



جامعة بiskra

Université Mohamed Khieder – Biskra

Faculté des Sciences et de la technologie

Département : Génie Mécanique

Filière : Génie mécanique

Option : Transport et Distribution des Hydrocarbures

Réf :

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

Thème

Etude dynamique de l'écoulement laminaire
dans un élargissement brusque

Présenté par :

M^{lle} : TRAKA Fatiha

Proposé et dirigé par :

Pr : BRIMA Abdelhafid

Soutenue le 04 Juin 2017

Devant le jury composé de :

LABED Adnane

M.C.A

président

Univ, Biskra

MAHBOUB Chawki

M.C.B

Examineur

Univ. Biskra

BRIMA Abdelhafid

professeur

Encadreur

Univ. Biskra



Remerciements



Remerciements

*Avant tout, je dois remercier dieu le tout puissant qui m'a
Donné la force pour achever ce travail.*

*Le grand merci à mon encadreur Pr. Brima Abdelhafid
Pour son aide et ses orientations précieuses.*

*Je tiens également à remercier les membres du jury Dr.Labed Adnane
et Dr. Mahboub Chawki pour l'honneur qu'ils m'ont
accordé en acceptant de juger mon travail.*

*Je remercie aussi l'ensemble des enseignants du département de
Génie Mécanique , qui à contribué à ma formation.*



Dédicace



DEDICACE

Je dédie ce présent mémoire

A mes chers parents qui ont toujours veillés sur moi,

*A mes sœurs Hafida , Mebarqa , Zoulikha , Wahiba et Nour elhouda et
mes frères Sahbi , Saaide , Boubaker et Ahmed.*

A toute ma famille Traqa

∫

*A tous mes amis : Hamza , Fouzi, Mohmmmed, Najwa , Khawla
, Dalila, Fatima ,*

tous ceux qui me sont chers.

LISTE DES FIGURES

FigureI.1	Variation de la longueur de recolle ment en fonction de Re	5
FigureI.2	Écoulement dans une surface libre.....	7
FigureI.3	Les formes typiques des divers hémogrammes des fluides homogènes..... .gauche: Expérience de Couette ; droite: Schématisation dans le plan de l'expérience de Couette.....	8 11
FigureI.4	Écoulement dans un tube de Poiseuille.....	12
FigureI.5	Evolution du profil des vitesses dans la zone d'entrée d'une conduite cylindrique, x/R est la distance relative des sections considérées	12
FigureI.6	Écoulement permanent non établi.....	13
FigureI.7	Écoulement permanent établi	13
FigureI.8	Profil de vitesse radiale dans un écoulement laminaire.....	14
FigureI.9	Profil de vitesse radiale dans un écoulement turbulent.....	14
FigureI.10	Elargissement brusque.....	16
FigureI.11	Rétrécissement brusque.....	17
FigureI.12	Différentes sections d'entrée de conduits.....	17
FigureI.13	Écoulements décollés dans les conduites fortement divergentes.....	17
Figure I.14	(a)décollement symétrique (b) décollement asymétrique	
FigureI.15	Diffuseur conique.....	18
FigureI.16	Elargissement et rétrécissement dans une conduite.....	18
Figure I.17	Evolution des lignes de courant dans un coude circulaire.....	19
FigureIII.1	Représentation du problème sous forme de maille.....	28
FigureIII.2	Domaine de calcul et conditions aux limites.....	33
FigureIII.3	Domaine d'étude discrétisée.....	34
FigureIV.1	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=3)$	43
FigureIV.2	Contours de fonction de courant pour $Re=1800,2000, 2400$, à $(a=3)$	44
FigureIV.3	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=2)$	45
FigureIV.4	Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000,2400$, à $(a=2)$	46
FigureIV.5	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=1.5)$	47
FigureIV.6	Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000, 2400$, à $(a=1,5)$	48
FigureIV.7	Contours de fonction de courant pour différents coefficients (a) $a=3,a=2,a=1,5$, pour ($Re=1000$)	49
FigureIV.8	Représentation de la longueur de la bulle de recirculation pour les différents de nombres Re Cas de $(a=3)$	50
FigureIV.9	Représentation la longueur de la bulle de recirculation pour les différents de nombres Re Cas de $(a=2)$	50
FiguiV.10	Représentation la longueur de la bulle de recirculation pour les différents de nombres Re Cas de $(a=1,5)$	51
FiguiV.11	Représentation la longueur de la bulle de recirculation pour les différentes valeurs du coefficient (a) , cas de $Re =1000$.	52

LISTE DES FIGURE

Figure I.1	Variation de la longueur de recollement en fonction de Re	5
Figure I.2	Écoulement dans une surface libre.....	7
Figure I.3	Les formes typiques des divers hémogrammes des fluides homogènes.. gauche: Expérience de Couette ; droite: Schématisation dans le plan de	8
Figure I.4	l'expérience de Couette.....	11
Figure I.5	Écoulement dans un tube de Poiseuille.....	12
Figure I.6	Evolution du profil des vitesses dans la zone d'entrée d'une conduite .. cylindrique , x/R est la distance relative des sections considérées	12
Figure I.7	Écoulement permanent non établi.....	13
Figure I.8	Écoulement permanent établi	13
Figure I.9	Profil de vitesse radiale dans un écoulement laminaire.....	14
Figure I.10	Profil de vitesse radiale dans un écoulement turbulent.....	14
Figure I.11	Elargissement brusque.....	16
Figure I.12	Rétrécissement brusque.....	17
Figure I.13	Différentes sections d'entrée de conduits.....	17
Figure I.14	Écoulements décollés dans les conduites fortement divergents (a)..... décollement symétrique (b) décollement asymétrique	17
Figure I.15	Diffuseur conique.....	18
Figure I.16	Elargissement et rétrécissement dans une conduite.....	18
Figure I.17	Evolution des lignes de courant dans un coude circulaire.....	19
Figure III.1	Domaine physique de l'écoulement.....	30
Figure III.2	Géométrie du problème étudié.....	31
Figure III.3	Profil isolé 2D.....	32
Figure III.4	Grille (4661) nœuds.....	32
Figure III.5	Représentation du problème sous forme de maille.....	34
Figure III.6	Domaine de calcul et conditions aux limites.....	39
Figure III.7	Domaine d'étude.....	39
Figure IV.1	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=3)$	49
Figure IV.2	Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000, 2400$, à $(a=3)$	50
Figure IV.3	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=2)$	51
Figure IV.4	Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000, 2400$, à $(a=2)$	52
Figure IV.5	Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à $(a=1.5)$...	53
Figure IV.6	Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000, 2400$, à $(a=2)$...	54
Figure IV.7	Contours de fonction de courant pour différents coefficients (a)..... $a=3, a=2, a=1.5$, à $(Re=1000)$	55
Figure IV.8	Représenté la longueurs de la bille recirculation pour les différents de.. nombres Re à Cas de $(a=3)$	56
Figure IV.9	Représenté la longueurs de la bille recirculation pour les différents de.. nombres Re à Cas de $(a=2)$	56
Figure IV.10	Représenté la longueurs de la bille recirculation pour les différents de.. nombres Re à Cas de $(a=1.5)$ Figure IV.11.Reprisontation la longueur	57

FigIV.11	de la bulle de recirculation pour les différents valeurs coefficient (a) ,cas de $Re = 1000$.	58
-----------------	---	----

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TEBLEAUX

INTRODUCTION :.....	1
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
<i>Chapitre I: Généralités sur les différentes conduites utilisées dans le domaine d'hydrocarbure</i>	
I-1- Etude des caractéristiques dynamiques.....	5
I- 2-Écoulement interne et externe	6
I-3-Ecoulement dans une conduite	7
I-4-Rappels et définitions.....	7
I-4-1-Le fluide en tant que milieu continu.....	8
I-4-2-Propriétés physiques des fluides.....	8
I-4-3-Fluides Newtoniens et non Newtoniens	9
I-4-4-Conductivité thermique.....	9
I- 5-Types des écoulements.....	9
I-5-1-Ecoulement incompressible.....	9
I-5-2-Ecoulements permanents ou stationnaires.....	10
I-5-3-Ecoulement laminaire ou turbulent: nombre de Reynolds.....	10
I-6-Ecoulement de Couette plan.....	10
I-6-1-Expérience de Couette, viscosité dynamique	10
I-7-Ecoulement de Poiseuille Plan (Expérience de Poiseuille)	11
I-8-Notion d' établissement	12
I-9 -Evaluation des pertes de charge.....	13
I-10- Les pertes de charge linéaires	13
I-10-1- Profil des vitesses dans une section circulaire en charge.....	14
I-10-2- Expression de la perte de charge linéaire	14
I-11- Les pertes de charge singulières.....	15
I-12- Différents conduites avec différentes pertes de charge	16

Chapitre II / Formulation mathématique du problème	
II-1-Mise en Equations.....	21
II-1-1-Equation de continuité.....	21
II-1-1-1-Forme intégrale.....	21
II-1-1-2-Forme différentielle.....	21
II-2-Equation de quantité de mouvement.....	22
II-3- Transformation de l'équation gouvernante	23
II-4-Formulation adimensionnelle	24
II-5-Ecriture adimensionnelle de l'équation gouvernant le problème.....	24
Chapitre III : Résolution du problème	
III-1-Introduction.....	27
III-2-Etapes de la Résolution du problème.....	27
III-3-Définition de la méthode.....	27
III-4-Procédure de résolution.....	27
III-5-Discretisation des équations de mouvement.....	28
III-6-Différences finies.....	30
III-6-1-L'approximation des dérivées (schéma upwind).....	30
III-6-2-Détermination du profil de vitesse axiale.....	31
III-7-Les conditions aux limites.....	33
III-8- Langage choisi pour la résolution.....	36
III-9-Algorithmes de calcul.....	37
Chapitre IV: Résultats et commentaires.....	
IV-Introduction.....	39
IV-2- Analyse des résultats.....	39
IV-3-Effet du nombre de Reynolds	41
IV-4-Effet des caractéristiques géométriques.....	41
IV-5- Effet du profil de vitesse axiale.....	42
CONCLUSION GENERALE	
BIBLIOGRAPHIE	
<i>Annexe</i>	
	53
	54

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre IV :Résultats et commentaires

Tab IV-01	Différentes valeurs de l'erreur(initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds ,à (a=3).....	39
Tab IV-02	Différentes valeurs de l'erreur(initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds. ,à (a=2).....	40
Tab IV-03	Différentes valeurs de l'erreur(initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds ,à (a=1.5).....	40

LISTE DES SYMBOLES

A_1 : Section du canal en aval	m^2
A_2 : Section du canal en amont	m^2
A: entrée du canal adimensionnelle	
a: hauteur du canal sur l'entrée de du canal	
B: hauteur du canal adimensionnelle	
b: longueur du canal sur hauteur du canal	
C: longueur du canal adimensionnelle	
D : Diamètre	m
D_H : Diamètre hydraulique	m
e_f : Perte de charge associée au frottement	
e_s : Exprime l'énergie par unité de masse	
ER : Rapport d'expansion ($ER=H/h$)	
f : Forces massique	N
H: hauteur du canal	m
ΔH : Perte de charge linéaire	m
J : Perte de charge part unité de longueur	
K : Coefficient de perte de charge	
L : Longueur de la conduite	m
m: nombre de nœuds suivant A	
M: nombre de nœuds suivant B	
N: nombre de nœuds suivant C	
P : Pression	Pa
q : Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$

Re : Nombre de Reynolds

g: Accélération de la pesanteur $m.s^{-2}$

ρ : Masse volumique $Kg.m^{-3}$

ν : Viscosité cinématique $m^2 .s^{-1}$

μ : Viscosité dynamique $Kg.(m .s)^{-1}$

U : Vitesse moyenne $m.s^{-1}$

U: Composante adimensionnelle de vitesse suivant x

V: Composante adimensionnelle de vitesse suivant y

x, y : Cordonnées cartésiennes m

ε : Critère de convergence

ψ : Fonction de courant

Ω : Fonction de vortacité

χ_T : Compressibilité à température constante Pa^{-1}

Xr :Abscisse de la longueur de recollement m

ω : Vortacité s^{-1}

INTRODUCTION GENERALE

Historique

Les premières études expérimentales d'écoulements laminaires ont été menées vers 1840 par le médecin physiologiste français Poiseuille à l'occasion de recherches sur le mouvement du sang dans les vaisseaux sanguins. Il fit couler de l'eau dans des tubes de verre capillaires (diamètres de quelques centièmes à quelques dixièmes de millimètres) et déduisit de ses expériences les caractères essentiels des écoulements laminaires. A la même époque, l'allemand Hagen fit des expériences similaires avec des tubes plus gros (quelques millimètres de diamètres) et semble avoir ignoré les travaux de Poiseuille. Il observa que l'écoulement changeait de nature pour des vitesses notables.

En 1883, Reynolds reproduisit de façon systématique ces expériences dans des tubes de 5 à 25 mm de diamètres et colora un filet d'eau. Quand le débit d'eau était faible, l'écoulement se maintenait sans osciller, il était laminaire. Quand le débit augmentait, le filet, d'abord rectiligne, se mettait à osciller et diffusait dans tout le tube à partir d'une certaine distance. Dans la première partie du tube, l'écoulement était laminaire et dans la seconde, il devenait turbulent.

Reynolds mit en évidence l'importance du rapport sans dimension UD/v dans ce changement de régime, qui devint le nombre dit de Reynolds. Il trouva que pour $Re \leq 2000$, l'écoulement était toujours laminaire, tandis qu'au-dessus, il devenait turbulent, plus ou moins facilement selon les circonstances. Si l'on revient aux expériences de Poiseuille, il est clair que celui-ci ne pouvait obtenir dans ses tubes capillaires que des écoulements laminaires [03].

Mise en contexte

Le domaine de mécanique des fluides repose sur les principes de la mécanique des fluides tel que le principe de la conservation de l'énergie (deuxième loi de Newton), la loi la conservation de l'énergie connue comme la 1^{ère} loi de la thermodynamique qui nous aide à déterminer les équations de la dynamique des fluides tout en prenant en compte les conditions qui régissent sur l'écoulement des fluides, qui elles-mêmes considérées comme des variables (pression, température ,viscosité...) qui déterminent les caractéristiques du comportement du fluide.

Il existe ainsi d'autres calculs de la mécanique quantique qui s'intéressent à l'état moléculaire de la matière (atomes et particules), la loi relative qui s'intéresse aux grandes vitesses et la loi de Reynolds qui est considérée comme l'une des bases de la mécanique des fluides.

