ . Pour plus de simplicité, les auteurs ont proposé une transformation linéaire entre les coordonnées globales et les coordonnées locales,  $\xi_k$  est défini comme suit:

$$\xi_k = a_k z + b_k
\tag{1.24}$$

où

$a_k = 2/(z_{k+1} - z_k)$ ,  $b_k = -(z_{k+1} + z_k)/(z_{k+1} - z_k)$ ,  $z_k$  et  $z_{k+1}$  sont illustrées dans la figure ci-dessous.



**Fig.1.13** Système des coordonnées, ordre de couche d'une plaque multicouche [195]

Deux ans après, les auteurs Li et Liu [196] ont procédé à une amélioration sur le modèle précédent, en proposant un autre modèle raffiné (GLTSDT)<sup>22</sup>, basé sur la technique de superposition globale-locale (The 1,2-3 Double-Superposition Theory), dont les termes par-couche "local" du troisième ordre sont superposés avec des termes "global" du troisième ordre des déplacements plans.

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_G(x, y, z) + \bar{u}_L^k(x, y, z) + \hat{u}_L^k(x, y, z) \\ v^k(x, y, z) &= v_G(x, y, z) + \bar{v}_L^k(x, y, z) + \hat{v}_L^k(x, y, z) \\ w^k(x, y, z) &= w_G(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.25)$$

D'après l'équation (1.25), le terme local se compose de deux parties, la première partie  $(\bar{u}_L^k, \bar{v}_L^k)$  contient les termes de premier et de deuxième ordre, tandis que la seconde partie  $(\hat{u}_L^k, \hat{v}_L^k)$  contient le terme de troisième ordre, comme suit:

$$\begin{aligned} \bar{u}_L^k(x, y, z) &= u_1^k(x, y) \xi_k + u_2^k(x, y) \xi_k^2 \\ \bar{v}_L^k(x, y, z) &= v_0^k + v_1^k \xi_k + v_2^k(x, y) \xi_k^2 \\ \hat{u}_L^k(x, y, z) &= u_3^k(x, y) \xi_k^3 \\ \hat{v}_L^k(x, y, z) &= v_3^k(x, y) \xi_k^3 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Les composantes globales peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned} u_G(x, y, z) &= u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + z^3u_3(x, y) \\ v_G(x, y, z) &= v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2v_2(x, y) + z^3v_3(x, y) \\ w_G(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dans ce modèle, les auteurs ont imposé l'hypothèse de la continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement aux interfaces, qui permet de réduire considérablement le nombre de variables inconnus. Toutefois, quand la théorie de double-superposition 1,2-3 est comparée avec les théories par-couche, les coefficients d'ordre supérieur (en termes de  $z$ ) sont liés aux propriétés propres des couches et à la coordonnée  $z$  suivant l'épaisseur au lieu de variables inconnues [195].

Certains auteurs, dont Zhen et Wanji [193] ont montré que la théorie global-local du troisième ordre ou la théorie 1, 2-3 en double superposition de Li et Liu [196], donne des

<sup>22</sup> Global-Local Third order Shear Deformation Theory

solutions très satisfaisantes aux problèmes de flexion, quand le nombre de couches est inférieur à six. Cependant, la théorie GLTSDT présente des difficultés dans la prédiction des contraintes de cisaillement lorsque le nombre de couches est supérieur à six. En addition, l'exactitude de la solution de cette théorie diminue lorsqu'elle est appliquée à l'analyse des plaques multicouches non-symétriques [195].

Dans le cadre de développement des éléments finis, certains chercheurs ont adopté la théorie global-local d'ordre supérieur (GLHSDT), pour obtenir une bonne description des structures sandwichs [189-192, 197, 198]. Citons par exemple, Wu et *al.* [189] qui ont étendu la théorie de 1,2-3 double superposition proposée par Li et Liu [196] aux problèmes de plaques stratifiées alternées (angle-ply). Ces derniers ont ajouté les termes  $Q_{45k}$  de l'angle plis, puisqu'ils ne sont pas nuls (Eq.1.32). En partant de cette théorie, global-local, les auteurs ont formulé deux éléments finis de plaque, un élément quadrilatère à quatre nœuds (PQ) et un autre élément triangulaire à trois nœuds (PT). Les éléments ont treize degrés de liberté par nœud et le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches. Les résultats numériques trouvés par ces éléments montrent que les contraintes planes et les contraintes de cisaillement transversal peuvent être calculées avec précision par les équations constitutives directes, tandis que la contrainte normale ( $\sigma_{zz}$ ) est calculée à partir des équations d'équilibre. La théorie a été appliquée dans l'analyse des comportements dynamiques et flambage des plaques composites stratifiées et sandwichs [199, 200].

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^k(z) &= Q_{44k} \varepsilon_{xz}^k(z) + Q_{45k} \varepsilon_{yz}^k(z) \\ \tau_{yz}^k(z) &= Q_{45k} \varepsilon_{xz}^k(z) + Q_{55k} \varepsilon_{yz}^k(z)\end{aligned}\tag{1.28}$$

### 1.2.2.3 Modèles à cinématique enrichie

D'autres chercheurs ont tenté d'enrichir et d'améliorer les cinématiques des modèles précités (CLPT, FSDT, etc.), en ajoutant des termes capables de donner une bonne description des structures multicouches. Tessler et *al.* [201] ont présenté un nouveau modèle basé sur la théorie du premier ordre enrichie pour les plaques sandwichs et les composites stratifiées. Ils ont ajouté des fonctions zig-zag linéaires par morceau (Piecewise-Linear Zig-Zag functions), qui permettent de fournir une représentation plus réaliste des états des déformations et des contraintes de cisaillement. Le nombre des inconnus est relativement faible par rapport aux autres théories. Cependant, la formulation de ce modèle n'impose pas les conditions de

continuité des contraintes de cisaillement transversal. La cinématique est exprimée par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \theta_x(x, y) + \phi_x^{(k)}(z) \psi_x(x, y) \\ v^{(k)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \theta_y(x, y) + \phi_y^{(k)}(z) \psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.29)$$

où les fonctions zig-zag  $(\phi_x^{(k)}, \phi_y^{(k)})$  sont définies par:

$$\begin{aligned} \phi_x^{(k)}(x, y, z) &= 1/2(1 - \xi^{(k)})u_{0(k-1)} + 1/2(1 + \xi^{(k)})u_{0(k)} \\ \phi_y^{(k)}(x, y, z) &= 1/2(1 - \xi^{(k)})v_{0(k-1)} + 1/2(1 + \xi^{(k)})v_{0(k)} \end{aligned} \quad (1.30)$$

avec

$$\xi^{(k)} = \left[ \left( \frac{z - z_{(k-1)}}{h^{(k)}} - 1 \right) \right] \in [-1, 1] \quad (k = 1, \dots, n)$$

Oh et *al.* [202] ont élaboré une nouvelle formulation d'éléments finis basée sur la théorie du premier ordre améliorée (EFSDT)<sup>23</sup> pour étudier avec précision le comportement des composites stratifiés et des structures sandwichs. Pour cela, ils ont choisi le champ de déplacement du modèle de Cho [153] (HZZT), pour enrichir leurs cinématiques. Par ailleurs, Xiaohui et *al.* [203] ont développé un modèle efficace basé sur la théorie d'ordre supérieur global-local, pour analyser les structures stratifiées et les sandwichs. La partie locale de ce modèle est représentée par une cinématique de type zig-zag d'ordre supérieur. Les conditions de continuité des contraintes interlaminaires et la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces libres des peaux supérieure et inférieure, sont satisfaites. On note également que ces contraintes sont évaluées à partir de l'intégration des équations d'équilibre tridimensionnel. En partant de ce modèle, les auteurs ont formulé un élément fini triangulaire à continuité ( $C^0$ ) défini par six nœuds et 7ddl/nœud.

En 2012, Nemeth [204] a enrichi la cinématique du modèle classique de Kirchhoff, en ajoutant des fonctions cubiques de type zig-zag qui sont continues par morceaux, pour prendre en considération l'effet d'hétérogénéité des stratifiés et la déformation de cisaillement transverse. Les déformations et les contraintes de cisaillement transversal sont représentées par des fonctions quadratiques au sens de l'épaisseur, mais elles sont discontinues au niveau

<sup>23</sup> Enhanced First-order Shear Deformation Theory

d'interface des couches. Dans la même période, Sedira et *al.* [205] ont proposé un élément fini de forme quadrilatère possédant 4 nœuds, formulé sur la base du modèle variationnel discrète de Mindlin (DDM)<sup>24</sup>, pour les plaques multicouches/sandwichs. Ils ont introduit la fonction Zig-Zag de Murakami dans le modèle DDM afin d'améliorer la précision de contraintes planes et de cisaillement transversal. Le modèle est caractérisé par une variation linéaire par couche du déplacement, ce qui permet de satisfaire aux exigences de continuité des contraintes.

Dans l'article de Natarajan et Manickam [206], un élément fini  $C^0$  quadrilatère à 8 nœuds avec 13 ddl/nœud a été formulé sur la base de la théorie du troisième ordre raffiné pour l'étude statique et dynamique des plaques sandwichs de type matériaux fonctionnellement gradués (FGM)<sup>25</sup>, qu'elles soient minces ou épaisses. Les auteurs ont ajouté la fonction zig-zag de Murakami dans le champ de déplacement de la théorie TSDT (Eq.1.31), afin d'avoir une variation réaliste des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque.

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2\beta_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) + S^k\psi_x(x, y) \\ v^k(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2\beta_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) + S^k\psi_y(x, y) \\ w^k(x, y, z) &= w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2\Gamma(x, y) \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.3 Modèles éléments finis des structures sandwichs multicouches

Les solutions variationnelles ou analytiques exactes pour les problèmes qui ont des géométries complexes, des conditions aux limites arbitraires ou bien dans le cas d'une non-linéarité, sont terriblement difficiles à obtenir. Par conséquent, il faut recourir à des méthodes numériques d'analyse capables de résoudre de tels problèmes. La méthode des éléments finis s'est imposée dans les dernières décennies comme étant une méthode puissante et efficace, ce qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse du comportement complexe de structures composites sandwichs.

<sup>24</sup> Displacement Discrete Mindlin

<sup>25</sup> Functionally Graded Material (FGM): est la version continue de la plaque stratifiée. Plus précisément, grâce à de nouveaux procédés, il est possible de faire varier presque continuellement dans l'épaisseur les propriétés du matériau constitutif. Ce nouveau concept est une façon de répondre aux difficultés soulevées par les concentrations de contraintes présentées par les plaques stratifiées [123].

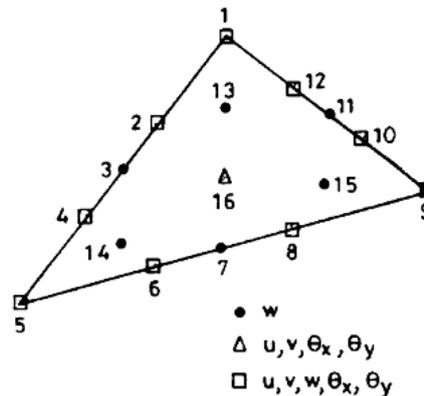
### 1.3.1 Éléments finis basés sur les théories du premier ordre

Depuis de nombreuses années, le développement des éléments finis basés sur la théorie FSDT a attiré l'attention de nombreux chercheurs, comme Abel et Popov [207], Monforton et Schmit [208], Ahmed [209], Khatua et Cheung [210, 211], Cook [212, 213] et Fazio et Ha [214], sont considérés comme étant les premiers à utiliser la méthode des éléments finis dans l'analyse du comportement des structures composites sandwichs. Monforton et Schmit [208] ont formulé un élément fini rectangulaire à base du modèle déplacement, en adoptant la théorie du premier ordre pour analyser les plaques et les coques sandwichs. Dans cet élément, les variables de déplacement (membranaires et transversales) des deux peaux sont interpolées par un polynôme d'Hermite.

En 1972, Cook [212] a développé deux éléments finis en incluant l'effet de déformations de cisaillement transversal, pour étudier les plaques sandwichs minces et épaisses. Les éléments sont de forme quadrilatérale avec douze degrés de liberté (12 ddl) pour chacun (l'un, ayant neuf paramètres de contrainte et l'autre contient seulement cinq). Au cours de la même année, Khatua et Cheung [210, 211] ont élaboré deux éléments finis, triangulaire et rectangulaire, où l'angle de cisaillement commun, au niveau du cœur n'a pas été pris en considération.

En 1990, Lardeur [70] a développé deux éléments finis baptisés DST et DSQ (Discrete Shear Triangular et Quadrilateral), pour l'analyse statique, dynamique et du flambage linéaire des structures composites multicouches. Ces éléments sont construits selon la formulation variationnelle mixte modifiée de Reissner, qui permet d'éviter le problème de verrouillage. L'auteur a utilisé les équations d'équilibre pour calculer les déformations et les contraintes de cisaillement transverse.

Dans le travail de Sheikh et *al.* [215], un élément fini triangulaire, possédant 16 nœuds et 55 ddl, a été développé pour l'analyse des plaques composites multicouches de différentes géométries. La distribution des degrés de liberté est présentée sur la figure 1.14. Dans cet élément, le déplacement transversal ( $w$ ) est interpolé précisément, en utilisant un polynôme complet d'ordre quatre, tandis que les déplacements membranaires ( $u$  et  $v$ ) et les deux rotations ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) sont exprimés par un polynôme d'ordre trois.



**Fig. 1.14** Élément triangulaire à 16 nœuds et leurs degrés de liberté [215]

Dans le cadre de sa thèse doctorale, Tafla [216] a élaboré, à l'aide d'une formulation mixte-hybride, un modèle élément fini quadrilatère (MiSP/ml) à 4 nœuds et 3 ddl/nœud, basé sur la théorie FSDT pour l'analyse des structures stratifiées et sandwichs. Le principal avantage dans ce travail est la non nécessité de recourir aux facteurs de correction pour avoir une distribution quadratique des contraintes de CT (approximation quadratique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, qui exige la continuité  $C^1$ ). L'élément est une extension de l'élément MiSP isotrope, proposé en 1993 par Ayad [69] sur la base du modèle mixte projeté en cisaillement (MiSP: Mixed with Shear Projection). Le verrouillage en CT est évité via une méthode nommée, 'Assumed Natural Strain' (ANS).

D'une manière similaire, Sakami [217] a développé dans son travail de doctorat, un modèle d'éléments finis pour les plaques et coques multicouches, basé sur une nouvelle approche variationnelle appelée "Discret Displacement Mindlin" (DDM). Le modèle d'éléments finis élaboré (DMQP/ml, DMQS/iso, DMQS/ml) est l'extension du modèle de Katili [218], proposé initialement pour les plaques/coques homogènes isotropes. L'auteur a introduit d'une manière discrète deux hypothèses (cinématique et mécanique) modifiées de Mindlin dans leur formulation, ainsi, elle a utilisé la méthode ANS, pour éliminer le problème de verrouillage.

### 1.3.2 Éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur

Au début des années quatre-vingt, un grand nombre de chercheurs ont fait d'importantes contributions à l'élaboration de nouveaux modèles d'éléments finis efficaces et capables de donner une bonne description des structures multicouches, en se basant sur la théorie HSDT. On commence par Kant et *al.* [219] qui sont les premiers à avoir publié des travaux

concernant la formulation d'éléments finis à base de cette théorie. Par la suite, Engblom et Ochoa [220] ont adopté la théorie du deuxième ordre pour développer un élément fini destiné à l'analyse statique des plaques stratifiées. Il s'agit de l'élément QHD40 qui est un quadrilatère à 8 nœuds et 7 ddl/nœud. Les équations d'équilibre sont utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que les contraintes planes sont évaluées par les équations constitutives.

Vers la fin des années 80, Pandya et Kant [221-224] ont étendu le modèle de Kant et *al.* [219], pour présenter une série de travaux, destinés à l'étude du comportement des plaques symétriques de type sandwich et stratifiées. Les auteurs ont formulé un élément fini  $C^0$  isoparamétrique de type Lagrange possédant neuf nœuds, confiné pour l'analyse statique, en se basant sur divers champs de déplacements (Eq.1.32-33).

- Modèle de déplacement à cinq variables inconnues (HOST5)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\psi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\psi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.32)$$

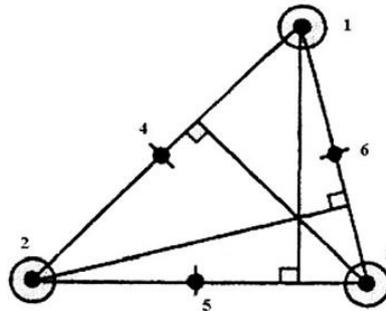
- Modèle de déplacement à six variables inconnues (HOST6)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\psi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\psi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z^2\zeta_z(x, y) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Kant et Kommineni [225] ont également élaboré un élément fini, basé sur la théorie du troisième ordre (Eq.1.5), pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique, des plaques composites FRC (Fibre Reinforced Composite) et des sandwichs. L'élément est un quadrilatère de type Lagrange à continuité  $C^0$ , défini par 9 nœuds et 9 ddl par nœud. Par la suite, Manjunatha et Kant [226, 227] ont présenté deux éléments finis isoparamétriques (9 et 16 nœuds), basés sur les deux modèles d'ordre supérieur précédents (HOST5 et HOST6), pour une évaluation précise des contraintes interlaminaires dans les plaques composites stratifiées et sandwichs. Les auteurs ont utilisé les équations constitutives pour évaluer les contraintes planes, tandis que les contraintes de cisaillement transversal sont estimées en utilisant les équations d'équilibre. Suite à cela, ils ont remarqué d'après les tests effectués,

que l'élément de seize nœuds donne de meilleures estimations de contraintes de cisaillement transversal et contraintes normales, en le comparant avec l'élément de 9 nœuds.

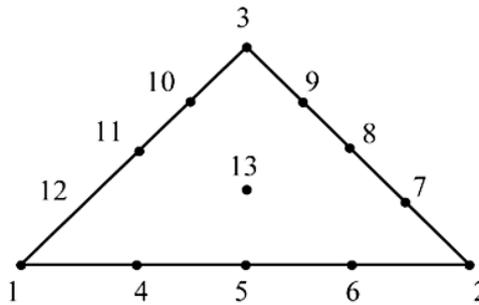
D'autres chercheurs, notamment Polit et Touratier [228-230] ont adopté le modèle "sinus" de Touratier [84] pour développer un nouvel élément fini à continuité  $C^1$ , adapté à l'étude du comportement linéaire et non linéaire des plaques multicouches/sandwichs. L'élément est triangulaire ayant 6 nœuds avec 81 ddl. La figure 1.15 montre la géométrie de l'élément correspondant, où les nœuds aux coins (1, 2, 3) ont 18 ddl, tandis que ceux au milieu des arêtes (4, 5, 6) ne possèdent que 9 ddl. Une fois de plus, dans ce travail, les contraintes de cisaillement transversal sont calculées via des équations d'équilibre. Par ailleurs, un certain nombre de chercheurs [231-233] ont adopté la théorie d'ordre supérieur de Reddy pour formuler leurs éléments.



**Fig. 1.15** Élément triangulaire à 6 nœuds [228]

Nayak et *al.* [231] ont décrit deux éléments finis quadrilatères isoparamétriques  $C^0$ , contenant 4 et 9 nœuds avec 7 ddl/nœud, afin d'étudier le comportement en flexion des plaques: isotropes, composites stratifiées et sandwichs. Ils ont utilisé la méthode ANS qui a été proposée en 1984 par Dvorkin et Bathe [234] et Huang et Hinton [235], pour éviter le problème de verrouillage en cisaillement ainsi que les modes parasites. Les deux éléments développés donnent des résultats précis et fiables (pour les déplacements et les contraintes) notamment l'élément à 9 nœuds. Au cours de la même période, Sheikh et Chakrabarti [233] ont publié un travail concernant le développement d'un élément fini triangulaire non conforme pour l'analyse statique de plaques composites stratifiées. Celui-ci est défini par 6 nœuds contenant  $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \gamma_x$  et  $\gamma_y$  comme des degrés de liberté à chacun. Un concept semblable a été appliqué par Rezaiee-Pajand et *al.* [232] pour concevoir un nouvel élément triangulaire à 13 nœuds. Les auteurs ont employé un polynôme d'interpolation approprié pour le déplacement transversal, en plus, ils ont pris la dérivée normale du déplacement transversal

( $\partial w/\partial n$ ) comme degré de liberté indépendant. La figure 1.16 montre la géométrie de cet élément, où les nœuds (1, 2, 3, 13) possèdent 5 ddl ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ ), les nœuds (4, 6, 7, 9, 10, 12) contiennent 6 ddl ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \partial w/\partial n$ ) et les nœuds (5, 8, 11) ont seulement un degré de liberté ( $\partial w/\partial n$ ).



**Fig. 1.16** Élément triangulaire à 13 nœuds [232]

Récemment, Tu et *al.* [236] ont formulé un élément fini rectangulaire ayant 9 ddl dans chacun de ses neuf nœuds pour l'analyse du comportement flexionnel et vibratoire des plaques composites stratifiées et sandwichs, en utilisant la cinématique de Pandya and Kant [237]. Dans cette étude aussi, les auteurs ont effectué une étude paramétrique, dans le but de montrer l'effet de certains paramètres (rapport d'aspect, angle d'orientation des fibres et le degré d'anisotropie) sur les contraintes planes, les contraintes de cisaillement transversal, les déplacements et les fréquences fondamentales.

En 2013, Goswami et Becker [238] ont élaboré un élément fini de forme rectangulaire à 4 nœuds avec 11 ddl/nœud, pour analyser les plaques isotropes et les plaques composites/sandwichs. La formulation de cet élément a été basée sur la théorie de troisième ordre (TSDT). Les auteurs ont pris les deux déformations angulaires ( $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ) comme des degrés de liberté. Dans la même année, Lee and Kim [239] ont développé un élément fini de forme quadrilatéral à 4 nœuds et 7 ddl/nœud ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ ), pour l'analyse des plaques composites multicouches. Les auteurs ont introduit la méthode ANS pour pallier le problème de verrouillage en CT.

### 1.3.3 Éléments finis basés sur l'approche layerwise

De nombreux travaux de recherche ont été effectués dans le but de développer des modèles d'éléments finis avec des cinématiques plus adéquates que celles qui ont précédé.

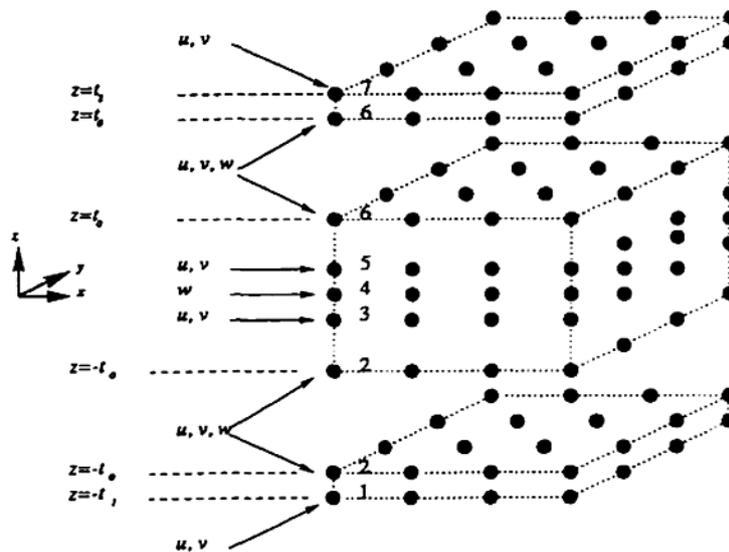
Ces éléments sont basés sur l'approche layerwise, et sont capables de donner une bonne description du comportement des structures sandwichs (dans le cas des réponses locales aux niveaux des interfaces). En 1982, Spilker [240] a développé un élément fini isoparamétrique à 8 nœuds pour l'analyse des plaques multicouches minces et épaisses, en utilisant une formulation hybride en contraintes. Les composantes des déplacements plans sont continus et linéaires pour chaque couche, et toutes les composantes de contrainte sont incluses et interpolées de façon indépendante dans chaque couche. La même formulation a été adoptée par Fazio et *al.* [241]. Dans la référence [242], un élément fini isoparamétrique  $C^0$  à 9 nœuds, formulé via une approche mixte, est élaboré pour prédire les contraintes interlaminaires et les déplacements dans les plaques sandwichs épaisses. Les auteurs ont proposé, pour chaque couche, un champ cubique et quadratique pour les déplacements dans le plan et hors-plan, respectivement. Dans leur modèle, uniquement la continuité des déplacements est assurée.

En outre, Lee et Fan [243] ont décrit un nouveau modèle dans lequel la théorie du premier ordre (FSDT) est utilisée pour modéliser les peaux, tandis que les déplacements au niveau de l'âme sont exprimés en fonction des déplacements des deux peaux (Eq.1.34). Dans ce modèle, les contraintes de cisaillement transversal varient linéairement, et la déformation selon l'épaisseur du cœur est constante. À partir de ce modèle, les auteurs ont formulé un élément fini isoparamétrique à 9 nœuds et 5 ddl/nœud, afin d'étudier la flexion et la vibration des plaques sandwichs.

$$\begin{aligned}
 u_c &= \left[ \frac{(u_0^b - u_0^t)}{h} + \frac{(t^b \phi_x^b + t^t \phi_x^t)}{2h} \right] z + \left[ \frac{(u_0^b + u_0^t)}{2} + \frac{(t^b \phi_x^b - t^t \phi_x^t)}{4} \right] \\
 v_c &= \left[ \frac{(v_0^b - v_0^t)}{h} + \frac{(t^b \phi_y^b + t^t \phi_y^t)}{2h} \right] z + \left[ \frac{(v_0^b + v_0^t)}{2} + \frac{(t^b \phi_y^b - t^t \phi_y^t)}{4} \right] \\
 w_c &= \frac{(w_0^b - w_0^t)}{h} z + \frac{(w_x^b + w_x^t)}{2}
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

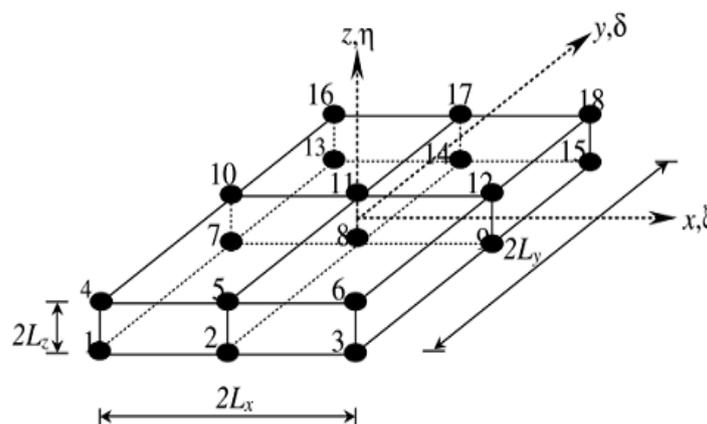
Par ailleurs, certains auteurs proposent des modèles éléments finis tridimensionnels, citons par exemple Oskooei et Hansen [244] qui ont développé un nouveau modèle basé sur l'approche layerwise, pour l'analyse statique des plaques sandwichs ayant des peaux composites stratifiées. Dans ce modèle, les peaux sont modélisées comme des plaques de Riessner-Mindlin, tandis que l'âme est modélisée en utilisant la théorie du troisième ordre, où le champ de déplacement est cubique pour les composantes  $u$  et  $v$  et quadratique pour la

composante  $w$ , dans le sens de l'épaisseur. En partant de ce modèle, les auteurs ont construit un élément fini tridimensionnel (3D) contenant 240 degrés de liberté (Fig.1.17).



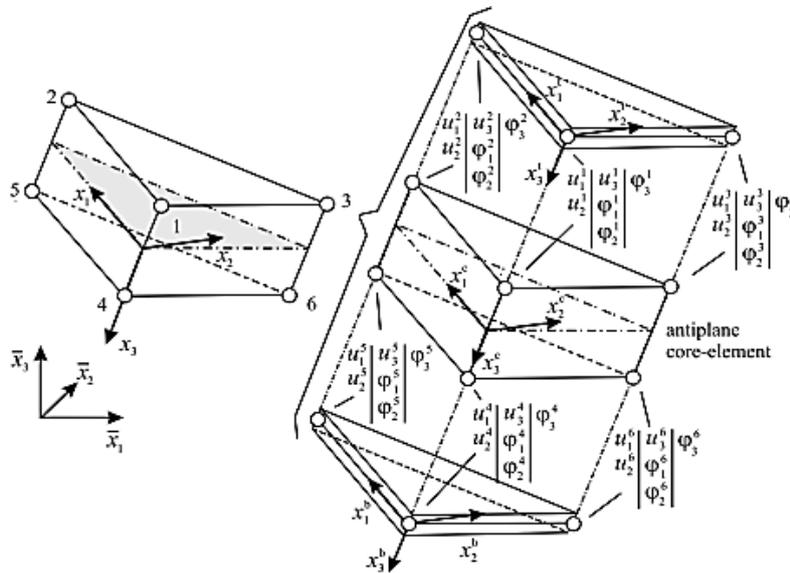
**Fig. 1.17** Élément d'Oskooei et Hansen [244]

Évoquons également l'élément de Ramtekkar et *al.* [245, 246] qui est proposé notamment pour l'évaluation précise des contraintes interlaminaires dans les plaques stratifiées et sandwichs. Il s'agit d'un élément brique à 18 nœuds avec 6 ddl/nœud (trois déplacements  $(u, v, w)$  et trois contraintes  $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z)$ ), comme le montre la figure 1.18. Les auteurs utilisent une cinématique basée sur l'approche layerwise, où les composantes du champ de déplacement  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des fonctions cubiques pour chaque couche. Les exigences de continuité des déplacements ainsi que les contraintes de cisaillement transversal dans ce modèle sont satisfaites.



**Fig. 1.18** Élément brique de Ramtekkar et *al.* [245]

Par la suite, Demiray et *al.* [247, 248] ont proposé un nouveau modèle pour analyser la non-linéarité statique des plaques sandwichs. Dans ce modèle, les peaux sont représentées par la théorie classique de Kirchhoff, et l'âme est représentée par la théorie du deuxième ordre (les composantes  $u$  et  $v$  sont quadratiques et la composante  $w$  est linéaire au sens de l'épaisseur de la plaque). Sur la base de ce modèle, les auteurs ont développé un élément fini prismatique (3D) défini par 6 nœuds: les nœuds (1, 2, 3) sont situés dans la face supérieure et les nœuds (4, 5, 6) dans la face inférieure, où chaque nœud contient 6 ddl (Fig. 1.19). La non-linéarité géométrique est prise en compte dans ce modèle. Pour éviter le problème de verrouillage en cisaillement, les auteurs ont utilisé la technique d'intégration réduite.



**Fig. 1.19** Élément prismatique de Demiray [247]

La cinématique adoptée pour les trois couches est:

- Peau supérieure (Top face-sheet):

$$\begin{aligned}
 v_1^t &= u_1^t + \left( x_3 + \frac{t^c + t^f}{2} \right) \phi_1^t \\
 v_2^t &= u_2^t + \left( x_3 + \frac{t^c + t^f}{2} \right) \phi_2^t \\
 v_3^t &= u_3^t
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

où  $t^c$  et  $t^f$  sont les épaisseurs de l'âme et des peaux, respectivement.

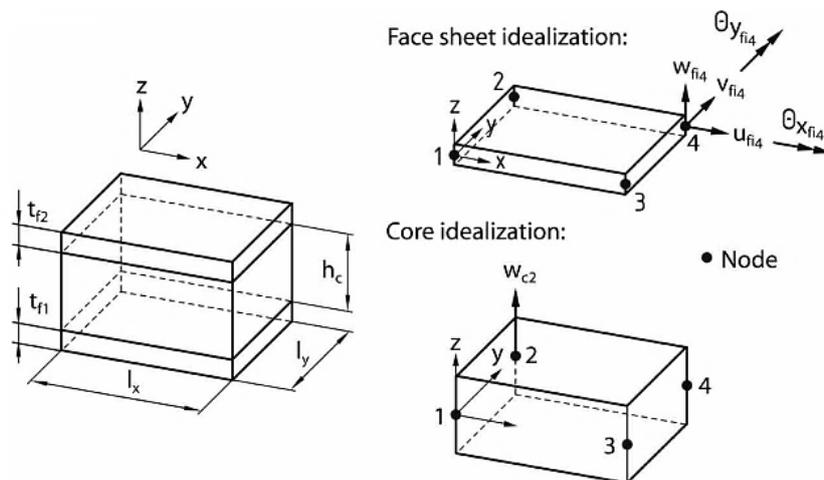
- Peau inférieure (Bottom face-sheet):

$$\begin{aligned} v_1^b &= u_1^b + \left( x_3 - \frac{t^c + t^f}{2} \right) \varphi_1^b \\ v_2^b &= u_2^b + \left( x_3 - \frac{t^c + t^f}{2} \right) \varphi_2^b \\ v_3^b &= u_3^b \end{aligned} \quad (1.36)$$

- Couche central (Core):

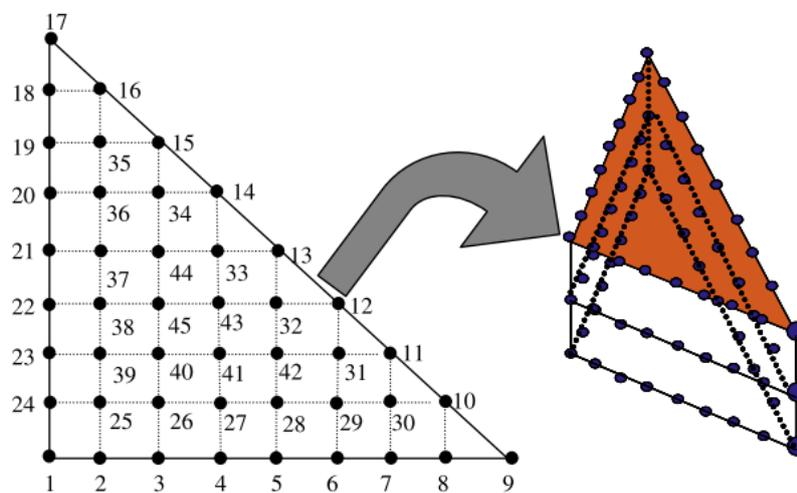
$$\begin{aligned} v_1^c &= \frac{1}{2}(u_1^t + u_1^b) - \frac{1}{t^c}(u_1^t - u_1^b)x_3 + \frac{t^c}{4}(\varphi_1^t - \varphi_1^b) - \frac{t^f}{2t^c}(\varphi_1^t + \varphi_1^b)x_3 + \left( \frac{4(x_3)^2}{(t^c)^2} - 1 \right) \psi_1^c \\ v_2^c &= \frac{1}{2}(u_2^t + u_2^b) - \frac{1}{t^c}(u_2^t - u_2^b)x_3 + \frac{t^c}{4}(\varphi_2^t - \varphi_2^b) - \frac{t^f}{2t^c}(\varphi_2^t + \varphi_2^b)x_3 + \left( \frac{4(x_3)^2}{(t^c)^2} - 1 \right) \psi_2^c \\ v_3^c &= \frac{1}{2}(u_3^t + u_3^b) - \frac{1}{t^c}(u_3^t - u_3^b)x_3 \end{aligned} \quad (1.37)$$

En outre, Linke et *al.* [249] ont développé un élément fini (3D) contenant 44 degrés de liberté, comme le montre la figure 1.20. Chaque peau contient 5 ddl par nœud, tandis que l'âme contient seulement un degré de liberté. Cet élément est proposé pour l'analyse statique et l'analyse de la stabilité des plaques sandwichs. La formulation de cet élément est basée sur le modèle de trois couches, où les peaux sont décrites par des éléments de plaques classiques basés sur l'hypothèse de Love-Kirchhoff et l'âme est décrite par la théorie du troisième ordre (polynôme cubique pour les composantes  $u$  et  $v$ , et quadratique pour la composante  $w$ ).



**Fig. 1.20** Élément (3D) de Linke et *al.* [249]

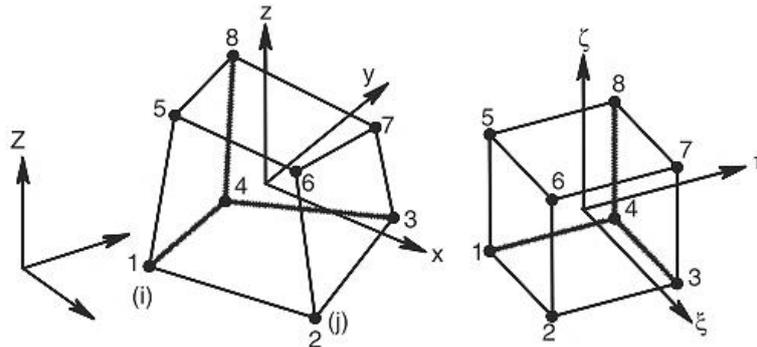
Citons aussi, Ramesh et ses collègues [250] qui ont proposé un élément fini triangulaire (HE-45-LT) de 45 nœuds avec 7 ddl/nœud (Fig.1.21), pour prévoir des contraintes interlaminaires dans les plaques composites stratifiées. La construction de cet élément est basée sur deux théories, la théorie du troisième ordre (TSDT) et la théorie layerwise de Reddy [136]. L'élément est capable de prédire avec précision les forces de cisaillement, les moments de torsion et spécialement les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Cependant, l'analyse des plaque de plusieurs couches nécessite énormément de temps de calcul, lorsque le nombre de couches est important car la variation de ce dernier est proportionnelle au nombre d'inconnues.



**Fig. 1.21** Élément triangulaire à 45 nœuds de Ramesh [250]

Durant la même période, Ćetković et Vuksanović [251] ont utilisé le modèle layerwise de Reddy [136] pour étudier le comportement statique, dynamique et de flambage des plaques composites stratifiées et sandwichs. Dans ce modèle, les composantes des déplacements plans ont une variation linéaire par couche (piecewise), et la composante transversale est constante, à travers l'épaisseur de la plaque. Les auteurs ont achevé leur travail par une étude paramétrique, afin d'étudier l'effet de l'anisotropie, l'orientation des fibres, le nombre de couches et le rapport d'aspect sur les déplacements, les contraintes planes, les contraintes de cisaillement transversal, les fréquences fondamentales et la charge critique de flambement. Ils ont trouvé que ces paramètres jouent un rôle important dans le comportement de plaques multicouches.

Darilmaz [252] a publié un travail dans lequel un élément fini solide hybride tridimensionnel (Fig. 1. 22) à 8 nœuds et 48 ddl a été employée dans l'analyse de plaques sandwichs. La formulation de cet élément est basée sur le principe variationnel de Hellinger-Reissner (développée déjà en 2005 par le même auteur [253]). L'objectif de l'investigation a été de prédire avec précision les contraintes hors-plan ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ ).



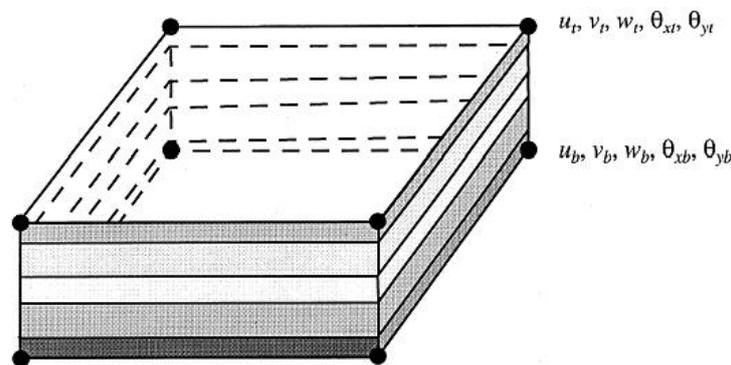
**Fig. 1.22** Élément solide de Darilmaz [252]

Dans un autre ordre d'idées, Mantari et *al.* [104] ont développé un nouveau modèle layerwise, dans lequel les composantes du déplacement plan ( $u$  et  $v$ ) sont exprimées par des fonctions tangentielles trigonométriques, tandis que la composante normale ( $w$ ) est constante selon l'épaisseur de la plaque. En partant de ce modèle, un élément fini quadrilatère isoparamétrique de continuité  $C^0$ , défini par 4 nœuds et 7 ddl/nœud ( $u_0, v_0, w_0, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \theta_x^c, \theta_y^c$ ), est utilisé pour étudier la flexion des panneaux multicouches épais. Les résultats obtenus par ce modèle sont satisfaisants pour la flèche et les contraintes qu'elles soient planes ou cisaillement.

### 1.3.4 Éléments finis basés sur la théorie de zig-zag

Pour améliorer les modèles précédents et corriger certains problèmes rencontrés dans les travaux cités ci-dessus, plusieurs auteurs ont axé leurs travaux vers la recherche des éléments finis de plus en plus élaborés en utilisant la théorie dite zig-zag. Leurs objectifs est d'obtenir un meilleur compromis entre la précision et le faible coût de calcul. Di Sciuva [254, 255] a élaboré deux éléments finis conformes de continuité  $C^1$  pour les plaques multicouches. Ces derniers possèdent dix degrés de liberté par nœud. Il s'agit de l'élément quadrilatère à quatre nœuds (RHQ40) et de l'élément triangulaire à trois nœuds (RHT30). L'auteur a utilisé

des fonctions d'interpolation hermitienne pour le déplacement transversal. La formulation était basée sur les théories zig-zag d'Ambartsumian où les exigences de continuité aux interfaces sont respectées. En outre, Carrera [256, 257], Averill et Yip [258], Cho et Averill [157, 259] et d'autres, ont présenté des modèles d'éléments finis créés sur la base de la théorie de zig-zag du premier ordre. On cite à titre d'exemple la brique à huit nœuds de Cho et Averill [157] qui est destinée à l'étude des plaques stratifiées composites et des plaques sandwichs. La géométrie de cet élément et ses degrés de liberté sont présentés dans la figure 1.23. La cinématique utilisée dans ce modèle est une combinaison de celle de Reissner-Mindlin et des fonctions de type zig-zag (Fig. 1.11). Les composantes des déplacements plans sont supposées comme des fonctions linéaires par morceaux et varient en zig-zag dans le sens de l'épaisseur de la plaque.



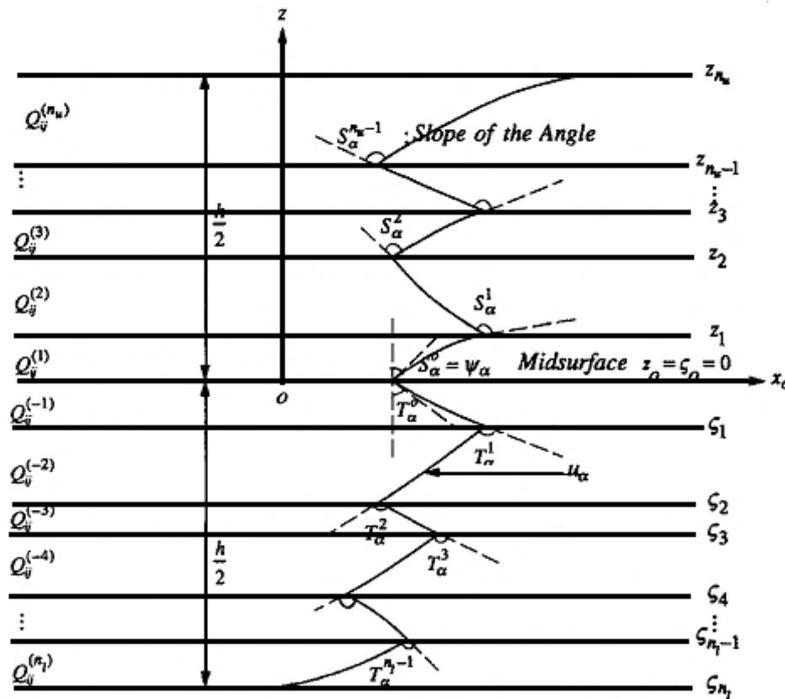
**Fig. 1.23** Élément brique à 8 nœuds Cho et Averill [157]

En 2003, Topdar et *al.* [163] ont développé un élément fini pour l'analyse statique des plaques sandwichs, en utilisant le modèle zig-zag d'ordre supérieur (HZZT)<sup>26</sup> de Cho et Parmerter [153]. L'élément est rectangulaire à quatre nœuds avec huit degrés de liberté  $(u, v, w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x \partial y, \gamma_x, \gamma_y)$  par nœud. Ce dernier a nécessité la continuité  $C^1$  à cause de l'interpolation de type Hermitien dans l'approximation du déplacement transverse. La cinématique de ce modèle est plus robuste que la précédente, voir l'Eq.1.38. Dans ce modèle, les exigences de continuité des déplacements et les contraintes interlaminaires sont satisfaites. L'ensemble de stratification et les configurations de déplacement sont indiqués sur la figure 1.24. Pour plus de détails sur ce modèle, le lecteur peut se référer à l'article de Cho et Parmerter [153].

<sup>26</sup> Higher order Zig-Zag Theory

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \sum_{k=0}^{n_u-1} S_x^k(z-z_k)H(z-z_k) + \sum_{k=0}^{n_l-1} T_x^k(z-\zeta_k)H(-z-\zeta_k) + \xi_x z^2 + \phi_x z^3 \\
 v &= v_0 + \sum_{k=0}^{n_u-1} S_y^k(z-z_k)H(z-z_k) + \sum_{k=0}^{n_l-1} T_y^k(z-\zeta_k)H(-z-\zeta_k) + \xi_y z^2 + \phi_y z^3 \quad (1.38) \\
 w &= w_0(x, y)
 \end{aligned}$$

où  $n_u$  et  $n_l$  sont respectivement, les nombre de couches dans la moitié supérieure et inférieure de la plaque.



**Fig. 1.24** Schéma de stratification générale et la configuration de déplacement [153]

D'une manière similaire au modèle de Cho, Chakrabarti et Sheikh [158, 260] ont développé un nouvel élément fini triangulaire à 6 nœuds et 7 ddl/nœud pour l'analyse statique des plaques sandwichs. Les déplacements dans le plan varient selon une loi cubique alors que le déplacement hors plan est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque. La variation des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur est représentée par des fonctions paraboliques pour chaque morceau, alors qu'elles sont nulles sur les deux faces de la plaque (supérieure et inférieure). L'élément formulé est non conforme dû à la condition de continuité de pente normale qui n'est pas satisfaite. Le seul problème signalé dans cet élément est que ce dernier nécessite une continuité  $C^1$  de déplacement transversal aux interfaces.

En 2008, Pandit et *al.* [162] ont amélioré le modèle zig-zag de Chakrabarti et Sheikh [260] afin d'étudier les plaques sandwichs avec une âme molle (soft core). Le déplacement transversal est susceptible de varier comme une fonction quadratique dans la couche centrale, tandis qu'il reste constant dans les deux faces. En partant de ce modèle, les auteurs ont développé un élément fini quadrilatère à continuité  $C^0$  défini par 9 nœuds et 11 ddl/nœud. En plus, les auteurs ont pallié le problème rencontré ci-dessus pour la continuité  $C^1$  en utilisant des fonctions de formes séparées pour définir les dérivés de déplacement transversal.

En 2013, Khandelwal et *al.* [160] ont développé un modèle d'élément fini efficace à continuité ( $C^0$ ) destiné à l'analyse statique des plaques sandwichs à âme molle. Ce modèle est élaboré en utilisant deux théories combinées: la théorie de zig-zag d'ordre supérieur (HZZT) et la méthode de moindres carrés (LES)<sup>27</sup>. L'élément est un quadrilatère isoparamétrique à 9 nœuds et 11ddl/nœud, formulé sur la base de la théorie HZZT. Cette théorie a fourni des résultats très satisfaisants pour les contraintes planes et le déplacement transversal par rapport aux autres théories 2D existantes dans la littérature, alors que les contraintes de cisaillement transversal sont évaluées d'une manière précise par la méthode LES. D'autres scientifiques, dont Singh et *al.* [261] et Chalak et *al.* [262] ont pris l'idée de Cho et Parmerter [153] et Pandit et *al.* [162] pour formuler leurs modèles d'éléments finis des plaques multicouches.

## 1.4 Conclusion

Ce premier chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour étudier notre problématique. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions générales concernant les matériaux sandwichs, ainsi qu'une revue sommaire sur les approches, les théories et les différents modèles d'éléments finis qui servent à analyser le comportement des structures composites multicouches et des structures sandwich en particulier.

La revue bibliographique a montré que les modèles basés sur l'approche monocouche équivalente deviennent moins efficaces lorsqu'il s'agit d'étudier les problèmes liés à l'endommagement (i.e. délaminage) et aux effets locaux (i.e. estimation des contraintes interlaminaires). Par conséquent, l'utilisation d'une description par-couche devient indispensable.

---

<sup>27</sup> The Least Square Error method

Actuellement, les éléments finis créés sur la base de l'approche par-couche (LW, ZZT and GLHSDT) gagnent du terrain, parce qu'ils fournissent une représentation cinématiquement correcte des contraintes interlaminaires ainsi que les déplacements au niveau d'interface.

La partie suivante portera sur la présentation d'un nouveau modèle de type layerwise pour la modélisation des plaques sandwichs et stratifiées. Ce modèle, qui a pour objectif l'enrichissement de la bibliothèque des éléments finis existants, est destiné non seulement pour l'analyse des plaques sandwichs, mais également pour l'étude des plaques isotropes et des composites multicouches.

## **PARTIE II**

### **DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEAU MODELE D'ELEMENTS FINIS SANDWICH SUR LA BASE DE L'APPROCHE LYERWISE**

# Chapitre 2

## Proposition d'un nouveau modèle layerwise pour l'analyse des structures sandwichs et des multicouches

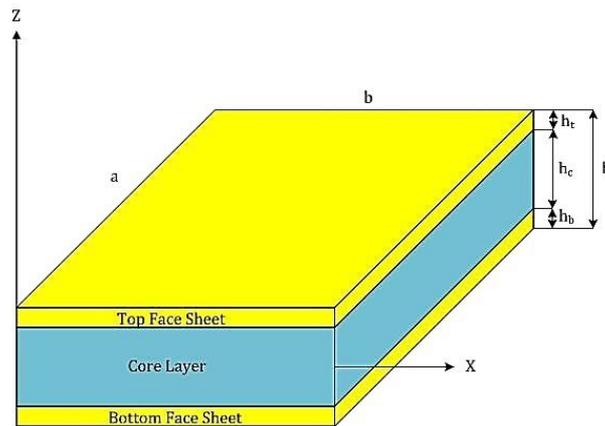
### 2.1 Introduction

Dans la partie bibliographie précédente, nous avons vu que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente, présentent des difficultés lorsqu'il s'agit de la prédiction et de l'estimation des déplacements et des contraintes interlaminaires aux interfaces. Donc, l'utilisation d'une description par-couche devient indispensable pour avoir une bonne prévision de l'état des contraintes. Cette description est plus répandue car chaque couche est traitée individuellement, en imposant les conditions de continuité en déplacements et en contraintes au niveau des interfaces.

Par conséquent, ce chapitre a pour objectif de présenter un nouveau modèle, basé sur l'approche layerwise, pour analyser le comportement des composites multicouches et notamment les plaques sandwichs qu'elles soient symétriques ou non-symétriques. Contrairement à tous les autres modèles layerwise présentés dans la littérature, le nombre de degrés de liberté est indépendant du nombre de couches. Le modèle proposé est issu d'une combinaison de deux théories; la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est adoptée pour modéliser les deux peaux, tandis que l'âme est modélisée en utilisant la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT). Ces deux théories combinées, satisfont les exigences de continuités des déplacements interlaminaires ainsi que les conditions de compatibilité. Le nouveau modèle permet de calculer les contraintes de cisaillement transversal d'une manière précise en utilisant directement les équations constitutives plutôt que les équations d'équilibre et sans recours à des facteurs de correction.

## 2.2 Formulation du modèle proposé

Les plaques sandwichs sont des structures qui se composent de trois couches principales, (figure 2.1) dont deux peaux minces (supérieure-inférieure) d'épaisseurs ( $h_t$ ), ( $h_b$ ), respectivement, et une couche centrale épaisse, nommée âme, d'épaisseur ( $h_c$ ). L'épaisseur totale de la plaque ( $h$ ) est la somme des épaisseurs de toutes les couches. Le plan ( $x, y$ ) du système de coordonnées coïncide avec le plan moyen de la plaque.



**Fig.2.1** Géométrie et notations d'une plaque sandwich.

### 2.2.1 Cinématique du présent modèle

Le modèle proposé dans ce travail combine deux théories:

- (i) La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) pour la modélisation des deux peaux
- (ii) La théorie du troisième ordre (TSDT) pour la modélisation de l'âme.

On suppose dans tous les cas qu'il n'y a pas de glissement aux interfaces, i.e. les couches sont parfaitement collées.

#### 2.2.1.1 Champ de déplacement de la couche centrale (âme)

Le champ de déplacement de l'âme permet de donner une description parabolique pour les contraintes de cisaillement sans recours à des facteurs de correction. La variation des déplacements dans le plan ( $u, v$ ) et le déplacement transversal ( $w$ ), à travers l'épaisseur, peut être exprimée, respectivement comme suit:

$$\begin{aligned}
 u_c &= u_0 + z\psi_x^c + z^2\eta_x^c + z^3\zeta_x^c \\
 v_c &= v_0 + z\psi_y^c + z^2\eta_y^c + z^3\zeta_y^c \\
 w_c &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont respectivement, les composantes de déplacement dans le plan et hors plan, du plan moyen de la plaque sandwich.  $\psi_x^c$  et  $\psi_y^c$  représentent les rotations du premier ordre de la sections autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement. Les rotations  $\eta_x^c$ ,  $\eta_y^c$ ,  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  sont des termes d'ordre supérieur, où  $\eta_x^c$  et  $\eta_y^c$  symbolisent les termes du second ordre (courbure) et  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  sont des termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

### 2.2.1.1.1 Relations cinématiques de la couche centrale

Les relations "déformation-déplacement" peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^c &= \varepsilon_x^{(0)} + z\chi_x^{(1)} + z^2\chi_x^{(2)} + z^3\chi_x^{(3)} \\
 \varepsilon_{yy}^c &= \varepsilon_y^{(0)} + z\chi_y^{(1)} + z^2\chi_y^{(2)} + z^3\chi_y^{(3)} \\
 \gamma_{xy}^c &= \gamma_{xy}^{(0)} + z\chi_{xy}^{(1)} + z^2\chi_{xy}^{(2)} + z^3\chi_{xy}^{(3)} \\
 \gamma_{yz}^c &= \gamma_{yz}^{(0)} + z\chi_{yz}^{(1)} + z^2\chi_{yz}^{(2)} \\
 \gamma_{xz}^c &= \gamma_{xz}^{(0)} + z\chi_{xz}^{(1)} + z^2\chi_{xz}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{(0)} &= \left( \varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)} \right) = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 \chi^{(1)} &= \left( \chi_x^{(1)}, \chi_y^{(1)}, \chi_{xy}^{(1)} \right) = \left( \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x} \right) \\
 \chi^{(2)} &= \left( \chi_x^{(2)}, \chi_y^{(2)}, \chi_{xy}^{(2)} \right) = \left( \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x} \right) \\
 \chi^{(3)} &= \left( \chi_x^{(3)}, \chi_y^{(3)}, \chi_{xy}^{(3)} \right) = \left( \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x} \right) \\
 \gamma_s^{(0)} &= \left( \gamma_{yz}^{(0)}, \gamma_{xz}^{(0)} \right) = \left( \psi_y^c + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \psi_x^c + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 \chi_s^{(1)} &= \left( \chi_{yz}^{(1)}, \chi_{xz}^{(1)} \right) = \left( 2\eta_y^c, 2\eta_x^c \right) \\
 \chi_s^{(2)} &= \left( \chi_{yz}^{(2)}, \chi_{xz}^{(2)} \right) = \left( 3\zeta_y^c, 3\zeta_x^c \right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

On peut écrire le champ de déformation de l'âme de la façon suivante:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{cases} + z \begin{cases} \chi_x^{(1)} \\ \chi_y^{(1)} \\ \chi_{xy}^{(1)} \end{cases} + z^2 \begin{cases} \chi_x^{(2)} \\ \chi_y^{(2)} \\ \chi_{xy}^{(2)} \end{cases} + z^3 \begin{cases} \chi_x^{(3)} \\ \chi_y^{(3)} \\ \chi_{xy}^{(3)} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{cases} + z \begin{cases} \chi_{yz}^{(1)} \\ \chi_{xz}^{(1)} \end{cases} + z^2 \begin{cases} \chi_{yz}^{(2)} \\ \chi_{xz}^{(2)} \end{cases}$$

### 2.2.1.2 Champ de déplacement des peaux

La théorie utilisée pour modéliser les deux peaux est la théorie du premier ordre (définie dans la section 1.1.2.1.2). Les composantes de déplacement ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ) sont exprimées par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} u^{(f)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x^f(x, y) \\ v^{(f)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y^f(x, y), \quad f = t, b \\ w^{(f)}(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les conditions de compatibilité ainsi que la continuité des déplacements au niveau de l'interface (top face sheet-core- bottom face sheet), conduisent aux expressions suivantes des déplacements dans les deux peaux (voir Fig. 2.2):

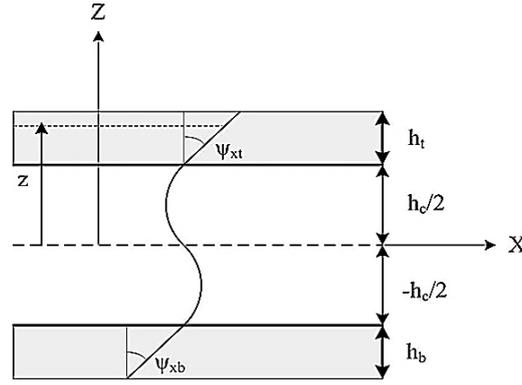
#### a. Peau supérieure (Top face-sheet)

$$\begin{aligned} u_t &= u_c \left( \frac{h_c}{2} \right) + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^t \\ v_t &= v_c \left( \frac{h_c}{2} \right) + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^t \\ w_t &= w_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\psi_x^t$  et  $\psi_y^t$  sont les rotations de la peau supérieure de la section autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

avec,

$$\begin{aligned} u_c \left( \frac{h_c}{2} \right) &= u_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c \\ v_c \left( \frac{h_c}{2} \right) &= v_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c \end{aligned} \quad (2.7)$$



**Fig.2.2** Cinématique du modèle proposé.

En substituant l'équation (2.7) dans l'équation (2.6), le champ de déplacement de la peau supérieure sera exprimé par:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^t \\
 v_t &= v_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^t \\
 w_t &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

**b. Peau inférieure (Bottom face-sheet)**

Selon la figure 2.2, le champ de déplacement de la peau inférieure s'écrit comme:

$$\begin{aligned}
 u_b &= u_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^b \\
 v_b &= v_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^b \\
 w_b &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $\psi_x^b$  et  $\psi_y^b$  sont les rotations de la peau inférieure de la section autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

avec,

$$\begin{aligned}
 u_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) &= u_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c \\
 v_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) &= v_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

La substitution de l'équation (2.10) dans l'équation (2.9) conduira à l'expression du champ de déplacement de la peau inférieure:

$$\begin{aligned}
 u_b &= u_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^b \\
 v_b &= v_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^b \\
 w_b &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.2.1.2.1 Relations cinématiques des peaux

Pour la peau supérieure, les relations ‘déformation-déplacement’ sont données par:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^t &= \frac{\partial v_t}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\
 \gamma_{xy}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{h_c}{2}\left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4}\left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) \\
 &\quad + \frac{h_c^3}{8}\left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\left(\frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x}\right) \\
 \gamma_{yz}^t &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^t \\
 \gamma_{xz}^t &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^t
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

D'une autre manière, l'équation (2.12) peut être écrite sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^t \\ \varepsilon_{yy}^t \\ \gamma_{xy}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} - \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} - \left(\frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{h_c}{2}\left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4}\left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^3}{8}\left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) - \frac{h_c}{2}\left(\frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_f^t = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^t \\ \varepsilon_{yy}^t \\ \gamma_{xy}^t \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \gamma_c^t = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^t \\ \gamma_{yz}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^t \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^t \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Où les exposants  $m, f$  et  $c$  désignent respectivement, membranaire, flexionnelle et cisaillement transversal.

Les relations "déformation-déplacement" de la peau inférieure peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^b &= \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(-\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^b &= \frac{\partial v_b}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(-\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\
 \gamma_{xy}^b &= \frac{\partial u_b}{\partial y} + \frac{\partial v_b}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4} \left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) \\
 &\quad - \frac{h_c^3}{8} \left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x}\right) \\
 \gamma_{yz}^b &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^b \\
 \gamma_{xz}^b &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^b
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

De même, l'équation (2.15) peut être sous-divisée en trois termes; membranaire, flexionnelle et cisaillement transversal. Soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m^b \\ \varepsilon_{xx}^{b(m)} \\ \varepsilon_{yy}^{b(m)} \\ \gamma_{xy}^{b(m)} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4} \left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) - \frac{h_c^3}{8} \left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x}\right) \end{array} \right] \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_f^b = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^{b(f)} \\ \varepsilon_{yy}^{b(f)} \\ \gamma_{xy}^{b(f)} \end{array} \right\} = z \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x} \end{array} \right], \quad \gamma_c^b = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz}^b \\ \gamma_{yz}^b \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^b \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^b \end{array} \right] \tag{2.17}$$

### 2.2.2 Loi de comportement d'un stratifié

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés. Les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales des fibres sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (2.18)$$

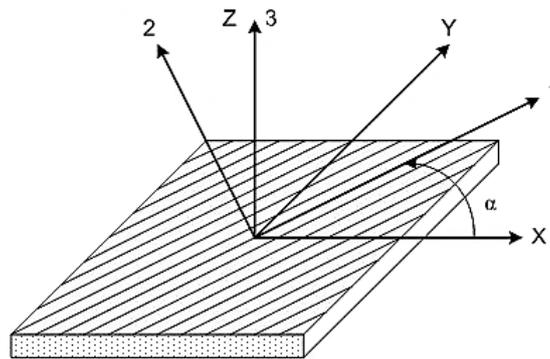
$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases}$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement, la direction longitudinale des fibres et la direction transversale aux fibres dans le plan de la plaque; 3 est la direction normale à la plaque.

Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}$  sont données par:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13} \quad (2.19)$$

avec  $E_1, E_2$  sont des modules d'Young du matériau dans les directions 1 et 2,  $G_{12}, G_{13}$  et  $G_{23}$  sont des modules de cisaillement; et  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  sont des coefficients de Poisson.



**Fig. 2.3** Les axes de référence ( $X, Y, Z$ ); et les axes de fibre du couche (1,2,3)

La loi de Hooke généralisée dans le système de coordonnées globales (Fig.2.3) peut être obtenue en utilisant la matrice de transformation  $[T]$  donnée par:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0 \\ sc & -sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

D'où,

$c = \cos \alpha$  et  $s = \sin \alpha$ , dans laquelle  $\alpha$  est l'angle de la fibre comme représenté sur la figure 2.3.

Les relations contraintes-déformations, pour une couche  $k$ , exprimées dans le repère global, s'écrivent donc:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

où  $\bar{Q}_{ij}$  sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche  $k$  donnée. Ils sont exprimés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} c^4 + Q_{22} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^2 + c^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} s^4 + Q_{22} c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} c^2 + Q_{55} s^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})sc \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} s^2 + Q_{55} c^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les deux peaux (supérieure et inférieure) sont considérées comme des plaques en matériaux composites stratifiées. Par conséquent, les relations contrainte-déformation d'une couche  $k^{th}$  dans le système de coordonnées global peuvent être exprimées par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^f \\ \sigma_{yy}^f \\ \tau_{yz}^f \\ \tau_{xz}^f \\ \sigma_{xy}^f \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{yz}^f \\ \gamma_{xz}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix}^{(k)} \quad i.e. \quad [\sigma^{(k)}] = [Q^{(k)}][\varepsilon^{(k)}] \quad (2.23)$$

$f = top, bottom$

L'âme est considérée comme un matériau composite orthotrope et les relations "contrainte-déformation" sont données sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

### 2.2.2.1 Les efforts résultants dans l'âme

Les efforts résultants dans l'âme sont obtenus par l'intégration des contraintes à travers son épaisseur.

#### 2.2.2.1.1 Résultantes en membrane

Le vecteur des résultantes en membrane noté  $N(x, y)$ , d'une couche  $k$ , est défini par:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.25)$$

#### 2.2.2.1.2 Moments de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.26)$$

#### 2.2.2.1.3 Résultantes d'ordre supérieur (second ordre)

Le vecteur des résultantes de second ordre, noté  $\overline{N}(x, y)$ , est exprimé par:

$$\bar{N}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \quad (2.27)$$

#### 2.2.2.1.4 Résultantes d'ordre supérieur (troisième ordre)

Le vecteur des résultantes du troisième ordre, noté  $\bar{M}(x, y)$ , est exprimé par:

$$\bar{M}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z^3 dz \quad (2.28)$$

#### 2.2.2.1.5 Résultantes de cisaillement

Le vecteur force en cisaillement noté  $V(x, y)$  est défini de la même manière par:

$$V(x, y) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2.29)$$

#### 2.2.2.1.6 Résultantes d'ordre supérieur en cisaillement

Le vecteur des résultantes d'ordre supérieur de cisaillement est exprimé par:

$$\begin{bmatrix} S_x & R_x \\ S_y & R_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} (z, z^2) dz \quad (2.30)$$

En substituant les équations (2.4) et (2.23) dans les expressions des efforts résultants (Eq.2.25-2.30), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q] z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q] z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q] z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.31)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q] z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q] z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q] z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.32)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_y \\ \overline{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^2 \left[ [\mathcal{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^3 \left[ [\mathcal{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left[ [\mathcal{Q}] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.35)$$

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z \left[ [\mathcal{Q}] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.36)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^2 \left[ [\mathcal{Q}] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [\mathcal{Q}]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.37)$$

Les composantes des matrices de rigidité de l'âme sont définies par:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \mathcal{Q}_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ (A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, E_{ij}^s, F_{ij}^s) &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \mathcal{Q}_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4) dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les expressions développées des résultantes s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{26} \\ F_{61} & F_{62} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_y \\ \overline{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{26} \\ F_{61} & F_{62} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{26} \\ G_{61} & G_{62} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{26} \\ F_{61} & F_{62} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{26} \\ G_{61} & G_{62} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{26} \\ H_{61} & H_{62} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Il est intéressant de noter que  $(B, D, E, F, G, H)$  sont des matrices de couplage. Les termes de couplage de même ordre s'annulent pour une âme symétrique.

Les expressions développées pour les efforts résultants au cisaillement s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{44} & B_{45} \\ B_{54} & B_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{44} & B_{45} \\ B_{54} & B_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{54} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{54} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Les équations constitutives de l'âme peuvent être écrites sous la forme contractée suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ \overline{N} \\ \overline{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] & [E] \\ [B] & [D] & [E] & [F] \\ [D] & [E] & [F] & [G] \\ [E] & [F] & [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \chi^{(1)} \\ \chi^{(2)} \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{Bmatrix} V \\ S \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^s] & [B^s] & [D^s] \\ [B^s] & [D^s] & [E^s] \\ [D^s] & [E^s] & [F^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_s^{(0)} \\ \chi_s^{(1)} \\ \chi_s^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Selon la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), les expressions des résultantes de la peau supérieure s'écrivent:

$$\begin{cases} N^t \\ M^t \\ T^t \end{cases} = \begin{bmatrix} A^t & B^t & 0 \\ B^t & D^t & 0 \\ 0 & 0 & A_c^t \end{bmatrix} \begin{cases} \mathcal{E}_m^t \\ \mathcal{E}_f^t \\ \gamma_c^t \end{cases} \quad (2.48)$$

où les composantes des matrices de rigidité de la peau supérieure  $(A^t, B^t, D^t)$  sont données par:

$$\begin{aligned} (A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_t}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \int_{h^k}^{h^{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ (\bar{A}_{ij}^t) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_t}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \int_{h^k}^{h^{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (2.49)$$

De même pour la peau inférieure,

$$\begin{cases} N^b \\ M^b \\ T^b \end{cases} = \begin{bmatrix} A^b & B^b & 0 \\ B^b & D^b & 0 \\ 0 & 0 & A_c^b \end{bmatrix} \begin{cases} \mathcal{E}_m^b \\ \mathcal{E}_f^b \\ \gamma_c^b \end{cases} \quad (2.50)$$

$$(A_{ij}^b, B_{ij}^b, D_{ij}^b) = \int_{-\left(\frac{h_c}{2}+h_b\right)}^{-\frac{h_c}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \int_{h^k}^{h^{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.51)$$

avec,

$$(\bar{A}_{ij}^b) = \int_{-\left(\frac{h_c}{2}+h_b\right)}^{-\frac{h_c}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \int_{h^k}^{h^{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j = 4, 5)$$

### 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique d'un nouveau modèle de plaque sandwich multicouches, basée sur l'approche layerwise, i.e. combinaison de deux théories: (i) la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) pour la modélisation des deux peaux; et (ii) la théorie du troisième ordre (TSDT) pour modéliser l'âme. Contrairement à tous les autres modèles layerwise présentés dans la littérature, le nombre de degrés de liberté est indépendant du nombre de couches. Ceci a pour avantage la réduction du temps de calcul lorsque le nombre de couches augmente. Sur la base du modèle

proposé, nous allons aborder, dans le chapitre III, la formulation et la validation d'un nouvel élément fini de forme rectangulaire pour l'analyse statique des plaques sandwichs, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques, ainsi que les plaques isotropes et les composites multicouches.

# Chapitre 3

## Développement d'un nouvel élément fini rectangulaire (RSFT52) pour l'analyse des plaques sandwichs et multicouches

### 3.1 Introduction

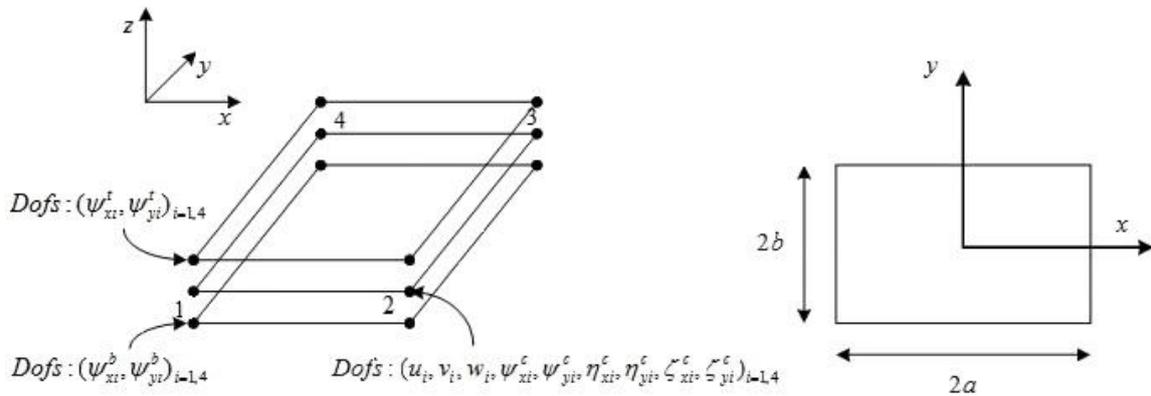
La revue de la littérature montre qu'un grand nombre d'auteurs préfèrent modéliser leurs structures multicouches en utilisant des éléments tridimensionnelles (3D), conçus à base du modèle layerwise [157, 242, 244, 245, 247, 249, 250, 252, 253]. D'après ces auteurs, les éléments 3D fournissent des résultats très satisfaisants, mais s'avèrent coûteux en termes de temps de calcul.

Dans ce chapitre, nous allons alors procéder au développement d'un nouvel élément fini, bi-dimensionnelle (2D), construit sur la base du modèle layerwise, décrit dans le chapitre précédent [Réf]. Cet élément est destiné à l'analyse statique des plaques sandwichs, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques, ainsi que les composites multicouches. L'élément développé est de forme rectangulaire, nommé **RSFT52** (**R**ectangular **S**andwich **F**irst **T**hird with **52**-degrees of freedom), défini par quatre nœuds et treize degrés de liberté par nœud. Chaque nœud contient: deux degrés de liberté de rotation pour chaque peau, six degrés de liberté de rotation aussi pour l'âme, alors que les trois degrés de liberté de type translation sont communs aux trois couches. Après la formulation, une série de tests ont été entrepris dans l'objectif de valider l'élément développé (RSFT52).

### 3.2 Formulation de l'élément RSFT52

#### 3.2.1 Description de l'élément RSFT52

L'élément sandwich développé, nommé RSFT52 (**R**ectangular **S**andwich **F**irst **T**hird with **52**- degrees of freedom), est formulé sur la base du modèle layerwise, i.e. combinaison de deux théories: (i) la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT); et (ii) une théorie du troisième ordre (TSDT). Cet élément est de forme rectangulaire à continuité  $C^0$ , défini par quatre nœuds et treize degrés de liberté par nœud (13 ddl/nœud). La figure 3.1(a) montre la géométrie de l'élément RSFT52 et ses degrés de liberté correspondants.



**Fig. 3.1** Géométrie de l'élément RSFT52 et les variables cinématiques nodales correspondantes

#### 3.2.2 Approximation nodale des déplacements

La formulation de l'élément nécessite uniquement une approximation  $C^0$ . Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées  $(x, y)$  de la plaque peut être exprimé par:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \delta_i \quad (3.1)$$

où  $\delta_i = \{u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}^c, \psi_{yi}^c, \eta_{xi}^c, \eta_{yi}^c, \zeta_{xi}^c, \zeta_{yi}^c, \psi_{xi}^t, \psi_{yi}^t, \psi_{xi}^b, \psi_{yi}^b\}^T$  est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément,  $i$  étant le numéro du nœud considéré ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Les fonctions d'interpolation bi-linéaire classique  $N_i$  de type Lagrange ont les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \\
N_2 &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \\
N_3 &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \\
N_4 &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

L'approximation des variables cinématiques des trois couches peut être exprimée comme suit:

a. Au plan médian de la plaque sandwich:

$$u_0(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_{0i} ; \quad v_0(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_{0i} ; \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) w_{0i} \tag{3.3}$$

b. L'âme:

$$\begin{aligned}
\psi_x^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{xi}^c , & \psi_y^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{yi}^c \\
\eta_x^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \eta_{xi}^c , & \eta_y^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \eta_{yi}^c \\
\zeta_x^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \zeta_{xi}^c , & \zeta_y^c(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \zeta_{yi}^c
\end{aligned} \tag{3.4}$$

c. Peau supérieure:

$$\psi_x^t(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{xi}^t , \quad \psi_y^t(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{yi}^t \tag{3.5}$$

d. Peau inférieure:

$$\psi_x^b(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{xi}^b , \quad \psi_y^b(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \psi_{yi}^b \tag{3.6}$$

L'approximation nodale du vecteur de déformation de l'âme (Eq.2.2-2.4) en un point quelconque de coordonnée  $(x, y)$  pourra être exprimée par les dérivées des déplacements nodaux comme suit:

$$\begin{aligned}
\{\chi^{(1)}\}^e &= [B_{\chi}^{(1)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} ; & \{\chi^{(2)}\}^e &= [B_{\chi}^{(2)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \\
\{\chi^{(3)}\}^e &= [B_{\chi}^{(3)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} ; & \{\gamma_s^{(0)}\}^e &= [B_{\gamma_s}^{(0)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \\
\{\chi_s^{(1)}\}^e &= [B_{\chi_s}^{(1)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} ; & \{\chi_s^{(2)}\}^e &= [B_{\chi_s}^{(2)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Où les matrices  $[B_{\chi}^{(1)}]$ ,  $[B_{\chi}^{(2)}]$ ,  $[B_{\chi}^{(3)}]$ ,  $[B_{\gamma_s}^{(0)}]$ ,  $[B_{\chi_s}^{(1)}]$  et  $[B_{\chi_s}^{(2)}]$  peuvent être obtenues à partir de la dérivation des fonctions de forme comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
[B_{\chi}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[B_{\chi}^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[B_{\chi}^{(3)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8) \\
[B_{\gamma_s}^{(0)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[B_{\chi_s}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[B_{\chi_s}^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pour la peau supérieure, les relations déformation-déplacement généralisées peuvent être données par:

$$\{\varepsilon_m^t\}^e = [B_m^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\varepsilon_f^t\}^e = [B_f^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\gamma_c^t\}^e = [B_c^t]^e \{\delta_i\}_e \quad (3.9)$$

où

$$[B_m^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

avec :

$$c = \frac{h_c}{2}, \quad d = \frac{h_c^2}{4}, \quad e = \frac{h_c^3}{8}, \quad f = -\frac{h_c}{2}$$

$$[B_f^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_c^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la même manière, les relations déformation-déplacement généralisées de la peau inférieure sont données par :

$$\{\varepsilon_m^b\}^e = [B_m^b]^e \{\delta_i\}_e ; \quad \{\varepsilon_f^b\}^e = [B_f^b]^e \{\delta_i\}_e ; \quad \{\gamma_c^b\}^e = [B_c^b]^e \{\delta_i\}_e \quad (3.11)$$

où,

$$[B_m^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

avec :

$$f = -\frac{h_c}{2}, \quad d = \frac{h_c^2}{4}, \quad h = -\frac{h_c^3}{8}, \quad c = \frac{h_c}{2}$$

$$\begin{aligned}
 [B_f^b] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\
 [B_c^b] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.2.3 Évaluation de la matrice de rigidité

Pour établir la relation entre les forces et les déplacements, on a utilisé le principe du travail virtuel, soit:

$$\delta U - \delta W = 0 \tag{3.13}$$

où  $U$  indique l'énergie potentielle de déformation dans le sandwich et  $W$  présente le travail effectué par les forces extérieures.

Dans le modèle proposé, le travail virtuel des efforts interne ( $\delta U$ ) de la plaque sandwich peut être écrit comme la somme des travaux virtuels des trois couches (peau supérieure, âme et peau inférieure). Soit:

$$\delta U = \delta U_c + \delta U_t + \delta U_b \tag{3.14}$$

où

$$\delta U = \int_{v_c} (\sigma^{(c)})^T \delta \varepsilon^{(c)} dv_c + \int_{v_t} (\sigma^{(t)})^T \delta \varepsilon^{(t)} dv_t + \int_{v_b} (\sigma^{(b)})^T \delta \varepsilon^{(b)} dv_b \tag{3.15}$$

L'expression de travail virtuel des efforts interne (Eq. 3.15) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{A_c} \int_{\frac{-h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left( \sigma_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx}^c + \sigma_{yy}^c \delta \varepsilon_{yy}^c + \sigma_{xy}^c \delta \varepsilon_{xy}^c + \sigma_{xz}^c \delta \varepsilon_{xz}^c + \sigma_{yz}^c \delta \varepsilon_{yz}^c \right) dz dA_c \\
& + \int_{A_t} \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_t} \left( \sigma_{xx}^t \delta \varepsilon_{xx}^t + \sigma_{yy}^t \delta \varepsilon_{yy}^t + \sigma_{xy}^t \delta \varepsilon_{xy}^t + \sigma_{xz}^t \delta \varepsilon_{xz}^t + \sigma_{yz}^t \delta \varepsilon_{yz}^t \right) dz dA_t \\
& + \int_{A_b} \int_{-\left(\frac{h_c}{2}+h_b\right)}^{\frac{h_c}{2}} \left( \sigma_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b + \sigma_{yy}^b \delta \varepsilon_{yy}^b + \sigma_{xy}^b \delta \varepsilon_{xy}^b + \sigma_{xz}^b \delta \varepsilon_{xz}^b + \sigma_{yz}^b \delta \varepsilon_{yz}^b \right) dz dA_b
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Le travail virtuel effectué par les forces externes est donné par:

$$\delta W = \int_{-b-a}^{+b+a} \int f(x, y) \delta w dx dy \tag{3.17}$$

Dans laquelle  $f(x, y)$  est la charge statique transversale répartie sur la surface de l'élément.