Le type d'écoulement et la pression sur différents paliers de vitesse peut déterminer par des équations de Navier-Stokes qui sont basées sur un ensemble d'équations différentielles, ces équations peuvent être simplifiées afin d'être plus faciles à résoudre, la résolution de ces équations est basée sur la connaissance des caractéristiques du fluide telles que la viscosité, l'interaction moléculaire et aussi le mode d'écoulement. Elles s'intéressent donc aux caractéristiques et aux conditions d'écoulement du fluide comme la densité, la pression, les températures et la répartition des vitesses qui détermine le régime d'écoulement qui peut être considéré d'après le théorème de Reynolds comme un écoulement turbulent ou laminaire, suivant la valeur trouvée de Reynolds qui dépend de la viscosité du fluide et de sa circulation dans la canalisation ainsi que la densité de ce dernier lors de l'écoulement et qui suivant elle, ce fluide peut être considéré comme étant compressible ou incompressible.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude dynamique d'écoulement laminaire incompressible et bidimensionnel dans un élargissement brusque. Le problème est traité en utilisant le cas réel.

Les équations réduites pour des hypothèses fondées vont être solutionner numériquement afin de décrire le comportement du fluide en écoulement à l'intérieur du domaine d'étude. Ce modèle utilise très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage).

Objectif du sujet

Le but de ce travail est de déterminer la fonction de courant, les caractéristiques physique, les profils des vitesses (u, v), le point de rattachement, les différentes tailles des bulle de recirculation en fonction des caractéristiques géométriques de la conduite et du nombre de Reynolds.

Organisation du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres répartis comme suit:

Le premier chapitre présente des généralités sur les différents écoulements dans le domaine d'hydrocarbure par centre, le deuxième chapitre est dédié à l'exposition du problème physique du point de vue géométrique et la formulation mathématique des équations gouvernantes avec les hypothèses retenues. Le troisième chapitre constitue une résolution numérique du problème présenté dans le deuxième chapitre sous forme d'un système d'équations linéaire par la méthode des différences finis introduisant un "schéma upwind", le procédé itératif est réalisé avec l'algorithme de Gauss-Seidel. Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse des résultats numériques simulées précédemment. Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale qui résume les différents résultats trouvés.



CHAPITRE I

Généralités sur les différentes conduites
utilisées dans le domaine
d'hydrocarbure

I-Généralités sur les différentes conduites utilisées dans le domaine d'hydrocarbure

I- 1-Etude des caractéristiques dynamiques

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement de l'écoulement dans l'élargissement brusque.

Gong et al [01], ont étudié expérimentalement et théoriquement l'influence du nombre de Reynolds et du rapport d'expansion ER sur la longueur de la zone de recirculation caractérisée par l'abscisse X_r du point de recollement, dans un réacteur de CVD (chemical vapor deposition) qui produit les matériaux monolithiques. Ils ont observé qu'il y a une relation linéaire entre la variation du rapport de recollement X_r/D_j ($D_j=2 R_j$ qu'est le diamètre de central du jet) et le nombre de Reynolds, quand ce dernier est supérieur à 20, mais la pente de la courbe (figure I-1) augmente avec l'augmentation de ER. Aussi Ils ont trouvé qu'il y a une relation presque linéaire entre le rapport de recollement X_r/D_j et le rapport d'expansion pour $ER > 4$ et $Re < 100$, et que la pente de cette courbe croît avec le nombre de Reynolds. Ils ont trouvé une relation de corrélation qui détermine la longueur de la zone de recirculation pour un rapport d'expansion plus grand que 2,6. Les résultats de cette corrélation confirment les données expérimentales à $ER=15,3$ et les données théoriques à $ER=2,6$ trouvées dans la littérature.

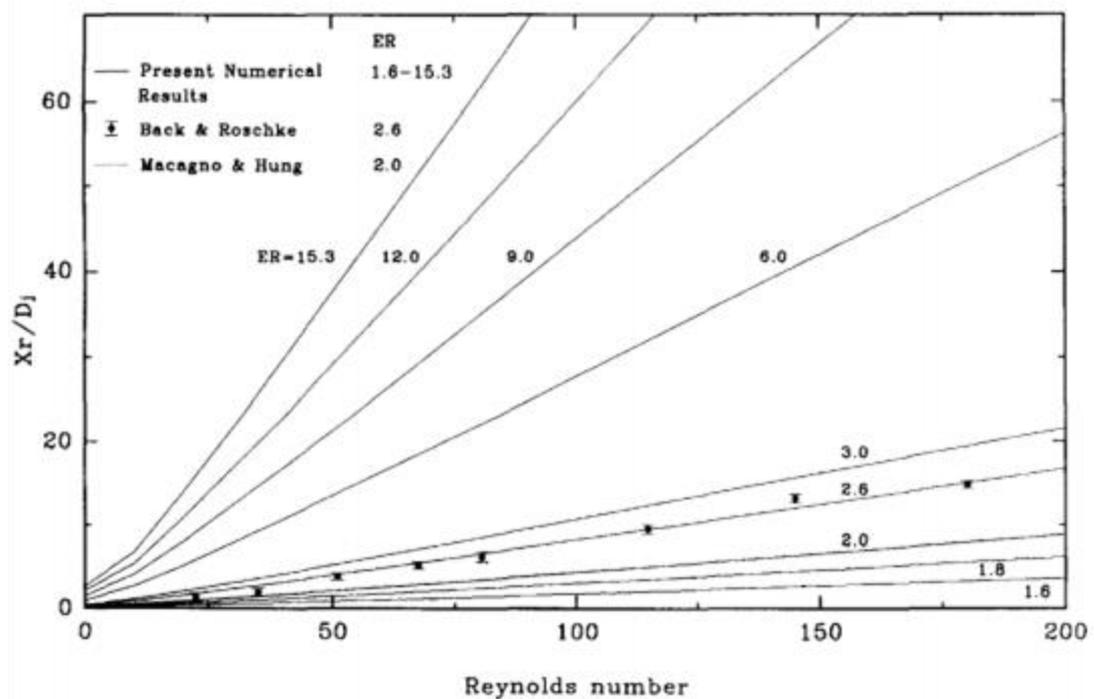


Figure I.1. Variation de la longueur de recollement en fonction de Re [01].

Dans le but de bien comprendre la structure de l'écoulement à l'expansion, Chaing et la [07] ont effectué une recherche numérique sur l'écoulement laminaire instationnaire au-dessus d'une marche descendante pour des nombres de Reynolds compris dans la gamme de 50 jusqu'à 2500, pour voir s'il y a un nombre de Reynolds critique, au-dessus duquel la longueur de la zone de recirculation X_r sur la plaque inférieure du canal diminue. Les résultats ont montré que la longueur de la zone de recirculation croît avec toute la gamme des valeurs testées de nombre de Re.

Pour $Re \leq 400$ il n'y a qu'une zone de séparation sur la plaque inférieure, au-delà de cette valeur ($Re \geq 450$) une nouvelle zone de séparation qui contient du fluide en recirculation se produit le long de la plaque supérieure du canal. Le gradient de pression défavorable cause cette recirculation. Armaly et al [09] ont utilisé un vélocimétrie laser Doppler (L.D.V) pour mesurer la vitesse longitudinale (U) et la vitesse verticale (V), d'un écoulement laminaire tridimensionnel dans un canal avec élargissement brusque de rapport d'expansion ($ER=2$). La composante de la vitesse longitudinale dans la couche de cisaillement de séparation montre un pic dans sa distribution dans le sens de l'envergure (oz) près de la paroi latérale, de ce fait formant comme un écoulement de jet qui provoque un impact sur la plaque inférieure de la conduite.

Ce jet d'écoulement est responsable du minimum qui se développe dans la distribution dans le sens de l'envergure de la ligne Xu sur la plaque inférieure de la conduite (Xu est la ligne qui localise la position où la composante longitudinale du frottement est égale à zéro).

La taille de la zone de recirculation, se développe à côté de la marche descendante et la paroi latérale, elle augmente proportionnellement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Pour un nombre de Reynolds fixe, le maximum de la courbe décrite par la ligne Xu sur la plaque inférieure se produit à la paroi latérale et pas au centre de la conduite. De grandes valeurs de la composante de vitesse w dans les deux directions négative et positive se développent à côté de la plaque inférieure, rendant difficile la définition de l'endroit spécifique de la région de décollement [02].

I-2-Écoulement Interne et Externe

a)-Écoulement externe

Surface libre

La surface libre est l'interface entre l'air et l'eau. La pression y est égale le plus souvent à la pression atmosphérique. Les écoulements dans les canaux naturels (rivière) et artificiels (irrigation, assainissement) sont, dans la plupart des cas, des écoulements à surface libre

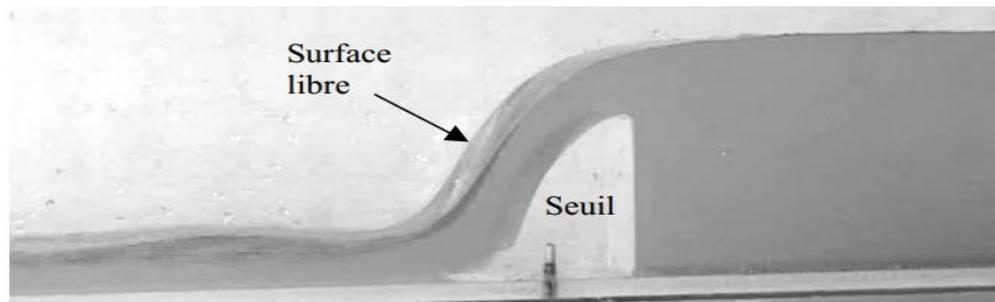


Figure I.2. Écoulement dans une surface libre [05].

b)-Écoulement interne

Les écoulements internes ont pour caractère particulier l'absence de conditions aux limites à l'infini. L'influence des parois se manifeste donc dans toutes les directions, sauf éventuellement aux sections d'entrée et de sortie du fluide, La diversité des géométries possibles entraîne évidemment une grande variété dans la structure des écoulements, mais ce sont le plus souvent des écoulements de type couche limite, comme par exemple dans les canalisations [06].

I-3-Ecoulement dans une conduite

Lorsqu'un fluide s'écoule dans une conduite, il s'exerce une résistance visqueuse qui crée une perte d'énergie. La chute de pression le long de la conduite s'appelle "perte de charge". Pour des conditions aux limites constantes imposées à l'écoulement, Osborne Reynolds a montré en 1883 qu'il existe deux sortes d'écoulements suivant la valeur d'un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds Re tel que: $Re = VD/\nu$ où V , D et ν est la vitesse typique de l'écoulement, la taille caractéristique et la viscosité cinématique du fluide respectivement. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, les lignes de courant sont stationnaires et l'écoulement est dit laminaire. Au contraire lorsque le nombre de Reynolds est grand, les lignes de courant deviennent instationnaires et

l'écoulement est dit turbulent. A ces deux types d'écoulement fondamentalement différents correspondent des pertes de charge différentes [04].

I-4-Rappels et définitions

Nous nous proposons de faire un petit rappel sur la définition d'un milieu continu, les propriétés physiques des fluides et quelques types d'écoulements.

I-4-1- Fluide en tant que milieu continu

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, nous faisons souvent la distinction entre les liquides et les gaz. Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes (les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace), mobiles (la mobilité fait qu'ils n'ont pas de forme propre et qu'ils prennent la forme du récipient qui les contient) [02].

I-4-2-Propriétés physiques des fluides

a-Compressibilité

La compressibilité d'un corps représente la variation de volume du corps en réponse à une variation de pression. Le module de compressibilité à température constante χ_T est défini à partir de la variation relative du volume et de la pression: [02]

$$\chi_T = -\left(\frac{\Delta v}{v}\right) / \Delta p$$

b-Masse volumique

La masse volumique d'un corps est le rapport entre la masse et le volume occupé. Elle est fonction de la température et de la pression. Notée $\rho(T,P)$, elle s'exprime en kg/m^3 [02].

c-Viscosité

La viscosité se définit comme étant la résistance opposée par le fluide à sa mise en mouvement. Nous mettons en évidence plusieurs types de comportement : fluide parfait, fluide newtonien, fluide épaississant et fluide plastique[02].

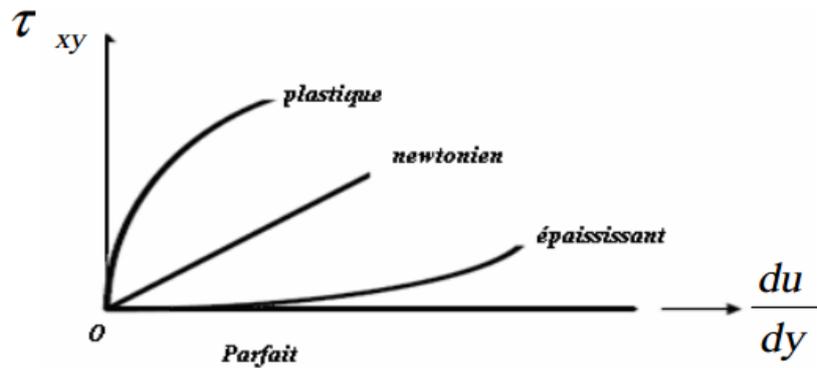


Figure I.3. Formes typiques des divers hémogrammes des fluides homogènes [02].

En un point M(x ,y), la viscosité dynamique se définit comme le rapport du cisaillement dans le plan (x ,y) au gradient de la vitesse [08]

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\frac{du}{dy}}$$

I-4-3-Fluides Newtoniens et non Newtoniens

Par rapport aux faits expérimentaux, nous sommes conduits à considérer deux types de fluides :

- Les fluides Newtoniens sont des fluides qui satisfont à la loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse. C'est le cas des gaz, des vapeurs et des liquides purs de faible masse molaire.
- Les fluides non Newtoniens ce sont les solutions de polymères, les purées, les gels, le sang, la plupart des peintures, etc.

I-4-4-Conductivité thermique

La conductivité thermique λ intervient dans l'analyse des transferts énergétiques dans les systèmes fluides. Ce coefficient joue, pour les transferts de chaleur, un rôle proche de celui de la viscosité pour les transferts de quantité de mouvement [02].

I- 5-Types des écoulements

I-5-1-Ecoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible si la masse volumique du fluide ne varie pas lors de l'écoulement (ou varie faiblement avec la pression ou la température).