### 3.2.2.1 Matrice de rigidité de l'âme

La substitution des expressions des efforts résultants (Eqs 2.48–2.49) dans l'expression de travail virtuel dans l'âme (Eq.3.15), nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a \left( \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [A] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [B] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [D] \left\{ \chi^{(2)} \right\} \right. \\
& + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [B] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [D] \left\{ \chi^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [D] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [G] \left\{ \chi^{(3)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [E] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [G] \left\{ \chi^{(2)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [H] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [A^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [B^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [D^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [B^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [D^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [E^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [D^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [E^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& \left. + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [F^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} \right) dx dy - \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a f \delta w dx dy = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

L'introduction des relations déformation-déplacement dans l'expression (3.18), mène à l'équation d'équilibre suivante:

$$\left[ K_e^{(c)} \right] \{ d_e \} = \{ f_e^{(c)} \} \quad (3.19)$$

où la matrice de rigidité élémentaire de l'âme est donnée par:

$$\begin{aligned} \left[ K_e^{(c)} \right] = & \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right]^T \left[ A \right] \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right] + \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right]^T \left[ B \right] \left[ B_\chi^{(1)} \right] + \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right]^T \left[ D \right] \left[ B_\chi^{(2)} \right] \right. \\ & + \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right]^T \left[ E \right] \left[ B_\chi^{(3)} \right] + \left[ B_\chi^{(1)} \right]^T \left[ B \right] \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right] + \left[ B_\chi^{(1)} \right]^T \left[ D \right] \left[ B_\chi^{(1)} \right] \\ & + \left[ B_\chi^{(1)} \right]^T \left[ E \right] \left[ B_\chi^{(2)} \right] + \left[ B_\chi^{(1)} \right]^T \left[ F \right] \left[ B_\chi^{(3)} \right] + \left[ B_\chi^{(2)} \right]^T \left[ D \right] \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right] \\ & + \left[ B_\chi^{(2)} \right]^T \left[ E \right] \left[ B_\chi^{(1)} \right] + \left[ B_\chi^{(2)} \right]^T \left[ F \right] \left[ B_\chi^{(2)} \right] + \left[ B_\chi^{(2)} \right]^T \left[ G \right] \left[ B_\chi^{(3)} \right] \\ & + \left[ B_\chi^{(3)} \right]^T \left[ E \right] \left[ B_\varepsilon^{(0)} \right] + \left[ B_\chi^{(3)} \right]^T \left[ F \right] \left[ B_\chi^{(1)} \right] + \left[ B_\chi^{(3)} \right]^T \left[ G \right] \left[ B_\chi^{(2)} \right] \\ & + \left[ B_\chi^{(3)} \right]^T \left[ H \right] \left[ B_\chi^{(3)} \right] + \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right]^T \left[ A^s \right] \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right] + \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right]^T \left[ B^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right] \\ & + \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right]^T \left[ D^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right] + \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right]^T \left[ B^s \right] \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right] + \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right]^T \left[ D^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right] \\ & + \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right]^T \left[ E^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right] + \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right]^T \left[ D^s \right] \left[ B_{\gamma_s}^{(0)} \right] + \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right]^T \left[ E^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(1)} \right] \\ & \left. + \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right]^T \left[ F^s \right] \left[ B_{\chi_s}^{(2)} \right] \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.2.2.2 Matrice de rigidité des deux peaux

Les mêmes étapes ont été suivies pour élaborer la matrice de rigidité des deux peaux. On aura donc:

#### a. Peau supérieure

$$\begin{aligned} \left[ K_e^{(t)} \right] = & \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \underbrace{\left[ B_m^t \right]^T \left[ A^{(t)} \right] \left[ B_m^t \right]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{\left[ B_m^t \right]^T \left[ B^{(t)} \right] \left[ B_f^t \right]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{\left[ B_f^t \right]^T \left[ B^{(t)} \right] \left[ B_m^t \right]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ & \left. + \underbrace{\left[ B_f^t \right]^T \left[ D^{(t)} \right] \left[ B_f^t \right]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{\left[ B_c^t \right]^T \left[ A_c^{(t)} \right] \left[ B_c^t \right]}_{\text{cisaillement}} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.22)$$

#### b. Peau inférieure

$$\begin{aligned} \left[ K_e^{(b)} \right] = & \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \underbrace{\left[ B_m^b \right]^T \left[ A^{(b)} \right] \left[ B_m^b \right]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{\left[ B_m^b \right]^T \left[ B^{(b)} \right] \left[ B_f^b \right]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{\left[ B_f^b \right]^T \left[ B^{(b)} \right] \left[ B_m^b \right]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ & \left. + \underbrace{\left[ B_f^b \right]^T \left[ D^{(b)} \right] \left[ B_f^b \right]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{\left[ B_c^b \right]^T \left[ A_c^{(b)} \right] \left[ B_c^b \right]}_{\text{cisaillement}} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.23)$$

Finalement, la matrice de rigidité totale  $[K_e^T]$  de l'élément RSFT52 est la somme des matrices de rigidité de trois couches. Elle est exprimée comme ci-dessous:

$$[K_e^T] = [K_e^{(t)}] + [K_e^{(c)}] + [K_e^{(b)}] \quad (3.24)$$

La matrice de rigidité globale s'obtient par l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

### 3.3 Validation numérique de l'élément RSFT52

Dans cette section, nous allons évaluer les performances de l'élément développé (RSFT52), en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests. Des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs symétriques et non symétriques ainsi que différents cas de chargement, géométrie et conditions aux limites ont été considérés. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

#### 1.3.1 Conditions aux limites adoptées

Les conditions aux limites considérées dans cette étude sont présentées dans le tableau 3.1. Les notations de ces conditions sont:

CCCC: Plaque encastree sur les quatres bords.

SSSS: Plaque simplement appuyée sur les quatres bords.

CSCS: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords simplement appuyés

CFCF: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres.

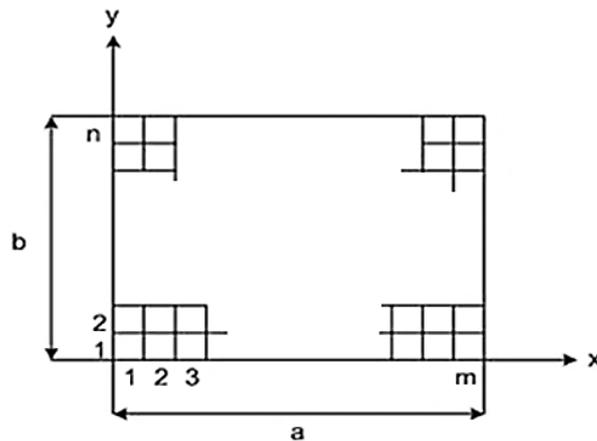
L'arrangement du maillage utilisé dans tous les exemples est illustré dans la figure 3.2.

#### 3.3.2 Plaques isotropes

Afin de montrer la capacité de la présente formulation dans l'analyse des plaques isotropes, deux exemples ont été considérés.

Le premier exemple concerne une plaque isotrope carrée simplement appuyée avec différents rapports d'épaisseur ( $a/h$ ). Quant au deuxième exemple, il concerne une plaque

isotrope rectangulaire simplement appuyée avec différents rapports d'aspect et différentes valeurs du coefficient de Poisson.



**Fig.3.2** Plaque rectangulaire ayant une maille de  $m \times n$

**Tableau 3.1** Détails de conditions aux limites utilisées pour les exemples numériques.

Conditions aux limites	Abréviations	Bords retenus
Simply supported	SSSS	$w_0 = \psi_x^c = \eta_x^c = \zeta_x^c = \psi_x^t = \psi_x^b = 0$ at $y = \pm \frac{b}{2}$ $w_0 = \psi_y^c = \eta_y^c = \zeta_y^c = \psi_y^t = \psi_y^b = 0$ at $x = \pm \frac{a}{2}$
Encasté	CCCC	$w_0 = \psi_x^c = \psi_y^c = \eta_x^c = \eta_y^c = 0$ $\zeta_x^c = \zeta_y^c = \psi_x^t = \psi_y^t = \psi_x^b = \psi_y^b = 0$
Encasté - Simply supported	CSCS	Encasté à $x = \pm \frac{a}{2}$ Simply supported à $y = \pm \frac{b}{2}$
Encasté-Libre	CFCF	Encasté à $x = \pm \frac{a}{2}$ Libre à $y = \pm \frac{b}{2}$

### 3.3.2.1 Plaques isotropes carrées simplement appuyées sous chargement uniforme

Une plaque carrée simplement appuyée soumise à un chargement uniforme a été considérée. Les propriétés mécaniques du matériau sont:  $E = 10.92$ , et  $\nu = 0.3$ . Le tableau 3.2

réuni les résultats du déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ), pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs ( $a/h = 2, 3, 4, 5$  et  $10$ ).

$$\bar{w} = (100 Dw / a^4 q_0) \quad \text{avec} \quad D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (3.25)$$

Les résultats obtenus par l'élément développé (RSFT52) sont en bon accord avec la solution analytique de Kant [82]; et ceux trouvés par des modèles d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre [263, 264] et des théories d'ordre supérieur [219].

**Tableau 3.2** Déflexion normalisée ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur $a/h$				
		2	3	4	5	10
Présent élément (8×8)	RSFT52	0.8873	0.6179	0.5211	0.4742	0.3912
Présent élément (10×10)	RSFT52	0.8856	0.6185	0.5230	0.4774	0.4029
Présent élément (12×12)	RSFT52	0.8850	0.6190	0.5241	0.4792	0.4095
Présent élément (14×14)	RSFT52	0.8850	0.6190	0.5247	0.4802	0.4136
Présent élément (16×16)	RSFT52	0.8847	0.6191	0.5251	0.4809	0.4164
Kant et al. [219]	HSDT	0.8530	0.6120	0.5222	0.4800	0.4230
Kant [82]	HSDT	-	-	-	0.4800	0.4240
Yuan et Miller [264]	FSDT	-	-	0.6139	0.5544	0.4614
Rao et al. [263]	FSDT	-	-	0.5157	0.4763	0.4237

### 3.3.2.2 Plaques isotropes rectangulaires simplement appuyées

On considère une plaque rectangulaire simplement appuyée et soumise à un chargement uniforme. Dans ce test, différents rapports d'aspect ( $a/b$ ) avec différents coefficients de Poisson ( $\nu$ ) ont été considérés. Les résultats obtenus par notre élément (RSFT52) sont normalisés par la formule (3.26).

$$\bar{w} = \frac{w G}{h p_0}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{p_0} \quad (3.26)$$

Les résultats du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) ainsi que la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) sont représentés dans le tableau 3.3. La comparaison a été faite avec la solution analytique de Kant et al. [265]. Les résultats obtenus par l'élément RSFT52 montrent les performances de la formulation proposée.

**Tableau 3.3** Déflexion normalisée ( $\bar{w}$ ) et contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ), d'une plaque isotrope simplement appuyée ( $E=1 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.2, 0.3$  et  $0.4$ ).

$\nu$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$		$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	
			Présent élément	Élasticité [265]	Présent élément	Élasticité [265]
0.2	10	10	535.684	558.175	7.311	7.313
		7.14	145.161	148.390	5.087	5.183
0.5	10	10	423.515	437.520	6.742	6.765
		7.14	114.961	116.730	4.698	4.792
0.3	10	10	174.890	178.440	4.686	4.850
		7.14	47.952	48.446	3.283	3.422
2.0	10	10	29.472	29.604	2.345	2.552
		7.14	8.470	8.440	1.639	1.785
0.2	1.0	10	198.116	203.150	4.708	4.846
0.4	1.0	10	151.530	153.760	4.663	4.846

### 3.3.3 Plaques stratifiées

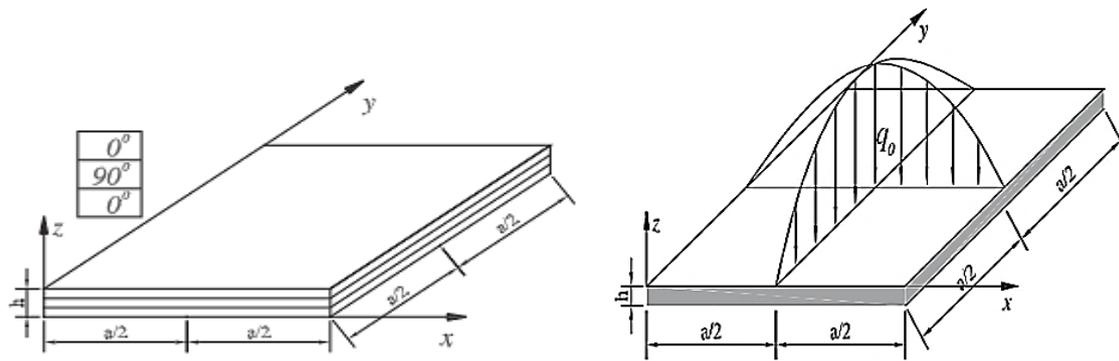
Dans cette section, trois exemples ont été considérés pour mettre en évidence la performance du modèle proposé dans l'analyse du comportement des plaques stratifiées.

#### 3.3.3.1 Plaque carrée à trois couches (0/90/0) sous chargement sinusoïdal

Dans le premier exemple, une plaque stratifiée carrée simplement appuyée (SSSS), soumise une charge doublement sinusoïdale ( $q(x, y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ ), a été considérée (figure 3.3). La plaque est constituée de trois couches identiques (0/90/0) dont les caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau 3.4. Différents types de maillages ( $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $10 \times 10$ ,  $12 \times 12$ ,  $14 \times 14$  et  $16 \times 16$ ), ainsi que différents rapports d'épaisseurs ( $a/h = 0,25, 0,1$  et  $0,05$ ), ont été considérés.

Les résultats du déplacement transversal sont normalisés par la formule suivante:

$$\bar{w} = \frac{w}{a^4 q_0} \frac{100 E_2 h^3}{1} \quad (3.27)$$



**Fig.3.3** Plaque stratifiée carrée à trois couches, simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal

**Tableau 3.4** Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques stratifiées.

Propriétés mécaniques	Location	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{21}$
Plaques stratifiées	All layer	25E	E	0.500E	0.50E	0.20E	0.25

La convergence du déplacement transversal est montrée sur le tableau 3.5 et sur la figure 3.4. Les résultats obtenus par le présent élément (**RSFT52**) sont comparés avec les solutions d'élasticité-3D, données par Pagano [24]; avec les modèles d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy [78] et de Kant [30]; et d'autre part, avec ceux obtenus par des modèles d'éléments finis basés sur différentes théories [160, 233, 250, 260, 266, 267]:

- FEM-T6-HSDT: Élément fini triangulaire à six nœuds, basé sur la théorie d'ordre supérieur, présenté par Sheikh et Chakrabarti [233].
- FEM-T45-LW: Élément fini triangulaire à quarante-cinq nœuds, basé sur la théorie layerwise, présenté par Ramesh et *al.* [250].
- FEM-T45-TSDT: Élément fini triangulaire à quarante-cinq nœuds, basé sur la théorie du troisième ordre, présenté par Ramesh et *al.* [250].
- FEM-T6-HZZT: Élément fini triangulaire à six nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, présenté par Chakrabarti et Sheikh [260].
- FEM-Q4-RTOST: Élément fini quadrilatère à quatre nœuds, basé sur la théorie du troisième ordre raffinée, présenté par Kulkarni et Kapuria [266].
- FEM-Q9-HZZT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, présenté par Khandelwal et *al.* [160].

- FEM-SFR80: Éléments fini hexaèdre à huit nœuds, basé sur le concept " Space Fiber Rotation", présenté par Meftah [267]

D'après les résultats qui figurent sur le tableau 3.5, on remarque que le modèle d'élément fini développé **RSFT52** donne des résultats très satisfaisants, en terme de stabilité et rapidité de convergence, notamment dans le cas des plaques épaisses ( $h/a = 0.25$ ), où les résultats sont en excellent accord avec les solutions de références, à titre d'exemple pour un maillage de  $4 \times 4$ , on trouve une erreur de 0.0273 %.

### 3.3.3.2 Plaques carrées à trois et cinq couches sous chargement uniforme

On considère une plaque stratifiée carrée simplement appuyée et soumise à une charge uniformément répartie. Les propriétés mécaniques sont celles de l'exemple 3.3.3.1. Deux types de stratifications croisées, dont lesquelles, trois couches (0/90/0) et cinq couches (0/90/90/90/0), ont été étudiées. Dans les deux cas, les couches de même orientation ont la même épaisseur. Différents maillage ( $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $10 \times 10$ ,  $12 \times 12$ ,  $14 \times 14$  et  $16 \times 16$ ) ont été considérés. Dans les tableaux 3.6 et 3.7, on présente les résultats du déplacement transversal au centre de la plaque pour les deux stratifications. Les résultats obtenus sont normalisés par la formule précédente (3.27).

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux issus de la solution analytique donnée par la théorie d'ordre supérieur de Reddy [78], la méthode EFG<sup>28</sup>, basée sur la théorie FSDT, présentée par Belinha et *al.* [268], et à ceux obtenus par d'autres modèles numériques de la littérature [163, 233, 267, 269]. Par exemple: Xiao et *al.* [270] ont utilisé le logiciel commercial ABAQUS pour modéliser ce type de plaque, en choisissant un élément fini brique (3D) à 20 nœuds, avec un maillage de 4800 éléments, pour le quart de la plaque. Les auteurs ont également utilisé deux éléments MQ-MLPG et TPS-MLPG, qu'ils ont développé sur la base de " la théorie d'ordre supérieur et la déformation normale de la plaque " (HOSNDPT)<sup>29</sup>; et la formulation de point fini (MLPG)<sup>30</sup> basée sur la méthode de la fonction de base radiale multiquadrique (RBFs)<sup>31</sup>. La comparaison montre la précision et l'efficacité de l'élément RSFT52, dans l'analyse des plaques stratifiées multicouches.

<sup>28</sup> Element-Free Galerkin

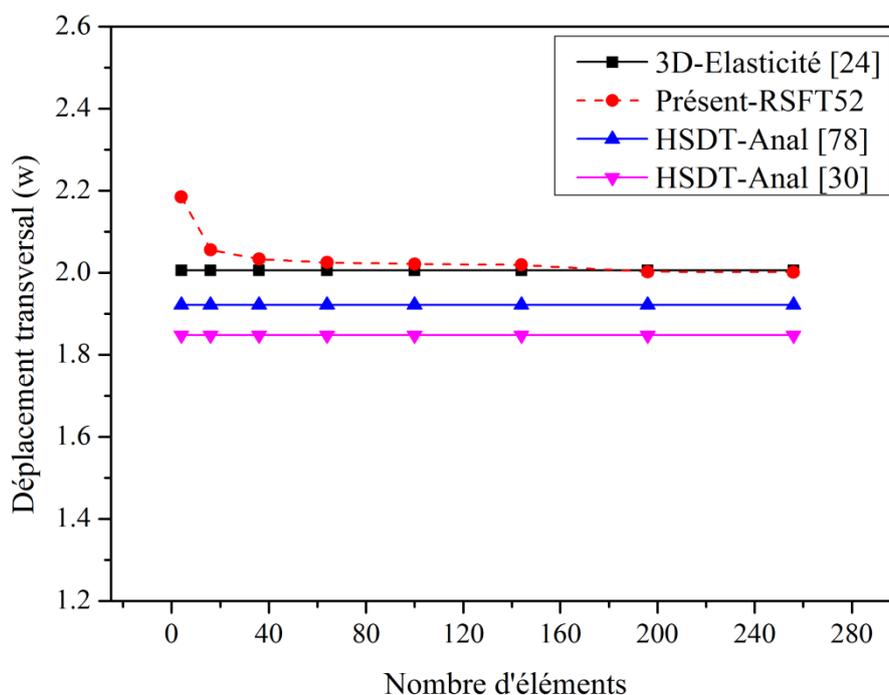
<sup>29</sup> Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory

<sup>30</sup> Meshless Local Petrov–Galerkin

<sup>31</sup> Radial Basis Functions

**Tableau 3.5** Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0/90/0) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal.

Références	Modèles EF	Rapport d'épaisseur $\left(\frac{h}{a}\right)$		
		0.25	0.1	0.05
Présent élément (4×4)	RSFT52	2.0564	0.6735	0.4096
Présent élément (6×6)	RSFT52	2.0334	0.6921	0.4562
Présent élément (8×8)	RSFT52	2.0253	0.6989	0.4751
Présent élément (10×10)	RSFT52	2.0216	0.7021	0.4844
Présent élément (12×12)	RSFT52	2.0195	0.7038	0.4889
Présent élément (14×14)	RSFT52	2.0024	0.7049	0.4921
Présent élément (16×16)	RSFT52	2.0017	0.7056	0.4942
Reddy [78]	HSDT-Anal	1.9220	0.7130	0.5041
Pagano [24]	Elasticity solution	2.0059	0.7405	0.5164
Sheikh et Chakrabarti [233]	FEM-T6-HSDT	1.9230	0.7140	-
Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	1.9927	0.7535	0.5166
Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	1.9136	0.7178	0.5060
Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	1.9502	0.7522	0.5066
Kulkarni et Kapuria [266]	FEM-Q4-RTOST	1.9248	0.7136	-
Kant et Swaminathan [30]	HSDT-Anal	1.8948	0.7151	0.5053
Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	2.0151	0.7480	-
Meftah [267]	FEM-SFR80	2.0900	0.7460	-

**Fig.3.4** Convergence du déplacement transversal d'une plaque carrée stratifiée à trois couches, simplement appuyée, sous chargement doublement sinusoïdal ( $h/a = 0.25$ )

**Tableau 3.6** Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0/90/0), simplement appuyée, sous chargement uniforme.

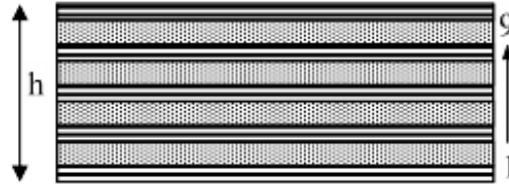
Références	Modèles EF	Rapport d'épaisseur $\left(\frac{a}{h}\right)$		
		4	10	20
Présent élément (4×4)	RSFT52	3.1327	1.0423	0.6437
Présent élément (6×6)	RSFT52	3.0574	1.0541	0.7076
Présent élément (8×8)	RSFT52	3.0364	1.0615	0.7336
Présent élément (10×10)	RSFT52	3.0273	1.0649	0.7460
Présent élément (12×12)	RSFT52	3.0225	1.0668	0.7529
Présent élément (14×14)	RSFT52	3.0196	1.0679	0.7572
Présent élément (16×16)	RSFT52	3.0178	1.0686	0.7590
Reddy [78]	HSDT-Anal	2.9091	1.0900	0.7760
Belinha et Dinis [268]	FSDT-EFG	-	1.0225	0.7583
Topdar et al. [163]	FEM-R4- PRHSDT	3.0244	1.1584	-
Topdar et al. [163]	FEM-R4-PFSDT	2.6589	1.0220	-
Xiao et al. [270]	MQ-MLPG1	-	0.9465	0.7252
Xiao et al. [270]	TPS-MLPG1	-	0.9415	0.7188
Xiao et al. [270]	FEM-3D	-	1.1543	0.7951
Ghosh et Dey [269]	FEM-T6-HSDT	-	0.9650	0.7572
Sedira [195]	FEM-Q4-DMQPz	2.9836	1.1357	-
Meftah [267]	SFR80	-	1.1450	0.7880

**Tableau 3.7** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à cinq couches (0/90/90/90/0), simplement appuyée, sous chargement uniforme.

Références	Modèles EF	Rapport d'épaisseur $\left(\frac{a}{h}\right)$		
		5	10	20
Présent élément (4×4)	RSFT52	1.8406	0.9670	0.6733
Présent élément (6×6)	RSFT52	1.8220	0.9836	0.7224
Présent élément (8×8)	RSFT52	1.8231	0.9898	0.7411
Présent élément (10×10)	RSFT52	1.8213	0.9926	0.7500
Présent élément (12×12)	RSFT52	1.8204	0.9941	0.7548
Présent élément (14×14)	RSFT52	1.8198	0.9950	0.7578
Présent élément (16×16)	RSFT52	1.8194	0.9956	0.7597
Reddy [1]	FSDT-Anal	-	0.9727	0.7581
Belinha et Dinis [268]	FSDT-EFG	-	0.9722	0.7584
Xiao et al. [270]	FEM-3D	2.1044	1.0576	0.7794
Xiao et al. [270]	MQ-MLPG1	1.5864	0.9085	0.7288
Xiao et al. [270]	TPS-MLPG1	1.5804	0.9040	0.7219

### 3.3.3.3 Plaque stratifiée à neuf couches sous chargement doublement sinusoïdal

On considère une plaque carrée multicouches à neuf couches (0/90/0/90/0/90/0/90/0) (figure 3.5), simplement appuyée, et soumise à un chargement doublement sinusoïdal. Les couches de même orientation sont d'une épaisseur identique. Le matériau de base est un composite unidirectionnel fortement orthotrope, dont les propriétés mécaniques sont celles de l'exemple 3.3.3.1.



**Fig.3.5** Plaque stratifiée carrée à neuf couches

Les résultats du déplacement transversal au centre de la plaque, normalisé par la formule 3.28, sont représentés dans le tableau 3.8 pour différents maillages (8×8, 12×12 et 16×16) et différents rapports d'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 50$  et 100).

$$\bar{w} = w \frac{\pi^4 Q}{12 S^4 h q_0} \quad \text{avec} \quad Q = 4G_{12} + \frac{E_1 + E_2(1 + 2\nu_{23})}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{et} \quad S = \frac{a}{h} \quad (3.28)$$

Les résultats obtenus sont en accord avec la solution analytique, fournie par Pagano [271] et ceux obtenus par des modèles d'éléments finis de Lardeur [70], Engblom et Ochoa [220] Sakami [217] et Sedira [195]. On peut remarquer aussi que le présent modèle est applicable pour les deux types de plaques, minces ou épaisses.

**Tableau 3.8** Déplacement transversal non-dimensionnel ( $\bar{w}$ ) d'une plaque stratifiée carrée à neuf couches (0/90/0/90/0/90/0/90/0) simplement appuyée, sous chargement doublement sinusoïdal.

$\frac{a}{h}$	Présent élément avec différents maillages			Sedira [195] DMQPz	Sakami [217] DMQPml	Lardeur [70] DSQ	Élasticité [271]
	8×8	12×12	16×16				
4	3.5761	3.5669	3.5636	3.6217	4.1872	4.2350	4.0790
10	1.4640	1.4701	1.4722	1.4353	1.5171	1.5160	1.5120
50	0.9734	1.0282	1.0485	1.0750	1.0210	1.0150	1.0210
100	0.7460	0.8846	0.9462	1.0042	1.0049	1.0050	1.0050

### 3.3.4 Plaques sandwichs

#### 3.3.4.1 Plaque sandwich carrée symétrique ( $f/c/f$ ) sous chargement sinusoïdal

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée symétrique ( $f/c/f$ ), simplement appuyée, soumise à une charge doublement sinusoïdale (Fig. 3. 6) a été considérée. Les propriétés matérielles de l'âme et celles des peaux sont représentées dans le tableau 3.9. L'épaisseur de chaque peau est égale à  $0.1h$  et celle de l'âme est  $0.8h$ , où  $h$  étant l'épaisseur totale de la plaque. La plaque est analysée pour différents rapports d'épaisseurs ( $a/h = 2, 4, 5, 10$  et  $20$ ) avec différents types de maillages ( $8 \times 8, 10 \times 10, 12 \times 12, 14 \times 14$  et  $16 \times 16$ ).

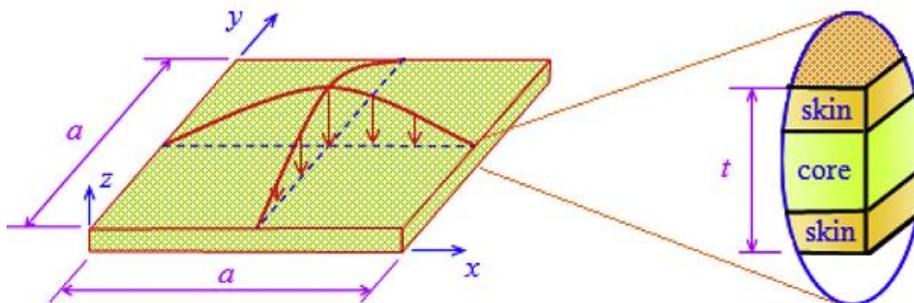
**Tableau 3.9** Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques sandwichs.

Propriétés mécaniques		$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{21}$
Plaques sandwich	Âme	0.04E	0.04E	0.016E	0.06E	0.06E	0.25
	Peaux	25E	E	0.500E	0.5E	0.20E	0.25

Les résultats du déplacement transversal ( $w$ ) et les contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$ ) sont normalisés par les équations (3.29) et (3.30), respectivement, et sont représentés dans le tableau 3.10.

$$\bar{w} = \frac{100 E_2 h^3}{a^4 q_0} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (3.29)$$

$$\left( \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz} \right) = \frac{h}{q_0 a} \left( \tau_{xz}, \tau_{yz} \right) \quad (3.30)$$



**Fig.3.6** Plaque sandwich carrée symétrique sous chargement doublement sinusoïdal

Les courbes de la figure 3.7 à 3.9 montrent, respectivement, les variations du déplacement transversal et les contraintes de cisaillement transversal, en fonction du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ). On constate que les valeurs du déplacement transversal et la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ), diminuent lorsque l'on augmente le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), tandis que les valeurs de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) augmentent lorsqu'on augmente le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ). Cela est dû à l'effet de l'épaisseur de l'âme qui joue un rôle très important dans les plaques sandwichs, car il peut affecter considérablement la rigidité à la flexion.

D'après les figures 3.7 à 3.9 et le tableau 3.10, on observe une bonne corrélation entre les résultats obtenus par l'élément développé (**RSFT52**) et les résultats obtenus avec la solution d'élasticité-3D de Pagano [24], ainsi qu'avec ceux obtenus par des modèles d'éléments finis, basés sur différentes théories; la théorie de zig-zag [160, 162, 163, 261, 262], la théorie layerwise [242, 246] et la théorie d'ordre supérieur [223, 227, 231, 236], notamment lorsqu'il s'agit des contraintes de cisaillement transversal, à titre d'exemple:

- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 10; et pour un maillage de  $10 \times 10$ , l'erreur est de 0.0014 % pour le déplacement transversal et 0.04 %, 0.0075 % pour les contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$ ), respectivement.
- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 4; et pour un maillage de  $10 \times 10$ , l'erreur est de 0.02 % pour le déplacement transversal et de 0.036 % et 0.018 % pour les contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$ ), respectivement.
- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 2; et pour un maillage de  $10 \times 10$ , l'erreur est de 0.07 % pour le déplacement transversal et de 0.02 % et 0.008 % pour les contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$ ), respectivement.

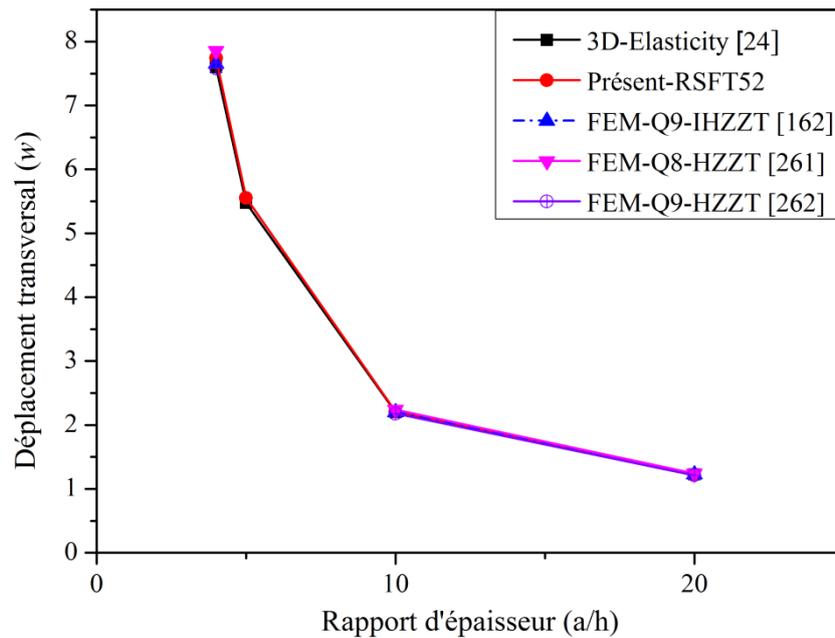
Ces résultats confirment la performance, la fiabilité et la convergence de l'élément développé (**RSFT52**) dans le calcul de déplacement transversal et les contraintes de cisaillement transversal des plaques sandwichs.

**Tableau 3.10** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal.

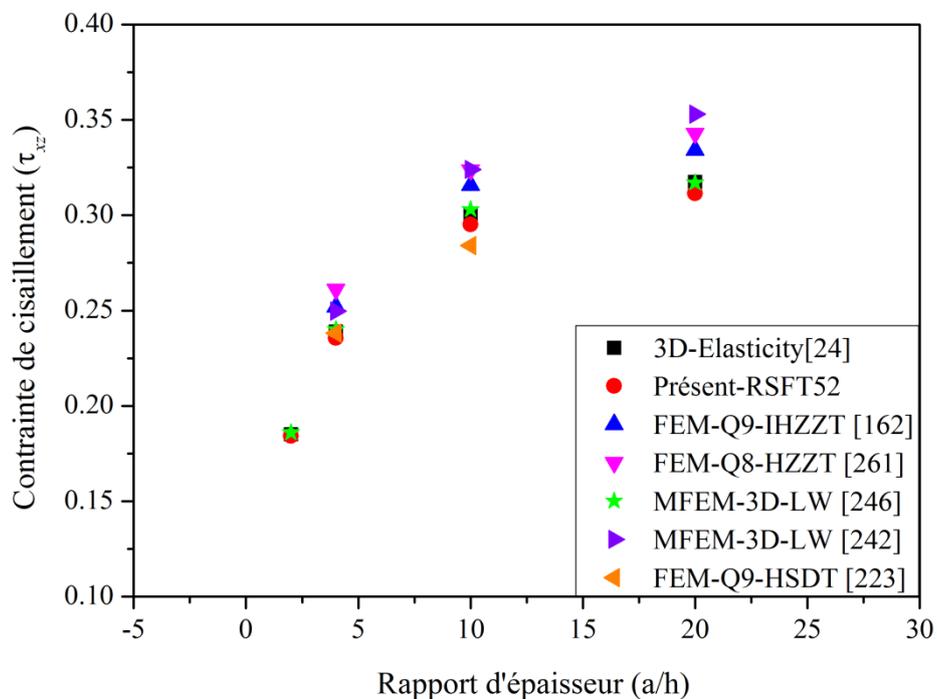
$\frac{a}{h}$	Référence	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
20	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.2944	0.0430	1.1766
	Présent élément (10×10)	RSFT52	0.3025	0.0407	1.1953
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3069	0.0393	1.2058
	Présent élément (14×14)	RSFT52	0.3097	0.0385	1.2122
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3115	0.0379	1.2164
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.3174	0.0361	1.2264
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.3342	0.0392	1.2254
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.3429	-	1.2424
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.3374	0.0415	1.2128
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.3272	0.0399	1.2121
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	0.3170	0.0360	-
	Wu et Lin [242]	MFEM-3D-LW	0.3530	-	-
	10	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.2815	0.0538
Présent élément (10×10)		RSFT52	0.2880	0.0534	2.2036
Présent élément (12×12)		RSFT52	0.2916	0.0532	2.2075
Présent élément (14×14)		RSFT52	0.2938	0.0531	2.2099
Présent élément (16×16)		RSFT52	0.2952	0.0530	2.2115
Pagano [24]		Elasticity solution	0.3000	0.0530	2.2004
Pandit et al. [162]		FEM-Q9-IHZZT	0.3158	0.0570	2.2002
Tu et al. [236]		FEM-Q9-TSDT	0.3181	0.0532	2.2027
Singh et al. [261]		FEM-Q8-HZZT	0.3237	-	2.2389
Khandelwal et al. [160]		FEM-Q9-HZZT	0.3185	0.0598	2.1786
Chalak et al. [262]		FEM-Q9-HZZT	0.3058	0.0575	2.1775
Ramtekkar et al. [246]		MFEM-3D-LW	0.3030	0.0550	-
Wu et Lin [242]		MFEM-3D-LW	0.3240	-	-
Pandya et Kant [223]		FEM-Q9-HSDT	0.2841	0.0559	0.2023
Topdar et al. [163]		FEM-Q4-HZZT	0.3188	-	2.1990
Nayak et al. [231]	FEM-Q4-HSDT	0.3465	0.0574	-	

Tableau 3.10 Suite

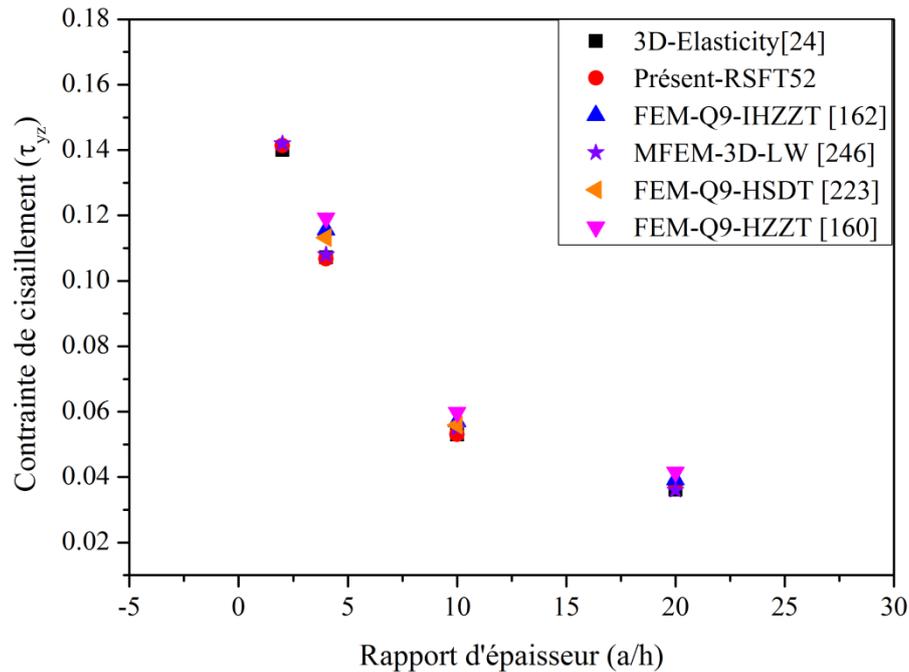
$\frac{a}{h}$	Référence	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
5	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.2424	0.0893	5.5650
	Présent élément (10×10)	RSFT52	0.2476	0.0903	5.5599
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.2505	0.0908	5.5571
	Présent élément (14×14)	RSFT52	0.2523	0.0911	5.5555
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.2535	0.0913	5.5554
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.2569	0.0918	5.4746
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.2530	0.1025	5.4464
4	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.2255	0.1038	7.7651
	Présent élément (10×10)	RSFT52	0.2303	0.1052	7.7515
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.2330	0.1059	7.7457
	Présent élément (14×14)	RSFT52	0.2346	0.1064	7.7415
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.2357	0.1067	7.7388
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.2390	0.1072	7.5962
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.2520	0.1156	7.6552
	Tu et al. [236]	FEM-Q9-TSDT	0.2447	0.1184	7.5610
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.2611	-	7.8556
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.2538	0.1192	7.5873
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.2436	0.1147	7.5822
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	0.2400	0.1080	-
	Wu et Lin [242]	MFEM-3D-LW	0.2497	-	-
	Pandya et Kant [223]	FEM-Q9-HSDT	0.2382	0.1132	0.6947
	Manjunatha et Kant [227]	FEM-Q9-HSDT	0.2750	0.1137	7.1596
	Manjunatha et Kant [227]	FEM-Q16-HSDT	0.2632	0.1134	7.1561
Topdar et al. [163]	FEM-Q4-HZZT	0.2543	-	7.6227	
2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1766	0.1363	23.4200
	Présent élément (10×10)	RSFT52	0.1803	0.1388	23.3493
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1823	0.1401	23.3106
	Présent élément (14×14)	RSFT52	0.1835	0.1409	23.2875
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1843	0.1414	23.2725
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.1850	0.1400	21.6531
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	0.1860	0.1420	-



**Fig. 3. 7** Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal



**Fig. 3. 8** Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal



**Fig. 3. 9** Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal

### 3.3.4.2 Plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ) sous chargement uniforme

Cet exemple a été proposé et étudié pour la première fois par Azar [22], puis repris par d'autres auteurs, dont Khatua et Cheung [210], Topdar et *al.* [163] et Chakrabarti et Sheikh [260]. Il s'agit d'une plaque sandwich carrée de dimensions ( $a = b = 254 \text{ mm}$ ), simplement appuyée (SSSS), et soumise à un chargement réparti uniforme d'intensité  $P = 0.00688 \text{ N/mm}^2$ . L'épaisseur totale de la plaque ( $h$ ) est de  $20.4724 \text{ mm}$ , où l'épaisseur de chaque peau est de  $0.7112 \text{ mm}$ . L'étude a été faite en considérant trois types de matériaux:

- **Matériau 1:**

Peaux:  $E_{11} = E_{22} = 68.8 \text{ GPa}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 27.52 \text{ GPa}$  et  $\nu_{13} = 0.3$

L'âme:  $E_{11} = E_{22} = 6.88 \times 10^{-12} \text{ GPa}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 0.2064 \text{ GPa}$  et  $\nu_{13} = 0.3$

- **Matériau 2:**

Peaux:  $E_{11} = 68.8 \text{ GPa}$ ,  $E_{22} = 27.52 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = 12.9 \text{ GPa}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 27.52 \text{ GPa}$  et  $\nu_{13} = 0.3$

$$E_{11} = 68.8 \times 10^{-12} \text{ GPa}, E_{22} = 27.52 \times 10^{-13} \text{ GPa}, \nu_{13} = 0.3$$

L'âme:

$$G_{12} = 12.9 \times 10^{-13} \text{ GPa}, G_{13} = 0.2064 \text{ GPa}, G_{23} = 0.0826 \text{ GPa}$$

▪ **Matériau 3:**

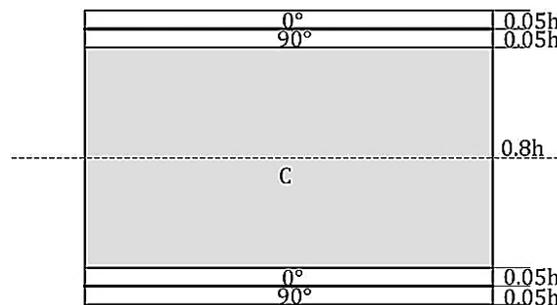
Peaux:  $E_{11} = E_{22} = 68.8 \text{ GPa}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 27.52 \text{ GPa}$  et  $\nu_{13} = 0.3$

L'âme:  $E_{11} = E_{22} = 6.88 \times 10^{-12} \text{ GPa}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 0.3131 \text{ GPa}$  et  $\nu_{13} = 0.3$

Dans le dernier cas (matériau 3), la plaque sandwich est considérée encadrée sur les quatre côtés (CCCC). Les résultats du déplacement transversal au centre de la plaque, avec différents maillages (4×4, 8×8, 12×12 et 16×16), sont rapportés dans le tableau 3.11. Les résultats obtenus par l'élément RSFT52 présentent une très bonne concordance avec la solution analytique donnée par Azar [22] et ceux obtenus par les modèles d'éléments finis de Khatua et Cheung [210], Topdar et *al.* [163] et Chakrabarti et Sheikh [260].

### 3.3.4.3 Plaque sandwich carrée avec des peaux composites stratifiées ( $f(0/90)/C/f(0/90)$ ) pour différents types de conditions aux limites

Cet exemple a été choisi dans le but d'évaluer la polyvalence du modèle d'élément fini développé dans l'analyse des plaques sandwichs ayant des peaux composites stratifiées. Il s'agit d'une plaque sandwich stratifiée non-symétrique ( $0/90/C/0/90$ ) soumise à une charge sinusoïdale (figure 3.10). L'épaisseur de l'âme est de  $0.8h$ , tandis que celle de chaque couche de stratifiée elle est de  $0.05h$ ,  $h$  étant l'épaisseur totale de la plaque. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour l'âme et les deux peaux sont résumées dans le tableau 3.9. Dans ce problème, trois types de conditions aux limites (CCCC, SCSC et SSSS) avec six rapports d'épaisseur ( $h/a = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.25$  et  $0.5$ ), ont été considérés.



**Fig.3.10** Plaque sandwich avec des peaux stratifiées

**Tableau 3.11** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ), sous chargement réparti uniforme.

	Références	Modèles EF	$w \ 100(mm) \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$
Cas I	Présent élément (4×4)	RSFT52	1.8343
	Présent élément (8×8)	RSFT52	1.8679
	Présent élément (12×12)	RSFT52	1.8745
	Présent élément (16×16)	RSFT52	1.8767
	Khatua et Cheung [210]	FEM solution	1.8697
	Azar [22]	Analytical solution	1.8780
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	1.8750
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HSDT	1.7233
	Topdar et al. [163]	FEM-Q4-HZZT	1.7323
	Topdar et al. [163]	FEM-Q4-RHZZT	1.8793
Cas II	Présent élément (4×4)	RSFT52	3.3733
	Présent élément (8×8)	RSFT52	3.4936
	Présent élément (12×12)	RSFT52	3.5243
	Présent élément (16×16)	RSFT52	3.5350
	Khatua et Cheung [210]	FEM solution	3.0810
	Azar [22]	Analytical solution	3.1140
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	3.1056
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HSDT	2.9112
	Topdar et al. [163]	FEM-Q4-HZZT	1.9863
	Topdar et al. [163]	FEM-Q4-RHZZT	3.1013
Cas III	Présent élément (4×4)	RSFT52	0.9236
	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.8813
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.8750
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.8717
	Khatua et Cheung [210]	FEM solution	0.8707
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.9535
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-RFSDT	0.8880
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HSDT	0.7779
	Folie [272]	FEM solution	0.8814

Les résultats du déplacement et les contraintes de cisaillement transversal, normalisés respectivement par les formules (3.29, 3.30), sont regroupés dans le tableau 3.12. La comparaison a été faite avec des modèles d'éléments finis, disponibles dans la littérature scientifique, basés sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur (HZZT) [160, 162, 261, 262]. D'après les résultats obtenus, on peut noter que le pourcentage d'augmentation dans le déplacement transversal pour des rapports d'épaisseurs élevés, i.e. 0.2 à 0.5, est beaucoup plus

élevé que ceux de plus faibles rapports d'épaisseurs, i.e. 0.01 à 0.05, respectivement, pour les deux conditions aux limites (CCCC et SCSC). La cause principale derrière tout cela est due à l'effet de la flexibilité transversale de l'âme et aux effets de la déformation en cisaillement, qui sont plus prononcés dans le cas des rapports d'épaisseurs élevés. Le même genre d'observations peut également être noté pour la contrainte de cisaillement transversal non-dimensionnel ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) qui diminue lorsque le rapport d'épaisseur augmente, dans le cas de conditions aux limites (SCSC). En outre, pour les conditions aux limites (CCCC), les deux contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ) diminuent avec l'augmentation du rapport d'épaisseur. Les résultats obtenus mettent en évidence la bonne performance de l'élément **RSFT52**, en termes de stabilité, de rapidité de convergence et de précision, pour les deux types de plaques; minces ou épaisses.

#### 3.3.4.4 Plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées alternés (angle-ply) ( $f(\theta/\theta + 90)/C/f(\theta/\theta + 90)$ ) soumise à une charge uniformément répartie

Ce problème a été traité par Chakrabarti et Sheikh [158] et Khandelwal et *al.* [160]. Il s'agit d'une plaque sandwich carrée ayant des peaux stratifiées alternées (angle-ply) ( $f(\theta/\theta + 90)/C/f(\theta/\theta + 90)$ ), simplement appuyée sur les quatre cotés et soumise à une charge uniformément répartie. Les mêmes propriétés du problème précédent (3.3.4.3) qu'elles soient géométriques ou mécaniques, ont été adoptées.

L'analyse est effectuée pour trois types de maillage ( $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$  et  $16 \times 16$ ), trois rapports d'épaisseur ( $h/a = 0.05$ ,  $0.1$  et  $0.2$ ) ainsi que pour trois angles d'orientation ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $45^\circ$ ). Les résultats du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), au centre de la plaque ( $x = a/2$ ,  $y = b/2$  et  $z = 0$ ), la contrainte de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}$ ), au centre de l'arête ( $x = 0$ ,  $y = a/2$  et  $z = \pm 0.4h$ ) et la contrainte de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{yz}$ ), au centre de l'arête ( $x = a/2$ ,  $y = 0$  et  $z = \pm 0.4h$ ), sont représentés dans le tableau 3.13. Les résultats obtenus par le présent élément sont comparés à ceux obtenus avec les éléments de Chakrabarti et Sheikh [158] et Khandelwal et *al.* [160]. Cette comparaison a montré la bonne performance de l'élément développé ainsi que sa robustesse.

**Tableau 3.12** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich ayant des peaux stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90), sous chargement doublement sinusoïdal, avec différents types de conditions aux limites.

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
Conditions aux limites: CCCC					
0.01	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1877	0.1877	0.1075
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1981	0.1981	0.1519
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.2008	0.2008	0.1778
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.2198	0.2190	0.2279
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.2189	0.2189	0.2286
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.2348	-	0.2260
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.2171	0.2327	0.2267
0.05	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1639	0.1639	0.4166
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1694	0.1694	0.4226
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1682	0.1682	0.4245
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1661	0.1661	0.4299
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1828	0.1828	0.4296
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.2004	-	0.4462
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1568	0.2319	0.4283
0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1518	0.1518	1.0538
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1513	0.1513	1.0451
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1474	0.1474	1.0443
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1380	0.1383	1.0513
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1587	0.1586	1.0489
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1651	-	1.0213
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1308	0.2175	1.0484
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1377	0.1377	3.4824
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1336	0.1336	3.4560
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1283	0.1283	3.4501
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1240	0.1242	3.4741
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1396	0.1394	3.4521
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1422	-	3.3421
0.25	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1325	0.1325	5.2499
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1279	0.1279	5.2157
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1227	0.1227	5.2046
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1228	0.1231	5.2470
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1157	0.1766	5.2305

Tableau 3.12 Suite

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
0.5	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1147	0.1147	18.9206
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1107	0.1107	18.7881
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1068	0.1068	18.7406
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1227	0.1217	18.3454
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1264	0.1265	19.1560
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1325	-	18.3450
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1182	0.1427	19.0444
Conditions aux limites: SCSC					
0.01	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.0674	0.2774	0.1622
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.0703	0.2859	0.2297
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.0714	0.2868	0.2689
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.0782	0.3061	0.3451
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.0778	0.3086	0.3453
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.0944	-	0.3920
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.0775	0.3311	0.3430
0.05	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.0928	0.2301	0.5827
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.0962	0.2357	0.5935
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.0974	0.2333	0.5975
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1075	0.2288	0.6053
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1061	0.2527	0.6052
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1542	-	0.6080
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1012	0.3209	0.6022
0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1248	0.1893	1.2998
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1288	0.1881	1.2961
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1302	0.1830	1.2964
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1437	0.1711	1.3039
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1418	0.1967	1.3026
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1523	-	1.3096
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1366	0.2696	1.2994
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1483	0.1524	3.8333
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1530	0.1476	3.8112
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1546	0.1418	3.8053
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1708	0.1369	3.8288
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1683	0.1539	3.8087
	Singh et al. [261]	FEM-Q9-IHZZT	0.1620	-	3.8500

Tableau 3.12 Suite

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
0.25	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1515	0.1436	5.6655
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1563	0.1384	5.6329
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1579	0.1326	5.6225
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1747	0.1327	5.6638
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1667	0.1907	5.6453
0.5	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1490	0.1223	20.0912
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1538	0.1178	19.9625
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1555	0.1135	19.9181
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.1691	0.1296	19.5512
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1744	0.1338	20.3055
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.1721	-	19.5800
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.1659	0.1512	20.1918
Conditions aux limites: SSSS					
0.01	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1787	0.1787	0.4285
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1797	0.1797	0.6010
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1791	0.1791	0.6996
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.1773	0.1773	0.8888
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1878	0.1812	0.8782
0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1677	0.1677	1.7108
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1725	0.1725	1.7148
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1742	0.1742	1.7162
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.1770	0.1770	1.7272
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1909	0.1883	1.7177
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	-	-	1.7252
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-RHZZT	-	-	1.7249
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	-	-	1.6738
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1666	0.1666	4.2552
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1715	0.1715	4.2380
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1732	0.1732	4.2320
	Pagano [24]	Elasticity solution	-	-	4.2447
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	-	-	4.2517
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-RHZZT	-	-	4.2420
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	-	-	3.9798
0.25	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.1659	0.1659	6.1457
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.1707	0.1707	6.1151
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.1725	0.1725	6.1044
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.1756	0.1756	6.1105
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	0.1901	0.1888	6.1342

**Tableau 3.13** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich ayant des peaux stratifiées non-symétrique ( $\theta / \theta + 90 / C / \theta / \theta + 90$ ), simplement appuyée, sous un chargement uniformément distribué

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{w}$
$\theta = 0^\circ$					
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3033	0.3033	6.3228
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3242	0.3242	6.2940
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3343	0.3343	6.2909
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.3436	0.3413	6.2981
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)*	0.3982	0.3993	6.3001
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)**	0.3455	0.3332	6.3001
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.3482	-	6.3016
0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3110	0.3110	2.6104
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3337	0.3337	2.6149
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3447	0.3447	2.6168
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.3496	0.3503	2.6295
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4142	0.4366	2.6168
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3489	0.3397	2.6168
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.3612	-	2.6296
0.05	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3176	0.3176	1.6419
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3408	0.3408	1.6766
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3522	0.3522	1.6891
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.3560	0.3563	1.7107
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4515	0.5230	1.6957
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3663	0.3612	1.6957
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.3732	-	1.7126
$\theta = 30^\circ$					
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3185	0.3185	5.9480
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3382	0.3382	5.9326
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3472	0.3472	5.9308
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4376	0.4321	5.9579
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3064	0.2951	5.9579
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.3762	-	5.9463
	0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3211	0.3211
Présent élément (12×12)		RSFT52	0.3406	0.3406	2.2137
Présent élément (16×16)		RSFT52	0.3503	0.3503	2.2176
Khandelwal et al. [160]		FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4280	0.4409	2.2322
Khandelwal et al. [160]		FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3275	0.3200	2.2322
Chakrabarti et Sheikh [158]		FEM-T6-HZZT	0.3659	-	2.2237

Tableau 3.13 Suite

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{w}$
0.05	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3261	0.3261	1.2028
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3465	0.3465	1.2199
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3570	0.3570	1.2270
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4637	0.5097	1.2450
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3592	0.3480	1.2450
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.3603	0.3603	1.2381
$\theta = 45^\circ$					
0.2	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.2955	0.2955	5.6998
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3144	0.3144	5.6615
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3231	0.3231	5.6516
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4612	0.4484	5.6329
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3399	0.3187	5.6329
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.2197	-	5.6079
0.1	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3025	0.3025	2.0132
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3223	0.3223	2.0035
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3320	0.3320	2.0019
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4445	0.4592	1.9950
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3375	0.3232	1.9950
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.2203	-	1.9764
0.05	Présent élément (8×8)	RSFT52	0.3034	0.3034	1.0615
	Présent élément (12×12)	RSFT52	0.3215	0.3215	1.0671
	Présent élément (16×16)	RSFT52	0.3311	0.3311	1.0697
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	0.4621	0.5309	1.0773
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	0.3419	0.3335	1.0773
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	0.2197	-	1.0615

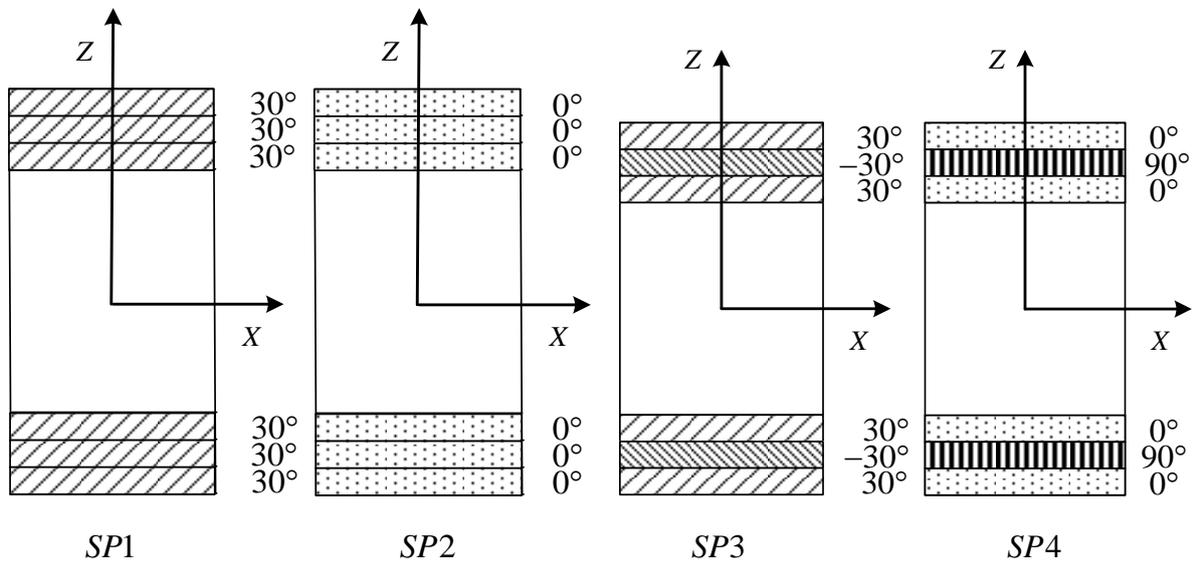
\* Valeurs de contraintes de cisaillement transversal obtenues à partir des relations constitutives

\*\* Valeurs de contraintes de cisaillement transversal obtenues via des équations d'équilibres

### 3.3.4.5 Comparaison avec des résultats expérimentaux sur des plaques sandwichs rectangulaires ayant des peaux stratifiées de type CFRP

L'objectif de cet exemple est de procéder à une confrontation de l'élément développé avec des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature. Kanematsu et al. [273] ont réalisé des tests sur des plaques sandwichs rectangulaires (450 mm × 300 mm), encastées sur les quatre côtés. Les peaux des sandwichs sont des composites stratifiés symétriques

constitués de plis croisés en fibre de carbone-époxy (CFRP)<sup>32</sup>, tandis que l'âme est un matériau en nids-d'abeilles en aluminium (Aluminum Honeycomb Core). Les spécifications et les propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'analyse sont présentées, respectivement dans les tableaux 3.14 à 3.17. Quatre types de séquence d'empilement dont les désignations sont SP1, SP2, SP3 et SP4 ont été adoptés pour les faces de la plaque sandwich (figure 3.11). L'épaisseur de chaque couche est de  $0,125\text{ mm}$ , tandis que l'épaisseur de l'âme est de  $10\text{ mm}$  pour les cas SP1 et SP2, et de  $7\text{ mm}$  pour les cas SP3 et SP4. La plaque est soumise à un chargement réparti uniforme d'intensité  $P = 1,01\text{ KPa}$ . Dans ces tests, les auteurs ont contrôlé la pression appliquée par un manomètre, et la déflexion au centre de la plaque a été mesurée en utilisant des transformateurs différentiels à variation linéaire (LVDT)<sup>33</sup>. Une technique holographique a été utilisée afin de visualiser les modes de flexion.



**Fig.3.11** Plaques sandwichs avec différentes séquences d'empilement

Par ailleurs, les auteurs ont fourni des solutions analytiques, basées sur la méthode de Rayleigh–Ritz, pour le même problème de plaque, en utilisant deux types de conditions aux limites, simplement appuyée (SSSS) et encastree (CCCC). Les résultats du déplacement

<sup>32</sup> Carbon Fiber–Reinforced Plastic

<sup>33</sup> Les capteurs de déplacement LVDT (Linear Variable Differential Transformer) ou transformateur différentiel à variation linéaire sont des capteurs qui servent à déterminer avec une bonne précision la position d'un point. Les capteurs de déplacement LVDT sont constitués par deux enroulements électromagnétiques indépendants dont le primaire est alimenté en courant électrique. Lorsque la tige subit un mouvement, celle-ci provoque un changement de flux magnétique. Ce changement engendre alors un courant électrique dans l'enroulement secondaire. Ce courant secondaire permet de quantifier la position des points [lien]

transversal ( $w$ ), obtenus par le présent élément sont représentés dans le tableau 3.18, en utilisant un maillage de  $16 \times 16$ . La comparaison a été faite avec des solutions analytiques données par Kanematsu et *al.* [273], avec des solutions basées sur des travaux expérimentaux présentés par les mêmes auteurs [273] et avec les modèles d'éléments finis de Lee et Fan [243] et Nayak et *al.* [231]. La comparaison a montré l'efficacité et la fiabilité du modèle d'élément fini développé (RSFT52) dans les analyses de ce type de structures.

**Tableau 3. 14** Spécifications des matériaux

Matériaux	Spécification
Peaux (CFRP)	TORAYKA Pre-preg S305-125
Âme (Al Honeycomb)	Al 3/8-5056-0007
adhésif	REDUX 312 UL/REDUX 540

**Tableau 3. 15** Propriétés des matériaux de peaux (CFRP)

Matériaux de peaux	Propriétés mécaniques en GPa				
	$E_L$	$E_T$	$\nu_{LT}$	$G_{LT}$	$\rho_f$
Carbon/epoxy	105	8.74	0.327	4.56	$1.60 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$

**Tableau 3. 16** Propriétés des matériaux de l'âme

Matériaux de l'âme	Propriétés mécaniques en MPa						
	$E_L$	$E_T$	$G_{LT}$	$G_{LZ}$	$G_{TZ}$	$\nu_{LT}$	$\rho_f \text{ ( Kg/m}^3\text{)}$
Al/Honeycomb	68.6	68.6	26.4	103	62.1	0.3	$1.60 \times 10^3$

**Tableau 3. 17** Propriétés des matériaux de l'adhésif

Adhésif	Échantillons	Densité de masse ( $\rho_{fa}$ )
REDUX 312UL	SP1, SP2	$1.0 \times 10^{-1} \text{ Kg/m}^2$
REDUX 540	SP3, SP4	$1.8 \times 10^{-1} \text{ Kg/m}^2$

**Tableau 3. 18** Déflexion ( $w$ ) d'une plaque sandwich rectangulaire ayant des peaux stratifiées, sous chargement réparti uniforme

Références	Modèles EF	Déflexion central $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ (mm)			
		SP1	SP2	SP3	SP4
<b>Encastrée (CCCC)</b>					
Présent élément	RSFT52	0.04906	0.05647	0.07506	0.05525
Nayak et <i>al.</i> [231]	FEM-Q9-HSDT	-	0.05248	-	0.05797
Kanematsu et <i>al.</i> [273]	Analytical solution	0.05040	0.05400	0.07720	0.06130
Kanematsu et <i>al.</i> [273]	Experimental solution	0.06900	0.08500	0.09400	0.09000
Lee et Fan [243]	FEM-Q9-LW	0.05190	0.05524	0.07834	0.06216
<b>Simplement appuyée (SSSS)</b>					
Présent élément	RSFT52	0.1160	0.1733	0.1695	0.2010
Nayak et <i>al.</i> [231]	FEM-Q9-HSDT	-	0.1754	-	0.2111
Kanematsu et <i>al.</i> [273]	Analytical solution	0.1173	0.1829	0.1794	0.2206
Lee et Fan [243]	FEM-Q9-LW	0.1213	0.1774	0.1729	0.2138

### 3.3.4.6 Étude Paramétrique

Cette étude vise à démontrer l'influence de différents paramètres liés au matériau constituant la structure sandwich sur la variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ). Dans cette étude, on considère les paramètres suivants:

- Le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur totale du sandwich ( $h_c/h$ ),
- Le rapport d'épaisseur ( $a/h$ )
- Le rapport d'aspect ( $a/b$ )
- Les conditions aux limites.
- Le degré d'orthotropie de la peau ( $E_1/E_2$ ).
- Le rapport des modules d'élasticité (transversal par rapport au longitudinal) ( $G_c/E_c$ ).

L'analyse est effectuée pour une plaque sandwich symétrique soumise à une charge sinusoïdale. Le matériau utilisé est un sandwich constitué d'une âme en mousse HEREX C70-

130 et deux peaux stratifiées de plis croisés  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  en fibre de verre / polyester. L'épaisseur de chaque pli est de  $0,125 \text{ mm}$ , tandis que l'épaisseur de l'âme est de  $10 \text{ mm}$ . Les propriétés mécaniques de ces matériaux sont présentées dans le tableau 3.19. Les valeurs du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) sont normalisées par la relation (3.27).

**Tableau 3.19** Propriétés des matériaux utilisés [274]

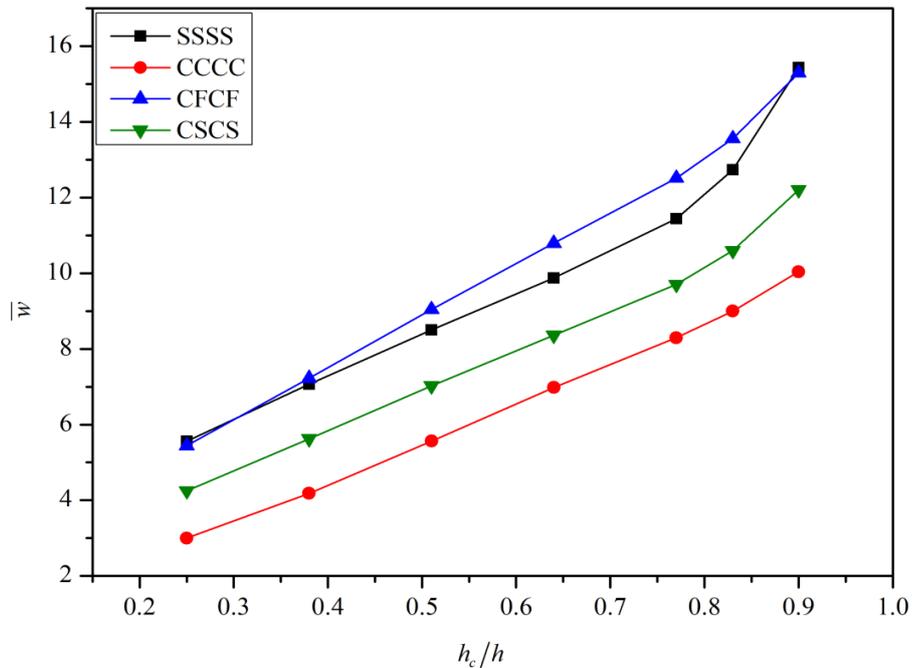
Matériaux	Propriétés mécaniques en GPa						
	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\rho \text{ (Kg/m}^3\text{)}$
Peaux en fibre de verre / polyester	24.51	7.77	3.34	3.34	1.34	0.078	1800
Âme en mousse de HEREX - C70.130	0.1036	0.1036	0.05	0.05	0.05	0.32	130

Les courbes de la figure 3.12 représentent l'effet de l'épaisseur de l'âme ( $h_c$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0), pour différents cas de conditions aux limites. On constate que les quatre courbes ont la même allure et que les valeurs de déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) augmentent avec l'augmentation du rapport ( $h_c/h$ ). Cette élévation est due probablement à la chute de la rigidité flexionnelle, causée par la réduction de l'épaisseur des peaux.

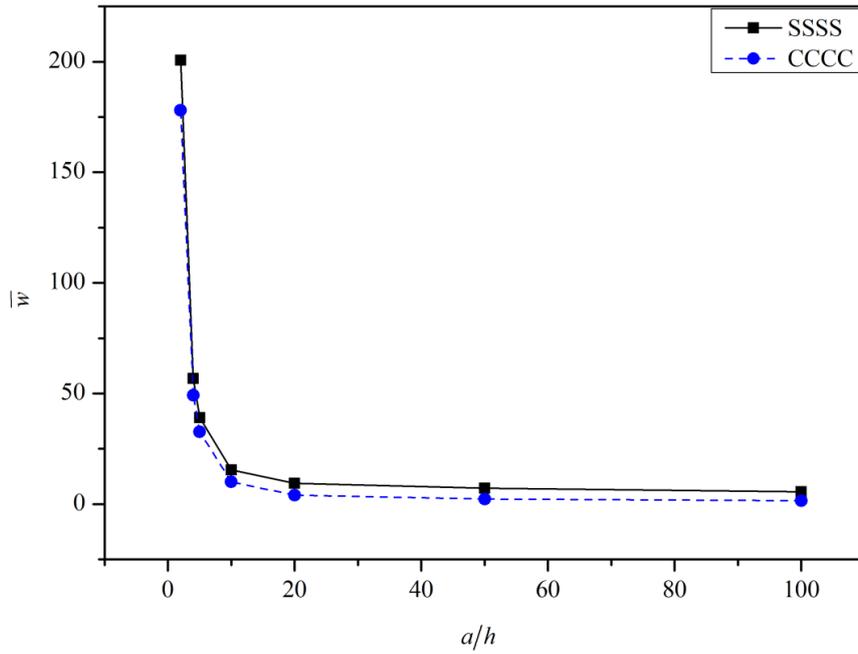
Les deux courbes de la figure 3.13, montrent l'effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0), pour les deux cas de conditions aux limites; simplement appuyée et encadrée. On remarque, pour les deux conditions aux limites, la diminution des valeurs du déplacement transversal non-dimensionnel avec l'augmentation du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) pour garder une valeur pratiquement constante à partir du rapport  $a/h = 20$ .

L'influence du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) simplement appuyée est montré dans la figure 3.14. On constate que la variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) diminue avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).

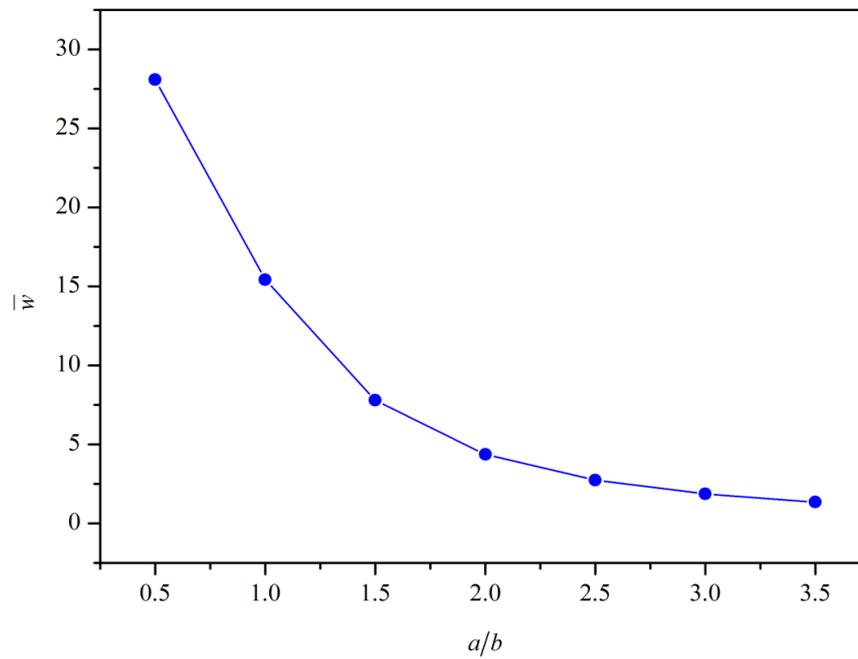
La variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) en fonction du rapport degré d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) de la peau d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) simplement appuyée, est montrée sur la figure 3.15 pour des valeurs différentes de  $h_c/h$ . À partir de cette figure, on remarque, pour différentes valeurs de l'épaisseur de l'âme, que la variation du déplacement transversal non-dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) diminue avec l'augmentation du degré d'orthotropie des peaux. Pour comprendre la tendance générale des courbes de la figure 3.15, il est nécessaire d'examiner l'effet de la rigidité sur le comportement des plaques sandwichs. Il est bien connu, d'après la littérature, que l'augmentation de la rigidité d'un panneau sandwich conduit à une diminution de son déplacement transversal.



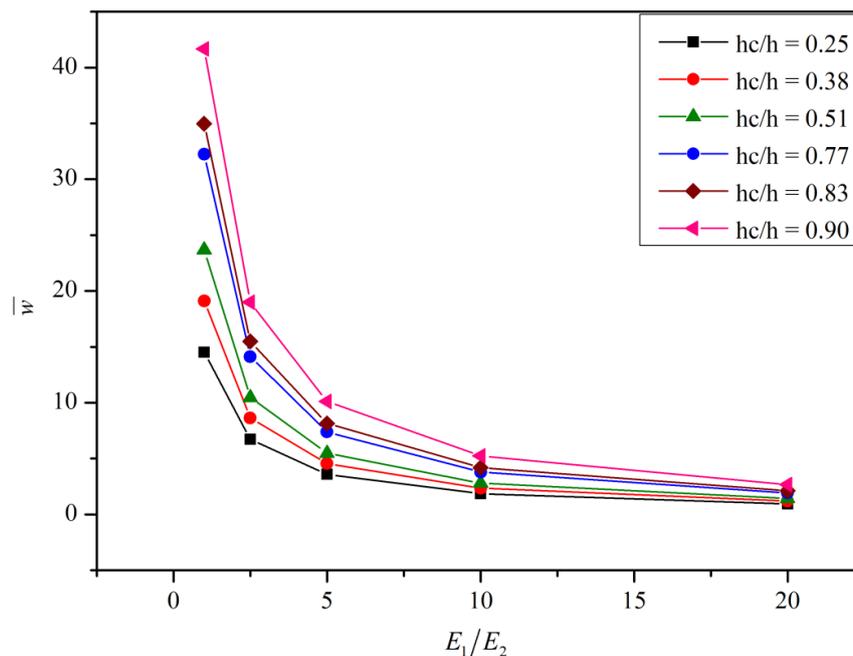
**Fig. 3. 12** Effet de l'épaisseur de l'âme ( $h_c$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) avec différentes conditions aux limites.



**Fig. 3. 13** Effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) encastée et simplement appuyée



**Fig. 3. 14** Effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) simplement appuyée ( $a/h = 10$ )



**Fig. 3.15** Effet du rapport d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) de la peau et le rapport ( $h_c/h$ ), sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich (0/90/0/C/0/90/0) simplement appuyée ( $a/h = 10$ )

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouvel élément fini de forme rectangulaire à quatre nœuds avec treize degrés de liberté par nœud, a été développé. Il est formulé sur la base du modèle layerwise que nous avons proposé et présenté dans le chapitre précédent. Cet élément est destiné à l'analyse statique des plaques sandwichs, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques, ainsi que les plaques isotropes et les composites stratifiées multicouches.

La performance, la fiabilité et la polyvalence de l'élément développé ont été évaluées à travers une série d'applications en flexion de plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs symétriques et non symétriques, avec différents cas de chargement, de géométrie et de conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec les résultats donnés analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Les exemples numériques ont montré la simplicité, la stabilité et le moindre coût en termes de temps du calcul de l'élément développé (RSFT52). D'autant plus, l'élément est capable de donner d'excellents résultats, notamment en ce qui concerne les contraintes de cisaillement transversal.

On peut conclure que l'utilisation de l'élément fini développé et la combinaison de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et celle du troisième ordre (FSDT, TSDT), pour modéliser respectivement les deux peaux et l'âme, ont montré une bonne précision dans l'analyse des plaques isotropes, sandwichs et composites stratifiées.

Par ailleurs, on a aussi montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres, tels que les caractéristiques géométriques et mécaniques, sur la variation du déplacement transversal d'une plaque sandwich ayant des peaux stratifiées.

Peut-on généraliser, maintenant, cet élément aux problèmes structurels de formes relativement plus complexes, i.e. impliquant des frontières irrégulières? Dans le chapitre qui suit, une étude dans ce sens va être lancée pour répondre à cette question.

# Chapitre 4

## Développement d'un nouvel élément fini isoparamétrique (QSFT52) en introduisant la technique de déformation naturelle (ANS)

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté la formulation et la validation d'un nouvel élément fini de forme rectangulaire. Ce dernier possède une forme géométrique régulière, i.e. traite uniquement les structures qui ont des bords droits. On peut imaginer cet élément comme ayant une forme irrégulière ou distordue dont le domaine géométrique serait défini par des interpolations quadratiques ou cubiques des coordonnées des nœuds principaux sans l'introduction de nœuds intermédiaires [68]. En plus, en analysant des problèmes structurels de formes relativement plus complexes, i.e. impliquant des frontières courbes qui exigent des maillages fins et grossiers, les éléments rectangulaires simples, ne fournissent plus de résultats précis.

Par conséquent, pour généraliser notre élément fini **RSFT52** dans l'analyse des structures de formes quelconques, ce chapitre a été consacré au développement d'un nouvel élément quadrilatéral, nommé **QSFT52** (**Q**uadrilatéral **S**andwich **F**irst **T**hird with **52**-degrees of freedom), à quatre nœuds et 13 ddl par nœud. Il est construit sur la base du modèle layerwise, présenté dans le chapitre II. La transformation a été accomplie en introduisant la notion d'isoparamétrie. En outre, la méthode des déformations naturelles de substitution

(ANS)<sup>34</sup> est introduite dans la présente formulation afin d'atténuer d'éventuels phénomènes de verrouillage en cisaillement.

## 4.2 Construction d'un élément isoparamétrique

### 4.2.1 Définition

Le contenu théorique de cette partie est issu d'une petite synthèse des références consultées par: Belarbi [68] et Tati [275].

L'utilisation des éléments finis isoparamétriques dont les côtés peuvent être courbes (appelés "éléments distordus"), ont été introduits pour la première fois par Ergatoudis et al. [276]. Le concept d'isoparamétrie permet à la fois de systématiser l'utilisation des variables réduites, et de générer aussi des éléments finis à bords courbes; il est donc très avantageux pour certaines discrétisations. Ce concept est basé sur la transformation entre le domaine physique de l'élément et un domaine simple sans dimensions, en utilisant les coordonnées intrinsèques. Cette transformation permet de créer facilement les fonctions d'interpolation des déplacements. Donc, la construction d'un élément fini fait intervenir deux types d'interpolations: l'interpolation géométrique et l'interpolation des déplacements. Un élément est dit iso-paramétrique si les interpolations de la géométrie et des déplacements sont identiques. Les propriétés de l'élément isoparamétrique distordu pourront être établies moyennant la connaissance :

- de la transformation géométrique (appelé souvent "élément distordu").
- des fonctions d'interpolation utilisées pour discrétiser le champ de déplacement dans l'élément distordu.

### 4.2.2 Transformation géométrique

La figure 4.1 représente un élément parent carré ainsi qu'un élément distordu qui en dérive.

La transformation définissant la forme géométrique de l'élément isoparamétrique, doit répondre aux conditions suivantes:

- i) La transformation doit être biunivoque: le déterminant du Jacobien de la transformation ne peut être nul ou infini (pour tout point  $P'$  de l'élément parent).

---

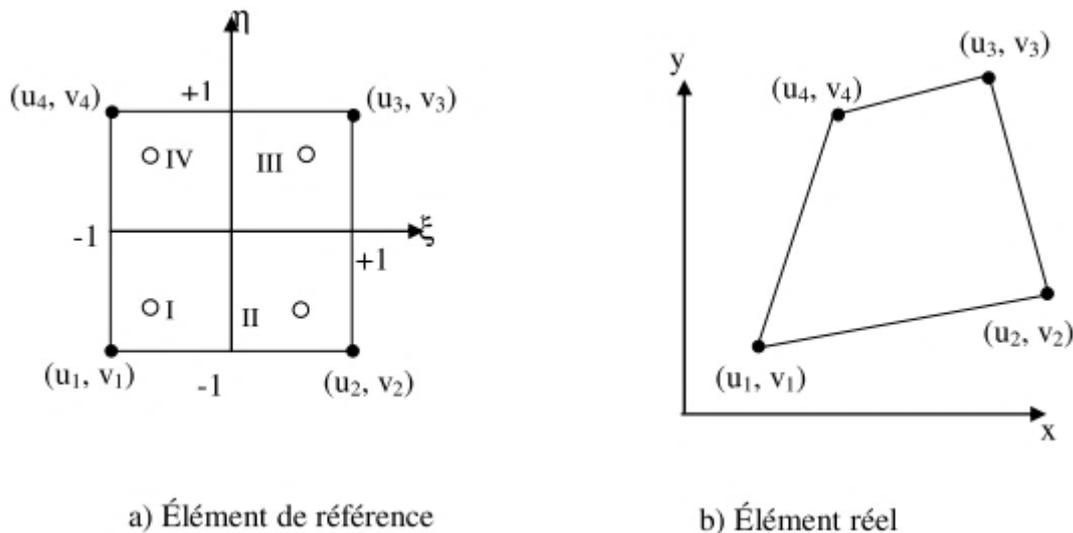
<sup>34</sup> Assumed Natural Strains method

- ii) La transformation doit être définie uniquement par les coordonnées  $x_i, y_i$  des 4 nœuds de l'élément distordu.
- iii) Si le point  $P'$  coïncide avec un nœud de l'élément parent, le point  $P$  correspondant est le nœud de même numéro de l'élément distordu.

Il s'agit d'assurer une correspondance biunivoque entre les coordonnées cartésiennes et curvilignes, c'est-à-dire, d'établir une relation de la forme:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

La relation (4.1) permet de générer un élément fini à frontière courbe.