La masse volumique du liquide peut être considérée comme uniforme au sein d'un liquide isotherme, même pour des variations de pression élevées. Donc les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles.

Pour les gaz, il faudra établir un critère permettant de savoir si, pour un écoulement ou une région de celui-ci, la variation de masse volumique du fluide est négligeable ou non. L'écoulement est quasiment incompressible si la vitesse du fluide est faible devant la célérité du son.

La célérité du son "C" pour l'air sec vaut 330 m/s à 273K. Donc dans des nombreux cas, l'écoulement de l'air peut être considéré comme incompressible[02].

I-5-2-Ecoulements permanents ou stationnaires

Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ..), ont une valeur constante au cours du temps[02].

I-5-3-Ecoulement laminaire ou turbulent "nombre de Reynolds"

Un écoulement est dit laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. Par contre, l'écoulement est dit turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré un paramètre qui permet de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent, qu'est le nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds, donné par : $Re=UD/v$ [03], où U étant la vitesse moyenne de l'écoulement [02].

si $Re < 2000$ le régime est laminaire;

si $2000 < Re < 3000$ le régime est intermédiaire;

si $Re > 3000$ le régime est turbulent.

I-6-Ecoulement de Couette plan

I-6-1-Expérience de Couette, viscosité dynamique :

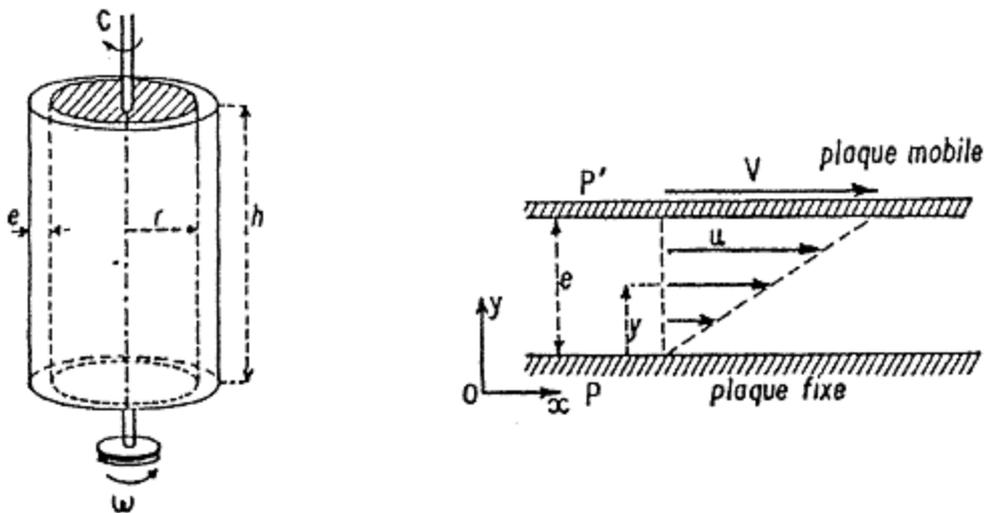
Les propriétés visqueuses des fluides Newtoniens sont caractérisées par les deux paramètres μ et ν , qui sont les viscosités dynamique et cinématique respectivement. Il est possible de mesurer μ à partir de l'expérience dite de Couette. Considérons deux cylindres coaxiaux, de rayons peu différents, dont l'espace intermédiaire est rempli de fluide (figure I.4). Le cylindre extérieure est entraîné avec un moteur avec une vitesse angulaire constante ω . Pour maintenir le cylindre intérieur immobile, il faut

lui appliquer un couple C de sens opposé. A partir de ce concept, il est possible d'exterminer une

mesure absolue de μ avec: $\mu = \frac{C.e}{2\pi r^3 h \omega}$ [03].

où e est la distance entre les deux cylindres, elle est petite devant le rayon moyen r , et h la hauteur du cylindre. La viscosité dynamique μ s'exprime en $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, qui est le poiseuille, Pl "dans le système international". Un poiseuille est la viscosité d'un fluide dans lequel la contrainte est de 1N.m^2 quand le gradient de vitesse est de 1 m.s^{-1} . La viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, où ρ est la masse volumique du fluide.

On peut schématiser l'expérience en considérant un plan mobile P' se déplaçant parallèlement à un plan fixe P parallèle à Ox de surface $S = 2\pi r h$, à la distance e et avec la vitesse $V = \omega r$ (Fig.I.4) [03].



Écoulement de Couette plan

Figure I.4.gauche: Expérience de Couette ; droite: Schématisation dans le plan l'expérience de Couette [03]

I-7-Écoulement de Poiseuille Plan (Expérience de Poiseuille)

Un montage expérimental est représenté sur la figure (I.5). En général, le fluide provient d'un réservoir auquel est relié le tube. Il s'agit ici d'un tube circulaire. A l'entrée du tube, la répartition des vitesses est mal connue, souvent voisine d'une répartition uniforme. Elle se modifie ensuite

progressivement à mesurer que l'on avance dans le tube jusqu'à atteindre une forme parabolique (Fig. I.6). Cette première partie du tube, siège d'une évolution du profil des vitesses, correspond à la longueur d'établissement. Elle s'étend en effet sur une longueur l qui dépend du nombre de Reynolds $Re = UD/\nu$ défini à partir de la vitesse U au point B (profil droit ou bouchon), du diamètre D de la conduite et de la viscosité cinématique ν du fluide. La figure (I.5) présente l'évolution du profil pour $Re = 500$ [03].

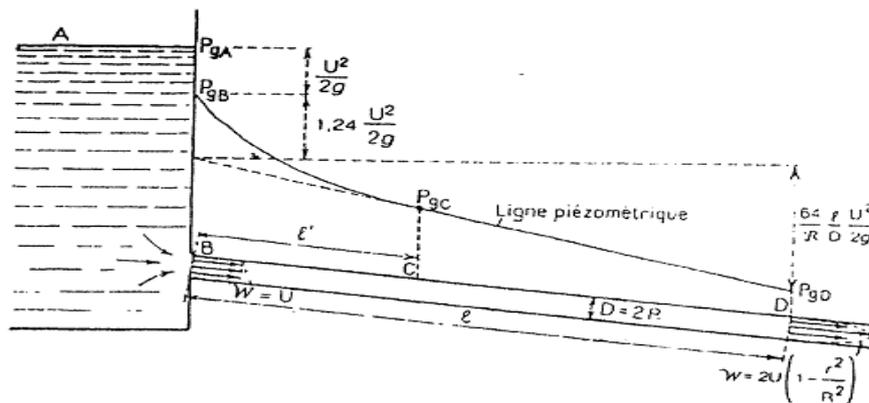


Figure I.5. Ecoulement dans un tube de Poiseuille [03].

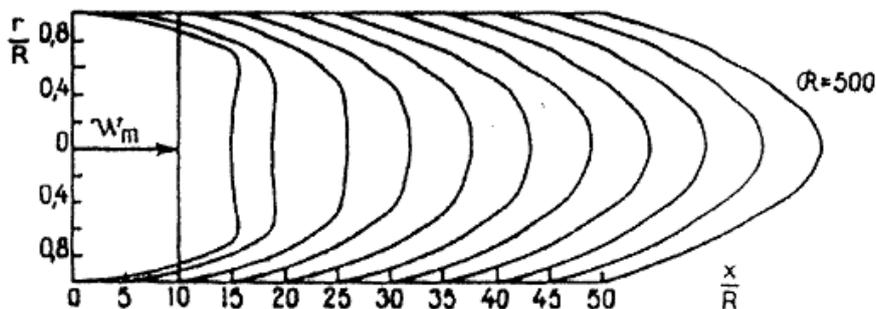


Figure I.6. Evolution du profil des vitesses dans la zone d'entrée d'une conduite cylindrique ; x/R est la distance relative des sections considérées [03].

Les résultats suivants sont admis dans le cas d'une conduite cylindrique [03] :

$$l/D \rightarrow 0,6 \text{ pour } Re \rightarrow 0;$$

$$l/D = 0,06 Re \text{ pour } 100 < Re < 500;$$

$$l/D = 0,04 Re \text{ pour } Re > 1000.$$

I-8-Notion d' établissement

Dans une conduite, un écoulement de fluide incompressible peut être permanent ou non (instationnaire). Quand il est permanent, ses propriétés en un point fixe ne varient pas avec le temps. De plus, il peut évoluer le long de cette conduite jusqu'à ce que le profil de vitesse atteigne une forme définitive, par exemple parabolique dans le cas d'un écoulement de Poiseuille (Fig.I.8). Ses caractéristiques cinématiques n'évoluent plus d'une section droite à l'autre, l'écoulement est alors établi. La distance au cours de laquelle le profil des vitesses (Fig.I.7) évolue correspond à la longueur d'entrée ou d'établissement. La notion d'écoulement permanent est une notion temporelle tandis que la notion d'écoulement établi est une notion spatiale [03].

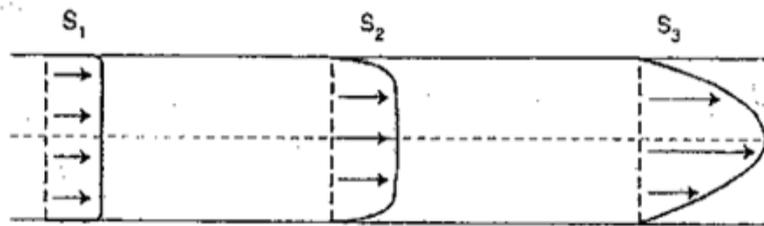


Figure I.7. Ecoulement permanent non établi [03].

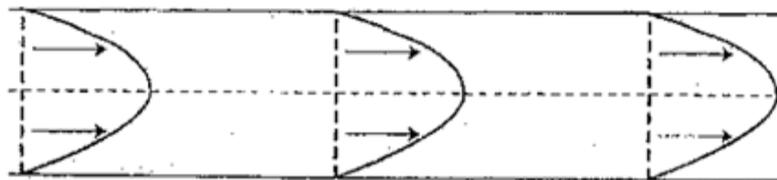


Figure I.8. Ecoulement permanent établi [03].

I-9-Evaluation des pertes de charge

L'écoulement d'un fluide réel dans une conduite représente l'une des applications classiques de l'hydrodynamique théorique et expérimentale. La maîtrise de ces écoulements pour le calcul du fonctionnement des réseaux d'eau potable est indispensable.

On distingue deux types de perte de charge :

- la perte de charge linéaire représentant l'énergie perdue entre les deux points,
- la perte de charge singulière qui intervient lorsque l'écoulement uniforme est localement perturbé [05].

I -10- Pertes de charge linéaires

I -10-1- Profil des vitesses dans une section circulaire en charge

Dans le cas d'un écoulement permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, le profil des vitesses dans une section est dépendant de l'intensité de la vitesse et de la géométrie de l'ouvrage. En effet, nous avons vu que la turbulence apparaît quand la vitesse dépasse un seuil (expérience de Reynolds). Ceci peut être représenté par la figures (I.9) et (I.10).

a)- Conduite cylindrique

Dans le cas des conduites en charge où l'écoulement est laminaire, seules les forces de viscosité interviennent , le profil des vitesses est parabolique et est donné par la figure (I.9).

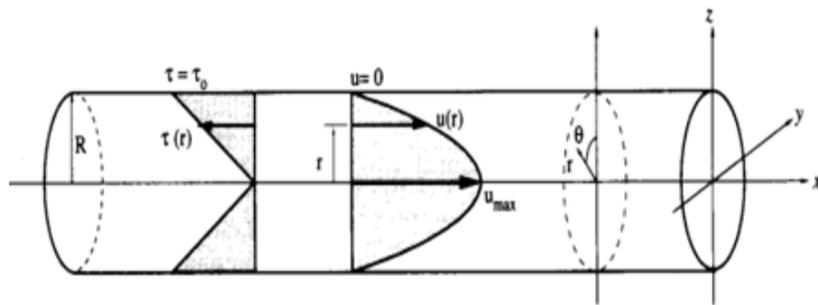


Figure I.9. Profil de vitesse radiale dans un écoulement laminaire[05].

Dans le cas où l'écoulement est turbulent, le profil des vitesses tend à être uniformisé et est du type logarithmique, on remarque sur la figure (.I.10)qui le profil des vitesses diffère de celui représenté sur la figure (I.9) ceci justifie l'augmentation du frottement dans le cas de l'écoulement turbulent .

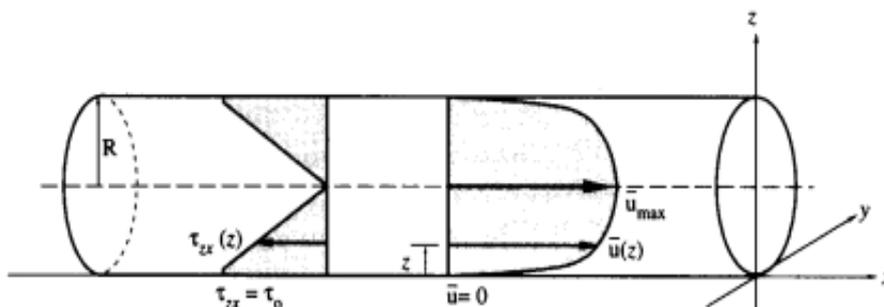


Figure I.10. Profil de vitesse radiale dans un écoulement turbulent[05].

On constate une zone centrale de pleine turbulence où le gradient de vitesse est très faible et le profil est aplati en son centre. La zone de la couche limite est de très faible épaisseur et proche de la paroi. Le gradient de vitesse est très important et les forces de viscosité sont donc très importantes dans cette couche [05].

I-10-2-Expression de la perte de charge linéaire

Compte tenu des difficultés pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, la perte de charge sera traduite par une équation empirique du type [08]:

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} ; \frac{\Delta H}{L} = \lambda \frac{U^2}{2gD}$$

λ : est un coefficient de perte de charge. Il est sans dimension et est fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi .

L: est la longueur de la conduite en [m];

D: le diamètre en [m];

U :la vitesse moyenne en [m/s]

J : la perte de charge part unité de longueur.

a) Régime laminaire $Re < 2000$

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent. La vitesse est très faible et l'état de surface de la paroi n'intervient pas dans le calcul du coefficient λ .

On détermine ainsi [08]: $\lambda = \frac{64}{Re}$

Pour une conduite circulaire, on a [08]: $J = \frac{32 \nu U}{g D^2}$

b)-Régime turbulent $Re > 4000$

Une surface rugueuse implique un état de surface telles que ses irrégularités ont une action directe sur les forces de frottement, c'est-à-dire qu'au-delà d'un certain degré de rugosité, la configuration géométrique de la surface exerce une influence bien déterminée sur l'écoulement. Dans le cas des écoulements en charge appliqués au domaine de l'ingénieur, la rugosité va jouer un rôle très important.