**Fig.4.1** Transformation géométrique de l'élément réel vers l'élément parent

### 4.2.3 Approximation nodale des coordonnées

La façon la plus habile de définir la géométrie et le champ de déplacement d'une forme curviligne, i.e. représentation isoparamétrique, est d'écrire la relation (4.1), à l'aide des fonctions d'interpolation, sous la forme suivante:

▪ **Représentation de la géométrie**

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad \text{(Interpolation géométrique)} \quad (4.2)$$

▪ **Représentation du champ de déplacement**

Comme l'élément est isoparamétrique, l'approximation nodale pour le champ des déplacements dans le plan de l'élément s'écrit en utilisant les mêmes fonctions de formes que l'approximation géométrique, soit:

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad \text{(Interpolation des déplacements)} \quad (4.3)$$

où:

$\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées paramétriques

$(x, y)$  sont les coordonnées d'un point de l'élément

$(x_i, y_i)$  sont les coordonnées du nœud  $i$  de l'élément réel

$(u, v)$  sont les composantes du déplacement membranaire du point quelconque  $(\xi, \eta)$

$(u_i, v_i)$  sont les déplacements d'un nœud  $i$

Pour un quadrilatère à quatre nœuds, les fonctions d'interpolation  $N_i$  ne sont plus en fonction de  $x, y$ , mais en fonction des variables paramétriques  $\xi, \eta$  qui prennent leurs valeurs entre  $(-1, +1)$ , ces dernières s'écrivent:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.2.4 Fonctions d'interpolations de l'élément réel

Les dérivées des fonctions d'interpolation géométriques seront calculées par la formule suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Soit sous une forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}\quad (4.6)$$

Les dérivées  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  se déterminent à partir de la matrice Jacobienne inversée

$[J]^{-1}$ , dont la matrice Jacobienne de la transformation  $[J]$  est donnée par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\quad (4.7)$$

Où  $J$  est déterminée en fonction des coordonnées nodales de l'élément par :

$$[J] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}\quad (4.8)$$

Dans la transformation d'intégrale, le déterminant de la matrice Jacobienne ( $J$ ) doit être évalué, en passant en variables locales nous aurons :

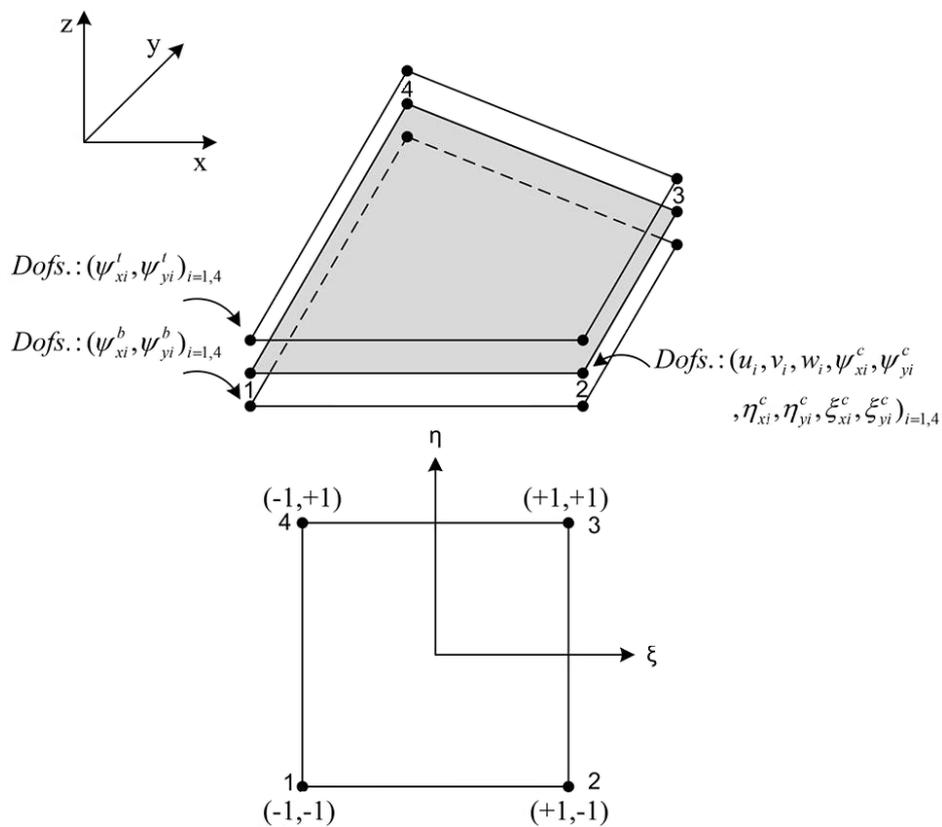
$$\iint dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(J) d\xi d\eta\quad (4.9)$$

### 4.3 Formulation de l'élément QSFT52

#### 4.3.1 Description

L'élément sandwich développé dans ce chapitre, nommé **QSFT52** (**Q**uadrilateral **S**andwich **F**irst **T**hird with **52** degrees of freedom), est un quadrilatère isoparamétrique à quatre nœuds avec treize degrés de liberté par nœud (13 ddl/nœud). Cet élément est formulé sur la base du modèle layerwise que nous avons proposé dans le chapitre II.

La figure 4.2 montre la géométrie de l'élément QSFT52 et les variables cinématiques correspondantes. Chaque nœud contient: deux degrés de liberté de rotation pour chaque peau, six degrés de liberté de rotation aussi pour l'âme, alors que les trois degrés de liberté de type translation sont communs aux trois couches.



**Fig. 4.2** La géométrie de l'élément QSFT52 et les variables cinématiques nodales correspondantes

### 4.3.2 Approximation nodale des coordonnées de l'élément QSFT52

Le vecteur déplacement en tous les points de la plaque est donné par:

$$\delta = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_i, \eta_i) \delta_i \quad (4.10)$$

où  $\delta_i = \{u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi}^c \ \psi_{yi}^c \ \eta_{xi}^c \ \eta_{yi}^c \ \zeta_{xi}^c \ \zeta_{yi}^c \ \psi_{xi}^t \ \psi_{yi}^t \ \psi_{xi}^b \ \psi_{yi}^b\}^T$  est le vecteur des déplacements correspondant au nœud  $i$  ( $i=1,2,3,4$ ).

L'approximation des variables cinématiques de trois couches peut être exprimée comme suit:

a. Au plan médian de la plaque sandwich:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_{0i} \quad ; \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_{0i} \quad ; \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_{0i} \quad (4.11)$$

b. L'âme:

$$\begin{aligned} \psi_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^c \quad , & \psi_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^c \\ \eta_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \eta_{xi}^c \quad , & \eta_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \eta_{yi}^c \\ \zeta_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \zeta_{xi}^c \quad , & \zeta_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \zeta_{yi}^c \end{aligned} \quad (4.12)$$

c. Peau supérieure:

$$\psi_x^t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^t \quad , \quad \psi_y^t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^t \quad (4.13)$$

d. Peau inférieure:

$$\psi_x^b(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^b \quad , \quad \psi_y^b(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^b \quad (4.14)$$

L'approximation nodale du vecteur de déformation de l'âme (Eq.2.2-2.4), en un point quelconque de coordonnée  $(x, y)$ , pourra être exprimée par les dérivées des déplacements nodaux comme suite:

$$\begin{aligned} \{\chi^{(1)}\}^e &= [B_z^{(1)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \quad ; \quad \{\chi^{(2)}\}^e = [B_z^{(2)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \quad ; \quad \{\chi^{(3)}\}^e = [B_z^{(3)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \\ \{\gamma_s^{(0)}\}^e &= [B_{z_s}^{(0)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \quad ; \quad \{\chi_s^{(1)}\}^e = [B_{z_s}^{(1)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \quad ; \quad \{\chi_s^{(2)}\}^e = [B_{z_s}^{(2)}]^{(e)} \{\delta_i\}_{(e)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Où les matrices de déformation  $[B_{\zeta}^{(1)}]$ ,  $[B_{\zeta}^{(2)}]$ ,  $[B_{\zeta}^{(3)}]$ ,  $[B_{\zeta_s}^{(0)}]$ ,  $[B_{\zeta_s}^{(1)}]$  et  $[B_{\zeta_s}^{(2)}]$  peuvent être obtenues à partir la dérivation des fonctions de forme. Soit :

$$\begin{aligned}
 [B_{\zeta}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{\zeta}^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{\zeta}^{(3)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16} \\
 [B_{\zeta_s}^{(0)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{\zeta_s}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{\zeta_s}^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour la peau supérieure, les matrices déformation-déplacement généralisées peuvent être données comme ci-dessous

$$\{\varepsilon_m^t\}^e = [B_m^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\varepsilon_f^t\}^e = [B_f^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\gamma_c^t\}^e = [B_c^t]^e \{\delta_i\}_e \quad (4.17)$$

d'où

$$[B_m^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$c = \frac{h_c}{2} \quad , \quad d = \frac{h_c^2}{4} \quad , \quad e = \frac{h_c^3}{8} \quad , \quad f = -\frac{h_c}{2} \quad (4.18)$$

$$[B_f^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_c^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Même façon pour la peau inférieure, les matrices déformation-déplacement généralisées sont données par :

$$\{\varepsilon_m^b\}^e = [B_m^b]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\varepsilon_f^b\}^e = [B_f^b]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\gamma_c^b\}^e = [B_c^b]^e \{\delta_i\}_e \quad (4.19)$$

d'où,

$$[B_m^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

avec :

$$f = -\frac{h_c}{2} \quad , \quad d = \frac{h_c^2}{4} \quad , \quad h = -\frac{h_c^3}{8} \quad , \quad c = \frac{h_c}{2}$$

$$[B_f^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(4.20)

$$[B_c^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

### 4.3.3 Introduction de la méthode des déformations naturelles de substitution (ANS)

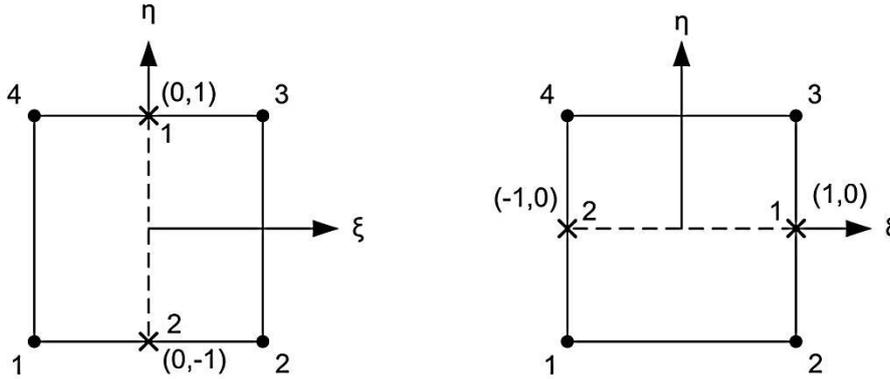
Dans l'analyse des plaques minces, en utilisant des théories tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, un phénomène appelé blocage ou verrouillage, en cisaillement ("Locking") pourrait survenir. La raison de ce blocage est que l'élément, lorsqu'il est chargé en flexion pure, présentera une surestimation de la rigidité en cisaillement, i.e. le comportement en cisaillement devient prédominant devant les autres comportements. Afin de remédier à ce problème, Dvorkin and Bathe [234] et Huang and Hinton [235] ont proposé la méthode dite: "méthode des déformations naturelles de substitution (ANS)" comme une solution pour l'éviter ou du moins pour en limiter ses effets (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les articles [231, 239, 277, 278]).

Dans ce chapitre, nous allons introduire cette méthode, dans les deux peaux, pour atténuer l'éventuel phénomène de verrouillage en cisaillement. Les déformations naturelles de substitution sont dérivées en utilisant des fonctions d'interpolation, basées sur le polynôme de

Lagrange et les valeurs de déformation angulaire aux points (sampling points) où il n'existe pas de verrouillage [239].

Les points de prélèvement utilisés pour les déformations de cisaillement transverse naturelles des deux peaux  $\gamma_{xz}^{f(A)}$  et  $\gamma_{yz}^{f(A)}$  ( $f = sup, inf$ ) sont présentés dans la figure 4. 3:

$$\gamma_{xz}^{f(A)} \rightarrow (0,1)_1 : (0,-1)_2, \quad \gamma_{yz}^{f(A)} \rightarrow (1,0)_1 : (-1,0)_2 \quad (4.21)$$



**Fig. 4.3** Position du point de prélèvement pour les composantes:  $\gamma_{xz}^{f(A)}$  (à gauche) et  $\gamma_{yz}^{f(A)}$  (à droite)

En utilisant l'équation (4.21), les déformations de cisaillement transverse naturelles de substitution peuvent être définies sous la forme suivante:

$$\gamma_{xz}^{f(A)} = \sum_{i=1}^2 P_{\delta}(\eta) \gamma_{xz}^{\delta}, \quad \gamma_{yz}^{f(A)} = \sum_{i=1}^2 Q_{\delta}(\xi) \gamma_{yz}^{\delta} \quad (4.22)$$

Où  $\delta$  indique la position du point de prélèvement comme illustré dans la figure 4.3. Les fonctions  $P$  et  $Q$  sont interpolés d'une manière linéaire, deux à deux, comme suit:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}(1 + \eta), & P_2 &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ Q_1 &= \frac{1}{2}(1 + \xi), & Q_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

La relation déplacement-déformation de cisaillement transverse, produit par la méthode des déformations naturelles de substitution, peut être écrite sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \bar{\gamma}_s^t \\ \bar{\gamma}_s^b \end{matrix} \right\} &= \sum_{i=1}^4 \left[ \begin{matrix} \bar{B}_s^{t(A)} \\ \bar{B}_s^{b(A)} \end{matrix} \right] \{ \delta_i \} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $\bar{B}_s^{(A)}$  et  $\bar{B}_s^{(A)}$  sont les matrices de déformations naturelles de substitution de peau supérieure et inférieure, respectivement.

#### 4.3.4 Évaluation de la matrice de rigidité

Pour élaborer la matrice de rigidité de l'élément QSFT52, il suffit d'utiliser le principe des travaux virtuels que nous avons présenté dans le chapitre précédent.

Dans le modèle proposé, le travail virtuel des efforts internes ( $\delta U$ ) de la plaque sandwich peut être écrit comme la somme des énergies de déformation de ses trois couches (peau supérieure, âme et peau inférieure), soit:

$$\delta U = \delta U_c + \delta U_t + \delta U_b \quad (4.25)$$

où

$$\delta U = \int_v (\sigma^{(c)})^T \delta \varepsilon^{(c)} dv + \int_v (\sigma^{(t)})^T \delta \varepsilon^{(t)} dv + \int_v (\sigma^{(b)})^T \delta \varepsilon^{(b)} dv \quad (4.26)$$

Le travail virtuel effectué par les forces externes est donné par:

$$\delta W = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \delta w \det(J) d\xi d\eta \quad (4.27)$$

##### 4.3.4.1 Matrice de rigidité de l'âme

La substitution des expressions de contraintes résultantes (Eqs. (2.48-2.49) dans l'expression de l'énergie de déformation de l'âme (Eq.4.26), nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [A] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [B] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [D] \left\{ \chi^{(2)} \right\} \right. \\
& + \left\{ \delta \varepsilon^{(0)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [B] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [D] \left\{ \chi^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(1)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [D] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [E] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(2)} \right\}^T [G] \left\{ \chi^{(3)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [E] \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [F] \left\{ \chi^{(1)} \right\} + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [G] \left\{ \chi^{(2)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi^{(3)} \right\}^T [H] \left\{ \chi^{(3)} \right\} + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [A^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [B^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \gamma_s^{(0)} \right\}^T [D^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [B^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [D^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& + \left\{ \delta \chi_s^{(1)} \right\}^T [E^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [D^s] \left\{ \gamma_s^{(0)} \right\} + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [E^s] \left\{ \chi_s^{(1)} \right\} \\
& \left. + \left\{ \delta \chi_s^{(2)} \right\}^T [F^s] \left\{ \chi_s^{(2)} \right\} \right) \det(J) d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \delta w \det(J) d\xi d\eta = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

L'introduction des relations déformation-déplacement dans l'expression (4.28), mène à l'équation d'équilibre suivante:

$$[K_e^{(c)}] \{d_e\} = \{f_e^{(c)}\} \tag{4.29}$$

où  $[K_e^{(c)}]$  est la matrice de rigidité élémentaire de l'âme de dimension (52×52).

Les composantes de la matrice de rigidité et des vecteurs forces, de l'âme, sont évaluées par intégration numérique en utilisant (2x2) points de Gauss, soit:

$$\begin{aligned}
[K^{(c)}] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [B_\varepsilon^{(0)}]^T [A] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [B] [B_\chi^{(1)}] + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [D] [B_\chi^{(2)}] \right. \\
& + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [E] [B_\chi^{(3)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [B] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [D] [B_\varepsilon^{(0)}] \\
& + [B_\chi^{(1)}]^T [E] [B_\chi^{(2)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [F] [B_\chi^{(3)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [D] [B_\varepsilon^{(0)}] \\
& + [B_\chi^{(2)}]^T [E] [B_\chi^{(1)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [F] [B_\chi^{(2)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [G] [B_\chi^{(3)}] \\
& + [B_\chi^{(3)}]^T [E] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\chi^{(3)}]^T [F] [B_\chi^{(1)}] + [B_\chi^{(3)}]^T [G] [B_\chi^{(2)}] \\
& + [B_\chi^{(3)}]^T [H] [B_\chi^{(3)}] + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [A^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [B^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
& + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [D^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [B^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [D^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
& + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [E^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [D^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [E^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
& \left. + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [F^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] \right) \det(J) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.30}$$

### 4.3.4.2 Matrice de rigidité des deux peaux

Les mêmes étapes ont été suivies pour élaborer la matrice de rigidité globale de deux peaux, on aura donc :

#### a. Peau supérieure

$$\begin{aligned} [K^{(t)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left( \underbrace{[B_m^t]^T [A^{(t)}] [B_m^t]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m^t]^T [B^{(t)}] [B_f^t]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f^t]^T [B^{(t)}] [B_m^t]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ & \left. + \underbrace{[B_f^t]^T [D^{(t)}] [B_f^t]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c^t]^T [A_c^{(t)}] [B_c^t]}_{\text{cisaillement}} \right) \det(J) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### b. Peau inférieure

$$\begin{aligned} [K^{(b)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left( \underbrace{[B_m^b]^T [A^{(b)}] [B_m^b]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m^b]^T [B^{(b)}] [B_f^b]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f^b]^T [B^{(b)}] [B_m^b]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ & \left. + \underbrace{[B_f^b]^T [D^{(b)}] [B_f^b]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c^b]^T [A_c^{(b)}] [B_c^b]}_{\text{cisaillement}} \right) \det(J) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.33)$$

Finalement, la matrice de rigidité totale  $[K_e^T]$  de l'élément QSFT52 est la somme des matrices de rigidité de trois couches, elle est exprimée comme ci-dessous :

$$[K_e^T] = [K_e^{(t)}] + [K_e^{(c)}] + [K_e^{(b)}] \quad (4.34)$$

La matrice de rigidité globale s'obtient par l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

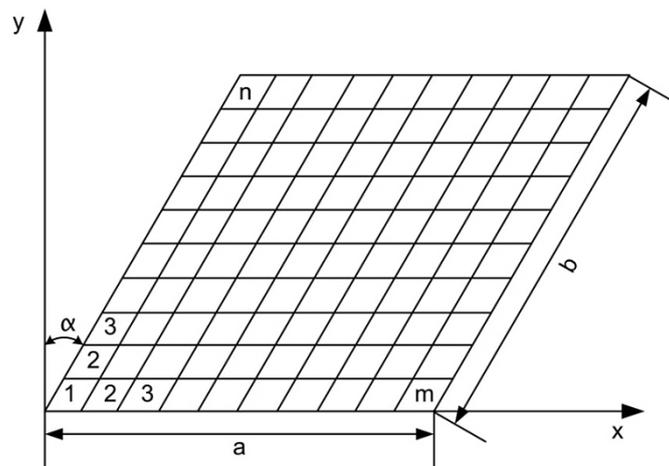
## 4.4 Performance et efficacité de l'élément QSFT52

Le but de cette partie est de montrer, à travers une série d'applications, la performance de l'élément QSFT52 dans la résolution des problèmes de flexion des plaques composites stratifiées et sandwichs, de forme rectangulaires et biaises (skew plates). Cet élément permet d'évaluer le déplacement transversal, les contraintes de cisaillement transversal ainsi que les contraintes normales. Dans ces tests, différents cas de chargements, de géométries et de conditions aux limites ont été considérés. Les résultats numériques obtenus sont comparés

avec les solutions analytiques et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

#### 4.4.1 Plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée et soumise à un chargement uniformément réparti

Afin d'étudier l'influence de la distorsion géométrique sur la précision du modèle, le cas d'une plaque composite stratifiée biaise (figure 4.4) a été traité. Ce test est suffisant pour montrer les principales performances de l'élément développé QSFT52 dans le traitement de ce type de géométrie. La plaque est simplement appuyée sur les quatre côtés et soumise à un chargement uniformément réparti. Elle est constituée de trois couches identiques (0/90/0) dont les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que celles adoptées dans l'exemple 3.3.3.1 (chapitre III). Dans la présente analyse, trois angles de biaises ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ ) avec deux rapports d'épaisseur ( $h/a = 0.1$  et  $0.2$ ) sont considérés.



**Fig.4.4** Plaque biaise simplement appuyée avec un maillage de  $m \times n$

Les valeurs du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), normalisé par la formule (3.26), sont représentées dans le tableau 4.1, en utilisant un maillage de  $(12 \times 12)$ . On remarque que les résultats obtenus par le présent élément QSFT52 sont en très bon accord avec ceux obtenus via des modèles d'éléments finis de, Chakrabarti et Sheikh [260], Sheikh et Chakrabarti [233], Kabir [279], Ramesh et al. [250], Chalak et al. [280] et Kulkarni et Kapuria [266], basés sur différentes théories (FSDT, HSDT, RTSST, LW et HZZT).

**Tableau 4.1** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée sous chargement uniforme

$h/a$	Angle biaise	Références	Modèles EF	$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$
0.1	30°	Présent élément	QSFT52	0.8452
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.8814
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-FSDT	0.9182
		Sheikh et Chakrabarti [233]	FEM-T6-HSDT	0.8621
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	0.9013
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	0.8666
		Kulkarni et Kapuria [266]	FEM-Q4-RTSDT	0.8666
		Chalak et al. [280]	FEM-Q9-HZZT	0.8366
		Dey et al. [281]	FEM-T6-FSDT	0.8406
	45°	Présent élément	QSFT52	0.5758
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.5742
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-FSDT	0.6045
		Sheikh et Chakrabarti [233]	FEM-T6-HSDT	0.5939
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	0.5745
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	0.5707
		Kulkarni et Kapuria [266]	FEM-Q4-RTSDT	0.5725
		Chalak et al. [280]	FEM-Q9-HZZT	0.5611
		Dey et al. [279]	FEM-T6-FSDT	0.5499
	60°	Présent élément	QSFT52	0.2599
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.2481
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-FSDT	0.2642
		Sheikh et Chakrabarti [233]	FEM-T6-HSDT	0.2602
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	0.2541
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	0.2505
		Kulkarni et Kapuria [266]	FEM-Q4-RTSDT	0.2461
		Chalak et al. [280]	FEM-Q9-HZZT	0.2490
		Kabir [279]	FEM-T6-FSDT	0.2600
	0.2	30°	Présent élément	QSFT52
Chakrabarti et Sheikh [260]			FEM-T6-HZZT	1.6811
Chakrabarti et Sheikh [260]			FEM-T6-FSDT	1.8642
Ramesh et al. [250]			FEM-T45-LW	1.7350
Ramesh et al. [250]			FEM-T45-TSDT	1.6713
Chalak et al. [280]			FEM-Q9-HZZT	1.6904
45°		Présent élément	QSFT52	1.3089
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	1.1790
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-FSDT	1.2174
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	1.1248
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	1.0980
		Chalak et al. [280]	FEM-Q9-HZZT	1.1496
60°		Présent élément	QSFT52	0.6208
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.5196
		Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-FSDT	0.5158
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-LW	0.5210
		Ramesh et al. [250]	FEM-T45-TSDT	0.5185
		Chalak et al. [280]	FEM-Q9-HZZT	0.5073

#### 4.4.2 Plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal

Il s'agit d'une plaque sandwich carrée symétrique ( $f/c/f$ ), simplement appuyée et soumise à un chargement doublement sinusoïdal. Les propriétés matérielles de l'âme et celles des peaux sont les mêmes que celles adoptées dans l'exemple 3.3.4.1 (chapitre III). L'épaisseur de chaque peau est égale à  $0.1 h$  et celle de l'âme est  $0.8 h$ ,  $h$  étant l'épaisseur totale de la plaque. Durant cette étude, les rapports d'épaisseur suivants ( $a/h = 2, 4, 5, 10, 20$  et  $50$ ) ont été considérés. Les résultats du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) au centre de la plaque, les contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ) sont normalisés respectivement par les formules suivantes :

$$\left(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}\right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right) \quad (4.35)$$

$$\left(\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}\right) = \frac{h}{q_0 a} \left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right) \quad (4.36)$$

$$\bar{w} = \left(\frac{100 E_2 h^3 w}{a^4 q_0}\right) \quad (4.37)$$

Les résultats obtenus sont rapportés dans le tableau 4.2 pour différents types de maillage. Ces derniers sont comparés avec la solution d'élasticité-3D donnée par Pagano [24], d'une part, et d'autre part avec des modèles d'éléments finis basés sur des théories différentes, connues dans la littérature scientifique (MFEM-3D-LW, FEM-Q9-TSDT, FEM-Q9-IHZZT, FEM-Q8-HZZT, FEM-Q9-HZZT, FEM-Q9-HSDT):

- MFEM-3D-LW: Élément fini mixte 3D, basé sur l'approche layerwise, présenté par Ramtekkar et *al.* [246]
- FEM-Q9-TSDT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie du troisième ordre, présenté par Tu et *al.* [236]
- FEM-Q9-IHZZT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur amélioré, présenté par Pandit et *al.* [162]
- FEM-Q8-HZZT: Élément fini quadrilatère à huit nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, présenté par Singh et *al.* [261]

- FEM-Q9-HZZT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, présenté par Khandelwal et *al.* [160]
- FEM-Q9-HSDT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie d'ordre supérieur, présenté par Manjunatha et Kant [227]

Les figures 4.5 et 4.6, illustrent les distributions de contraintes planes, suivant l'épaisseur de la plaque sandwich, pour les deux rapports d'épaisseur ( $h/a = 0.1$  et  $0.25$ ), respectivement.

Le tableau 4.2 et les figures 4.5 et 4.6, montrent que l'élément développé **QSFT52** donne des résultats très satisfaisants par rapport aux valeurs de référence, spécialement en ce qui concerne les valeurs de contraintes de cisaillement transversal.

#### 4.4.3 Plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ) encastrée et soumise à une charge uniformément répartie

Cet exemple a notamment été traité par Pandit [162]. Il s'agit d'une plaque sandwich carrée encastrée dans les quatre côtés et soumise à une charge uniformément répartie. Les mêmes propriétés géométriques et mécaniques du problème précédent ont été adoptées. L'étude a été faite pour différents rapports d'épaisseur ( $a/h = 100, 50, 20, 10$  et  $4$ ) avec un maillage de  $16 \times 16$ . Les résultats non-dimensionnels, du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), les contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ), et les contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), obtenus par la présente formulation aux différents points, sont résumés dans le tableau 4.3.

Les courbes de variation du déplacement transversal non-dimensionnel, en fonction du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) ont été présentées sur la figure 4.7. D'après cette figure, on observe une excellente corrélation entre les résultats obtenus par l'élément développé (QSFT52) et à ceux obtenus par l'élément de Pandit et *al.* [162]. On peut noter que l'élément développé est applicable aux problèmes de flexion des plaques sandwichs qu'elles soient minces ou épaisses (aucun phénomène de verrouillage en cisaillement).

**Tableau. 4. 2** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique ( $f/c/f$ ), simplement appuyée, sous chargement doublement sinusoïdal

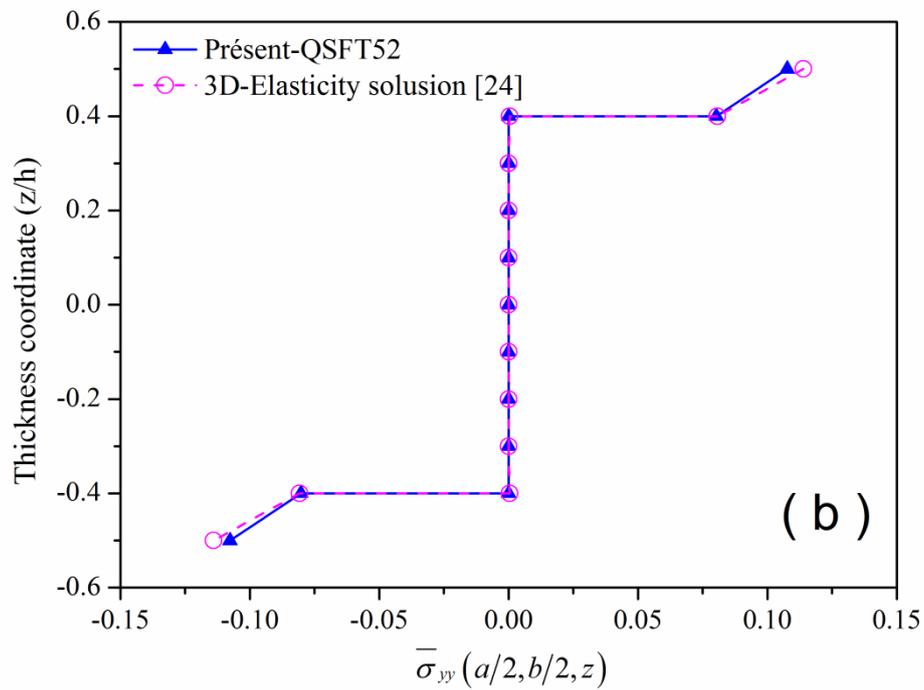
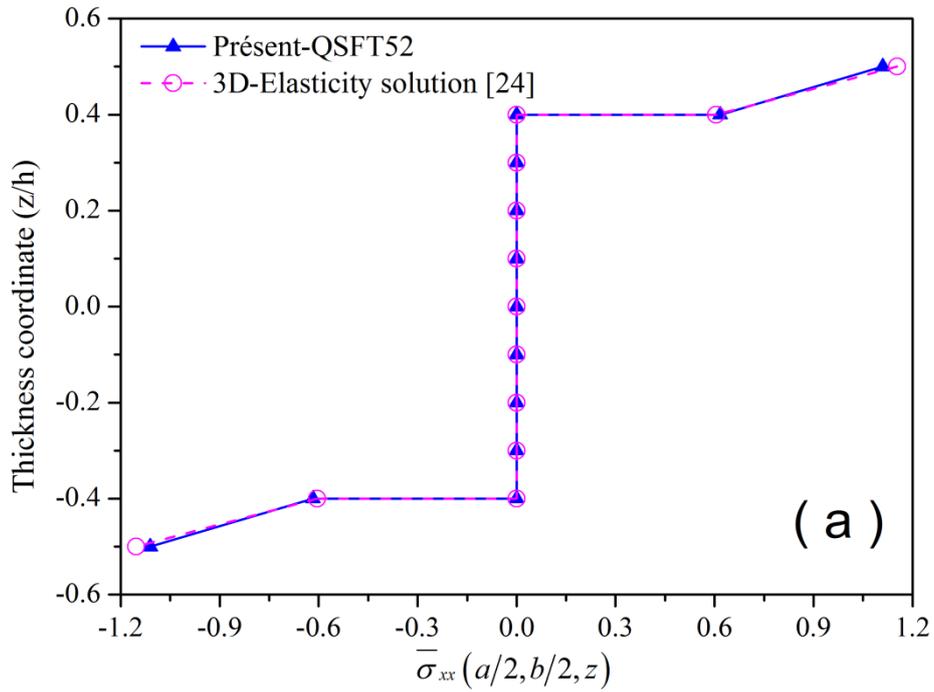
$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$
0.5	Présent élément (8×8)	QSFT52	23.4200	2.2463	0.3931	0.1766	0.1363	0.2283
	Présent élément (10×10)	QSFT52	23.3493	2.2886	0.4014	0.1803	0.1388	0.2330
	Présent élément (12×12)	QSFT52	23.3106	2.3119	0.4060	0.1823	0.1401	0.2356
	Présent élément (14×14)	QSFT52	23.2875	2.3260	0.4088	0.1835	0.1409	0.2372
	Présent élément (16×16)	QSFT52	23.2725	2.3351	0.4106	0.1843	0.1414	0.2382
	Pagano [24]	Elasticity solution	21.6531	2.6530	0.3920	0.1850	0.1400	0.2340
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	-	2.6840	0.3960	0.1860	0.1420	0.2360
	Kant et Kommineni [225]	FEM-Q9-TSDT	21.3707	2.7985	-	-	-	0.2371
0.25	Présent élément (8×8)	QSFT52	7.7651	1.3281	0.2399	0.2255	0.1038	0.1386
	Présent élément (10×10)	QSFT52	7.7526	1.3563	0.2452	0.2303	0.1052	0.1417
	Présent élément (12×12)	QSFT52	7.7457	1.3719	0.2481	0.2330	0.1059	0.1434
	Présent élément (14×14)	QSFT52	7.7416	1.3813	0.2499	0.2346	0.1064	0.1444
	Présent élément (16×16)	QSFT52	7.7388	1.3875	0.2511	0.2357	0.1067	0.1451
	Pagano [24]	Elasticity solution	7.5962	1.5160	0.2595	0.2390	0.1072	0.1440
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	7.6552	1.5218	0.2506	0.2520	0.1156	0.1468
	Tu et al. [236]	FEM-Q9-TSDT	7.5610	1.5518	0.2483	0.2447	0.1184	0.1459
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	7.8556	1.5480	-	0.2611	-	0.1671
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	7.5873	1.5316	0.2674	0.2538	0.1192	-
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	7.5822	1.5306	0.2581	0.2436	0.1147	0.1445
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	-	1.5700	0.2600	0.2400	0.1080	0.1450
	Wu et Lin [242]	MFEM-3D-LW	-	1.5480	0.2413	0.2497	-	0.1339
	Pandya et Kant [223]	FEM-Q9-HSDT	0.6947	1.5230	0.2414	0.2750	-	0.1419
	Manjunatha et Kant [227]	FEM-Q9-HSDT	7.1596	-	-	0.2370	0.1040	-
	Kant et Kommineni [225]	FEM-Q9-TSDT	7.1502	1.4989	-	-	-	0.1428
	Kant et Swaminathan [30]	HSDT-Anal	7.0551	1.5137	0.2648	-	-	0.1379

Tableau 4.2 Suite

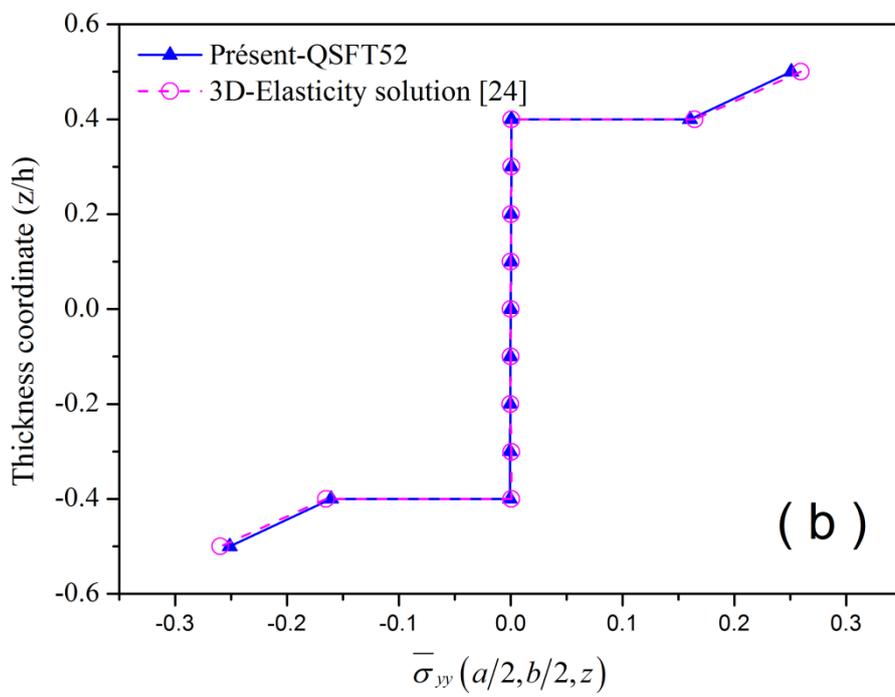
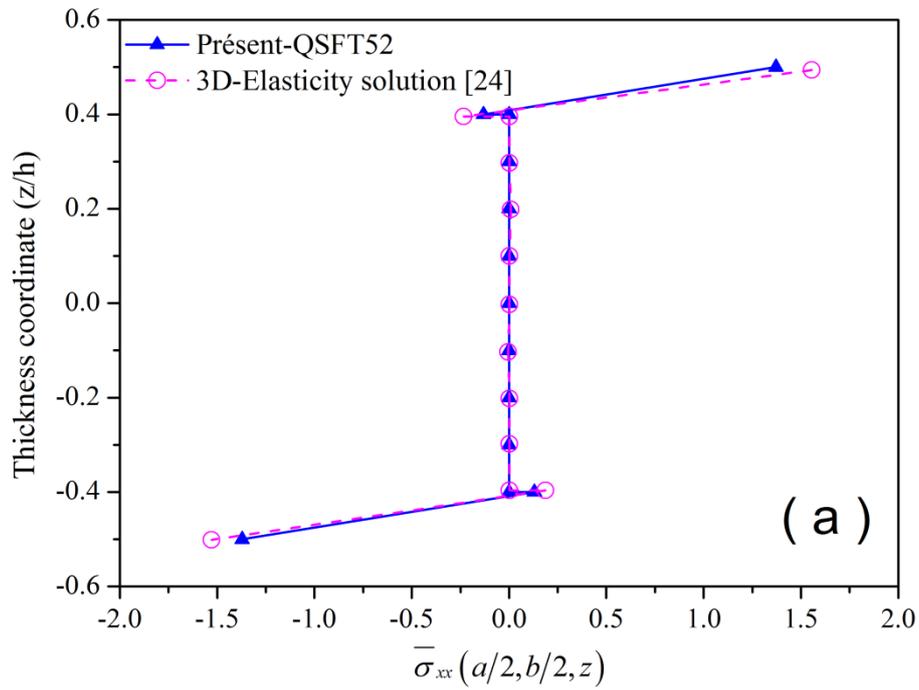
$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$
0.2	Présent élément (8×8)	QSFT52	5.5650	1.2038	0.1972	0.2424	0.0893	0.1157
	Présent élément (10×10)	QSFT52	5.5600	1.2311	0.2017	0.2476	0.0903	0.1183
	Présent élément (12×12)	QSFT52	5.5571	1.2461	0.2042	0.2505	0.0908	0.1197
	Présent élément (14×14)	QSFT52	5.5554	1.2552	0.2057	0.2523	0.0911	0.1206
	Présent élément (16×16)	QSFT52	5.5554	1.2612	0.2067	0.2535	0.0913	0.1212
	Pagano [24]	Elasticity solution	5.4746	1.3704	0.2094	0.2569	0.0918	-
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	5.4464	1.3617	0.2216	0.2530	0.1025	-
0.1	Présent élément (8×8)	QSFT52	2.1964	1.0484	0.1020	0.2815	0.0538	0.0662
	Présent élément (10×10)	QSFT52	2.2036	1.0777	0.1047	0.2880	0.0534	0.0680
	Présent élément (12×12)	QSFT52	2.2075	1.0939	0.1062	0.2916	0.0532	0.0690
	Présent élément (14×14)	QSFT52	2.2099	1.1038	0.1071	0.2938	0.0531	0.0696
	Présent élément (16×16)	QSFT52	2.2115	1.1103	0.1077	0.2952	0.0530	0.0699
	Pagano [24]	Elasticity solution	2.2004	1.1531	0.1104	0.3000	0.0530	0.0707
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-HZZT	2.2002	1.1483	0.1086	0.3158	0.0570	0.0709
	Tu et al. [236]	FEM-Q9-TSDT	2.2027	1.1466	0.1105	0.3181	0.0532	0.0715
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	2.2389	1.1594	-	0.3237	-	0.0759
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	2.1786	1.1539	0.1184	0.3185	0.0598	-
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	2.1775	1.1528	0.1143	0.3058	0.0575	0.0705
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	-	1.1590	0.1110	0.3030	0.0550	0.0720
	Wu et Lin [242]	MFEM-3D-LW	-	1.2100	0.1115	0.3240	-	0.0713
	Pandya et Kant [223]	FEM-Q9-HSDT	0.2023	1.1660	0.1052	0.3400	-	0.0692
	Kant et Kommineni [225]	FEM-Q9-TSDT	2.0864	1.1657	-	-	-	0.0692
	Kant et Swaminathan [30]	HSDT-Anal	2.0798	1.1523	0.1100	-	-	0.0685
	Nayak et al. [231]	FEM-Q4-HSDT	-	1.1410	0.1034	0.3465	0.0574	0.0685
	Nayak et al. [231]	FEM-Q9-HSDT	-	1.1510	0.1043	0.3506	0.0580	0.0689

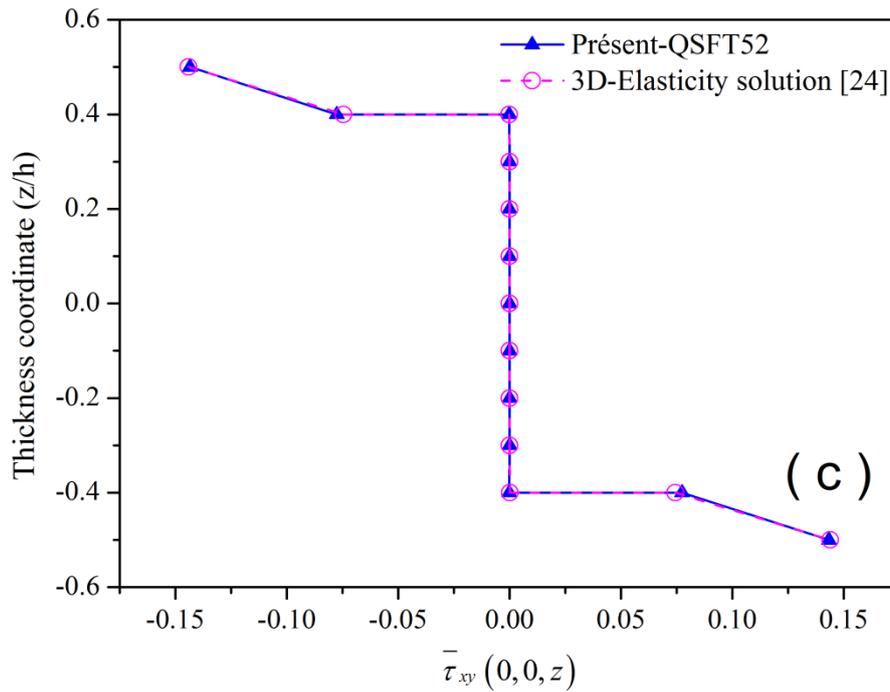
Tableau 4.2 Suite

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$
0.05	Présent élément (8×8)	QSFT52	1.1766	0.9895	0.0627	0.2944	0.0430	0.0459
	Présent élément (10×10)	QSFT52	1.1953	1.0292	0.0652	0.3025	0.0407	0.0477
	Présent élément (12×12)	QSFT52	1.2058	1.0516	0.0666	0.3069	0.0393	0.0487
	Présent élément (14×14)	QSFT52	1.2122	1.0653	0.0674	0.3097	0.0385	0.0493
	Présent élément (16×16)	QSFT52	1.2164	1.0743	0.0680	0.3115	0.0379	0.0497
	Pagano [24]	Elasticity solution	1.2264	1.1100	0.0700	0.3174	0.0361	0.0511
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-HZZT	1.2254	1.1055	0.0694	0.3342	0.0392	0.0509
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	1.2424	1.1161	-	0.3429	-	0.0536
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT	1.2128	1.1113	0.0769	0.3374	0.0415	-
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	1.2121	1.1103	0.0742	0.3272	0.0399	0.0508
	Ramtekkar et al. [246]	MFEM-3D-LW	-	1.1150	0.0700	0.3170	0.0360	0.0510
	Wu et Lin [242]	MFEM-3D-LW	-	1.1730	0.0724	0.3530	-	0.0525
	Kant et Kommineni [225]	FEM-Q9-TSDT	1.1947	1.1246	-	-	-	0.0506
	Kant et Swaminathan [30]	HSDT-Anal	1.1933	1.1110	0.0705	-	-	0.0504
0.02	Présent élément (8×8)	QSFT52	0.7347	0.8099	0.0419	0.2801	0.0646	0.0329
	Présent élément (10×10)	QSFT52	0.7962	0.8979	0.0465	0.2937	0.0547	0.0365
	Présent élément (12×12)	QSFT52	0.8341	0.9523	0.0493	0.3019	0.0483	0.0387
	Présent élément (14×14)	QSFT52	0.8588	0.9877	0.0511	0.3072	0.0441	0.0401
	Présent élément (16×16)	QSFT52	0.8756	1.0119	0.0524	0.3107	0.0412	0.0411
	Pagano [24]	Elasticity solution	0.9348	1.0990	0.0569	0.3230	0.0306	0.0446
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-HZZT	0.9341	1.0948	0.0566	0.3403	0.0333	0.0445
	Singh et al. [261]	FEM-Q8-HZZT	0.9458	1.1050	-	0.3617	-	0.0465
	Chalak et al. [262]	FEM-Q9-HZZT	0.9248	1.0997	0.0611	0.3300	0.0321	0.0443

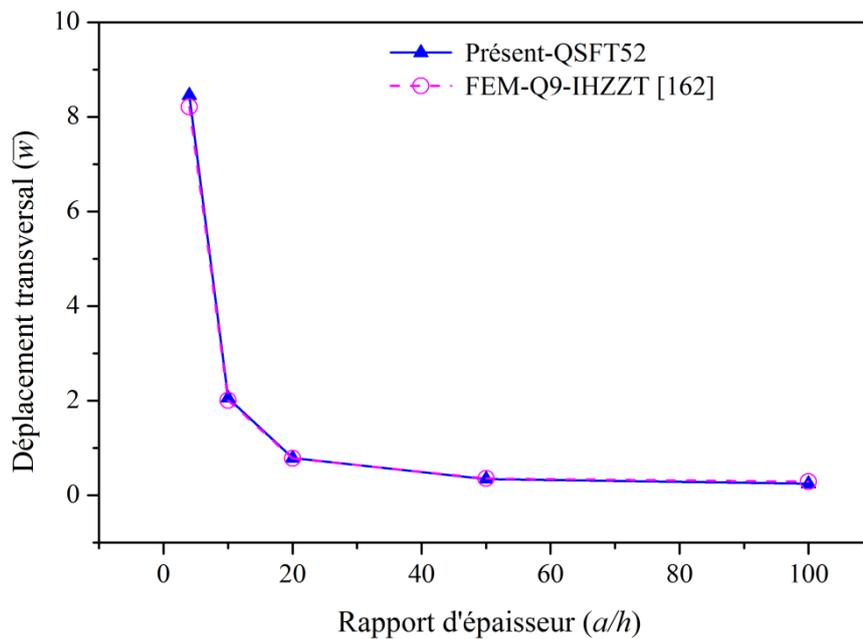


**Fig. 4.5** Distribution des contraintes planes (a)  $\bar{\sigma}_{xx}$  et (b)  $\bar{\sigma}_{yy}$ , à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ( $h/a = 0.1$ )





**Fig. 4.6** Distribution des contraintes planes (a)  $\bar{\sigma}_{xx}$ , (b)  $\bar{\sigma}_{yy}$  et (c)  $\bar{\tau}_{xy}$ , à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée soumise à une charge sinusoidale ( $h/a = 0.25$ )



**Fig. 4.7** Influence du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich ( $f/c/f$ ) encastree sous chargement uniforme

**Tableau 4.3** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique ( $f/c/f$ ), encastée, sous chargement uniforme

$\frac{a}{h}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right)$
100	Présent élément	QSFT52	0.2458	0.4490	0.0178	0.5120	0.2321	- 0.0018
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.2897	-0.4490	-0.0178	0.5429	0.1764	0.0018
50	Présent élément	QSFT52	0.3458	0.5226	0.0189	0.5024	0.1841	-0.0037
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.3549	-0.5226	-0.0189	0.5138	0.1806	0.0037
20	Présent élément	QSFT52	0.7871	0.5576	0.0402	0.4528	0.1776	-0.0098
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	0.7793	-0.5576	-0.0402	0.4368	0.2020	0.0098
10	Présent élément	QSFT52	2.0585	0.6011	0.0999	0.3761	0.2049	-0.0089
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	2.0090	-0.6011	-0.0999	0.3367	0.2372	0.0197
4	Présent élément	QSFT52	8.4575	0.6346	0.0951	0.3761	0.2049	-0.0171
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	8.2090	-0.6346	-0.0952	0.2242	0.2630	0.0163
4	Présent élément	QSFT52	8.4575	1.0148	0.2070	0.2751	0.2212	-0.0457
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	8.2090	-1.0148	-0.2070	0.2242	0.2630	0.0457
4	Présent élément	QSFT52	8.4575	1.1809	0.1919	0.2242	0.2630	-0.0401
	Pandit et al. [162]	FEM-Q9-IHZZT	8.2090	-1.1819	-0.1923	0.2242	0.2630	0.0314

#### 4.4.4 Plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ) sous chargement uniformément réparti

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée aux dimensions  $a = b = 254 \text{ mm}$ , soumise un chargement réparti uniforme ( $P = 0.00688 \text{ N/mm}^2$ ) a été considérée. Les propriétés mécaniques sont représentées dans le tableau 4.4. L'épaisseur totale de la plaque ( $h$ ) est de  $20.4724 \text{ mm}$ , où l'épaisseur de chaque peau est de  $0.7112 \text{ mm}$ . Deux types de matériaux avec deux types de conditions aux limites (SSSS et CCCC) ont été étudiés. Pour la modélisation, trois types de maillage ont été utilisés ( $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$  et  $16 \times 16$ ).

Les valeurs du déplacement transversal au centre de la plaque ( $w$ ), les contraintes planes ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ ) et les contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), obtenus par notre élément, sont comparés à ceux obtenus par la solution analytique de Azar [22] (pour le matériau I) et ceux obtenus à partir des modèles d'éléments finis rencontrés dans la littérature basés sur la théorie de zig-zag (tableau 4.5). Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les solutions de références de Khatua et Cheung [210], Topdar et *al.* [163] et Chakrabarti et Sheikh [260]. Ces derniers confirment la fiabilité et la robustesse de l'élément développé QSFT52 en termes de convergence et de stabilité.

**Tableau 4.4** Propriétés mécaniques utilisés dans l'exemple 4.4.4

Matériaux		Propriétés mécaniques en GPa					
		$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13}$
Cas I (SSSS)	Peaux	68.800	68.800	26.461	27.520	27.520	0.3
	Âme	$6.88 \times 10^{-12}$	$6.88 \times 10^{-12}$	$2.646 \times 10^{-12}$	0.2064	0.2064	0.3
Cas II (CCCC)	Peaux	68.800	68.800	26.461	27.520	27.520	0.3
	Âme	$6.88 \times 10^{-12}$	$6.88 \times 10^{-12}$	$2.646 \times 10^{-12}$	0.3131	0.3131	0.3

#### 4.4.5 Plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées alternés (angle-ply)

On considère pour cette étude, une plaque sandwich carrée ayant des peaux stratifiées alternées (angle-ply) ( $f(\theta/\theta + 90)/c/f(\theta/\theta + 90)$ ). La plaque est simplement appuyée sur les quatres cotés et soumise à une charge uniformément répartie. L'épaisseur de l'âme est de  $0.8 h$ , tandis que celle de chaque couche de stratifiée est de  $0.05 h$ ,  $h$  étant l'épaisseur totale

de la plaque. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour l'âme et les deux peaux sont les mêmes que celles adoptées dans l'exemple 3.3.4.4 (chapitre III). L'analyse est effectuée pour trois rapports d'épaisseur ( $h/a = 0.05, 0.1$  et  $0.2$ ) et trois angles d'orientation ( $0^\circ, 30^\circ$  et  $45^\circ$ ).

Dans le tableau 4.6, on présente les résultats du déplacement transversal, les contraintes planes au centre de la plaque, et les contraintes de cisaillement transversal aux milieux des côtés. Les résultats obtenus par le présent élément (QSFT52) sont comparés à ceux obtenus avec des modèles d'éléments finis de Chakrabarti et Sheikh [158] et Khandelwal et *al.* [160], en utilisant la théorie de zig-zag d'ordre supérieur (FEM-Q9-HZZT, FEM-T6-HZZT). D'après les résultats qui figurent sur le tableau 4.5, on remarque que l'élément développé **QSFT52** donne des résultats très satisfaisants et totalement comparables avec les résultats de références.

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu généraliser et réaliser une reformulation de l'élément fini rectangulaire RSFT52, développé dans le chapitre précédent, en faisant introduire la notion d'isoparamétrie. La nouvelle version de l'élément RSFT52 est nommée QSFT52. Ce dernier est un élément quadrilatère isoparamétrique à quatre nœuds avec treize degrés de liberté par nœud. Il est construit sur la base du modèle layerwise, proposé dans le chapitre 2.

La performance et la robustesse de ce nouvel élément développé a été également démontrée à travers une série d'exemples, rencontrés dans la littérature, dans les cas de problèmes de flexion des plaques composites stratifiées et sandwichs dont la forme est quelconque. La comparaison a été faite par rapport aux éléments de type triangulaire à six nœuds (T6) et quadrilatère à huit et neuf nœuds (Q8 et Q9), en utilisant des théories raffinées notamment la théorie de zig-zag d'ordre supérieur. Les résultats de comparaison reflètent clairement l'efficacité et la précision de l'élément fini développé.

Dans ce qui suit, l'élément QSFT52 sera utilisé dans l'analyse dynamique des plaques qu'elles soient isotropes, composites stratifiées ou sandwichs. Et cela fait l'objet du chapitre suivant.

**Tableau 4.5** Déplacement transversal ( $w$ ), contraintes planes ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), d'une plaque sandwich symétrique ( $f/c/f$ ), sous chargement uniforme

Références	Modèles EF	$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \times 100$	$\sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\tau_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$	
Cas I	Présent élément (8×8)	QSFT52	1.8679	1.5146	1.5146	0.0244	0.0244	-0.9700
	Présent élément (12×12)	QSFT52	1.8745	1.5588	1.5588	0.0262	0.0262	-1.0396
	Présent élément (16×16)	QSFT52	1.8767	1.5742	1.5742	0.0270	0.0270	-1.0704
	Khatua et Cheung [210]	FEM solution	1.8697	-	-	-	-	-
	Azar [22]	Analytical solution	1.8780	-	-	-	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	1.8750	1.5817	1.5817	0.0284	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-RFSDT	1.8682	1.5816	1.5816	0.0297	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HSDT	1.7233	1.5766	1.5766	0.0045	-	-
	Topdar et al. [163]	FEM-Q4-RHZZT	1.8793	-	-	0.0232	0.0232	-
Cas II	Présent élément (8×8)	QSFT52	0.8813	0.7906	0.7906	0.0221	0.0221	-0.1802
	Présent élément (12×12)	QSFT52	0.8750	0.8149	0.8149	0.0246	0.0246	-0.1762
	Présent élément (16×16)	QSFT52	0.8717	0.8141	0.8141	0.0252	0.0252	-0.1664
	Khatua et Cheung [210]	FEM solution	0.8707	-	-	-	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HZZT	0.9535	0.8916	0.8916	0.0558	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-RFSDT	0.8880	0.8225	0.8225	0.0475	-	-
	Chakrabarti et Sheikh [260]	FEM-T6-HSDT	0.7779	0.8076	0.8076	0.0106	-	-
	Folie [272]	FEM solution	0.8814	-	-	-	-	-

**Tableau 4.6** Déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), contraintes planes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$ ) et contraintes de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ ), d'une plaque sandwich carrée avec des peaux stratifiées ( $f(\theta/\theta + 90)/c/f(\theta/\theta + 90)$ ), simplement appuyée et soumise un chargement uniforme

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \pm 0.4h\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \pm 0.4h\right)$
$\theta = 0^\circ$							
0.05	Présent élément	QSFT52	1.6766	1.6197	1.6197	0.3408	0.3408
	Pagano [24]	Elasticity solution	1.6957	1.5851	1.5692	0.3560	0.3563
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const) <sup>x</sup>	1.7107	1.6265	1.5653	0.4515	0.5230
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil) <sup>xx</sup>	1.7107	1.6265	1.5653	0.3663	0.3612
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	1.7126	1.5988	-	0.3732	-
0.1	Présent élément	QSFT52	2.6149	1.7320	1.7320	0.3337	0.3337
	Pagano [24]	Elasticity solution	2.6168	1.6004	1.5794	0.3496	0.3503
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	2.6295	1.6537	1.5829	0.4142	0.4142
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	2.6295	1.6537	1.5829	0.3489	0.3397
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	2.6296	1.6249	-	0.3612	-
0.2	Présent élément	QSFT52	6.2940	2.1538	2.1538	0.3242	0.3242
	Pagano [24]	Elasticity solution	6.2981	1.7093	1.7523	0.3436	0.3413
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	6.3001	1.8111	1.7328	0.3982	0.3993
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	6.3001	1.8111	1.7328	0.3455	0.3332
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	6.3016	1.7792	-	0.3482	-
$\theta = 30^\circ$							
0.05	Présent élément	QSFT52	1.2199	0.7884	0.7884	0.3465	0.3465
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	1.2450	0.7985	0.7666	0.4637	0.5079
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	1.2450	0.7985	0.7666	0.3592	0.3480
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	1.2381	0.7653	-	0.3603	-

Tableau 4.6 Suite

$\frac{h}{a}$	Références	Modèles EF	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \pm 0.4h\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \pm 0.4h\right)$
0.1	Présent élément	QSFT52	2.2137	0.9575	0.9575	0.3406	0.3406
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	2.2322	0.9290	0.8840	0.4280	0.4409
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	2.2322	0.9290	0.8840	0.3275	0.3200
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	2.2237	0.8882	-	0.3659	-
0.2	Présent élément	QSFT52	5.9326	2.1538	2.1538	0.3382	0.3382
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	5.9579	1.1733	1.1074	0.4376	0.4321
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	5.9579	1.1733	1.1074	0.3064	0.2951
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	5.9463	1.1165	-	0.3762	-
$\theta = 45^\circ$							
0.05	Présent élément	QSFT52	1.0671	0.4366	0.4366	0.3215	0.3215
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	1.0773	0.4479	0.4228	0.5309	0.5309
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	1.0773	0.4479	0.4228	0.3335	0.3335
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	1.0615	0.4247	-	-	-
0.1	Présent élément	QSFT52	2.0035	0.4991	0.4991	0.3223	0.3223
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	1.9950	0.4698	0.4422	0.4445	0.3320
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	1.9950	0.4698	0.4422	0.3375	0.4592
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	1.9764	0.4444	-	0.2203	0.3232
0.2	Présent élément	QSFT52	5.6615	0.7022	0.7022	0.3144	0.3144
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Const)	5.6329	0.5755	0.5408	0.4612	0.4484
	Khandelwal et al. [160]	FEM-Q9-HZZT (Equil)	5.6329	0.5755	0.5408	0.3399	0.3187
	Chakrabarti et Sheikh [158]	FEM-T6-HZZT	5.6079	0.5516	-	0.2197	-

\* Valeurs de contraintes de cisaillement transversal obtenues à partir des relations constitutives

\*\* Valeurs de contraintes de cisaillement transversal obtenues via des équations d'équilibres

## **PARTIE III**

### **APPLICATION DE L'ELEMENT QSFT52 POUR L'ETUDE DYNAMIQUE DES PLAQUES SANDWICHS ET DES STRATIFIEES**

# Chapitre 5

## Vibration libre des plaques sandwichs et des composites stratifiées

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la formulation et la validation d'un nouvel élément fini isoparamétrique, basé sur le modèle layerwise, proposé dans le chapitre 2. La bonne performance de cet élément, en statique, a été clairement démontrée à travers une série d'exemples numériques. Cependant, lorsqu'une structure est soumise à un chargement variable, il est raisonnable d'admettre que sa réponse varie aussi avec le temps. Dans ce cas, une analyse dynamique est indispensable. Dans ce chapitre, nous procédons à la validation de l'élément QSFT52 dans la résolution des problèmes de vibration libre des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs. Les résultats des fréquences propres seront comparés à ceux déterminés analytiquement et à ceux obtenus à l'aide d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

### 5.2 Revue des travaux antérieurs sur l'analyse dynamique des plaques multicouches et des sandwichs

D'après la littérature scientifique, on remarque qu'une quantité importante de travaux a été faite sur l'analyse statique de plaques composites stratifiées et sandwichs. Alors que les travaux concernant l'analyse dynamique des plaques stratifiées et notamment les plaques sandwichs sont plutôt rares.

Les premières études sur le comportement dynamique de plaques stratifiées ont été entreprises vers les années 1960 par Yu [282, 283], puis d'autres chercheurs, dont Srinivas et

Rao [284], Chan et Cheung [285], Noor [286], Ibrahim et *al.* [287], Reddy et Kuppusamy [288] et Wang et *al.* [289], qui ont effectué une analyse dynamique sur des plaques multicouches/sandwichs, en proposant des solutions analytiques, basées sur les équations d'élasticité tridimensionnelle.

En 1988, Kanematsu et *al.* [273] ont utilisé la méthode analytique de Rayleigh-Ritz pour étudier le comportement en vibration et en flexion des plaques sandwichs rectangulaires avec des peaux stratifiées. Ils ont également mené des expériences grâce à des techniques holographiques pour obtenir la flèche et les modes de vibration. Meunier et Shenoï [274] ont étudié la faisabilité de l'utilisation de méthodes analytiques, basées, soit sur la théorie du premier ordre, soit sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy [78], pour analyser le comportement dynamique en vibration libre des plaques sandwichs simplement appuyées avec des peaux stratifiées de type FRP. De plus, les auteurs ont effectué une étude paramétrique, afin de montrer l'effet de certains paramètres, tels que les propriétés géométriques et mécaniques du matériau sur les fréquences naturelles. Plus tard, Kant et Swaminathan [290] ont proposé une formulation analytique basée sur des théories d'ordre supérieur, développée par Pandya et Kant [237], servant à l'analyse dynamique des plaques composites multicouches et sandwichs simplement appuyées. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Récemment, Jam et *al.* [291] ont présenté un modèle de type layerwise pour étudier le comportement dynamique des structures en sandwich comprenant une âme flexible et des peaux stratifiées. Les peaux sont modélisées en utilisant la théorie du premier ordre, tandis que l'âme est modélisée en utilisant la théorie du troisième ordre. La formulation théorique de ce modèle est basée sur la méthode analytique de Navier. Dans cette formulation, les contraintes normales dans le plan de l'âme et leurs effets sur les valeurs des fréquences naturelles sont prises en compte.

Cependant, les solutions analytiques rencontrées dans les travaux cités ci-dessus, sont disponibles uniquement pour des cas de géométries et de conditions aux limites simples. Par conséquent, il est donc naturel de chercher d'autres techniques numériques telles que la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes dynamiques des structures composites multicouches et sandwichs ayant des géométries complexes et pour divers conditions aux limites.

De nombreux modèles d'éléments finis, basés sur des diverses théories, ont été proposés par les chercheurs. Khatua et Cheung [210] sont les premiers à prédire les fréquences naturelles de plaques sandwichs, en utilisant deux éléments finis de type triangulaire et rectangulaire. D'autre part, basant sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy [78], Nayak et *al.* [277] ont élaboré deux éléments finis quadrilatères isoparamétriques  $C^0$  (quatre et neuf nœuds), avec 7 ddl/nœud, afin d'étudier le comportement dynamique en vibration libre des plaques: isotropes, orthotropes, composites stratifiées et sandwichs. La matrice consistante de masse a été adoptée dans cette formulation. Ils ont utilisé la méthode ANS pour éviter le problème de verrouillage en cisaillement ainsi que les modes parasites. Les auteurs ont achevé leur travail par une étude paramétrique, afin d'étudier l'effet de l'anisotropie, le rapport d'aspect, le rapport longueur/épaisseur et le nombre de couches, sur la variation des fréquences naturelles. Par ailleurs, Khare et *al.* [292] ont utilisé un élément fini isoparamétrique quadrilatère à continuité  $C^0$  pour étudier les vibrations libres des plaques sandwichs. La formulation de cet élément a été basée sur deux théories d'ordre supérieur, nommées HOST11 et HOST9. Une année plus tard, Garg et *al.* [293] ont présenté l'étude des vibrations libres des plaques biaises (skew) en matériaux composites stratifiés et sandwichs, en utilisant un élément fini isoparamétrique  $C^0$ , formulé sur la base de la théorie du troisième ordre, où les composants de champ des déplacements membranaires sont des fonctions cubiques et le déplacement transversal est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque.

Basant sur l'approche layerwise, Lee et Fan [243] ont présenté un élément fini isoparamétrique à 9 nœuds avec 5 ddl/nœud, afin d'étudier la flexion et la vibration des plaques sandwichs. Cet élément a été formulé sur la base d'un nouveau modèle de type layerwise, où la théorie du premier ordre est utilisée pour modéliser les deux peaux, tandis que les déplacements au niveau de l'âme sont exprimés en fonction des déplacements des deux peaux. En outre, Nabarrete et *al.* [294] ont publié un travail concernant le développement d'un nouveau modèle de type layerwise pour l'analyse du comportement en vibration des plaques sandwichs avec des peaux stratifiées. Dans ce modèle, les peaux sont modélisées comme des plaques de Riessner-Mindlin, tandis que l'âme est modélisée en utilisant la théorie du troisième ordre, où le champ de déplacement est cubique pour les composantes  $u$ ,  $v$  et quadratique pour la composante  $w$ , dans le sens de l'épaisseur. En partant de ce modèle, les auteurs ont construit un élément fini tridimensionnel (3D) contenant 240 degrés de liberté. Citons aussi l'article de Roque et ses collègues [295] qui a été concentré sur

l'utilisation de la théorie layerwise trigonométrique pour l'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs. Dans leur travail, la formulation de point fini (Meshless Discretization Method), basée sur la méthode des Fonctions à Base Radiale multiquadratique « Radial Basis Functions » (RBFs), a été utilisée. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont dérivées et interpolées via la méthode RBFs. Dans un autre ordre d'idées, la théorie global-local d'ordre supérieur (GLHSDT), présentée par Zhen et Wanji [192] pour l'analyse de la flexion des plaques, a été étendue par Zhen et *al.* [296], afin d'être applicable dans les domaines des vibrations libres des plaques stratifiées composites et sandwichs. En partant de ce modèle, un élément fini isoparamétrique  $C^0$  à huit nœuds a été formulé. En plus, les auteurs ont donné des solutions analytiques, basées sur le principe de Hamilton et la technique de Navier, aux problèmes des plaques composites simplement appuyées. Plus récemment, Elmalich et Rabinovitch [297] ont entrepris une analyse de dynamique sur les plaques sandwichs, en employant un élément fini de forme rectangulaire à continuité  $C^0$ . La formulation de cet élément est basée sur l'utilisation d'un nouveau modèle layerwise, où les peaux sont représentées par la théorie du premier ordre et l'âme est représentée par la théorie du troisième ordre.

Basant sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, Chakrabarti et Sheikh [298] ont exploité le potentiel de leur élément, développé précédemment par les auteurs présents [299], dans des analyses de vibration libre des plaques multicouches et sandwichs avec des peaux stratifiées. Cet élément est un triangle à six nœuds avec 7 ddl/nœud. Ce dernier a présenté des résultats satisfaisants, cependant, le seul problème signalé est que cet élément nécessite la continuité  $C^1$  de déplacement transversal aux interfaces. D'autre part, Kulkarni et Kapuria [300] ont exploité le potentiel des éléments DKQ<sup>35</sup> et IDKQ<sup>36</sup>, développés respectivement par Batoz et Tahar [301] et Jeyachandrabose et *al.* [302], pour analyser le comportement dynamique des plaques stratifiées composites et sandwichs. Ces deux éléments ont été formulés en se basant sur la théorie de zig-zag du troisième ordre (ZIGT)<sup>37</sup>. Le principe de Hamilton est adopté afin de calculer la matrice de masse consistante, la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur de charge. De plus, les auteurs ont tenté d'étudier l'effet des fonctions d'interpolation des éléments DKQ et IDKQ sur la précision des éléments de type quadrilatères, basés sur les théories d'ordre supérieur et zig-zag. En 2013, Chalak et *al.* [303]

---

<sup>35</sup> Discret Kirchhoff Quadrilateral

<sup>36</sup> Improved Discret Kirchhoff Quadrilateral

<sup>37</sup> Third-order Zig-zag Theory

ont élaboré un modèle d'élément fini efficace, à continuité ( $C^0$ ), destiné pour l'analyse dynamique des plaques sandwichs à âme molle et peaux stratifiées. L'élément est un quadrilatère isoparamétrique à 9 nœuds et 11ddl/nœud, formulé sur la base de la théorie de zig-zag d'ordre supérieur (HZZT). Ce modèle a fourni des résultats très satisfaisants pour les fréquences naturelles par rapport aux autres théories 2D citées en littérature. Une année plus tard, d'autres scientifiques, dont Sahoo et Singh [304] ont présenté une nouvelle théorie de type zig-zag trigonométrique (TZZT)<sup>38</sup>, dans laquelle, un élément fini isoparamétrique à huit nœuds avec sept variables nodales, a été développé. Ce modèle est destiné pour l'étude des réponses des structures composites stratifiées et sandwichs, aux vibrations et flambement.

### 5.3 Formulation de la matrice masse consistante élémentaire du modèle QSFT52

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement dynamique des plaques multicouches en vibrations libres. Elle a été développée à partir de l'expression de l'énergie cinétique  $T$  qui est exprimée, pour les trois couches des sandwichs, comme suit:

$$\delta T = \delta T_t + \delta T_c + \delta T_b \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{V_t} \rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t) dV_t + \int_{V_c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{v}_c \delta v_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dV_c \\ & + \int_{V_b} \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \ddot{v}_b \delta v_b + \ddot{w}_b \delta w_b) dV_b \end{aligned} \quad (5.2)$$

où

$u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$  sont les composantes du vecteur de déplacement pour les trois couches du sandwich ( $i=t,c,b$ ),  $\rho_i$  et  $V_i$  sont respectivement la densité du matériau et le volume de chaque couche du sandwich ( $i=t,c,b$ ); et ( $\ddot{\quad}$ ) est une dérivée seconde par rapport au temps.

#### a. Énergie cinétique de l'âme

D'après le champ de déplacement de l'âme qui est défini par l'équation (2.1), l'énergie cinétique de l'âme peut être exprimée comme suit:

<sup>38</sup> Trigonometric Zig-zag Theory

$$\begin{aligned}
\delta T_c = & \int_{\Omega_0} \left[ I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + I_1 (\ddot{u}_0 \delta \psi_x^c + \ddot{\psi}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \psi_y^c + \ddot{\psi}_y^c \delta v_0) \right. \\
& + I_2 (\ddot{u}_0 \delta \eta_x^c + \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \eta_y^c + \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta v_0) \\
& + I_3 (\ddot{u}_0 \delta \zeta_x^c + \ddot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \zeta_y^c + \ddot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta v_0) \quad (5.3) \\
& + I_4 (\ddot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^c + \ddot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^c) \\
& \left. + I_5 (\ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \eta_y^c) + I_6 (\ddot{\zeta}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \zeta_y^c) \right] dx dy
\end{aligned}$$

Où les moments d'inerties  $I_i = (0,1,2,3,4,5 \text{ et } 6)$  de l'âme sont définis par:

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \rho_c (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (5.4)$$

### b. Énergie cinétique de la peau supérieure

L'énergie cinétique de la peau supérieure est exprimée à partir de l'expression du champ de déplacement (2.8), telle que:

$$\begin{aligned}
\delta T_t = & \int_{\Omega_0} \left[ I_{0t} \left( \ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_x^c + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^t \right. \right. \\
& + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_y^c + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^t + \ddot{w}_0 \delta w_0 \left. \right) \\
& + I_{0t} \left( \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^t \left. \right) \\
& + I_{0t} \left( \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^t \left. \right) \\
& + I_{0t} \left( \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& \left. + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^t \right) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +I_{0t} \left[ \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right] \\
& +I_{1t} \left[ \ddot{u}_0 \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^t + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \ddot{v}_0 \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^t + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right] \\
& +I_{1t} \left[ \ddot{\psi}_x^t \delta u_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \ddot{\psi}_y^t \delta v_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right] \\
& +I_{2t} \left( \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t + \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right) dx dy
\end{aligned}$$

Où les moments d'inerties  $I_{it} = (0, 1 \text{ et } 2)$  de la peau supérieure, pour une stratification de  $n$  couches, sont donnés par:

$$(I_{0t}, I_{1t}, I_{2t}) = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_t}{2}} \rho_t (1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \rho_t \int_{h^k}^{h^{k+1}} (1, z, z^2) dz \quad (5.6)$$

### c. Énergie cinétique de la peau inférieure

D'une manière similaire, l'énergie cinétique de la peau inférieure est exprimée à partir de l'expression du champ de déplacement (2.11) telle que:

$$\begin{aligned}
\delta T_b = \int_{\Omega_0} & \left[ I_{0b} \left( \ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_x^c + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^b \right. \right. \\
& \left. \left. + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_y^c + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^b + \ddot{w}_0 \delta w_0 \right) \right. \\
& +I_{0b} \left( \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^b \right. \quad (5.7) \\
& \left. + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^b \right) \\
& +I_{0b} \left( \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^b \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^b \\
 & + I_{0b} \left( \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \zeta_x^c \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \zeta_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \zeta_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \zeta_x^c \delta \psi_x^b \right. \\
 & + \left. \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \zeta_y^c \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \zeta_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \zeta_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \zeta_y^c \delta \psi_y^b \right) \\
 & + I_{0b} \left( \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
 & + \left. \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \right) \\
 & + I_{1b} \left( \ddot{u}_0 \delta \psi_x^b + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^b + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^b + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c \delta \psi_x^b + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
 & + \left. \ddot{v}_0 \delta \psi_y^b + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^b + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^b + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c \delta \psi_y^b + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \right) \\
 & + I_{1b} \left( \ddot{\psi}_x^b \delta u_0 + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
 & + \left. \ddot{\psi}_y^b \delta v_0 + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \right) \\
 & + I_{2b} \left( \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b + \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \right) \Big] dx dy
 \end{aligned}$$

Où les moments d'inerties  $I_{ib} = (0, 1 \text{ et } 2)$  de la peau inférieure, pour une stratification de  $n$  couches, sont donnés par:

$$(I_{0b}, I_{1b}, I_{2b}) = \int_{-\left(\frac{h_c}{2} + h_b\right)}^{-\frac{h_c}{2}} \rho_b(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{n \text{ layer}} \rho_b \int_{\frac{h^k}{h^k}}^{\frac{h^{k+1}}{h^k}} (1, z, z^2) dz \quad (5.8)$$

À partir de l'équation 5.2, la matrice de masse consistante élémentaire (consistant mass matrix)  $[M_e]$  de la plaque est définie par la somme des trois matrices de chaque constituant (deux peaux et l'âme), en employant l'intégration numérique de Gauss (2x2). En introduisant les fonctions de forme de l'élément, la matrice masse s'écrit comme suit:

$$[M_e] = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [N]^T [m^{(t)}] [N] + [N]^T [m^{(c)}] [N] + [N]^T [m^{(b)}] [N] \right) \det(J) d\xi d\eta \quad (5.9)$$



Où  $\omega$  est la fréquence naturelle associée au mode  $i$  et  $\{\chi\}$  sont les modes de vibration.

## 5.4 Tests de validation

### 5.4.1 Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites

On considère une plaque isotrope carrée avec un rapport d'épaisseur  $a/h=10$ . Les propriétés mécaniques du matériau sont:  $E = 10.92$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 1$ . Un maillage de  $12 \times 12$  a été utilisé. Les résultats de la fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ), normalisés par la formule (5.14), sont présentés dans le tableau 5.1 avec différents types de conditions aux limites.

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (5.14)$$

On peut remarquer que les résultats obtenus par le présent élément QSFT52 sont en bon accord avec ceux obtenus par Ferreira [305] qui a utilisé un élément quadrilatère à quatre nœuds formulé sur la base de la théorie du premier ordre.

### 5.4.2 Plaques composites stratifiées carrées de trois, cinq et neuf couches (0/90/.../0)

Dans cet exemple, l'effet du nombre de couches ( $n$ ) ainsi que l'effet de l'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée sont étudiées. Trois types de stratifications croisées de trois (0/90/0), cinq (0/90/0/90/0) et neuf (0/90/0/90/0/90/0/90/0) couches, en gardant la même épaisseur totale, sont analysés pour un rapport d'épaisseur  $a/h=5$ . Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6,$$

$$\frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5,$$

$$\nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1.0$$

**Tableau 5.1** Fréquences propres ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites

Conditions aux limites	Modes	m	N	Présent élément QSFT52	Ferreira [305] FEM-Q4-FSDT
SSSS	1st	1	1	0.0946	0.0934
	2nd	2	1	0.2285	0.2254
	3rd	1	2	0.2285	0.2254
	4th	2	2	0.3459	0.3459
	5th	3	1	0.4364	0.4303
	6th	1	3	0.4364	0.4303
	7th	3	2	0.5349	0.5353
	8th	2	3	0.5349	0.5353
CCCC	1st	1	1	0.1656	0.1595
	2nd	2	1	0.3221	0.3066
	3rd	1	2	0.3221	0.3066
	4th	2	2	0.4494	0.4292
	5th	3	1	0.5495	0.5123
	6th	1	3	0.5546	0.5173
	7th	3	2	0.6539	0.6158
	8th	2	3	0.6539	0.6158
SCSC	1st	1	1	0.1350	0.1294
	2nd	2	1	0.2513	0.2397
	3rd	1	2	0.3071	0.2929
	4th	2	2	0.4041	0.3839
	5th	3	1	0.4590	0.4347
	6th	1	3	0.5426	0.5135
	7th	3	2	0.5834	0.5509
	8th	2	3	0.6252	0.5897

Les résultats de la fréquence fondamentale qui sont obtenus à l'aide d'un maillage de  $12 \times 12$  sont rapportés dans le tableau 5.2 pour les trois types de stratifications. D'après ce tableau, on observe une excellente corrélation entre les résultats obtenus par l'élément développé (QSFT52) et les résultats obtenus par la solution d'élasticité-3D, donnée par Noor [286], ainsi que ceux obtenus par des modèles d'éléments finis basés sur différentes théories:

- FEM-Q8-GLHSDT: Élément fini quadrilatère à huit nœuds, basé sur la théorie global-local d'ordre supérieur, présenté par Zhen et *al.* [296]
- FEM-Q4-LW: Élément fini quadrilatère à quatre nœuds, basé sur l'approche layerwise, présenté par Marjanović et Vuksanović [306]

- FEM-Q9-LW: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur l'approche layerwise, présenté par Marjanović et Vuksanović [306]
- FEM-Q9-HSDT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy, présenté par Nayak et *al.* [277]

Afin de mettre en évidence l'effet de l'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée, nous avons illustré les résultats réunis dans le tableau 5.2 sur la figure 5.1. D'après cette dernière, on remarque que les trois courbes ont pratiquement la même allure et que les valeurs des fréquences fondamentales augmentent avec l'augmentation du rapport d'anisotropie.

### 5.4.3 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ( $f / c / f$ )

Cet exemple a été initialement traité par Srinivas et Rao [284] et Di Sciuva [150]. Il s'agit d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux orthotropes. L'épaisseur de chaque peau est égale à  $0.1 h$  et celle de l'âme est  $0.8 h$ , où  $h$  est l'épaisseur totale de la plaque. Les propriétés matérielles de peaux ( $P_p$ ) sont exprimées en fonction des propriétés du cœur ( $P_c$ ); ( $P_p/P_c = R$ ) où  $R = 1, 2, 5, 10$  et  $15$ . Les propriétés matérielles du cœur sont:

$$\frac{E_{22}}{E_{11}} = 0.543, \quad \frac{G_{12}}{E_{11}} = 0.2629, \quad \frac{G_{13}}{E_{11}} = 0.1599,$$

$$\frac{G_{23}}{E_{11}} = 0.2668, \quad \nu_{12} = 0.3 \text{ et } \rho = 1.0$$

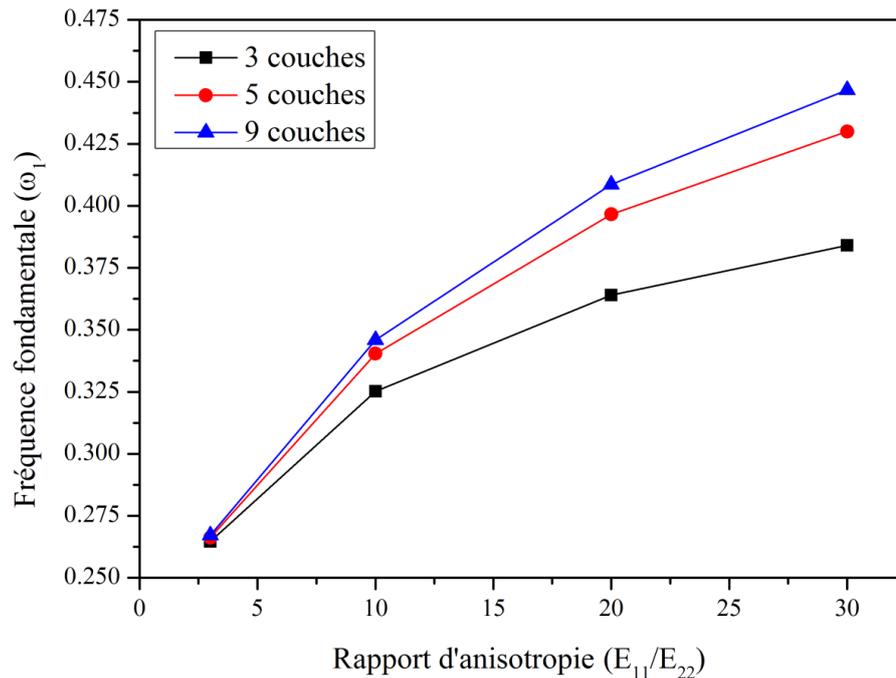
La fréquence fondamentale est normalisée par la formule suivante:

$$\bar{\omega} = 100 \sqrt{\omega \frac{\rho h^2}{E_{11}}} \quad (5.15)$$

Les résultats de la première fréquence propre obtenue dans la présente analyse sont présentés dans le tableau 5.3 avec les solutions d'élasticité 3D de Srinivas et Rao [284] et celles de Di Sciuva [150]. Les résultats de l'élément QSFT52 sont en bon accord avec les résultats d'élasticités 3D.