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires. Elles sont caractérisées par une certaine hauteur k (désignée parfois par ε)

Cette rugosité peut être mesurée par rapport au diamètre de la conduite. On parle alors de la

rugosité relative [05] : $\frac{K}{D} = \frac{\varepsilon}{D}$.

I-11- Pertes de charge singulière

La perte de charge singulière, localisée dans une section de la conduite, est provoquée par un changement de direction et d'intensité de la vitesse.

L'écoulement uniforme est perturbé et devient localement un écoulement non uniforme. La turbulence joue un rôle considérable, alors que les forces de viscosité sont négligeables. La perte de charge n'a donc lieu qu'en régime turbulent.

Une telle non-uniformité de la vitesse peut être provoquée par :

- un branchement de section de la conduite;
- un changement de direction (coude);
- un branchement ou raccordement;
- un dispositif de mesure et contrôle de débit, etc...

Comme pour les pertes de charge linéaire, les pertes de charges singulières se traduisent par la

relation [08]: $\Delta H = K \frac{V^2}{2g}$

K est fonction des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds.[05]

I-12- Différentes conduites avec différentes pertes de charge

a)- Élargissement brusque

Un élargissement brusque est représenté sur la figure(I.11) une théorie élémentaire est basée sur un bilan de quantité de mouvement permet d'obtenir l'expression suivante pour la perte de charge [04].

$$e_s = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2}$$

Donc, le coefficient de perte de charge théorique est [04]:

On peut même évaluer la perte de charge connaissant $K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$

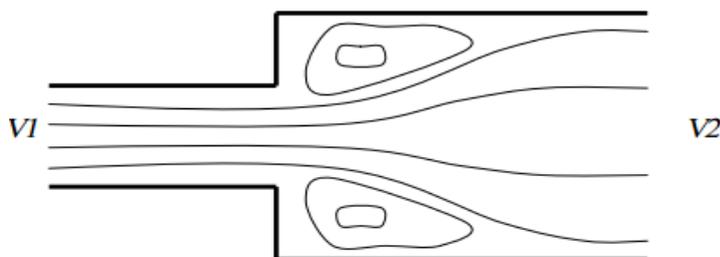


Figure I.11. Elargissement brusque[04].

b) -Rétrécissement brusque

Les pertes de charge sont surtout associées dans ce cas à l'écoulement en aval de la contraction. Le coefficient k associé à ce type d'élément est donné sur la figure (I.12) pour quelques valeurs du rapport A_2/A_1 .

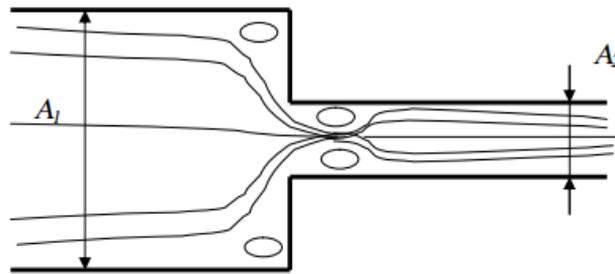


Figure I.12. Rétrécissement brusque [04].

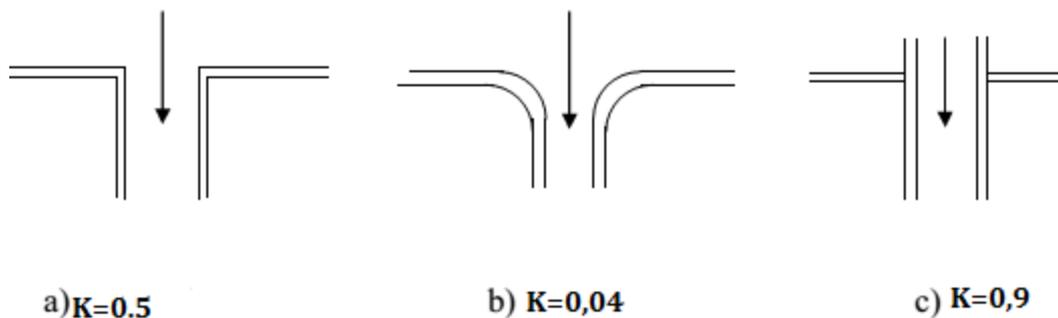


Figure I.13. Différentes sections d'entrée de conduits [05].

K: coefficient de perte de charge (ou coefficient de singularité) ,On appelle singularité tout équipement installé sur une conduite et responsable d'une "variation brusque de vitesse", en norme et/ou en direction. Ce seront donc des changements de section de conduite, des coudes, des embranchements, des vannes, des débitmètres, ... (sauf les pompes). Chaque singularité est caractérisée par une valeur de (k) donnée. Le calcul rigoureux de (k) est le plus souvent impossible, les coefficients sont donc déterminés expérimentalement pour chaque type de singularité. dépend de la géométrie locale, du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi.

c)- Conduites divergentes

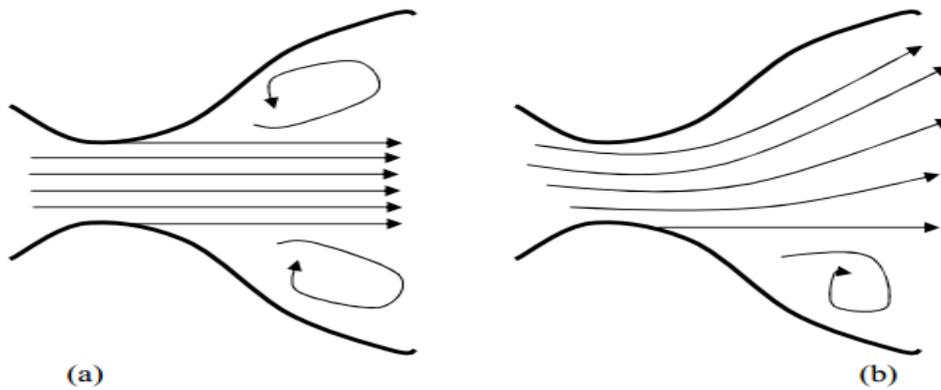


Figure I.14. Ecoulements décollés dans les conduites fortement divergentes (a) décollement symétrique (b) décollement asymétrique[04].

d)-Diffuseur

Si l'élargissement est graduel, l'élément est appelé diffuseur et la perte de charge associée est généralement plus faible, elle peut se mettre sous la forme[04]:

$$e_f + e_s = G \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2}$$

e_s : exprime l'énergie par unité de masse et e_f perte de charge associée au frottement et le coefficient G dépend à la fois de l'angle α du diffuseur et du rapport A_1/A_2 [04].

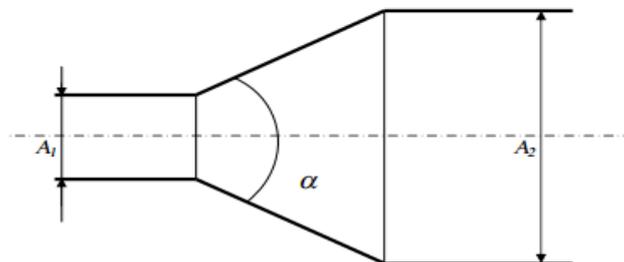


Figure I.15. Diffuseur conique [04].

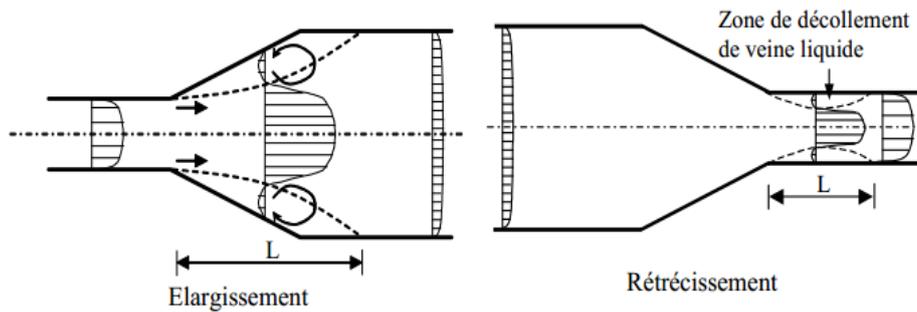


Figure I.16. Elargissement et rétrécissement dans une conduite [05].

La transition entre deux conduites de diamètre différent pour un écoulement en charge provoque une répartition transversale des vitesses longitudinales totalement différentes de celles vues précédemment.

On constate une zone où les veines liquides proches de la paroi se décolle sur une longueur L . Dans cette zone, on observe des recirculations à l'origine de perturbations importantes dans l'écoulement [05].

e- Coude

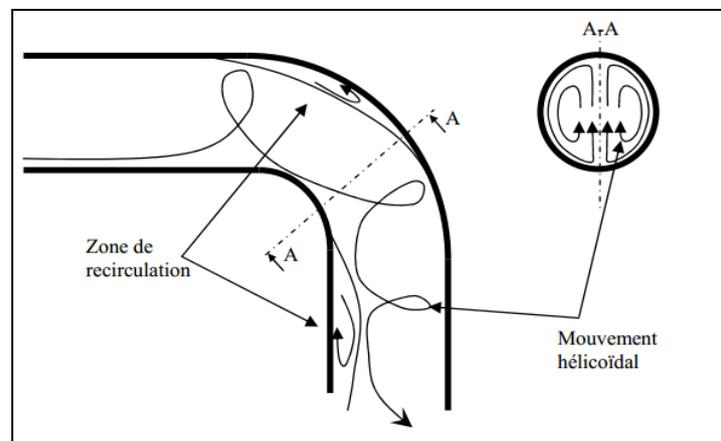


Figure I.17. Evolution des lignes de courant dans un coude circulaire [05].

En raison de la courbure de la conduite, un mouvement hélicoïdal des lignes de courant peut s'établir. La présence de ce mouvement de rotation persiste sur une longueur en aval du coude. Lorsque la courbure est importante, des zones de recirculation peuvent apparaître. Le mécanisme interne de l'écoulement à travers d'un coude n'est pas encore bien connu, malgré le grand nombre de chercheurs qui ont analysé cet élément important [05].



CHAPITRE II

Formulation mathématique du problème

II - Formulation mathématique du problème

II-1-Mise en Equations

L'écoulement considéré dans le présent travail est bidimensionnel, permanent et laminaire d'un fluide Newtonien incompressible. Il est régi par des équations, de continuité et de quantité de mouvement.

II-1-1-Equation de continuité

II-1-1-1-Forme intégrale (écoulement non permanent)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(v)} \rho dv + \int_{(s)} \rho(\vec{q}, \vec{n}) ds = 0 \quad (\text{II-1})$$

II-1-1-2-Forme différentielle : (Appliquons le théorème de Green Ostrogradsky)

Le théorème s'énonce de la manière suivant:

$$\int_{(s)} \rho(\vec{q}, \vec{n}) ds = \int_{(v)} \nabla(\rho \vec{q}) dv \quad (\text{II-2})$$

$$\text{Donc: } \int_{(s)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{q}) \right] dv = 0 \quad (dv \neq 0)$$

Car l'élément différentiel du volume ne peut pas être nul :

$$\text{Donc: } \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{q}) \right] = 0 ; \text{ après développement on aura:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{q} + \vec{q} \nabla \rho = 0$$

remplaçons \vec{q} par $u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ il vient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{u \partial \rho}{\partial x} + \frac{v \partial \rho}{\partial y} + \frac{w \partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-3})$$

$\vec{q}(u, v, w)$ est le vecteur le vitesse de l'écoulement et ρ , la densité du fluide.

Hypothèses: a- Si l'écoulement est permanent (stationnaire) : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

b- Si l'écoulement est bidimensionnel (x, y) : $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

c- Si le fluide est un liquide (incompressible) : $\rho = cste$

L' équation (II-3) se simplifie en : $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ or $\rho \neq 0$ alors elle aura la forme

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

II-2-Equations de quantité de mouvement:

$$\text{Suivant } x : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (\text{II-4})$$

$$\text{Suivant } y : \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (\text{II-5})$$

Hypothèses:

a- l'écoulement est bidimensionnel (x, y): $\frac{\partial}{\partial z} = 0$;

b- l'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;

Après la simplification des équations (II-4) et (II-5) ,on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \end{array} \right.$$

-Est si on ajout d'autres hypothèses telles que :

c- le fluide est incompressible : $\rho = cste$;

d- les forces massiques négligeables.

Donc les équations précédents se simplifient en:

$$\left[\begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

Donc les équations de quantité de mouvement formes finales s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu(\nabla^2 u) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu(\nabla^2 v) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II-6)} \\ \text{(II-7)} \end{array}$$

II-3-Transformation des équations gouvernantes

On remarque que les équations gouvernantes sont de nombre trois avec les trois inconnues (u, v, p). pour réduire le nombre d'inconnues, On doit procéder de la manière suivant:

On a les équations (II-4) et (II-5)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad \text{(II-8)}$$

L'écoulement incompressible $\rho = cste$

$$\text{Donc: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Les équations de **Navier-Stokes** (II-6) et (II-7) peuvent être dérivées par rapport à $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ respectivement pour fournir le système d'équations suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad \text{(II-8)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^3} \right) \quad \text{(II-9)}$$

Tenons compte de l'équation de continuité égalisons entre les équations(II-8) et (II-9), il vient:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad \text{(II-10)}$$

En remplace (La vorticité) : $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ dans l'équation(II-10) on aura

$$\text{Donc: } u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

En introduisant (**Cauchy –Riemann**) $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ dans équation (II-11)

La forme finale du système gouvernant notre étude s'écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (II-12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \end{array} \right. \quad (II-13)$$

II-4-Formulation adimensionnelle

Afin de rendre les équations mathématiques régissant notre problème sous forme adimensionnelle et d'étudier les propriétés de similitude de cet écoulement, il est nécessaire de réécrire toutes les équations et les conditions aux limites en fonction des grandeurs adimensionnelles.