**Tableau 5.2** Effet de l'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) de plaques stratifiée carrées ( $0/90/\dots/0$ ) simplement appuyée

Références	Modèles EF	Nbr de couches	$\frac{E_{11}}{E_{22}}$			
			3	10	20	30
Présent élément	QSFT52		0.2646	0.3252	0.3640	0.3840
Noor [286]	3D-Elasticity		0.2647	0.3284	0.3842	0.4109
Vuksanović [307]	CPLT		0.2920	0.4126	0.5404	0.6434
Owen et Li [308]	RHSdT		0.2695	0.3392	0.3898	0.4194
Vuksanović [307]	HSdT	[0/90/0]	0.2673	0.3318	0.3749	0.4015
Marjanović et Vuksanović [306]	FEM-Q9-LW		0.2621	0.3262	0.3691	0.3927
Marjanović et Vuksanović [306]	FEM-Q4-LW		0.2683	0.3297	0.3685	0.3886
Nayak et al. [277]	FEM-Q9-HSdT		0.2623	0.3264	0.3667	0.3941
Zhen et al. [296]	FEM-Q8-GLHSdT		0.2620	0.3258	0.3688	0.3928
Présent élément	QSFT52		0.2662	0.3404	0.3966	0.4300
Noor [286]	3D-Elasticity		0.2659	0.3409	0.3979	0.4314
Vuksanović [307]	CPLT		0.2920	0.4126	0.5404	0.6434
Owen et Li [308]	RHSdT		0.2699	0.3453	0.4030	0.4370
Vuksanović [307]	HSdT	[0/90/0/90/0]	0.2684	0.3442	0.3939	0.4269
Marjanović et Vuksanović [306]	FEM-Q9-LW		0.2618	0.3330	0.3858	0.4166
Marjanović et Vuksanović [306]	FEM-Q4-LW		0.2683	0.3396	0.3918	0.4219
Nayak et al. [277]	FEM-Q9-HSdT		0.2636	0.3372	0.3929	0.4257
Présent élément	QSFT52		0.2672	0.3459	0.4086	0.4467
Noor [286]	3D-Elasticity		0.2664	0.3443	0.4054	0.4421
Nayak et al. [277]	FEM-Q9-HSdT	[0/90/0/90/0/90/0/90/0]	0.2636	0.3372	0.3929	0.4257
Nayak et al. [277]	FEM-Q4-HSdT		0.2641	0.3378	0.3935	0.4263
Zhen et al. [296]	FEM-Q8-GLHSdT		0.2636	0.3402	0.4002	0.4362



**Fig.5.1** Effet du nombre de couches et le rapport d'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée

**Tableau 5.3** Fréquence propre fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) d'une plaque sandwich carrée ( $f/c/f$ ) simplement appuyée

R	Présent élément QSFT52	Di Sciuva [150] 3D-Elasticity	Srinivas et Rao [284] 3D-Elasticity
1	4.8989	4.7698	4.7419
2	5.8309	5.7244	5.7041
5	7.8740	7.7296	7.7148
10	10.0498	9.8222	9.8104
15	11.4891	11.2137	11.2034

#### 5.4.4 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques

Dans ce test, deux plaques sandwichs carrées simplement appuyées avec des peaux composites stratifiées symétriques  $[0/90/C/90/0]$  et  $[0/90/0/90/0/90/0/90/C/0]_{\text{Sym}}$  sont étudiées. L'épaisseur de l'âme est de  $0.8h$ , tandis que celle de chaque peau est de  $0.1h$ , où  $h$  est l'épaisseur totale de la plaque. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour l'âme et les deux peaux sont résumées dans le tableau 5.4. L'étude a été menée pour

différents rapports d'épaisseur ( $a/h = 6.67, 10$  et  $20$ ) avec un maillage de  $12 \times 12$ . Les résultats des fréquences propres sont normalisés par la formule suivante:

$$\bar{\omega} = 100\omega a \sqrt{\frac{\rho_c}{E_{11f}}} \quad (5.16)$$

**Tableau 5.4** Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple 5.4.4

Matériaux	Propriétés mécaniques en GPa						
	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Peaux	276.0	6.9	6.9	6.9	6.9	0.25	681.8
Âme	0.5776	0.5776	0.1079	0.1079	0.2221	0.0025	1000

Les fréquences propres obtenues pour les six premiers modes sont rapportées dans les tableaux 5.5 et 5.6. Les résultats obtenus par l'élément **QSFT52** sont comparés avec la solution d'élasticité 3D de Kulkarni et Kapuria [300], les solutions analytiques de Wang et al. [289], basées sur la méthode de p-Ritz, et avec ceux obtenus par les modèles d'éléments finis de Chakrabarti et Sheikh [298] et de Kulkarni et Kapuria [300], basés sur la théorie HZZT.

Il apparaît clairement qu'à partir du tableau 5.5, les résultats de l'élément développé sont en excellent accord avec les résultats trouvés dans la littérature, à titre d'exemple:

- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 6.67, l'erreur est de 0.0038 % pour la fréquence propre fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ), par rapport à la solution d'élasticité-3D
- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 10, l'erreur est de 0.0043 % pour la fréquence propre fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ), par rapport à la solution d'élasticité-3D
- Pour un rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) = 20, l'erreur est de 0.0070 % pour la fréquence propre fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ), par rapport à la solution d'élasticité-3D

Par ailleurs, la plaque sandwich (0/90/C/90/0) a été analysée en considérant deux conditions aux limites différentes, i.e. CCCC et SCSC. Les fréquences propres non-dimensionnelles obtenues pour les six premiers modes sont résumées dans le tableau 5.7 avec différents rapports d'épaisseur ( $a/h = 5, 10$  and  $20$ ). On peut observer, en comparaison avec des modèles d'éléments finis basés sur la théorie HZZT [298, 300, 303, 309], que le présent élément présente des performances très satisfaisantes.

**Tableau 5.5** Fréquence propre non-dimensionnelle, pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques (0/90/C/90/0)

$\frac{a}{h}$	Modes	Présent élément QSFT52	Kulkarni et Kapuria [300] 3D-Elasticity	Kulkarni et Kapuria [300] FEM-Q4-TSDT	Wang <i>et al.</i> [289] Anal-Solution	Chakrabarti et Sheikh [298] FEM-T6-HZZT
6.67	1st	10.564	10.524	13.315	11.414	10.560
	2nd	16.329	16.149	21.561	17.552	14.455
	3rd	18.962	18.728	23.177	20.426	18.735
	4th	22.745	22.434	28.713	24.436	20.580
	5th	23.867	23.172	31.140	-	23.373
	6th	28.722	27.879	34.055	-	26.165
10	1st	9.871	9.828	12.088	10.555	10.051
	2nd	15.681	15.505	20.615	16.830	14.409
	3rd	18.310	18.075	22.152	19.648	18.962
	4th	21.999	21.696	27.675	23.616	19.424
	5th	22.816	22.202	30.143	-	21.252
	6th	27.861	26.915	35.329	-	24.496
20	1st	7.742	7.688	8.721	8.029	7.927
	2nd	14.039	13.845	17.705	14.858	13.042
	3rd	16.196	15.920	18.530	16.984	17.315
	4th	19.992	19.656	24.105	21.111	18.834
	5th	21.278	20.676	27.714	-	20.091
	6th	25.604	24.948	32.136	-	24.139

**Tableau 5.6** Fréquence propre non-dimensionnelle, pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques  $[0/90/0/90/0/90/0/90/C/]_{\text{Sym}}$

$\frac{a}{h}$	Modes	Présent élément QSFT52	Kulkarni et Kapuria [300] 3D-Elasticity	Kulkarni et Kapuria [300] FEM-Q4-TSDT	Chakrabarti et Sheikh [298] FEM-T6-HZZT
6.67	1st	10.798	10.757	13.441	10.553
	2nd	16.764	16.555	21.538	15.263
	3rd	20.098	19.826	23.958	18.738
	4th	23.902	23.539	29.272	21.104
	5th	25.628	24.669	31.459	25.064
	6th	30.865	29.885	37.303	26.159
10	1st	10.024	9.980	12.172	9.993
	2nd	15.738	15.554	20.421	14.933
	3rd	19.144	18.887	22.797	18.669
	4th	22.673	22.346	28.016	20.913
	5th	23.369	22.644	29.938	21.368
	6th	28.533	27.776	35.538	25.477
20	1st	7.803	7.749	8.753	7.886
	2nd	13.815	13.624	17.377	13.420
	3rd	16.792	16.505	19.067	16.873
	4th	20.304	19.960	24.273	19.705
	5th	20.965	20.351	27.155	19.980
	6th	25.716	25.048	31.967	24.528

**Tableau 5.7** Fréquences propres non-dimensionnelles d'une plaque sandwich carrée ayant des peaux composites stratifiées symétriques (0/90/C/90/0) avec différents types de conditions aux limites

$\frac{a}{h}$	Conditions aux limites	Modes	Présent QSFT52	Khandelwal et al. [309] FEM-Q9-HZZT	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Kulkarni et Kapuria [300] FEM-Q4-HZZT	Chakrabarti et Sheikh [298] FEM-T6-HZZT
5	SCSC	1st	11.445	11.591	11.408	11.516	11.063
		2nd	18.267	17.108	18.014	18.379	15.199
		3rd	19.707	20.409	19.485	19.626	18.255
		4th	24.448	24.079	24.086	24.722	19.781
		5th	27.657	24.593	26.559	27.409	20.127
		6th	29.866	29.989	29.014	29.231	22.907
	CCCC	1st	12.200	12.121	12.138	12.440	11.864
		2nd	18.733	18.453	18.469	19.106	15.672
		3rd	21.120	20.706	20.764	21.442	19.477
		4th	25.614	25.058	25.138	26.691	20.057
		5th	27.959	26.849	26.860	28.043	21.167
		6th	29.866	30.908	31.050	32.257	23.628
10	SCSC	1st	10.346	10.860	10.344	10.378	10.422
		2nd	16.399	16.131	16.310	16.411	15.021
		3rd	18.547	18.962	18.349	18.395	19.135
		4th	22.523	22.438	22.294	22.494	20.372
		5th	24.079	22.628	23.554	23.718	21.642
		6th	27.934	27.532	27.211	27.258	25.215

Tableau 5.7 Suite

$\frac{a}{h}$	Conditions aux limites	Modes	Présent QSFT52	Khandelwal et al. [309] FEM-Q9-HZZT	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Kulkarni et Kapuria [300] FEM-Q4-HZZT	Chakrabarti et Sheikh [298] FEM-T6-HZZT
20	CCCC	1st	11.318	11.349	11.356	11.468	11.524
		2nd	16.967	16.900	16.909	17.135	15.691
		3rd	19.332	19.214	19.236	19.494	19.946
		4th	23.187	23.003	23.041	23.659	20.783
		5th	24.428	23.925	23.935	24.253	22.356
		6th	27.934	28.502	28.539	28.918	25.812
	SCSC	1st	8.635	9.502	8.666	8.649	8.623
		2nd	14.604	14.853	14.645	14.601	13.533
		3rd	16.581	17.233	16.367	16.357	17.601
		4th	20.390	20.708	20.234	20.233	19.441
		5th	22.006	21.310	21.767	21.673	20.416
		6th	26.107	25.768	25.342	25.324	24.620
	CCCC	1st	10.253	10.330	10.336	10.332	10.536
		2nd	15.530	15.598	15.609	15.600	14.709
		3rd	17.605	17.644	17.659	17.674	18.708
		4th	21.217	21.246	21.278	21.404	20.182
		5th	22.568	22.354	22.368	22.323	21.369
		6th	26.107	26.636	26.683	26.893	25.406

### 5.4.5 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90)

On considère une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90) et une âme isotrope. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour l'âme et les deux peaux sont résumées dans le tableau 5.8. Afin d'évaluer la performance de l'élément développé QSFT52 dans l'analyse des vibrations libres des plaques sandwichs minces ou épaisses, différents rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) variant de 2 à 100 ont été considérés. Le rapport de l'épaisseur de l'âme à l'épaisseur de la peau a été fixé à 10. Un maillage de  $12 \times 12$  a été adopté.

**Tableau 5.8** Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple 5.4.5

Matériaux	Propriétés mécaniques en GPa						
	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Peaux	131	10.34	6.9	6.9	6.9	0.22	1627
Âme	0.0069	0.0069	0.0034	0.0034	0.0034	$10^{-5}$	97

Les résultats des fréquences propres sont normalisés par la formule 5.17.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_{22f}}} \quad (5.17)$$

Les résultats des fréquences propres obtenus par le présent élément sont rapportés dans le tableau 5.9 avec ceux de la littérature.

- 3D-Elasticity: Solutions d'élasticité-3D données par Rao et *al.* [310]
- GLHSDT-Anal: Solutions analytiques basées sur la théorie global-local d'ordre supérieur, présentées par Zhen et *al.* [296]
- HSDT-Anal: Solutions analytiques basées sur la théorie d'ordre supérieur, présentées par Kant et Swaminathan [290, 311]
- FEM-Q8-TZZT: Élément fini quadrilatère à huit nœuds, basé sur la théorie de zig-zag trigonométrique, présenté par Sahoo et Singh [304]

- FEM-Q9-HZZT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie de zig-zag d'ordre supérieur, présenté par Chalak *et al.* [303]

Pour les deux rapports d'épaisseur ( $a/h = 10$  et  $100$ ), les fréquences propres obtenues pour les six premiers modes sont rapportées dans le tableau 5.10.

D'autre part, la même plaque sandwich ( $0/90/C/0/90$ ) a été analysée pour différents rapports  $h_c/h_f$  en considérant le rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . Les résultats de la fréquence fondamentale sont présentés dans le tableau 5.11. On peut constater, d'après les tableaux 5.9, 5.10 et 5.11 ainsi que les figures 5.2 et 5.3, que les résultats de l'élément développé QSFT52 sont en excellent accord avec ceux obtenus par les solutions de références. On peut également noter que le présent élément se comporte bien, que ce soit en plaques minces ou épaisses (aucun phénomène de verrouillage en CT).

Afin de vérifier l'applicabilité de l'élément développé QSFT52 dans l'analyse des vibrations libres des plaques sandwichs aux formes rectangulaires, la même plaque sandwich ( $0/90/C/0/90$ ) est analysée pour différents rapports d'aspect ( $a/b$ ) en conservant les mêmes rapports  $a/h = 10$  et  $h_c/h_f = 10$ . Les premières fréquences propres non-dimensionnelles sont résumées dans le tableau 5.12. La comparaison des résultats est montrée sur la figure 5.4. Les résultats obtenus par l'élément QSFT52 montrent et confirment la bonne performance et la robustesse de la formulation proposée dans l'évaluation des fréquences propres des plaques sandwichs.

#### **5.4.6 Vibration libre des plaques sandwichs stratifiées en utilisant une mousse de PVC dans l'âme:**

Dans cet exemple, deux plaques sandwichs stratifiées avec différentes séquences d'empilement  $[0/90/0/core/0/90/0]$  et  $[45/-45/45/core/-45/45/45]$  sont considérées. Le matériau utilisé est un sandwich constitué d'une âme en mousse PVC (polychlorure de vinyle) et deux peaux stratifiées en fibre de verre / polyester. Les propriétés mécaniques de ces matériaux sont présentées dans le tableau 5.13 [274]. L'épaisseur de chaque pli est de  $0,125 \text{ mm}$  tandis que l'épaisseur de l'âme est de  $10 \text{ mm}$ . Les caractéristiques géométriques de la plaque sont:  $a/h = 10$ ,  $a/b = 1$  et  $h_c/h = 0.88$ .

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (5.17)$$

Les résultats des fréquences propres obtenues pour les quatre premiers modes sont présentés dans le tableau 5.14. La comparaison a été faite avec des solutions analytiques de type layerwise, présentées par Jam et *al.* [291], ainsi qu'avec des éléments finis (Q4 et Q9) de Nayak et *al.* [277]. Les résultats obtenus par l'élément montrent que les valeurs des fréquences propres sont comparables avec ceux obtenus via la littérature.

#### 5.4.7 Vibration libre des plaques composites stratifiées biaises ( skew plate)

Dans cet exemple, le problème d'une plaque composite stratifiée biaise symétrique a été étudié afin de montrer l'influence de la distorsion géométrique sur les fréquences naturelles. La plaque est constituée de cinq couches (90/0/90/0/90) ayant la même épaisseur. Dans la présente étude, deux conditions aux limites i.e. SSSS et CCCC, avec différentes angles de biaises (0°, 15°, 30° et 45°) sont considérées. Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = 0.6, \quad \frac{G_{13}}{E_{22}} = \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1.0$$

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (5.18)$$

Les résultats des fréquences propres ( $\bar{\omega}$ ), obtenues pour les sept premiers modes, sont rapportés dans le tableau 5.15 pour un rapport d'épaisseur ( $a/h=10$ ). On remarque que les résultats obtenus par le présent élément QSFT52 sont également bons en comparaison avec ceux obtenus via la solution analytique de Wang [313], basée sur la méthode de Rayleigh–Ritz, ainsi que les deux modèles d'éléments finis (FEM-Q9-FSDT, FEM-Q9-TSDT) de Garg et *al.* [293]. Ces résultats sont légèrement dépendant de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  (la valeur de fréquence propre s'éloigne de celle de la solution 3D avec l'augmentation de l'angle  $\alpha$ ).

**Tableau 5.9** Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'épaisseurs ( $a/h$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiée non-symétriques (0/90/C/0/90)

$\frac{a}{h}$	Présent QSFT52	Rao et al. [310] 3D-Elasticity	Sahoo et Singh [304] FEM-Q8-TZZT	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Zhen et al. [296] FEM-Q8-GLHSDT	Zhen et al. [296] GLHSDT-Anal	Kant et Swaminathan [290] HSDT-Anal
2	0.7192	0.7141	0.7170	0.7086	0.7368	0.7251	1.1734
4	0.9415	0.9363	0.9461	0.9447	0.9904	0.9699	2.0913
10	1.8481	1.8480	1.8789	1.8420	1.9712	1.9418	4.8519
20	3.4740	3.4791	3.5231	3.4568	3.6836	3.6601	8.5838
30	5.0306	5.0371	5.0976	5.0032	5.3034	5.2875	11.0788
40	6.4588	6.4634	6.5356	6.4212	6.7727	6.7624	12.6555
50	7.7360	7.7355	7.8148	7.6882	8.0698	8.0634	13.6577
60	8.8577	8.8492	8.9318	8.7995	9.1929	9.1894	14.3133
70	9.8305	9.8118	9.8946	9.7618	10.1530	10.1515	14.7583
80	10.6674	10.6368	10.7176	10.5880	10.9672	10.9672	15.0702
90	11.3844	11.3408	11.4180	11.2940	11.6552	11.6561	15.2946
100	11.9978	11.9400	12.0131	11.8960	12.2358	12.2374	15.4647

**Tableau 5.10** Fréquence propre non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ), pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90) avec différents rapports d'épaisseurs ( $a/h$ )

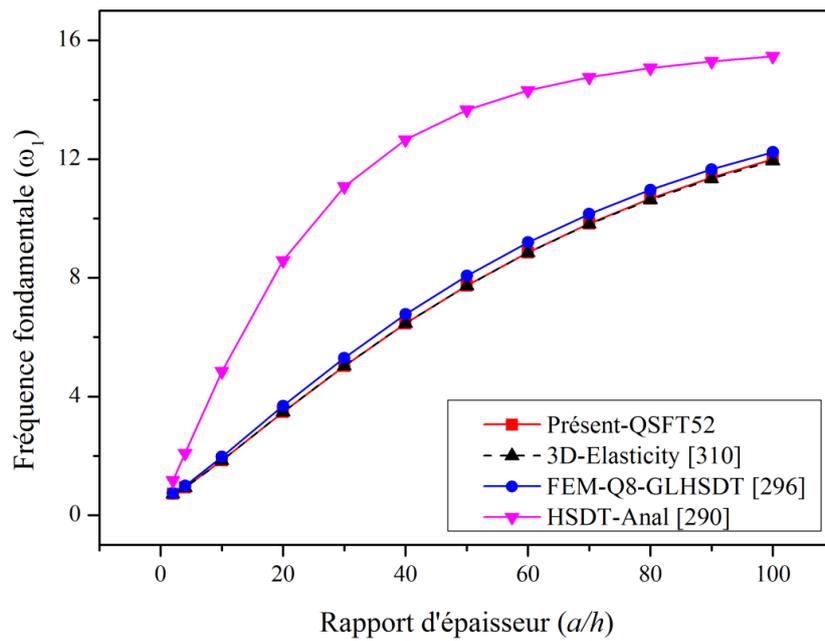
$\frac{a}{h}$	Modes	Présent QSFT52	Rao et Desai [312] LW-Anal	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Zhen et al. [296] FEM-Q8-GLHSDT	Zhen et al. [296] GLHSDT-Anal	Kant et Swaminathan [311] HSDT-Anal
10	1st	1.8481	1.8480	1.8420	1.9712	1.9418	4.8594
	2nd	3.2650	3.2196	3.2089	3.4024	3.3625	8.0187
	3rd	4.3711	4.2894	4.3354	4.5556	4.4677	10.2966
	4th	5.4734	5.2236	5.2839	5.5906	5.4086	11.7381
	5th	6.3663	6.0942	6.1836	6.5647	6.3060	13.4706
	6th	8.1066	7.6762	7.9270	8.5328	7.9154	16.1320
100	1st	11.9978	11.9401	11.8960	12.2358	12.2374	15.5093
	2nd	23.6804	23.4017	23.4467	24.3246	24.3213	39.0293
	3rd	31.3304	30.9432	30.7691	32.4813	32.2539	54.7618
	4th	37.1015	36.1434	36.2601	37.9669	37.8300	72.7572
	5th	42.4094	41.4475	41.4050	44.5687	43.3894	83.4412
	6th	51.1194	49.7622	49.5575	52.0489	52.1795	105.3781

**Tableau 5.11** Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports ( $h_c/h_f$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90)

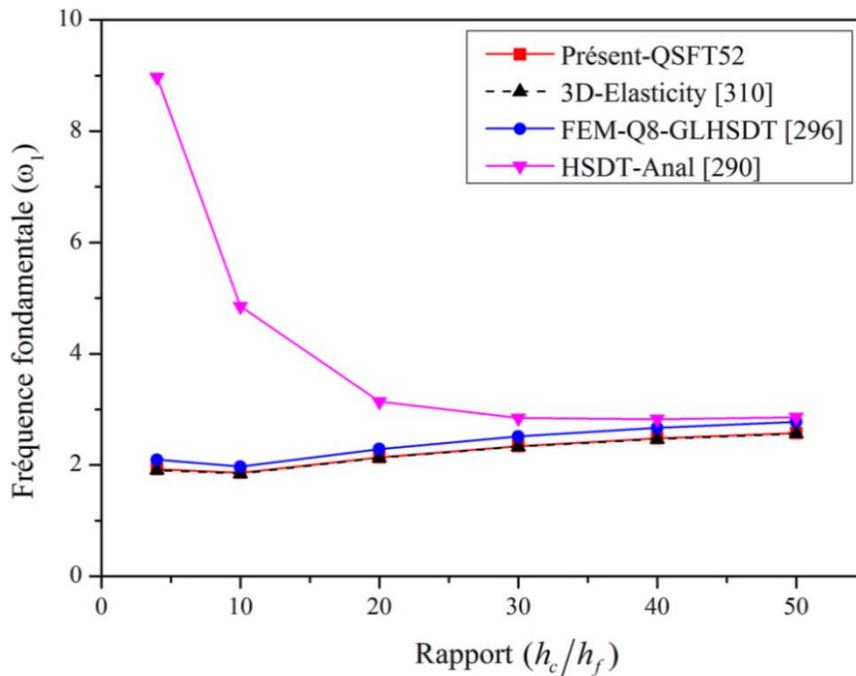
$\frac{h_c}{h_f}$	Présent QSFT52	Rao et al. [310] 3D-Elasticity	Sahoo et Singh [304] FEM-Q8-TZZT	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Zhen et al. [296] FEM-Q8-GLHSDT	Zhen et al. [296] GLHSDT-Anal	Kant et Swaminathan [290] HSDT-Anal
4	1.9256	1.9084	1.9427	1.9176	2.0962	1.9405	8.9690
10	1.8481	1.8480	1.8789	1.8420	1.9712	1.9418	4.8519
20	2.1405	2.1307	2.1462	2.1271	2.2880	2.2831	3.1407
30	2.3419	2.3321	2.3432	2.3301	2.5153	2.5146	2.8466
40	2.4789	2.4690	2.4765	2.4679	2.6687	2.6694	2.8255
50	2.5759	2.5658	2.5569	2.5659	2.7765	2.7777	2.8614

**Tableau 5.12** Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'aspects ( $a/b$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0/90/C/0/90), en considérant le rapport  $a/h=10$  et  $h_c/h_f=10$

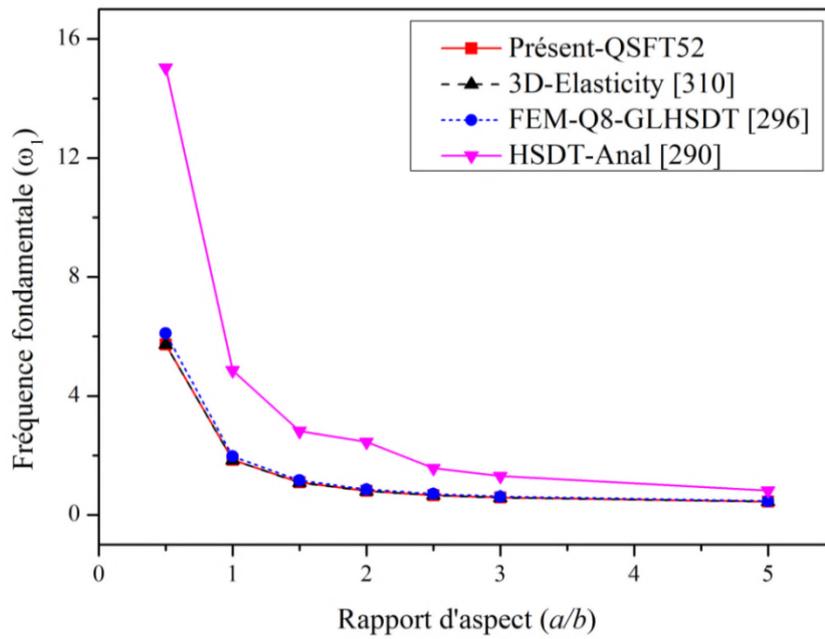
$\frac{a}{b}$	Présent QSFT52	Rao et al. [310] 3D-Elasticity	Chalak et al. [303] FEM-Q9-HZZT	Zhen et al. [296] FEM-Q8-GLHSDT	Zhen et al. [296] GLHSDT-Anal	Kant et Swaminathan [290] HSDT-Anal
0.5	5.7288	5.7326	5.7451	6.1069	6.0280	15.0316
1.0	1.8481	1.8464	1.8420	1.9712	1.9418	4.8594
1.5	1.0919	1.0900	1.0837	1.1644	1.1430	2.8188
2.0	0.8071	0.8048	0.7989	0.8584	0.8406	2.4560
2.5	0.6654	0.6627	0.6572	0.7045	0.6891	1.5719
3.0	0.5834	0.5804	0.5749	0.6145	0.6009	1.3040
5.0	0.4524	0.4494	0.4322	0.4676	0.4585	0.8187



**Fig.5.2** Plaque sandwich carrée simplement appuyée avec des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) pour différents rapports d'épaisseur - Comparaison des fréquences naturelles



**Fig.5.3** Plaque sandwich carrée simplement appuyée avec des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) pour différents rapports ( $h_c/h_f$ ) - Comparaison des fréquences naturelles



**Fig.5.4** Plaque sandwich simplement appuyée ayant des peaux stratifiées (0/90/C/0/90) avec différents rapports d'aspect ( $a/b$ ) - Comparaison des fréquences naturelles

**Tableau 5.13** Propriétés mécaniques des peaux et de l'âme (HEREX - C70.130) [274]

Matériaux	Propriétés mécaniques en GPa						
	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Peaux en fibre de verre / polyester	24.51	7.77	3.34	3.34	1.34	0.078	1800
Âme en mousse de HEREX - C70.130	0.1036	0.1036	0.05	0.05	0.05	0.32	130

**Tableau 5.14** Fréquences propres non-dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque sandwich carrée avec différentes séquences d'empilement dans les peaux

Références	Modèles EF	Différentes types de séquences d'empilement	Fréquences (Hz)			
			Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Présent élément	QSFT52		14.582	27.494	28.110	36.619
Malekzadeh, K et al. [314]	FEM-3D-LW		14.740	26.830	27.530	35.600
Meunier et Shenoï [274]	Analytical-HSDT		15.280	28.690	30.010	38.860
Nayak et al. [277]	FEM-Q9-HSDT	[0/90/0/core/0/90/0]	15.040	28.100	29.200	37.760
Nayak et al. [277]	FEM-Q4-HSDT		15.340	30.180	31.960	40.940
Jam et al. [291]	Analytical-LW1		15.040	26.733	27.329	35.316
Jam et al. [291]	Analytical-LW2		15.061	26.753	27.343	35.330
Présent élément	QSFT52		15.534	28.066	28.066	36.619
Malekzadeh, K et al. [314]	FEM-3D-LW		15.810	27.230	27.230	36.260
Meunier et Shenoï [274]	Analytical-HSDT		16.380	29.650	29.650	40.000
Nayak et al. [277]	FEM-Q9-HSDT	[45/-45/45/core/-45/45/-45]	16.090	28.930	28.930	38.760
Nayak et al. [277]	FEM-Q4-HSDT		16.430	31.170	31.170	42.780
Jam et al. [291]	Analytical-LW1		15.786	27.316	27.316	36.216
Jam et al. [291]	Analytical-LW2		15.799	27.329	27.329	36.220

**Tableau 5.15** Fréquences propres non-dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ), pour différents modes, d'une plaque carrée composite stratifiée biaise (90/0/90/0/90) avec deux types de conditions aux limites (SSSS et CCCC)

Skew angle	Références	Modèles EF	Fréquences (Hz)						
			Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7
Simplement appuyée (SSSS)									
0°	Présent élément	QSFT52	1.6020	3.0936	3.9511	4.7734	5.3915	6.5139	6.6478
	Wang [313]	Anal Solution	1.5699	3.0371	3.7324	4.5664	5.1469	6.0343	6.1820
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	1.5703	2.8917	3.8041	4.5314	4.7273	5.8888	6.2125
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	1.5699	3.0372	3.7325	4.5664	5.1475	6.0347	6.1825
15°	Présent élément	QSFT52	1.6556	3.1025	4.0721	4.7873	5.4713	6.4469	6.8284
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	1.6877	3.0458	4.0264	4.4818	5.1533	5.8277	6.4910
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	1.6874	3.1413	3.9600	4.6073	5.4606	6.0880	6.3125
30°	Présent élément	QSFT52	1.8572	3.1609	4.4985	4.8378	5.7640	6.4343	7.4741
	Wang [313]	Anal Solution	2.0844	3.5127	4.6997	4.8855	6.2494	6.3118	7.2533
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	2.0840	3.4023	4.7176	4.7674	5.9852	6.1177	7.1966
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	2.0884	3.5147	4.7033	4.8864	6.2514	6.3149	7.2570
45°	Présent élément	QSFT52	2.3630	3.3989	4.9769	5.4698	6.5139	6.6802	8.4955
	Wang [313]	Anal Solution	2.8825	4.2823	5.5868	6.1808	6.9022	7.8390	8.2114
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	2.8925	4.1906	5.4149	6.2868	6.6302	7.7433	7.8398
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	2.8932	4.2852	5.5886	6.1874	6.9035	7.8366	8.1971

Tableau 5.15 Suite

Skew angle	Références	Modèle EF	Fréquences (Hz)						
			Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7
Encastrée (CCCC)									
0°	Présent élément	QSFT52	2.4317	3.8296	4.3472	5.2745	5.9913	6.8568	7.0147
	Wang [313]	Anal Solution	2.3820	3.7383	4.1122	5.0366	5.6127	6.2393	6.5591
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	2.3687	3.5399	4.2134	4.9852	5.1895	6.2801	6.4666
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	2.3820	3.7383	4.1122	5.0366	5.6133	6.2397	6.5595
15°	Présent élément	QSFT52	2.4610	3.8253	4.4573	5.2916	6.0549	6.9328	7.0249
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	2.4663	3.6255	4.4247	4.9395	5.5603	6.2086	7.2133
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	2.4750	3.7872	4.3418	5.0599	5.8762	6.4405	6.5178
30°	Présent élément	QSFT52	2.5812	3.8521	4.8330	5.3560	6.2860	6.9186	7.6454
	Wang [313]	Anal Solution	2.7921	4.0566	5.0220	5.2906	6.5698	6.6042	7.4485
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	2.8001	3.9557	5.1079	5.1675	6.3624	6.4236	7.5067
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	2.7922	4.0568	5.0222	5.2909	6.5702	6.6047	7.4487
45°	Présent élément	QSFT52	2.9190	4.0216	5.5212	6.9025	7.1661	8.9485	8.9815
	Wang [313]	Anal Solution	3.4738	4.7393	5.9554	6.3750	7.1961	8.0031	8.4468
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-TSDT	3.5215	4.7129	5.8789	6.5290	7.0275	7.9963	8.1687
	Garg et al. [293]	FEM-Q9-FSDT	3.4739	4.7396	5.9553	6.3745	7.1920	7.9978	8.4213

# Conclusion générale & perspectives

## 1. Conclusion générale:

Dans cette étude, un nouveau modèle a été développé pour l'analyse du comportement des plaques composites multicouches et notamment les plaques sandwichs. Le modèle proposé est basé sur l'approche layerwise, mais en gardant tous les avantages de l'approche monocouche. Contrairement à tous les autres modèles layerwise présentés dans la littérature, le nombre de degrés de liberté dans ce modèle est indépendant du nombre de couches. Les deux peaux et l'âme sont modélisées individuellement en utilisant, respectivement, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et celle du troisième ordre. Ces deux théories combinées, satisfont les exigences de continuités des déplacements interlaminaires ainsi que les conditions de compatibilité. Le nouveau modèle permet de calculer les contraintes de cisaillement transversal, d'une manière précise en utilisant les équations constitutives plutôt que les équations d'équilibre et sans recours à des facteurs de correction.

Sur la base de ce nouveau modèle, deux éléments finis, baptisés **RSFT52** et **QSFT52** (**R**ectangular & **Q**uadrilateral **S**andwich **F**irst **T**hird with **52**-degrees of freedom), ont été développés pour l'analyse statique et dynamique des plaques composites multicouches et des sandwichs. Ces éléments sont géométriquement simples et ne possèdent que quatre nœuds et treize degrés de liberté par nœud. Chaque nœud contient: deux degrés de liberté de rotation pour chaque peau, six degrés de liberté de rotation aussi pour l'âme, alors que les trois degrés de liberté de type translation (3ddl/nœud) sont communs aux trois couches. La formulation de ces deux éléments est basée sur le principe du travail virtuel.

La performance et l'efficacité des éléments développés RSFT52 et QSFT52 sont démontrés à travers une série d'applications en flexion et en vibration libre de plaques isotropes, composites multicouches et sandwichs symétrique / non symétrique, avec différents

cas de chargement, de géométrie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions analytiques de références, et ceux obtenus par des modèles d'éléments finis basés sur différentes théories (HSDT, HZZT, LW, GLHSDT). Pour l'analyse statique, les exemples numériques montrent que les éléments finis développés sont capables de donner d'excellents résultats en particulier pour les contraintes de cisaillement transverse. Ces dernières ont été calculées directement en utilisant les équations constitutives plutôt que les équations d'équilibre. Ainsi, dans le cas de l'analyse dynamique, les résultats de l'élément développé QSFT52 sont en excellent accord avec ceux trouvés dans la littérature, où l'erreur n'atteint pas 0.004 % par comparaison avec la solution d'élasticité-3D.

Nous avons aussi montré l'influence de la distorsion géométrique sur la précision du résultat en étudiant le cas d'une plaque biaise (skew). En plus, on a montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres sur la variation du déplacement transversal ainsi que les fréquences naturelles d'une plaque sandwich, tels que le rapport d'épaisseur, les combinaisons de conditions aux limites, le rapport d'aspect, le degré d'anisotropie et d'orthotropie des sandwichs, etc.

On peut conclure que l'utilisation des éléments finis développés ainsi que la combinaison de la théorie de déformation en cisaillement du premier et celle du troisième ordre (FSDT, TSDT), pour modéliser respectivement, les deux peaux et l'âme, ont montré une bonne précision et une convergence rapide pour l'analyse des différents problèmes. Finalement, le potentiel des éléments finis développés peut être utilisé pour générer un certain nombre de nouveaux résultats, qui sont censés être utiles pour les futures recherches dans ce domaine.

## 2. Perspectives:

Les modèles d'éléments finis développés **RSFT52** et **QSFT52** peuvent être considérés comme les plus simples parmi les éléments finis existants, quelle que soit l'approche ou le modèle utilisé. Les résultats obtenus sont fort encourageants et permettent d'augurer favorablement sur les possibilités réelles d'élargir ce modèle à l'étude d'autres phénomènes.

- Il serait intéressant d'utiliser l'élément **RSFT52** dans l'analyse non-linéaire et dans l'étude de comportement de flambement des plaques multicouches.

- Élaboration d'un nouveau modèle d'élément fini de type layerwise, nommé (**QSFT36: Quadrilateral Sandwich First Third with 36 DOFs**). Il serait pour l'analyse des structures isotropes, composites stratifiées et sandwichs en particulier. Ce nouveau modèle permettrait de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle précédent (QSFT52); grâce à l'introduction des critères de continuités des contraintes de cisaillement transversal au niveau d'interface.
- Nous proposons d'étendre l'étude des phénomènes d'instabilités, i.e. le flambement global, le flambement local, le calcul thermique et thermo-mécanique des plaques sandwichs multicouches.
- Développer l'analyse non-linéaire matérielle, prenant en compte l'endommagement dans les structures sandwichs multicouches (possibilité de réaliser des tests expérimentaux afin de les comparer avec le modèle numérique).
- Étudier l'amortissement passif et actif des structures sandwichs comportant des couches viscoélastiques au niveau de l'âme, et des couches piézoélectriques au niveau des peaux, afin de réduire l'amplitude des vibrations et du bruit.
- L'intégration des éléments développés (**QSFT52** et **RSFT52**) dans le code ABAQUS, en utilisant la routine utilisateur User-Element (UEL).
- Peut-on généraliser ce modèle aux problèmes des coques minces et épaisses? Cette question mérite également une investigation.

## Références bibliographiques

- [1] Reddy, J.N., Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis. Vol. 1. 1997: CRC press Boca Raton.
- [2] Reddy, J.N., Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2003: CRC press.
- [3] Kollár, L.P. and G.S. Springer, Mechanics of composite structures. 2003: Cambridge university press.
- [4] Vinson, J.R., The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials: Jack R. Vinson, 1999: CRC Press.
- [5] Zenkert, D., An introduction to sandwich construction 1997: Engineering Materials Advisory Services.
- [6] Plantema, F.J., Sandwich construction. Vol. 966. 1966: Wiley New York.
- [7] Jones, R.M., Mechanics of composite materials. Second Editions ed 1998: CRC Press.
- [8] Carlsson, L.A. and G.A. Kardomateas, Structural and failure mechanics of sandwich composites. Vol. 121. 2011: Springer.
- [9] Kreja, I., (2011), A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels, Central European Journal of Engineering, 1 (1) 59-80.
- [10] Libove, C. and S. Batdorf, A general small-deflection theory for flat sandwich plates, 1948, DTIC Document.
- [11] Reissner, E., (1948), Finite Deflections of Sandwich Plates, Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences), 15 (7) 435-440.
- [12] Reissner, E., Small bending and stretching of sandwich-type shells, 1950, National Advisory Committee for Aeronautics. Rpt 975.
- [13] Hoff, N.J., Bending and buckling of rectangular sandwich plates. 1950: National Advisory Committee for Aeronautics.
- [14] Eringen, A.C. Bending and buckling of rectangular sandwich plates. in Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics. 1951.

- [15] Yen, K.T., S. Gunturkun, and F.V. Pohle, Deflections of a simply supported rectangular sandwich plate subjected to transverse loads 1951: National Advisory Committee for Aeronautics.
- [16] Gerard, G.,(1951), Note on Bending of Thick Sandwich Plates, Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences), 18 (6) 424-426.
- [17] Ericksen, W.S.,( 1953, US Forest Products Lab, Madison WI, FPL-1828), The bending of a circular sandwich plate under normal load.
- [18] Ericksen, W.S. and H. March,(1958, rapport FPL n°1583-B. ), Effects of shear deformation in the core of a flat rectangular sandwich panel: compressive buckling of sandwich panels having dissimilar facings of unequal thickness.
- [19] Cheng, S., On the theory of bending of sandwich plates, 1961, DTIC Document: Proceedings of the 4 U.S. National Congress of A. M. p. 511–518.
- [20] Lin, T.H. and L.T. Yokota,(1965), Deflections and bending moments of rectangular sandwich panels with clamped edges under combined biaxial compressions and pressure, AIAA Journal, 3 (6) 1162-1164.
- [21] Liaw, B.D. and R.W. Little,(1967), Theory of bending multi-layer sandwich plates, AIAA Journal, 5 (2) 301-304.
- [22] Azar, J.J.,(1968), Bending theory for multilayer orthotropic sandwich plates, AIAA Journal, 6 (11) 2166-2169.
- [23] Pagano, N.,(1969), Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, Journal of composite materials, 3 (3) 398-411.
- [24] Pagano, N.,(1970), Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, Journal of composite materials, 4 (1) 20-34.
- [25] Jones, A.T.,(1970), Exact natural frequencies for cross-ply laminates, Journal of Composite materials, 4 (4) 476-491.
- [26] Srinivas, S. and A. Rao,(1971), A three-dimensional solution for plates and laminates, Journal of the Franklin Institute, 291 (6) 469-481.
- [27] Srinivas, S., C. Joga Rao, and A. Rao,(1970), An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, 12 (2) 187-199.
- [28] Noor, A., J. Peters, and W. Burton,(1994), Three-Dimensional Solutions for Initially Stressed Structural Sandwiches, Journal of Engineering Mechanics, 120 (2) 284-303.
- [29] Noor, A.K. and W.S. Burton,(1990), Three-dimensional solutions for antisymmetrically solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates, Journal of applied mechanics, 57 (1) 182-188.