II-5-Ecriture adimensionnelle des équations gouvernant le problème :

On introduit le changement de variable suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \Psi \bar{u} D_H \text{ (}\Psi \text{:Variable de la fonction de courant adimensionnelle)} \\ \omega = \frac{\Omega \bar{u}}{D_H} \text{ (}\Omega \text{:Variable de la fonction de vorticité adimensionnelle)} \\ x = X.D_H \text{ (}X, Y\text{):Cordonnées du vecteur vitesse adimensionnelle)} \\ y = Y.D_H \end{array} \right. \quad (II-14)$$

On a : $\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$

On introduit les variables (II- 14) dans l'équation (II-12)

$$\text{Alors: } \frac{\partial(\Psi \bar{u}.D_H)}{\partial(Y.D_H)} \frac{\partial\left(\frac{\Omega \bar{u}}{D_H}\right)}{\partial(X.D_H)} + \frac{\partial(\Psi \bar{u}D_H)}{\partial(X.D_H)} \frac{\partial\left(\frac{\Omega \bar{u}}{D_H}\right)}{\partial(Y.D_H)} = \nu \left(\frac{\partial^2\left(\frac{\Omega \bar{u}}{D_H}\right)}{\partial(X.D_H)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\Omega \bar{u}}{D_H}\right)}{\partial(Y.D_H)^2} \right) \quad (II-15)$$

Après simplification on obtient :

$$\frac{\bar{u}^2}{D_H^2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right] = \nu \frac{\bar{u}}{D_H^3} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right]$$

Après les hypothèses simplificatrices de l'équation (II-15) différentielle aux dérivées partielles

$$\text{on obtient : } \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right] \frac{1}{\bar{u} D_H} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-16})$$

v

De même en remplace les variables adimensionnelle définies en (II- 14) dans l'équation(II-13)

on aura :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

$$\frac{\partial^2 (\Psi \bar{u} D_H)}{\partial (X D_H)^2} + \frac{\partial^2 (\Psi \bar{u} D_H)}{\partial (Y D_H)^2} = -\frac{\Omega \bar{u}}{D_H} \quad (\text{II-17})$$

Faisons sortir les groupements adimensionnelles alors:

$$\frac{\bar{u} D_H}{D_H^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right] = -\frac{\Omega \bar{u}}{D_H} \quad (\text{II-18})$$

après simplification, l'équation(II-18) différentielle aux dérivées partielles se réduit en:

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right] = -\Omega \quad (\text{II-19})$$

Finalement, le problème gouvernant l'écoulement dans une conduite à élargissement brusque est donne par le système d'équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnel suivant :

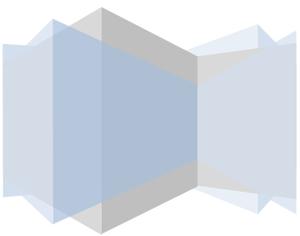
$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-20})$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right] = -\Omega \quad (\text{II-21})$$



CHAPITRE III

Résolution du problème



III- Résolution du problème

III-1-Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution des équations gouvernant le problème de l'écoulement à l'intérieure de la conduite avec un élargissement brusque.

III-2-Etapes de la résolution du problème

- Problème physique continu est d'écrit par un modèle mathématique continue (mis en équations)
- Modélisation mathématique est discrétisation du problème
- Equations discrétisées sont approximées à l'aide de "schéma upwind" numériques appropriées, l'algorithme de résolution est établie
- La programmation est effectuée à l'aide de l'environnement (MATLAB)

III-3-Définition de la méthode (différences finies)

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. voir figure (III-5)

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue.

III-4-Procédure de résolution

Dans ce chapitre, nous décrivons les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de base formulées précédemment dans le chapitre II.

Pour passer d'un problème exact à un problème approché (discret) on peut utiliser le schéma des différences finies le "schéma upwind" pour discrétiser les équations aux dérivées partielles (II-20) et(II-21),cette méthode est résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles en les transformant en un système d'équations algébriques. Les éléments importants de cette méthode sont l'algorithme de résolution des systèmes correspondants à chaque nœud et les valeurs de la fonction cherchée .

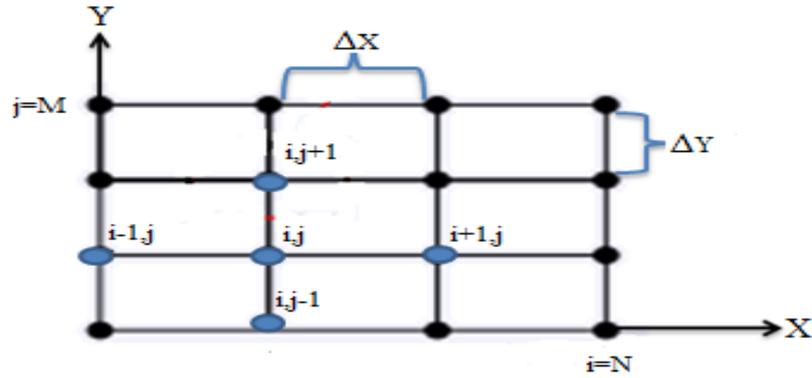


Figure III.1. Représentation du problème sous forme de maille

III-5- Discrétisation des équations de mouvement

Schéma upwind (dérivée première)

La dérivée première peut être approximée au nœud (i,j) par:

Les termes associés à la composante U s'écrivent:

$$U_{i,j} > 0 \quad U_{i,j} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_{i,j} = \left[U_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X} \right) \right] \quad (\text{Différence en arrière}) \quad (\text{III-1})$$

$$U_{i,j} < 0 \quad U_{i,j} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_{i,j} = \left[U_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{\Delta X} \right) \right] \quad (\text{Différence en avant}) \quad (\text{III-2})$$

Les termes associés à la composante verticale V s'écrivent :

$$V_{i,j} > 0 \quad V_{i,j} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right)_{i,j} = \left[V_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y} \right) \right] \quad (\text{Différence en arrière}) \quad (\text{III-3})$$

$$V_{i,j} < 0 \quad V_{i,j} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right)_{i,j} = \left[V_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j}}{\Delta Y} \right) \right] \quad (\text{Différence en avant}) \quad (\text{III-4})$$

Schéma centrée (dérivée seconde)

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \right) = \left[\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^2} \right] \quad (\text{III-5})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) = \left[\frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^2} \right] \quad (\text{III-6})$$

à l'aide de différence centrée on obtient les composantes du vecteur vitesse $U_{i,j}, V_{i,j}$ telles que:

$$U_{i,j} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)_{i,j} = \left[\left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \right) \right] \quad (\text{III-7})$$

$$V_{i,j} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)_{i,j} = \left[- \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta X} \right) \right] \quad (\text{III-8})$$

Remplaçant $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right]_{i,j} = U_{i,j}$ et $\left[- \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right]_{i,j} = V_{i,j}$ dans l'équation auparavant (II-20) écrite sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[U_{i,j} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - V_{i,j} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right] = -\Omega \end{array} \right. \quad (\text{III-9})$$

Par application d'un schéma upwind:

a- L'équation de vorticité s'écrit comme suit:

$$\left[U_{i,j} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - V_{i,j} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] \text{ qui peut s'écrire sous la forme :}$$

$$\left[U_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X} \right) + V_{i,j} \left(\frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y} \right) \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^2} \right] \quad (\text{III-10})$$

Après arrangement on obtient :

$$\Omega_{i,j} \left[\left(\frac{U_{i,j}}{\Delta X} \right) + \left(\frac{V_{i,j}}{\Delta Y} \right) + \frac{2}{\text{Re} \Delta X^2} + \frac{2}{\text{Re} \Delta Y^2} \right] + \Omega_{i-1,j} \left[\frac{U_{i,j}}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta X^2} \right] + \Omega_{i+1,j} \left[\frac{1}{\text{Re} \Delta X^2} \right] + \Omega_{i,j-1} \left[\frac{V_{i,j}}{\Delta Y^2} + \frac{1}{\text{Re} \Delta Y^2} \right] + \Omega_{i,j+1} \left[\frac{1}{\text{Re} \Delta Y^2} \right] \quad (\text{III-11})$$

b- L'équation de la fonction de courant s'écrit comme suit:

$$\text{de l'équation } \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right] = -\Omega$$

$$\text{on obtient } \left[\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta Y^2} \right] = -\Omega_{i,j} \quad (\text{III-12})$$

qui sont simplifiées en:

$$-\Psi_{i,j} \left[\frac{2}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right] + \Psi_{i-1,j} \left[\frac{1}{\Delta X^2} \right] + \Psi_{i+1,j} \left[\frac{1}{\Delta X^2} \right] + \Psi_{i,j-1} \left[\frac{1}{\Delta Y^2} \right] + \Psi_{i,j+1} \left[\frac{1}{\Delta Y^2} \right] = \Omega_{i,j} \quad (\text{III-13})$$

III-6-Différences finies

Après avoir remplacé les expressions discrétisées dans les équations en Ψ et Ω , On remarque que les relations trouvées, sont algébriques, d'où la nécessité de solutionner les systèmes d'équations linéaires dont les inconnues sont bien évidemment (la fonction de courant nodale Ψ est la vorticité Ω), Une fois que les $\Psi_{i,j}$ seront évaluées on déduit facilement les composantes du vecteur vitesse u, v ainsi que les gradients de pression.

III-6-1-Approximation des dérives (schéma upwind)

On obtient l'équation algébrique suivante qui peut représenter n'importe quelle grandeur physique Ω

$$Ao\Omega_{i,j} = Bo\Omega_{i-1,j} + Co\Omega_{i+1,j} + Do\Omega_{i,j-1} + Eo\Omega_{i,j+1} + Fo \quad (\text{III-14})$$

Avec les coefficients Ao, Bo, Co, Do, Eo et Fo sont données par leurs expressions telles que:

$$Ao = \frac{2}{\text{Re } \Delta X^2} + \frac{2}{\text{Re } \Delta Y^2} + \frac{\text{abs}(U_{i,j})}{\Delta X} + \frac{\text{abs}(V_{i,j})}{\Delta Y}$$

$$Bo = \left[\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{\max[U_{i,j}, 0]}{\Delta X} \right]$$

$$Co = \left[\frac{1}{\text{Re } \Delta X^2} + \frac{\max[-U_{i,j}, 0]}{\Delta X} \right]$$

$$Do = \left[\frac{1}{\text{Re } \Delta Y^2} + \frac{\max[V_{i,j}, 0]}{\Delta Y} \right]$$

$$Eo = \left[\frac{1}{\text{Re } \Delta Y^2} + \frac{\max[-V_{i,j}, 0]}{\Delta Y} \right]$$

On obtient l'équation algébrique suivante qui peut représenter n'importe quelle grandeur physique Ψ

$$Ap\Psi_{i,j} = Bp\Psi_{i-1,j} + Cp\Psi_{i+1,j} + Dp\Psi_{i,j-1} + Ep\Psi_{i,j+1} + Fp \quad (\text{III-15})$$

Où les coefficients Ap, Bp, Cp, Dp, Ep et Fp sont donnés par:

$$Ap = \left[\frac{2}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right]$$

$$Bp = \left[\frac{1}{\Delta X^2} \right] \quad Cp = \left[\frac{1}{\Delta X^2} \right]$$

$$Dp = \left[\frac{1}{\Delta Y^2} \right] \quad Ep = \left[\frac{1}{\Delta Y^2} \right] \quad Fp = \Omega_{i,j}$$

Le système d'équations algébriques ci-dessus s'applique seulement pour les zones du maillage non influencées par les conditions aux limites. Il convient donc de déterminer les équations applicables sur les régions voisines du contour délimité par le maillage.

III-6-2-Détermination du profil de vitesse axiale

L'équation de l'écoulement établi est donnée par l'expression: $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \lambda \quad (\text{III-16})$

Après l'intégration de l'équation on obtient : $\frac{du}{dy} = \lambda y + c_1$

Sur l'axe de symétrie, les particules fluides sont libres alors:

$$\text{à } y = 0 ; \quad \frac{du}{dy} = 0 ; \quad c_1 = 0 \quad (\text{à cause de la symétrie})$$

sur la paroi intérieure de la conduite, le phénomène d'adhérence freine les particules fluides et les empêchent de se déplacer.

à $y=H/2$; $u = 0$; $c_2 = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2$ (à cause de phénomène d'adhérence)

on obtient le profil de vitesse suivant:

$$u = \frac{\lambda}{2}y^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{\lambda}{2}\left(y^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right) \quad (\text{III-17})$$

- la vitesse moyenne peut se calculer par :

$$\bar{u} = \frac{1}{S} \int u(y) ds \quad (ds = dy) \quad \text{avec } S=y.l \quad (l: \text{unité de profondeur})$$

$$u = \frac{\lambda}{2}\left(y^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)$$

$$\text{Donc : } \bar{u} = \frac{2}{H} \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{H}{2}} \left(y^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right) dy \quad (\text{III-18})$$

$$\text{Après intégration on aura : } -\bar{u} = \frac{\lambda}{H} \left[\frac{y^3}{3} - \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot y \right]_0^{\frac{H}{2}} \quad (\text{III-19})$$

D'où on tire le coefficient λ tel que:

$$\text{on obtient : } \lambda = -12 \frac{\bar{u}}{H^2} \quad (\text{III-20})$$

On remplace λ dans équation (III-18) on obtient:

$$\frac{u}{\bar{u}} = 6 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{H}\right)^2 \right) \quad (\text{III-21})$$

En faisant recours aux changements de variables, l'expression prendra la forme suivante:

$$U = -6 \left(4Y^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (\text{III-22})$$

Comme la vitesse axiale est définie par : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

$$\text{passons à l'adimensionnalisation de la fonction de courant: } \frac{u}{\bar{u}} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U \quad (\text{III-23})$$

On trouve la fonction de courant Ψ à partir de l'intégration de la vitesse U

$$\Psi = \int 6 \left(\frac{1}{4} - 4Y^2 \right) \partial Y + c \quad (\text{III-24})$$

La ligne de courant à $y=0$, ($Y=0$) est définie par $\Psi = 0$

$$\text{On aura : } \Psi = -8Y^3 + \frac{3}{2}Y \quad (\text{III-25})$$

III-7- conditions aux limites

- 1) à $x=0$; $0 \leq y \leq H/2$; $u = u(y); v=0$
- 2) à $y=y_{\max}$; $0 \leq x \leq L$; $u = v = 0$
- 3) à $y=0$; $0 \leq x \leq L$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $v = 0$
- 4) à $x=L$; $H/2 \leq y \leq y_{\max}$; $v=0$ (au niveau de la sortie l'interpolation)