- [30] Kant, T. and K. Swaminathan,(2002), Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, 56 (4) 329-344.
- [31] Lascoup, B., et al.,(2010), Homogenization of the core layer in stitched sandwich structures, *Composites Science and Technology*, 70 (2) 350-355.
- [32] Lewiński, T.,(1993), On recent developments in the homogenization theory of elastic plates and their application to optimal design: Part I, *Structural optimization*, 6 (1) 59-64.
- [33] Rabczuk, T., et al.,(2004), Homogenization of sandwich structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 (7) 1009-1027.
- [34] Takano, N., M. Zako, and N. Kikuchi,(1995), Stress analysis of sandwich plate by the homogenization method, *Materials science research international*, 1 (2) 82-88.
- [35] Reddy, J.N.,(1993), An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates, *Composite structures*, 25 (1-4) 21-35.
- [36] Carrera, E.,(2003), Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells:A Unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10 (3) 215-296.
- [37] Kirchhoff, G.,(1850), Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 51-88.
- [38] Love, A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*1934: Cambridge University Press.
- [39] Reissner, E. and Y. Stavsky,(1961), Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Aeolotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 28 (3) 402-408.
- [40] Librescu, L., *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell-type structures. Vol. 2.* 1975, Noordhoff, Leyden, Netherlands
- [41] Reddy, J.N.,(1989), On refined computational models of composite laminates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27 (2) 361-382.
- [42] Stavsky, Y.,(1965), On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli, *Topics in applied mechanics*, 105.
- [43] Rohwer, K., S. Friedrichs, and C. Wehmeyer,(2005), Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material—an assessment, *Technische Mechanik*, 25 (1) 59-79.
- [44] Ambarsumyan, S.,(1958), K teorii izgiba anisotropnykh plasinok, *Izv. Akad Nauk SSR*, 5, 69-77.
- [45] Dong S.B., P.K.S.e.T.R.L.,(1962), On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates, *Journal of the Aerospace Sciences*, 29 (8) 969-975.

- [46] Stavsky, Y.,(1962), Bending and stretching of laminated aeolotropic plates, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 127 (1) 1194-1219.
- [47] Decolon, C., Analysis of composite structures, 2004: Butterworth-Heinemann.
- [48] Pai, P.F.,(1995), A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates, International Journal of Solids and Structures, 32 (16) 2295-2313.
- [49] Yang, P.C., C.H. Norris, and Y. Stavsky,(1966), Elastic wave propagation in heterogeneous plates, International Journal of Solids and Structures, 2 (4) 665-684.
- [50] Whitney, J.,(1969), The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates, Journal of composite materials, 3 (3) 534-547.
- [51] Reissner, E.,(1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. appl. Mech, 12 (2) 69-77.
- [52] Mindlin, R.,(1951), Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. of Appl. Mech., 18 31-38.
- [53] Reissner, E.,(1985), Reflections on the Theory of Elastic Plates, Applied Mechanics Reviews, 38 (11) 1453-1464.
- [54] Whitney, J. and N. Pagano,(1970), Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, Journal of Applied Mechanics, 37 (4) 1031-1036.
- [55] Berthelot, J.-M., Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures. Vol. 3. 1992: Masson Paris.
- [56] Dong, S.B. and F.K.W. Tso,(1972), On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation, Journal of Applied Mechanics, 39 (4) 1091-1097.
- [57] Barker, R.M. and J.C.W. Pryor,(1971), A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates, AIAA Journal, 9 (5) 912-917.
- [58] Whitney, J.M.,(1972), Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates\*, Journal of Composite materials, 6 (4) 426-440.
- [59] Hu, H., et al.,(2008), Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites, Composite Structures, 84 (3) 282-292.
- [60] Vlachoutsis, S.,(1992), Shear correction factors for plates and shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33 (7) 1537-1552.
- [61] Whitney, J.,(1973), Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, Journal of applied mechanics, 40 302.
- [62] Birman, V. and C.W. Bert,(2002), On the choice of shear correction factor in sandwich structures, Journal of Sandwich Structures and Materials, 4 (1) 83-95.

- [63] Chatterjee, S.N. and S.V. Kulkarni,(1979), Shear Correction Factors for Laminated Plates, *AIAA Journal*, 17 (5) 498-499.
- [64] Madabhusi-Raman, P. and J.F. Davalos,(1996), Static shear correction factor for laminated rectangular beams, *Composites Part B: Engineering*, 27 (3–4) 285-293.
- [65] Laitinen, M., H. Lahtinen, and S.G. Sjölin,(1995), Transverse shear correction factors for laminates in cylindrical bending, *Communications in numerical methods in engineering*, 11 (1) 41-47.
- [66] Carrera, E. and S. Brischetto,(2008), A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 62 (1) 010803-010803.
- [67] Reissner, E.,(1972), A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates, *AIAA Journal*, 10 (5) 716-718.
- [68] Belarbi, M.T., Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. Application linéaire et non linéaire, 2000, Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine.
- [69] Ayad, R., Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France. 1993.
- [70] Lardeur, P., Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal, 1990, Thèse de Doctorat, University of Technology of Compiègne,France.
- [71] Noor, A.K. and W.S. Burton,(1989), Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 42 (1) 1-13.
- [72] Bert, C.W.,(1973), Simplified analysis of static shear factors for beams of nonhomogeneous cross section, *Journal of Composite materials*, 7 (4) 525-529.
- [73] Yu, Y.-Y.,(1959), Simple Thickness-shear Modes of Vibration in Infinite Sandwich Plates, (26) 679–681.
- [74] Krishna Murty, A. and S. Vellaichamy,(1987), On higher order shear deformation theory of laminated composite panels, *Composite Structures*, 8 (4) 247-270.
- [75] Lo, K., R. Christensen, and E. Wu,(1977), A high-order theory of plate deformation—part 2: laminated plates, *Journal of Applied Mechanics*, 44 (4) 669-676.
- [76] Lo, K., R. Christensen, and E. Wu,(1977), A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates, *Journal of Applied Mechanics*, 44 (4) 663-668.
- [77] Nelson, R.B. and D.R. Lorch,(1974), A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 41 (1) 177-183.
- [78] Reddy, J.N.,(1984), A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of applied mechanics*, 51 (4) 745-752.

- [79] Whitney, J. and C. Sun,(1973), A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *Journal of Sound and Vibration*, 30 (1) 85-97.
- [80] Bhimaraddi, A. and L.K. Stevens,(1984), A Higher Order Theory for Free Vibration of Orthotropic, Homogeneous, and Laminated Rectangular Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 51 (1) 195-198.
- [81] Murthy, M.,(1981), An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates, *NASA Technical*, 1-37.
- [82] Kant, T.,(1982), Numerical analysis of thick plates, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 31 (1) 1-18.
- [83] Ren-Huai, L. and H. Ling-Hui,(1991), A simple theory for non-linear bending of laminated composite rectangular plates including higher-order effects, *International journal of non-linear mechanics*, 26 (5) 537-545.
- [84] Touratier, M.,(1991), An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, 29 (8) 901-916.
- [85] Hildebrand, F., E. Reissner, and G. Thomas, Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells 1949: NACA Technical Note No. 1833, Washington, DC.
- [86] Basset, A.B.,(1890), On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 181 (6) 433-480.
- [87] Nguyen-Van, H., Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures, *Thèse de Doctorat*, University of Southern Queensland, 2009, 295 pp.
- [88] Whitney, J. and C.-T. Sun,(1974), A refined theory for laminated anisotropic, cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics*, 41 (2) 471-476.
- [89] Kwon, Y. and J. Akin,(1987), Analysis of layered composite plates using a high-order deformation theory, *Computers & structures*, 27 (5) 619-623.
- [90] Fares, M.,(1993), A refined two-dimensional theory of anisotropic plates, *Mechanics Research Communications*, 20 (4) 319-327.
- [91] Tessler, A.,(1993), An improved plate theory of {1, 2}-order for thick composite laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 30 (7) 981-1000.
- [92] Sacco, E. and J. Reddy,(1992), On first-and second-order moderate rotation theories of laminated plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 (1) 1-17.
- [93] Reissner, E.,(1963), On the derivation of boundary conditions for plate theory, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 276 (1365) 178-186.

- [94] Levinson, M.,(1980), An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mechanics Research Communications*, 7 (6) 343-350.
- [95] Reddy, J. and D. Robbins,(1994), Theories and computational models for composite laminates, *Applied mechanics reviews*, 47, 147.
- [96] Bert, C.W.,(1984), A critical evaluation of new plate theories applied to laminated composites, *Composite Structures*, 2 (4) 329-347.
- [97] Senthilnathan, N., et al.,(1987), Buckling of shear-deformable plates, *AIAA Journal*, 25 (9) 1268-1271.
- [98] Lee, K., et al.,(1989), A simple higher-order non-linear shear deformation plate theory, *International journal of non-linear mechanics*, 24 (2) 127-137.
- [99] Rohwer, K.,(1992), Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29 (1) 105-119.
- [100] Ferreira, A., C. Roque, and R. Jorge,(2006), Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30 (9) 719-733.
- [101] Krishna Murty, A.,(1987), Flexure of composite plates, *Composite Structures*, 7 (3) 161-177.
- [102] Aydogdu, M.,(2009), A new shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite structures*, 89 (1) 94-101.
- [103] Levy, M.,(1877), Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 219-306.
- [104] Mantari, J., A. Oktem, and C. Guedes Soares,(2012), A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates, *Computers & Structures*, 94 45-53.
- [105] Mantari, J.L., A.S. Oktem, and C. Guedes Soares,(2011), Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory, *Composite structures*, 94 (1) 37-49.
- [106] Mantari, J., A. Oktem, and C. Guedes Soares,(2012), A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Composites Part B: Engineering*, 43 (3) 1489-1499.
- [107] Soldatos, K.P.,(1992), A general laminated plate theory accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at material interfaces, *Composite Structures*, 20 (4) 195-211.
- [108] Stein, M.,(1986), Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing, *AIAA Journal*, 24 (9) 1537-1544.

- [109] Sahoo, R. and B.N. Singh,(2013), A new inverse hyperbolic zigzag theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite structures*, 105 (0) 385-397.
- [110] Karama, M., K. Afaq, and S. Mistou,(2003), Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, 40 (6) 1525-1546.
- [111] Ghugal, Y.M. and A.S. Sayyad,(2010), A static flexure of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory, *J Solid Mech*, 2 (1) 79-90.
- [112] Stein, M. and D.C. Jegley,(1987), Effects of transverse shearing on cylindrical bending, vibration, and buckling of laminated plates, *AIAA Journal*, 25 (1) 123-129.
- [113] Nguyen, V.T., Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de Doctorat, Ecole des Ponts ParisTech. , 2004, 216 pp.
- [114] Idlbi, A., M. Karama, and M. Touratier,(1997), Comparison of various laminated plate theories, *Composite Structures*, 37 (2) 173-184.
- [115] Soldatos, K.P.,(1992), A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica*, 94 (3-4) 195-220.
- [116] Soldatos, K. and T. Timarci,(1993), A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories, *Composite Structures*, 25 (1) 165-171.
- [117] Aydogdu, M.,(2006), Comparison of various shear deformation theories for bending, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges, *Journal of Composite materials*, 40 (23) 2143-2155.
- [118] Karama, M., K. Afaq, and S. Mistou,(2009), A new theory for laminated composite plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications*, 223 (2) 53-62.
- [119] Nguyen, D.T., Benchmark d'un modèle layer wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Thèse de Doctorat ,Université Paris-Est., 2012, 160 pp.
- [120] Kaczkowski, Z.,(1968), *Plates, Statical calculations*, Arkady, Warsaw.
- [121] Panc, V., *Theories of elastic plates*. Prague: Academia, 1975: Springer.
- [122] Reissner, E.,(1975), On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, 11 (5) 569-573.
- [123] Ferreira, A., C. Roque, and R. Jorge,(2005), Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics, *Computers & structures*, 83 (27) 2225-2237.

- [124] Mantari, J., A. Oktem, and C. Guedes Soares,(2011), Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 94 (1) 37-49.
- [125] Mantari, J., A. Oktem, and C. Guedes Soares,(2012), A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Solids and Structures*, 49 (1) 43-53.
- [126] Mantari, J. and C. Guedes Soares,(2012), Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 94 (8) 2640-2656.
- [127] Grover, N., D. Maiti, and B. Singh,(2013), A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 95 667-675.
- [128] Sahoo, R. and B. Singh,(2013), A new shear deformation theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 75 324-336.
- [129] Carrera, E.,(2002), Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9 (2) 87-140.
- [130] Saeedi, N., Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues. Thèse de Doctorat ,Université Paris-Est., 2012, 223 pp.
- [131] Kao, J.S. and R.J. Ross,(1968), Bending of multilayer sandwich beams, *AIAA Journal*, 6 (8) 1583-1585.
- [132] Srinivas, S.,(1973), A refined analysis of composite laminates, *Journal of Sound and Vibration*, 30 (4) 495-507.
- [133] Sun, C.-T. and J. Whitney,(1973), Theories for the dynamic response of laminated plates, *AIAA Journal*, 11 (2) 178-183.
- [134] Swift, G.W. and R.A. Heller,(1974), Layered beam analysis, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100 (2) 267-282.
- [135] Seide, P.,(1980), An improved approximate theory for the bending of laminated plates. Chapter book.
- [136] Reddy, J.N.,(1987), A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, 3 (3) 173-180.
- [137] Reddy, J.N., E.J. Barbero, and J.L. Teply,(1989), A plate bending element based on a generalized laminate plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 (10) 2275-2292.

- [138] Barbero, E.J., J.N. Reddy, and J. Teply,(1990), An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 (1) 1-14.
- [139] Robbins, D. and J. Reddy,(1993), Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *International journal for numerical methods in engineering*, 36 (4) 655-677.
- [140] Cho, K., A. Striz, and C. Bert,(1989), Thermal stress analysis of laminate using higher-order theory in each layer, *Journal of thermal stresses*, 12 (3) 321-332.
- [141] Cho, K., C. Bert, and A. Striz,(1991), Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory, *Journal of Sound and Vibration*, 145 (3) 429-442.
- [142] Pagano, N.J. and S.R. Soni,(1983), Global-local laminate variational model, *International Journal of Solids and Structures*, 19 (3) 207-228.
- [143] Ren, J.G.,(1986), A new theory of laminated plate, *Composites Science and Technology*, 26 (3) 225-239.
- [144] Kassapoglou, C. and P.A. Lagace,(1986), An Efficient Method for the Calculation of Interlaminar Stresses in Composite Materials, *Journal of Applied Mechanics*, 53 (4) 744-750.
- [145] Kassapoglou, C. and P.A. Lagace,(1987), Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates, *Journal of Composite materials*, 21 (4) 292-308.
- [146] Wan-Lee, Y.,(1994), Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model, *International Journal of Solids and Structures*, 31 (11) 1549-1564.
- [147] Yin, W.L.,(1994), Free-Edge Effects in Anisotropic Laminates Under Extension, Bending and Twisting, Part I: A Stress-Function-Based Variational Approach, *Journal of Applied Mechanics*, 61 (2) 410-415.
- [148] Lee, K., et al.,(1990), An improved zig-zag model for the bending of laminated composite plates, *Composite Structures*, 15 (2) 137-148.
- [149] Di Sciuva, M.,(1984), A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates, *Atti. Accad. Sci. Torino*, 118 279–295.
- [150] Di Sciuva, M.,(1986), Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model, *Journal of Sound and Vibration*, 105 (3) 425-442.
- [151] Murakami, H.,(1986), Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *Journal of applied mechanics*, 53 (3) 661-666.

- [152] Cho, M. and R.R. Parmerter,(1992), An efficient higher-order plate theory for laminated composites, *Composite Structures*, 20 (2) 113-123.
- [153] Cho, M. and R. Parmerter,(1993), Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations, *AIAA journal*, 31 (7) 1299-1306.
- [154] Lu, X. and D. Liu,(1992), An Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for Both Thin and Thick Composite Laminates, *Journal of Applied Mechanics*, 59 (3) 502-509.
- [155] Di Sciuva, M.,(1987), An Improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 54 (3) 589-596.
- [156] Averill, R.C.,(1994), Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage, *Composites Engineering*, 4 (4) 381-395.
- [157] Cho, Y. and R. Averill,(2000), First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels, *Composite Structures*, 50 (1) 1-15.
- [158] Chakrabarti, A. and A.H. Sheikh,(2005), Analysis of laminated sandwich plates based on interlaminar shear stress continuous plate theory, *Journal of engineering mechanics*, 131 (4) 377-384.
- [159] He, L.-H.,(1994), A linear theory of laminated shells accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at layer interfaces, *International Journal of Solids and Structures*, 31 (5) 613-627.
- [160] Khandelwal, R., A. Chakrabarti, and P. Bhargava,(2013), An efficient FE model based on combined theory for the analysis of soft core sandwich plate, *Computational Mechanics*, 51 (5) 673-697.
- [161] Pandit, M., A.H. Sheikh, and B.N. Singh,(2010), Analysis of laminated sandwich plates based on an improved higher order zigzag theory, *Journal of sandwich structures and materials*, 12 (3) 307-326.
- [162] Pandit, M.K., A.H. Sheikh, and B.N. Singh,(2008), An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core, *Finite elements in analysis and design*, 44 (9) 602-610.
- [163] Topdar, P., A.H. Sheikh, and N. Dhang,(2003), Finite element analysis of composite and sandwich plates using a continuous inter-laminar shear stress model, *Journal of sandwich structures and materials*, 5 (3) 207-231.
- [164] Icardi, U.,(2001), Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminar approximations, *Composites Part B: Engineering*, 32 (4) 343-354.
- [165] Kapuria, S., P. Dumir, and N. Jain,(2004), Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams, *Composite Structures*, 64 (3) 317-327.

- [166] Sciuva, M.D.,(1992), Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses, *Composite Structures*, 22 (3) 149-167.
- [167] Carrera, E.,(2003), Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells, *Applied mechanics reviews*, 56 287-308.
- [168] Duong, V.A., Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008, 196 pp.
- [169] Lekhnitskii, S.,(1935), Strength calculation of composite beams, *Vestnik inzhen i tekhnikov*, 9.
- [170] Ambartsumian, S.,(1958), On a general theory of anisotropic shells, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22 (2) 305-319.
- [171] Ambartsumian, S.A., *Theory of anisotropic shells*, 1961: State Publishing House for Physical and Mathematical Literature.
- [172] Reissner, E.,(1984), On a certain mixed variational theorem and a proposed application, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 (7) 1366-1368.
- [173] Toledano, A. and H. Murakami,(1987), A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations, *Journal of Applied Mechanics*, 54 (1) 181-189.
- [174] Toledano, A. and H. Murakami,(1987), A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses, *International Journal of Solids and Structures*, 23 (1) 111-131.
- [175] Carrera, E.,(1995), A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis, *Atti della accademia delle scienze di Torino. Classe di scienze fisiche matematiche e naturali*, 19, 1-39.
- [176] Di Sciuva, M. and M. Gherlone,(2003), A global/local third-order Hermitian displacement field with damaged interfaces and transverse extensibility: analytical formulation, *Composite Structures*, 59 (4) 419-431.
- [177] Ha, K.,(1990), Finite element analysis of sandwich plates: an overview, *Computers & Structures*, 37 (4) 397-403.
- [178] Kant, T. and K. Swaminathan,(2000), Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments, *Composite structures*, 49 (1) 65-75.
- [179] Khandan, R., et al.,(2012), The development of laminated composite plate theories: a review, *Journal of Materials Science*, 47 (16) 5901-5910.
- [180] Liu, D. and X. Li,(1996), An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis, *Journal of Composite materials*, 30 (14) 1539-1561.

- [181] Noor, A.K., W.S. Burton, and C.W. Bert,(1996), Computational models for sandwich panels and shells, *Applied mechanics reviews*, 49 155.
- [182] Zhang, Y. and C. Yang,(2009), Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates, *Composite Structures*, 88 (1) 147-157.
- [183] Altenbach, H.,(1998), Theories for laminated and sandwich plates, *Mechanics of composite materials*, 34 (3) 243-252.
- [184] Ghugal, Y. and R. Shimpi,(2002), A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21 (9) 775-813.
- [185] Wanji, C. and W. Zhen,(2008), A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories, *Recent patents on mechanical engineering*, 1 (1) 29-44.
- [186] Chen, W. and P. Jia,(2012), Interlaminar stresses analysis and the limit state function approximating methods for composite structure reliability assessment: A selected review and some perspectives, *Journal of Composite materials*, .
- [187] Li, X. and D. Liu,(1995), A laminate theory based on global–local superposition, *Communications in numerical methods in engineering*, 11 (8) 633-641.
- [188] Shariyat, M.,(2010), A generalized global–local high-order theory for bending and vibration analyses of sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (3) 495-514.
- [189] Wu, Z., R. Chen, and W. Chen,(2005), Refined laminated composite plate element based on global–local higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 70 (2) 135-152.
- [190] Wu, Z., et al.,(2012), A higher order finite element including transverse normal strain for linear elastic composite plates with general lamination configurations, *Finite Elements in Analysis and Design*, 48 (1) 1346-1357.
- [191] Zhen, W. and C. Wanji,(2010), A global-local higher order theory including interlaminar stress continuity and  $C^0$  plate bending element for cross-ply laminated composite plates, *Computational Mechanics*, 45 (5) 387-400.
- [192] Zhen, W. and C. Wanji,(2010), A  $C^0$ -type higher-order theory for bending analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 92 (3) 653-661.
- [193] Zhen, W. and C. Wanji,(2007), A study of global–local higher-order theories for laminated composite plates, *Composite Structures*, 79 (1) 44-54.
- [194] Chen, R.-g. and W.-j. Chen,(2000), Higher-order shear deformation theory and triangular plate element based on global-local superposition, *Acta Materiae Compositae Sinica. (China)*, 17 96-102.

- [195] Sedira, L., Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux. Thèse de Doctorat, Université de Biskra, 2013, 195 pp.
- [196] Li, X. and D. Liu,(1997), Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 (7) 1197-1212.
- [197] Khalili, S., M. Shariyat, and I. Rajabi,(2014), A finite element based global–local theory for static analysis of rectangular sandwich and laminated composite plates, *Composite structures*, 107, 177-189.
- [198] Xiaohui, R., C. Wanji, and W. Zhen,(2012), A C0-type zig–zag theory and finite element for laminated composite and sandwich plates with general configurations, *Archive of Applied Mechanics*, 82 (3) 391-406.
- [199] Zhen, W. and C. Wanji,(2006), Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global–local higher-order theory, *Journal of Sound and Vibration*, 298 (1) 333-349.
- [200] Zhen, W. and C. Wanji,(2007), Buckling analysis of angle-ply composite and sandwich plates by combination of geometric stiffness matrix, *Computational Mechanics*, 39 (6) 839-848.
- [201] Tessler, A., M. DiSciuva, and M. Gherlone,(2009), Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates.
- [202] Oh, J., et al.,(2008), A finite element formulation based on an enhanced first order shear deformation theory for composite and sandwich structures, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22 (5) 871-878.
- [203] Xiaohui, R., C. Wanji, and W. Zhen,(2011), A new zig-zag theory and C0 plate bending element for composite and sandwich plates, *Archive of Applied Mechanics*, 81 (2) 185-197.
- [204] Nemeth, M.P.,(2012), Cubic zig-zag enrichment of the classical Kirchhoff kinematics for laminated and sandwich plates.
- [205] Sedira, L., et al.,(2012), An enhanced discrete Mindlin finite element model using a zigzag function, *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 21 (1-2) 122-140.
- [206] Natarajan, S. and G. Manickam,(2012), Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, 57 32-42.
- [207] Abel, J. and E. Popov,(1968), Static and dynamic finite element analysis of sandwich structures, *Proceedings of the Second Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics*, 68 213–245,.

- [208] Monforton, G. and L. Schmit. Finite element analysis of sandwich plates and cylindrical shells with laminated faces. in Proceedings of the Second Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFSL-TR-68-150. 1968.
- [209] Ahmed, K.,(1971), Static and dynamic analysis of sandwich structures by the method of finite elements, Journal of Sound and Vibration, 18 (1) 75-91.
- [210] Khatua, T. and Y. Cheung,(1973), Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates, International journal for numerical methods in engineering, 6 (1) 11-24.
- [211] Khatua, T.P. and Y.K. Cheung,(1972), Triangular element for multilayer sandwich plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, 98 (5) 1225-1238.
- [212] Cook, R.D.,(1972), Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates, International journal for numerical methods in engineering, 5 (2) 277-288.
- [213] Cook, R.D.,(1975), Finite element buckling analysis of homogeneous and sandwich plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9 (1) 39-50.
- [214] Fazio, P.P. and K.H. Ha,(1974), Sandwich plate structure analysis by finite element, Journal of the Structural Division, 100 (6) 1243-1262.
- [215] Sheikh, A.H., S. Halder, and D. Sengupta,(2002), A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes, Composite Structures, 55 (3) 329-336.
- [216] Tafla, A., Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches. Thèse de Doctorat, University of Reims Champagne Ardenne, 2007, 132 pp.
- [217] Sakami, S., Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin). Thèse de Doctorat, University of Reims Champagne Ardenne, 2008, 188 pp
- [218] Katili, I., Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1993.
- [219] Kant, T., D. Owen, and O. Zienkiewicz,(1982), A refined higher-order C plate bending element, Computers & structures, 15 (2) 177-183.
- [220] Engblom, J.J. and O.O. Ochoa,(1985), Through-the-thickness stress predictions for laminated plates of advanced composite materials, International journal for numerical methods in engineering, 21 (10) 1759-1776.
- [221] Pandya, B. and T. Kant,(1988), Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order  $C^0$  plate bending elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66 (2) 173-198.

- [222] Pandya, B. and T. Kant,(1988), A refined higher-order generally orthotropic  $C^0$  plate bending element, *Computers & structures*, 28 (2) 119-133.
- [223] Pandya, B. and T. Kant,(1988), Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—finite element evaluations, *International Journal of Solids and Structures*, 24 (12) 1267-1286.
- [224] Pandya, B. and T. Kant,(1987), A consistent refined theory for flexure of a symmetric laminate, *Mechanics Research Communications*, 14 (2) 107-113.
- [225] Kant, T. and J. Kommineni,(1992),  $C^0$  Finite element geometrically non-linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory, *Computers & Structures*, 45 (3) 511-520.
- [226] Manjunatha, B. and T. Kant,(1992), A comparison of 9 and 16 node quadrilateral elements based on higher-order laminate theories for estimation of transverse stresses, *Journal of reinforced plastics and composites*, 11 (9) 968-1002.
- [227] Manjunatha, B. and T. Kant,(1993), On evaluation of transverse stresses in layered symmetric composite and sandwich laminates under flexure, *Engineering computations*, 10 (6) 499-518.
- [228] Polit, O. and M. Touratier,(1997), A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses, *Composite Structures*, 38 (1) 37-44.
- [229] Polit, O. and M. Touratier,(2000), High-order triangular sandwich plate finite element for linear and non-linear analyses, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185 (2) 305-324.
- [230] Polit, O. and M. Touratier,(2002), A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses, *Composite Structures*, 58 (1) 121-128.
- [231] Nayak, A., S.J. Moy, and R. Shenoj,(2003), Quadrilateral finite elements for multilayer sandwich plates, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 38 (5) 377-392.
- [232] Rezaiee-Pajand, M., F. Shahabian, and F. Tavakoli,(2012), A new higher-order triangular plate bending element for the analysis of laminated composite and sandwich plates, *Structural Engineering and Mechanics*, 43 (2) 253-271.
- [233] Sheikh, A.H. and A. Chakrabarti,(2003), A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates, *Finite elements in analysis and design*, 39 (9) 883-903.
- [234] Dvorkin, E.N. and K.-J. Bathe,(1984), A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, *Engineering computations*, 1 (1) 77-88.
- [235] Huang, H. and E. Hinton,(1984), A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation, *Engineering computations*, 1 (4) 369-379.

- [236] Tu, T.M., L.N. Thach, and T.H. Quoc,(2010), Finite element modeling for bending and vibration analysis of laminated and sandwich composite plates based on higher-order theory, *Computational Materials Science*, 49 (4) S390-S394.
- [237] Pandya, B. and T. Kant,(1988), Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model, *Composites Science and Technology*, 32 (2) 137-155.
- [238] Goswami, S. and W. Becker,(2013), A New Rectangular Finite Element Formulation Based on Higher Order Displacement Theory for Thick and Thin Composite and Sandwich Plates, *World*, 3 194-201.
- [239] Lee, S.J. and H.R. Kim,(2013), FE analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory with assumed strains, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10 (3) 523-547.
- [240] Spilker, R.,(1982), Hybrid-stress eight-node elements for thin and thick multilayer laminated plates, *International journal for numerical methods in engineering*, 18 (6) 801-828.
- [241] Fazio, P., K. Gowri, and K. Ha,(1987), Rectangular hybrid elements for the analysis of sandwich plate structures, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 14 (4) 455-460.
- [242] Wu, C.-P. and C.-C. Lin,(1993), Analysis of sandwich plates using a mixed finite element, *Composite Structures*, 25 (1) 397-405.
- [243] Lee, L. and Y. Fan,(1996), Bending and vibration analysis of composite sandwich plates, *Computers & Structures*, 60 (1) 103-112.
- [244] Oskooei, S. and J. Hansen,(2000), Higher-order finite element for sandwich plates, *AIAA journal*, 38 (3) 525-533.
- [245] Ramtekkar, G., Y. Desai, and A. Shah,(2002), Mixed finite-element model for thick composite laminated plates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 9 (2) 133-156.
- [246] Ramtekkar, G., Y. Desai, and A. Shah,(2003), Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate, *Computers & Structures*, 81 (22) 2183-2198.
- [247] Demiray, S., W. Becker, and J. Hohe,(2004), A triangular v. Kármán type finite element for sandwich plates with transversely compressible core, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193 (23) 2239-2260.
- [248] Demiray, S., W. Becker, and J. Hohe, A Triangular Finite Element for Sandwich Plates Accounting for Transverse Core Compressibility, *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*, 2005, Springer. p. 301-310.
- [249] Linke, M., W. Wohlers, and H.-G. Reimerdes,(2007), Finite element for the static and stability analysis of sandwich plates, *Journal of sandwich structures and materials*, 9 (2) 123-142.

- [250] Ramesh, S.S., Wang, CM, Reddy, JN, Ang, KK, (2009), A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates, *Composite Structures*, 91 (3) 337-357.
- [251] Četković, M. and D. Vuksanović,(2009), Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model, *Composite structures*, 88 (2) 219-227.
- [252] Darilmaz, K.,(2012), Analysis of sandwich plates: A three-dimensional assumed stress hybrid finite element, *Journal of sandwich structures and materials*, 14 (4) 487-501.
- [253] Darilmaz, K.,(2005), A hybrid 8-node hexahedral element for static and free vibration analysis, *Structural Engineering and Mechanics*, 21 (5) 571-590.
- [254] Di Sciuva, M.,(1993), A general quadrilateral multilayered plate element with continuous interlaminar stresses, *Computers & structures*, 47 (1) 91-105.
- [255] Di Sciuva, M.,(1995), A third-order triangular multilayered plate finite element with continuous interlaminar stresses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (1) 1-26.
- [256] Carrera, E.,(1996), C0 Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 (11) 1797-1820.
- [257] Carrera, E.,(1998), A refined multilayered finite-element model applied to linear and non-linear analysis of sandwich plates, *Composites Science and Technology*, 58 (10) 1553-1569.
- [258] Averill, R. and Y.C. Yip,(1996), Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams, *Computers & structures*, 59 (3) 529-546.
- [259] Cho, Y.-B. and R.C. Averill,(1997), An improved theory and finite-element model for laminated composite and sandwich beams using first-order zig-zag sublaminar approximations, *Composite Structures*, 37 (3) 281-298.
- [260] Chakrabarti, A. and A.H. Sheikh,(2004), A new triangular element to model interlaminar shear stress continuous plate theory, *International journal for numerical methods in engineering*, 60 (7) 1237-1257.
- [261] Singh, S.K., Chakrabarti, A., Bera, P. and Sony, J. S. D., (2011), An efficient C0 FE model for the analysis of composites and sandwich laminates with general layup, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8 (2) 197-212.
- [262] Chalak, H.D., Chakrabarti, A., Iqbal, M. A. and Sheikh, H, A., (2012), An improved C0 FE model for the analysis of laminated sandwich plate with soft core, *Finite Elem. Anal. Des.*, 56 20-31.

- [263] Rao, G.V., J. Venkataramana, and I. Raju,(1974), A high precision triangular plate bending element for the analysis of thick plates, *Nuclear Engineering and Design*, 30 (3) 408-412.
- [264] Yuan, F.G. and R.E. Miller,(1989), A cubic triangular finite element for flat plates with shear, *International journal for numerical methods in engineering*, 28 (1) 109-126.
- [265] Kant, T., Gupta, Avani B., Pendhari, S. S., Desai, Yogesh M.,(2008), Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates, *Composite Structures*, 83 (1) 13-24.
- [266] Kulkarni, S. and S. Kapuria,(2007), A new discrete Kirchhoff quadrilateral element based on the third-order theory for composite plates, *Computational Mechanics*, 39 (3) 237-246.
- [267] Meftah, K., Modélisation numérique des solides par éléments finis volumiques basés sur le concept SFR (Space Fiber Rotation). Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider–Biskra, 2013.
- [268] Belinha, J. and L.M.J.S. Dinis,(2006), Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method, *Computers & structures*, 84 (22–23) 1547-1559.
- [269] Ghosh, A. and S. Dey,(1992), A simple finite element for the analysis of laminated plates, *Computers & Structures*, 44 (3) 585-596.
- [270] Xiao, J., et al.,(2008), Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method, *Composites Part B: Engineering*, 39 (2) 414-427.
- [271] Pagano, N.J. and H.J. Hatfield,(1972), Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites, *AIAA Journal*, 10 (7) 931-933.
- [272] Folie, G.,(1970), Bending of clamped orthotropic sandwich plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 96 (3) 243-265.
- [273] Kanematsu, H.H., Y. Hirano, and H. Iyama,(1988), Bending and vibration of CFRP-faced rectangular sandwich plates, *Composite Structures*, 10 (2) 145-163.
- [274] Meunier, M. and R. Shenoi,(1999), Free vibration analysis of composite sandwich plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 213 (7) 715-727.
- [275] Tati, A., Analyse du flambage des plaques stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider de Biskra, 2007, 144 pp.
- [276] Ergatoudis, I., B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz,(1968), Curved, isoparametric, “quadrilateral” elements for finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 4 (1) 31-42.

- [277] Nayak, A., S. Moy, and R. Shenoi,(2002), Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory, *Composites Part B: Engineering*, 33 (7) 505-519.
- [278] Lee, S.,(2004), Free vibration analysis of plates by using a four-node finite element formulated with assumed natural transverse shear strain, *Journal of sound and vibration*, 278 (3) 657-684.
- [279] Kabir, H.R.H.,(1995), A shear-locking free robust isoparametric three-node triangular finite element for moderately-thick and thin arbitrarily laminated plates, *Computers & Structures*, 57 (4) 589-597.
- [280] Chalak, H.D., et al.,(2014), C0 FE model based on HOZT for the analysis of laminated soft core skew sandwich plates: Bending and vibration, *Applied Mathematical Modelling*, 38 (4) 1211-1223.
- [281] Dey, P., A. Sheikh, and D. Sengupta,(2014), A new element for the analysis of composite plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, 82 62-71.
- [282] Yu, Y.-Y.,(1960), Flexural vibrations of elastic sandwich plates, *Journal of Aerospace Sciences*, (27) 272–282.
- [283] Yu, Y.-Y.,(1960), Simplified Vibration Analysis of Elastic Sandwich Plates, *Journal of the Aerospace Sciences*, 27 (12) 894-900.
- [284] Srinivas, S. and A.K. Rao,(1970), Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 6 (11) 1463-1481.
- [285] Chan, H.C. and Y.K. Cheung,(1972), Static and dynamic analysis of multi-layered sandwich plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 14 (6) 399-406.
- [286] Noor, A.K.,(1973), Free vibrations of multilayered composite plates, *AIAA Journal*, 11 (7) 1038-1039.
- [287] Ibrahim, I.M., M.N.F. Rizk, and A. Farah,(1981), Dynamic analysis of unbalanced anisotropic sandwich plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107 (2) 405-418.
- [288] Reddy, J.N. and T. Kuppasamy,(1984), Natural vibrations of laminated anisotropic plates, *Journal of sound and vibration*, 94 (1) 63-69.
- [289] Wang, C., et al.,(2000), Free vibration of skew sandwich plates with laminated facings, *Journal of sound and vibration*, 235 (2) 317-340.
- [290] Kant, T. and K. Swaminathan,(2001), Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory, *Composite Structures*, 53 (1) 73-85.

- [291] Jam, J.E., B. Eftari, and S.H. Taghavian,(2010), A new improved high-order theory for analysis of free vibration of sandwich panels, *Polymer Composites*, 31 (12) 2042-2048.
- [292] Khare, R.K., A.K. Garg, and T. Kant,(2005), Free vibration of sandwich laminates with two higher-order shear deformable facet shell element models, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 7 (3) 221-244.
- [293] Garg, A.K., R.K. Khare, and T. Kant,(2006), Free vibration of skew fiber-reinforced composite and sandwich laminates using a shear deformable finite element model, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 8 (1) 33-53.
- [294] Nabarrete, A., S.F. M. De Almeida, and J.S. Hansen,(2003), Sandwich-plate vibration analysis: three-layer quasi-three-dimensional finite element model, *AIAA Journal*, 41 (8) 1547-1555.
- [295] Roque, C., A. Ferreira, and R. Jorge,(2006), Free vibration analysis of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 8 (6) 497-515.
- [296] Zhen, W., C. Wanji, and R. Xiaohui,(2010), An accurate higher-order theory and C0 finite element for free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 92 (6) 1299-1307.
- [297] Elmalich, D. and O. Rabinovitch,(2012), A high-order finite element for dynamic analysis of soft-core sandwich plates, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 14 (5) 525-555.
- [298] Chakrabarti, A. and A.H. Sheikh,(2004), Vibration of laminate-faced sandwich plate by a new refined element, *Journal of Aerospace Engineering*, 17 (3) 123-134.
- [299] Chakrabarti, A. and A. Sheikh. A new triangular element based on a layer wise zigzag theory for the analysis of composite panels having sandwich construction. in *Proceedings of the International Conference on Ship and Ocean Technology*. 2002.
- [300] Kulkarni, S. and S. Kapuria,(2008), Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory, *Computational Mechanics*, 42 (6) 803-824.
- [301] Batoz, J.L. and M.B. Tahar,(1982), Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 (11) 1655-1677.
- [302] Jeyachandrabose, C., J. Kirkhope, and L. Meekisho,(1987), An improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin-plate bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (3) 635-654.
- [303] Chalak, H.D., et al.,(2013), Free vibration analysis of laminated soft core sandwich plates, *Journal of Vibration and Acoustics*, 135 (1) 011013.

- [304] Sahoo, R. and B. Singh,(2014), A new trigonometric zigzag theory for buckling and free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 117 316-332.
- [305] Ferreira, A.J., *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Vol. 157. 2008: Springer.
- [306] Marjanović, M. and D. Vuksanović,(2014), Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations, *Composite Structures*, 108 9-20.
- [307] Vuksanović, D.,(2000), Linear analysis of laminated composite plates using single layer higher-order discrete models, *Composite Structures*, 48 (1–3) 205-211.
- [308] Owen, D.R.J. and Z.H. Li,(1987), A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods—II. Vibration and stability, *Computers & Structures*, 26 (6) 915-923.
- [309] Khandelwal, R.P., A. Chakrabarti, and P. Bhargava,(2013), Vibration and buckling analysis of laminated sandwich plate having soft core, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13 (08).
- [310] Rao, M., et al.,(2004), Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates, *Journal of Engineering Mechanics*, 130 (11) 1268-1278.
- [311] Kant, T. and K. Swaminathan,(2001), free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories, *Journal of sound and vibration*, 241 (2) 319-327.
- [312] Rao, M.K. and Y.M. Desai,(2004), Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory, *Composite Structures*, 63 (3–4) 361-373.
- [313] Wang, S.,(1997), Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory, *Computers & Structures*, 63 (3) 525-538.
- [314] Malekzadeh, K. and A. Sayyidmousavi,(2009), Free vibration analysis of sandwich plates with a uniformly distributed attached mass, flexible core and different boundary conditions, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 12(6) 709–732.