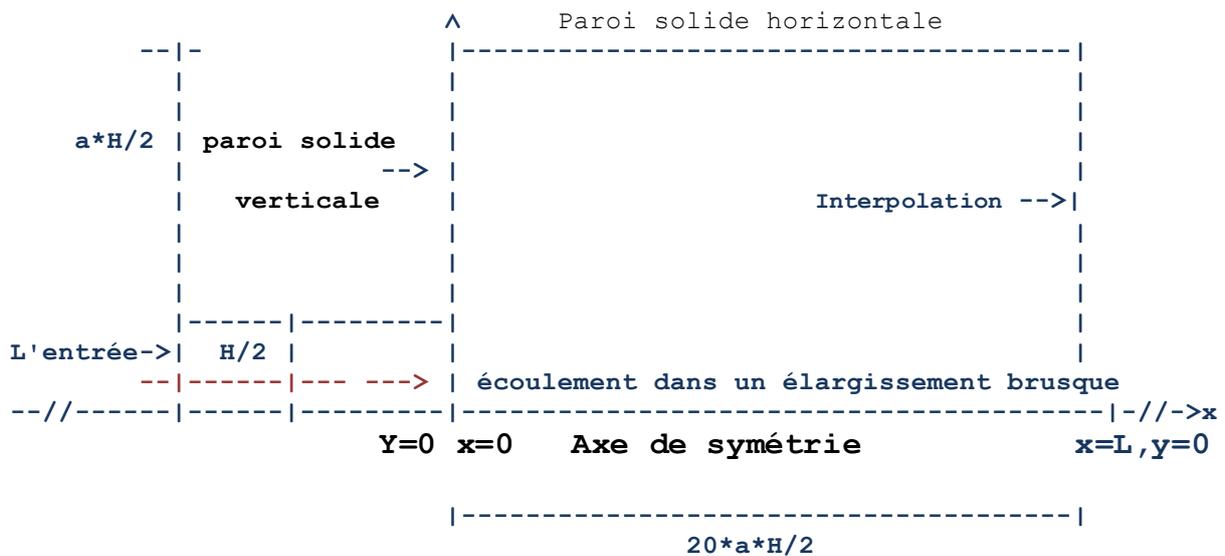


Figure III.2. Domaine de calcul et les conditions aux limites

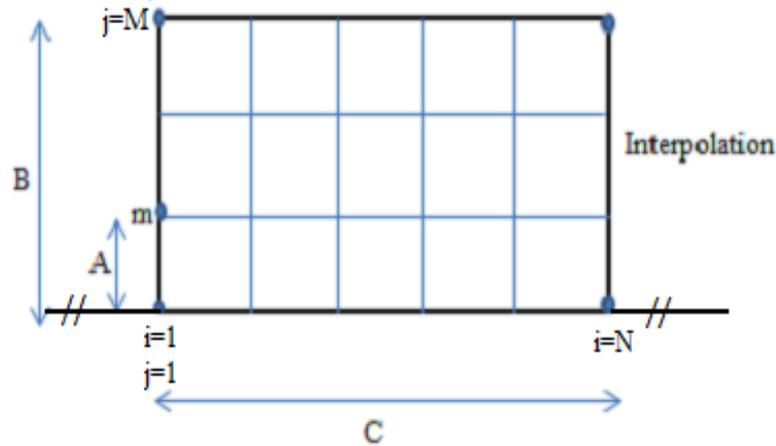


Figure III.3. Domaine d'étude discrétisée

- a=hauteur du canal sur l'entrée du canal
 - b=longueur du canal sur hauteur du canal
 - $A=1/4$: entrée du canal adimensionnelle (invariable)
 - $B=A$. a: hauteur du canal adimensionnelle
 - $C=B$. b: longueur du canal adimensionnelle
- } (représenté sur la figure III.3)

Les conditions aux limites doivent aussi être discrétisées, On utilisera bien sûr les mêmes indices de discrétisation cités précédemment. Les conditions aux limites deviennent donc comme suit:

❖ **Fonction de courant Ψ**

- Axe de symétrie (sur la ligne C) : $\Psi = 0$ pour ($i=2:N$)
- l'entrée (Sur la ligne A) :(à cause du profile de vitesse parabolique)

Donc : $\Psi = -8Y^3 + \frac{3}{2}Y$ pour ($j=1:m$)

- Au niveau de la Paroi solide verticale et la paroi horizontale :

$$\Psi = \frac{1}{4} \text{ pour } [(j=m, M); i=1] \quad [j=M; i=1, N]$$

donc: $U_{i,j} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right]_{i,j}$; $U_{i,j} = 0$ (la vitesse U sur la paroi solide)

donc : $V_{i,j} = -\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right]_{i,j}$; $V_{i,j}=0$ (la vitesse V sur la paroi solide)

❖ **Fonction de vorticité Ω**

Approximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide du développement en série de Taylor

- Sur l'axe de symétrie :

$$\Omega = 0 \text{ pour } (i=1; N) \text{ et } (j=1)$$

- A l'entrée :

$$\Omega = -\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}\right]$$

Les développement en série de Taylor de : $\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right]_{i,j}$ fournirent:

$$\Psi_{i+1j} = \Psi_{i,j} + \Delta X \left[\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right]_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2} \left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right]_{i,j} + O(\Delta X^3) \quad \text{(III-26)}$$

On a : $V_{i,j} = -\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right]_{i,j}$; $V_{i,j}=0$ (  l'entrée)

$$\text{donc: } \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right)_{i,j} = \frac{2}{\Delta X^2} [\Psi_{i+1j} - \Psi_{i,j}] \quad \text{(III-27)}$$

On remplace (III-26) dans l'équation de Ω on aura:

$$\Omega_{i,j} = -\frac{2}{\Delta X^2} [\Psi_{i+1j} - \Psi_{i,j}] + 48Y_j \quad \text{(III-28)}$$

avec (i=1) et (j= 1;m)

- Au niveau de la Paroi solide verticale :

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \text{ (  la paroi solide verticale) } = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}$$

$$\text{donc: } \Omega = -\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right] \quad \text{(III-29)}$$

Donc l'équation: $\Omega_{i,j} = -\frac{2}{\Delta X^2} [\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}]$ Pour (i=1) et (j=m+1; M)

- Au niveau de la Paroi solide horizontale :

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \text{ (à la paroi solide horizontale)}$$

$$\text{donc: } \Omega = -\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}\right] \quad \text{(III-30)}$$

Développement en série de Taylor du terme : $\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}\right]_{i,j}$

$$\Psi_{i,j-1} = \Psi_{i,j} - \Delta Y \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\right]_{i,j} + \frac{\Delta Y^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}\right]_{i,j} + O(\Delta Y^3)$$

$$\text{On a: } U_{i,j} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\right]_{i,j} ; U_{i,j}=0$$

donc l'équation en Ω se discrétise en: $\Omega_{i,j} = -\frac{2}{\Delta Y^2} [\Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j}]$ Pour (i=1; N) et (j= M)

-Les composantes du vecteur vitesse (U,V) peuvent prendre les formes discrétisées suivantes:

$$\text{Pour (i=2:N et j=1:M-1) } U_{i,j} = \left[\left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta Y}\right)\right]$$

$$\text{Pour (i=2:N et j=1:M-1) } V_{i,j} = -\left[\left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta X}\right)\right]$$

III-8-Langage choisi pour la résolution

Nos résultats s'obtient par le langage de programmation dit "MATLAB"

MATLAB« matrix laboratory »est un langage de programmation et est un paquet de programmation spécialement conçu pour une utilisation rapide et facile des calculs scientifiques. Il a littéralement des centaines de fonctions intégrées pour une grande variété de calculs, et de nombreuses boîtes à outils conçues pour des disciplines de recherche spécifiques, y compris des statistiques, une optimisation, une solution des équations différentielles partielles, analyse des données, solution des équations algébriques, calculs des matrices et solutions des systèmes d'équations linéaires...

III-9-Algorithmes de calcul

1-Lecture des paramètres adimensionnelle géométriques de la configuration choisie (a, b, A, B, C).

2- Lecture des paramètres nécessaires pour le maillage du domaine (m, N,M ,X,Y, dX, dY, Re).

3-Initialisation des paramètres adimensionnelle (PSI,OMEGA).

4-Etant donné les conditions aux limites $PSI = 0, OMEGA = 0$; pour (M,N)

- sur la ligne A ; pour (j=1:m)

- sur la ligne C ; pour (i=2:N)

- sur la ligne B ; pour (j=m+1:M)

- La sortie (interpolation) ; pour (i :N),(j=1,M-1)

5- Les expressions de la fonction de courant et la fonction de la vorticité sont:

- PSI ; pour(j=2:M-1) ,(i=2:N-1)

- OMEGA ; pour(j=2:M-1) ,(i=2:N-1)

6-Test de convergence $er > 1e^{-5}$

7-Impression des résultats sous formes des graphes et des courbes.

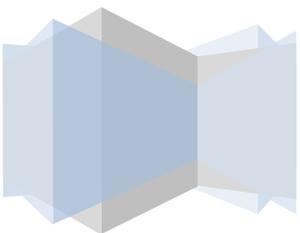
▪ Remarque :

Le programme de calcul se trouve au niveau de l'annexe.



CHAPITRE IV

Résultats et commentaires



IV- Résultats et commentaires

IV-1-Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'influence des coefficients géométriques et du nombre de Reynolds sur le comportement dynamique du fluide à l'intérieur de la conduite avec singularité. Après exécution du programme écrit en MATLAB afin de résoudre le problème de l'écoulement du fluide à l'intérieur d'une conduite avec élargissement brusque, nous avons trouvés les valeurs nodales des fonctions de courant à l'intérieure du domaine d'étude choisi. Ces valeurs sont représentées sur les différentes figures pour expliquer le comportement du fluide en écoulement.

IV-2- Analyse des résultats

Les tableaux (IV.1, IV.2 et IV.3) regroupent les différentes valeurs du nombre de Reynolds, utilisées associées aux valeurs de l'erreur finale pour les cas de $a=3$, $a=2$ et $a=1,5$ respectivement,

Tableau IV.1. Différentes valeurs de l'erreur (initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds, pour($a=3$).

er_{ini}	er_{fin}	Re	it
$er > 10^{-5}$	$7,6187 \cdot 10^{-6}$	200	2190
$er > 10^{-5}$	$9,1120 \cdot 10^{-6}$	500	3617
$er > 10^{-5}$	$7,8624 \cdot 10^{-6}$	1000	3235
$er > 10^{-5}$	$9,6709 \cdot 10^{-6}$	1400	11811
$er > 10^{-4}$	$7,9794 \cdot 10^{-5}$	1800	1344
$er > 10^{-4}$	$8,8724 \cdot 10^{-5}$	2000	1377
$er > 10^{-4}$	$4,9391 \cdot 10^{-5}$	2400	1329

Tableau IV.2. Différentes valeurs de l'erreur(initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds, pour (a=2)

er_{ini}	er_{fin}	Re	It
$er > 10^{-5}$	$5,0619.10^{-6}$	200	407
$er > 10^{-5}$	$9,8920.10^{-6}$	500	446
$er > 10^{-5}$	$9,9478.10^{-6}$	1000	766
$er > 10^{-5}$	$9,1467.10^{-6}$	1400	767
$er > 10^{-5}$	$8,3584.10^{-6}$	1800	695
$er > 10^{-5}$	$5,500.10^{-6}$	2000	563
$er > 10^{-5}$	$8,5361.10^{-6}$	2400	480

Tableau IV.3. Différentes valeurs de l'erreur(initiale et finale) et nombre d'itérations en fonction de la variation du nombre de Reynolds, pour(a=1.5)

er_{ini}	er_{fin}	Re	it
$er > 10^{-5}$	$9,2960.10^{-6}$	200	205
$er > 10^{-5}$	$9,9920.10^{-6}$	500	184
$er > 10^{-5}$	$9,6256.10^{-6}$	1000	198
$er > 10^{-5}$	$9,9167.10^{-6}$	1400	199
$er > 10^{-5}$	$8,5970.10^{-6}$	1800	206
$er > 10^{-5}$	$7,0376.10^{-6}$	2000	206
$er > 10^{-5}$	$6,3797.10^{-6}$	2400	208

Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence dépend des valeurs des paramètres de l'écoulement comme le nombre de Reynolds et du paramètre numérique prédit, représenté par l'erreur (er). On présente dans le tableau IV.1, quelques valeurs des erreurs finales et des nombres d'itérations correspondantes permettant d'assurer la convergence.

Nous avons remarqué que, si on augmente le nombre de Reynolds plus de 1400, le programme diverge, pour cela, on a changé l'erreur initiale afin de trouver la solution avec un minimum de nombre d'itérations. A titre d'exemple, la valeur de l'erreur estimée est de l'ordre de 10^{-4} s'avère valable pour assurer la convergence dans l'intervalle ($1400 \leq Re \leq 2400$).

Le passage d'un fluide à travers un élargissement brusque conduit à la formation d'une zone tourbillonnaire, localisée au niveau du coin supérieur, formée par le changement des caractéristiques géométriques de la conduite qui induit une séparation de l'écoulement à l'entrée de l'élargissement.

Les résultats obtenus par notre étude montrent les variations de la fonction de courant en fonction des paramètres géométriques (a) et du nombre Reynolds. Les figures (IV.1), (IV.2), (IV.3) et (IV.4) illustrent le comportement cinématique des particules à l'intérieur du domaine d'étude. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'influence de certains paramètres sur le comportement suscité.

IV-3-Effet du nombre de Reynolds

L'effet du nombre de Reynolds sur la zone de recirculation apparaît clairement dans la figure (IV.1), dans cette figure, nous avons fixé les caractéristiques géométriques et en variant le nombre de Reynolds à chaque fois.

On remarque que pour chaque augmentation du nombre de Reynolds la longueur de la bulle de recirculation dans la conduite augmente. Donc, pour minimiser la longueur de la zone de recirculation, il est conseillé de ne pas augmenter sévèrement le nombre de Reynolds.

IV-4-Effet des caractéristiques géométriques

L'influence des paramètres géométriques (a) sur la zone tourbillonnaire (bulle de recirculation) est illustrée sur la figure (IV.7). Les lignes de courant sont aussi représentées sur la même figure en prenant en compte les différents paramètres géométriques ($a=1,5$), ($a=2$) et ($a=3$) pour un nombre de Reynolds constant $Re=1000$.

De cette figure, on remarque que plus le coefficient (a) diminue, la longueur de la bulle de recirculation diminue, comme il est illustré dans les figures (IV.8), (IV.9) et (IV.10)

IV-5- Effet du profil de vitesse axiale

L'évolution de la vitesse axiale considérée sur l'axe de symétrie de l'élargissement et la variation des lignes de courant sont représentées dans différentes valeurs du nombre de Reynolds et du paramètre géométrique adimensionnelle (a) .

D'après ces figures, on conclue que:

- Un profil parabolique de la vitesse est remarqué lors de l'écoulement laminaire du fluide à l'intérieur de la conduite et au loin de l'élargissement à l'entrée de la conduite.
- Dans le coin supérieur de la conduite, il est observé une distribution de la vitesse qui n'est pas uniforme, en raison de changement du régime d'écoulement, comme il est montré dans la zone tourbillonnaire située à l'entrée de l'élargissement. Cette transition est localisée au niveau du changement de section.

Dans le cas ($a=3$):

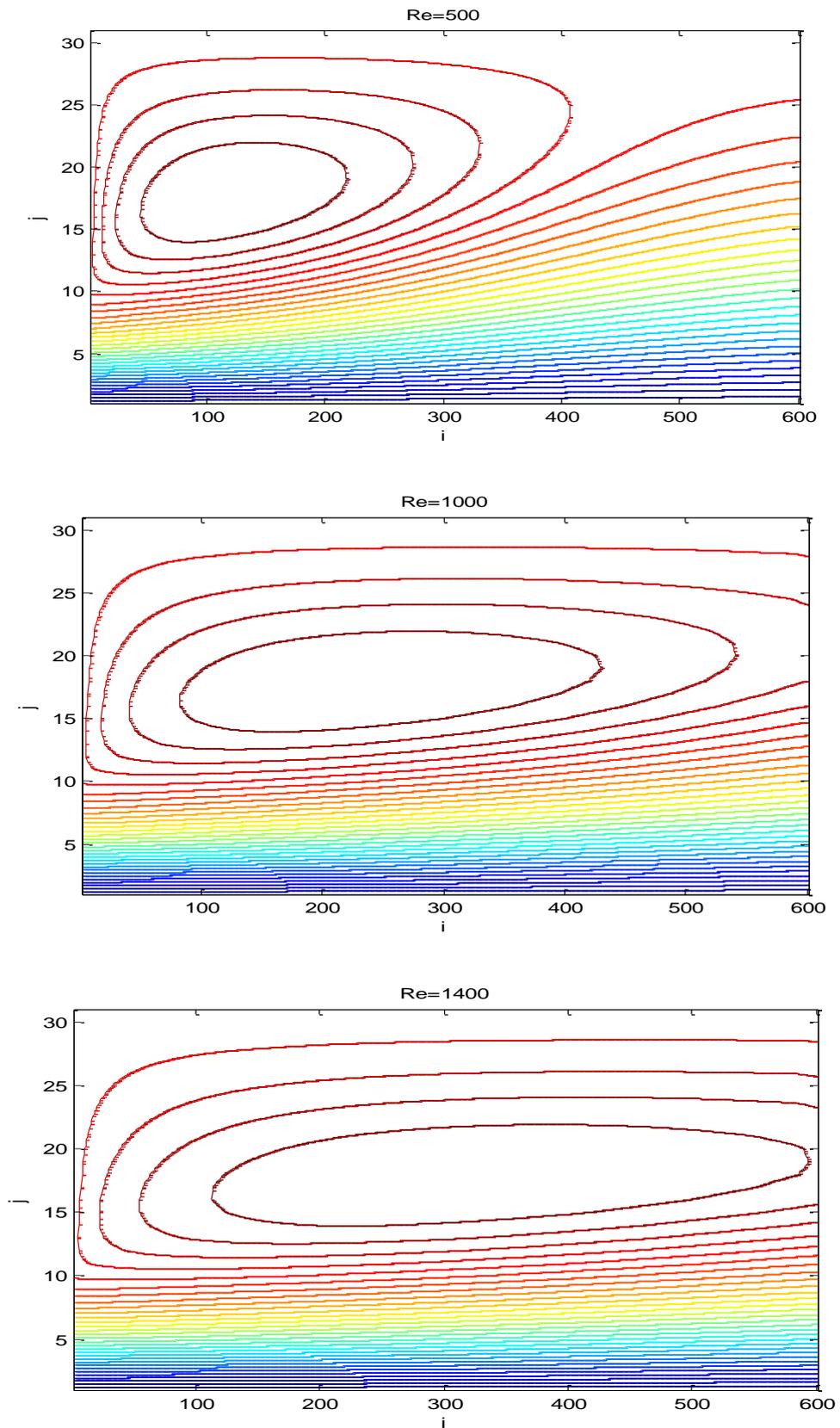


Figure IV.1. Contours de fonction de courant pour $Re=500,1000,1400$ à ($a=3$)

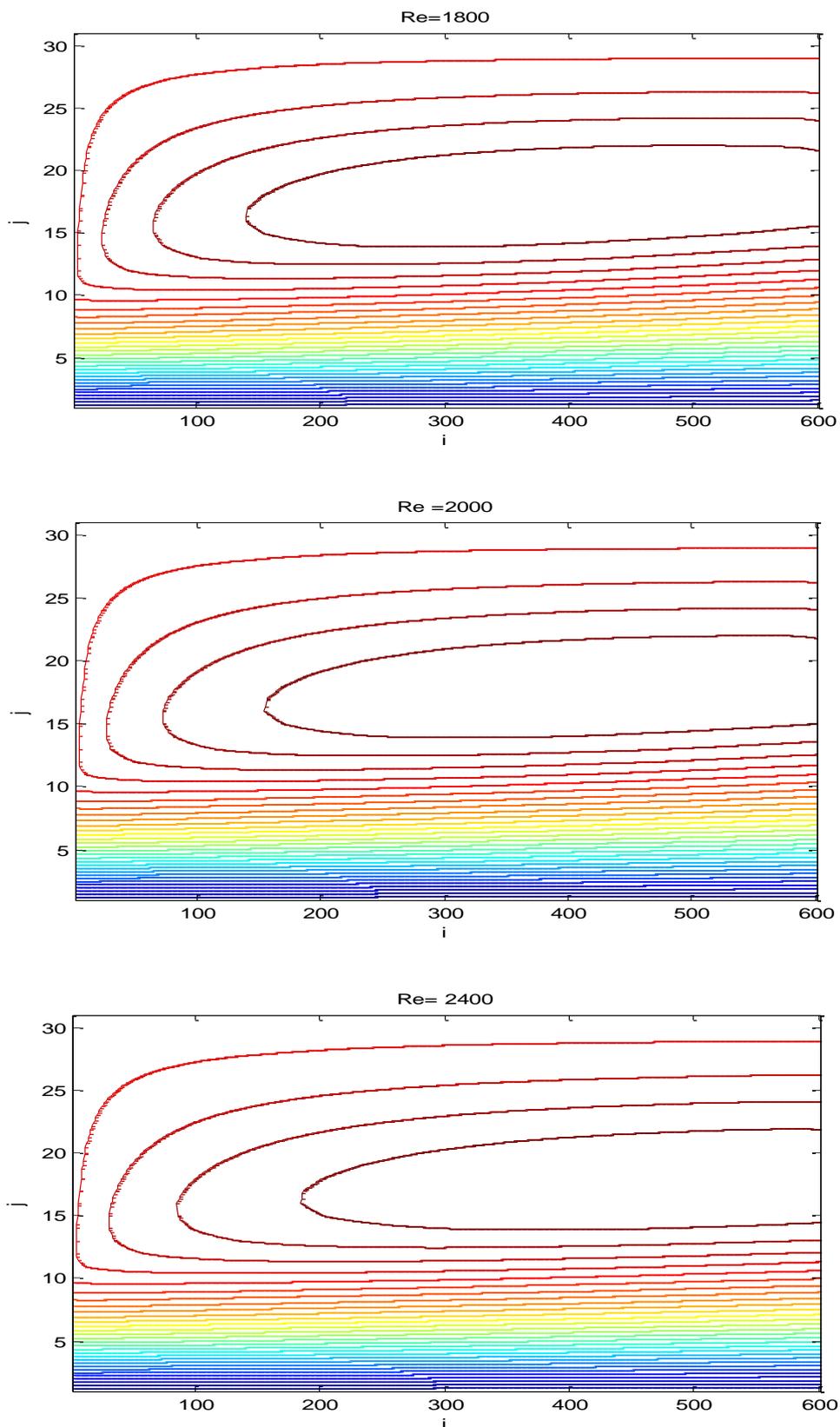


Figure IV.2. Contours de fonction de courant pour $Re=1800,2000,2400$ à $(a=3)$

Dans le cas ($a=2$):

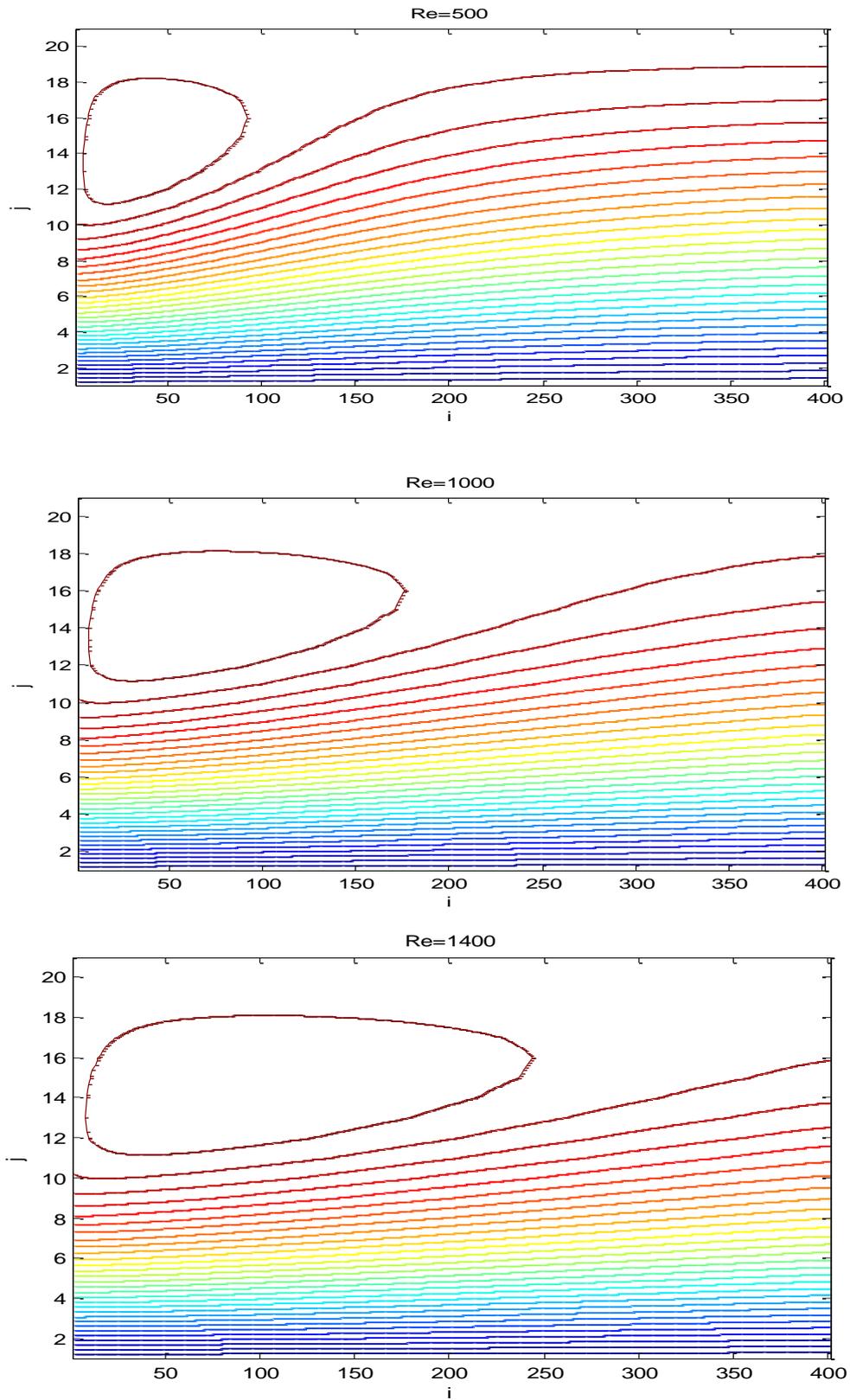


Figure IV.3. Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à ($a=2$)

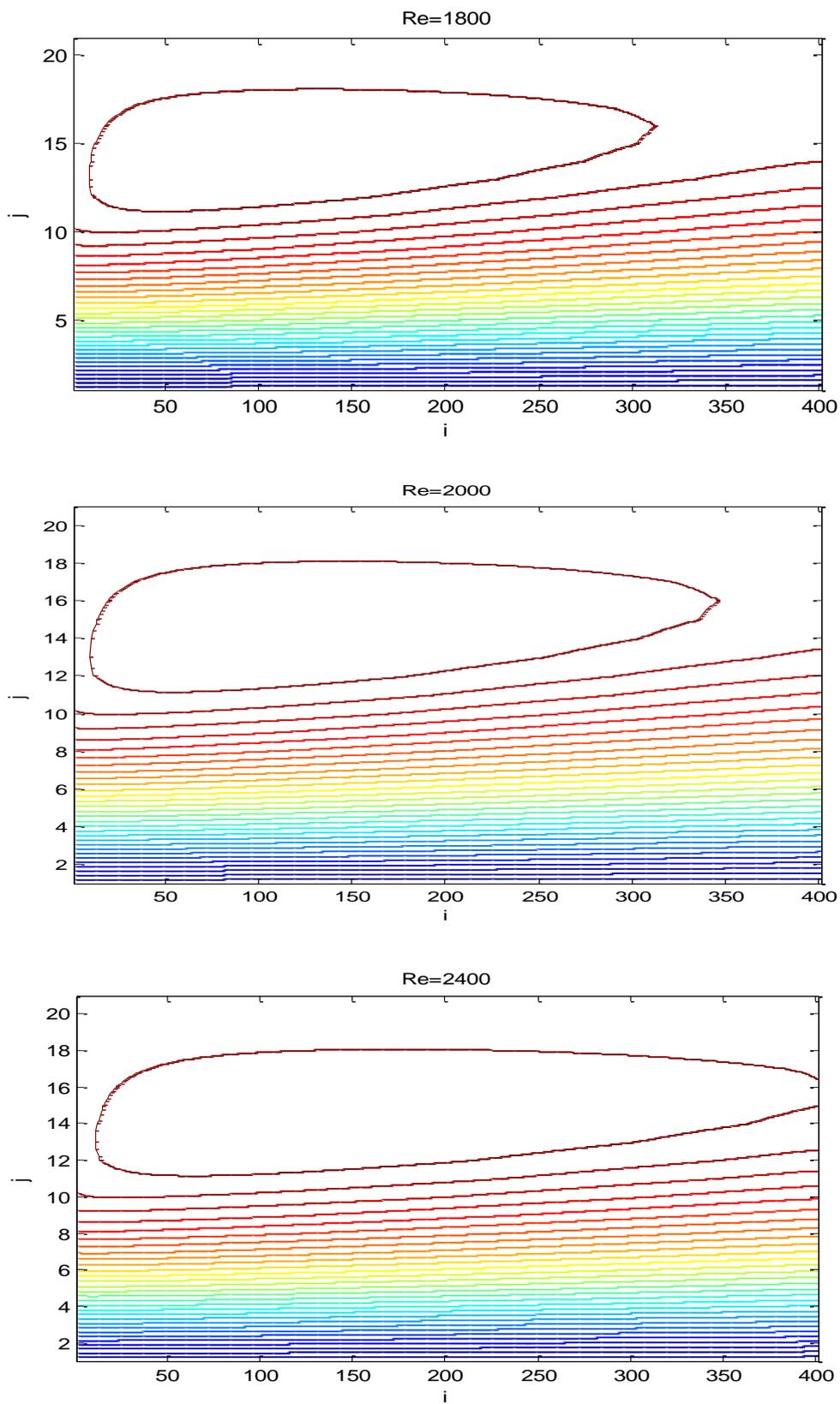


Figure IV.4. Contours de fonction de courant pour Re=1800, 2000, 2400, à (a=2)

cas ($a = 1,5$)

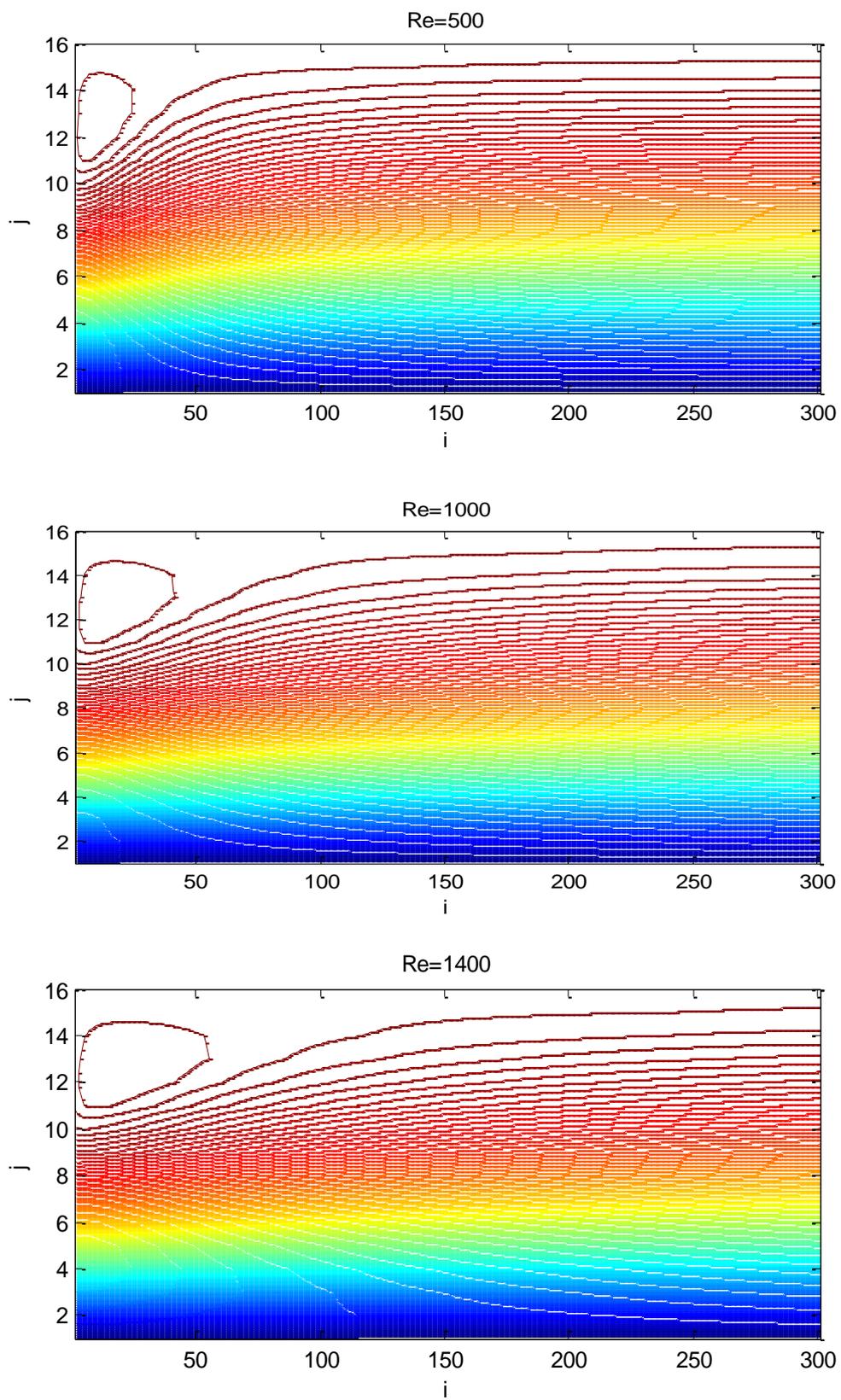


Figure IV.5. Contours de fonction de courant pour $Re=500, 1000, 1400$, à ($a=1,5$)

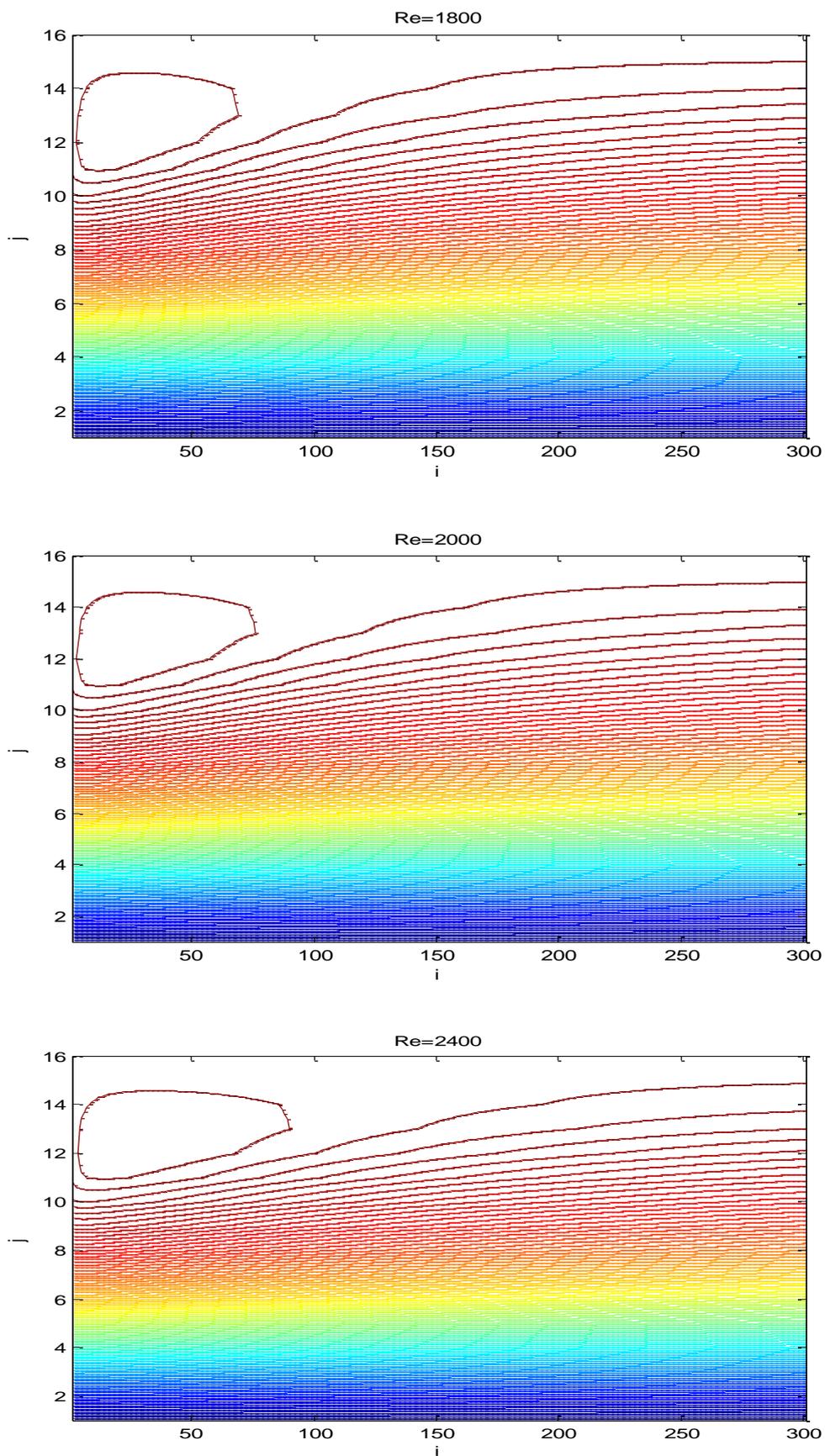
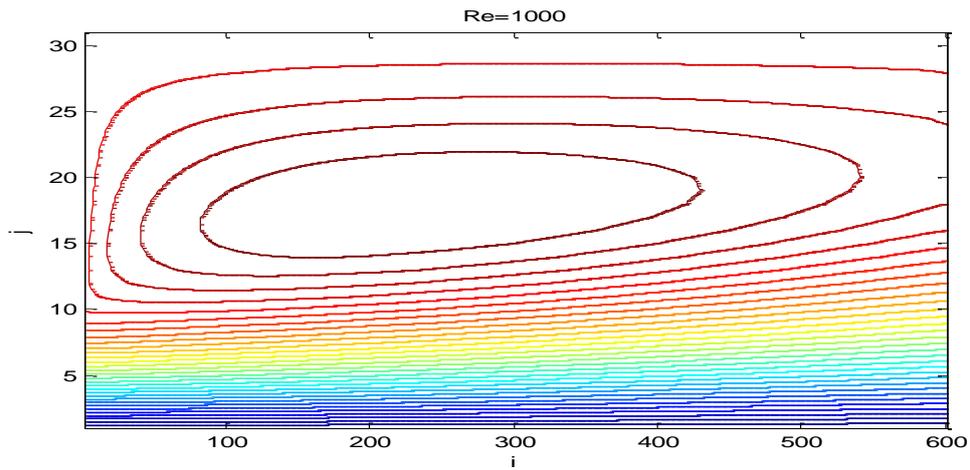
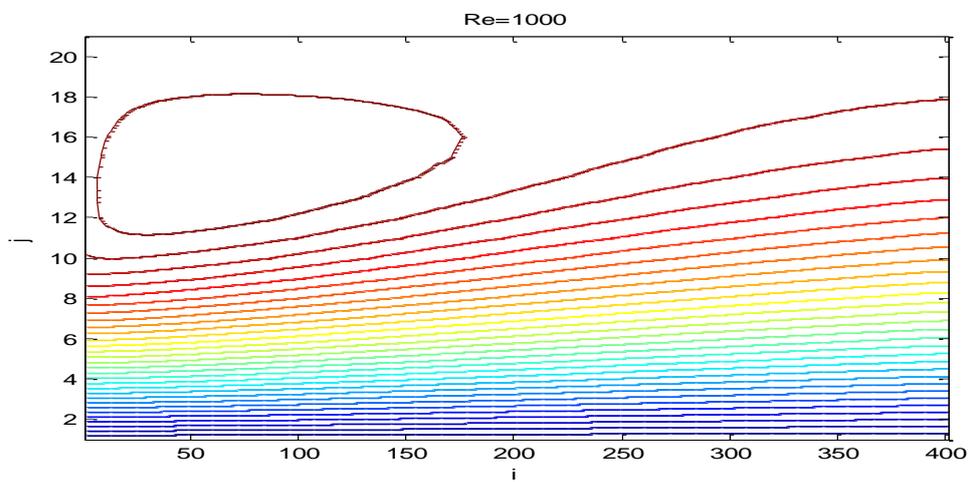


Figure IV.6. Contours de fonction de courant pour $Re=1800, 2000, 2400, \alpha(a=1,5)$

Dans le cas ($a=3$) :



Dans le cas ($a=2$) :



Dans le cas ($a=1,5$) :

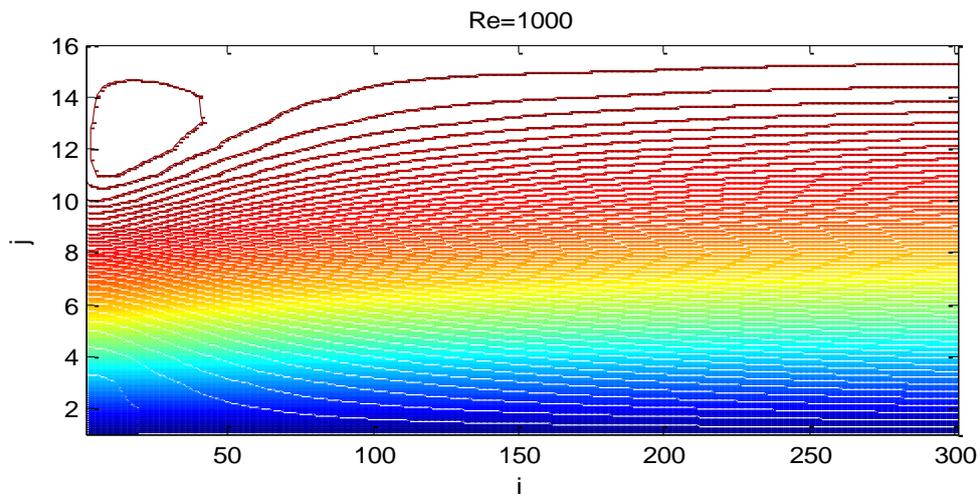


Figure IV.7. Contours de fonction de courant pour différents coefficients (a) $a=3, a=2, a=1,5$, à ($Re=1000$)

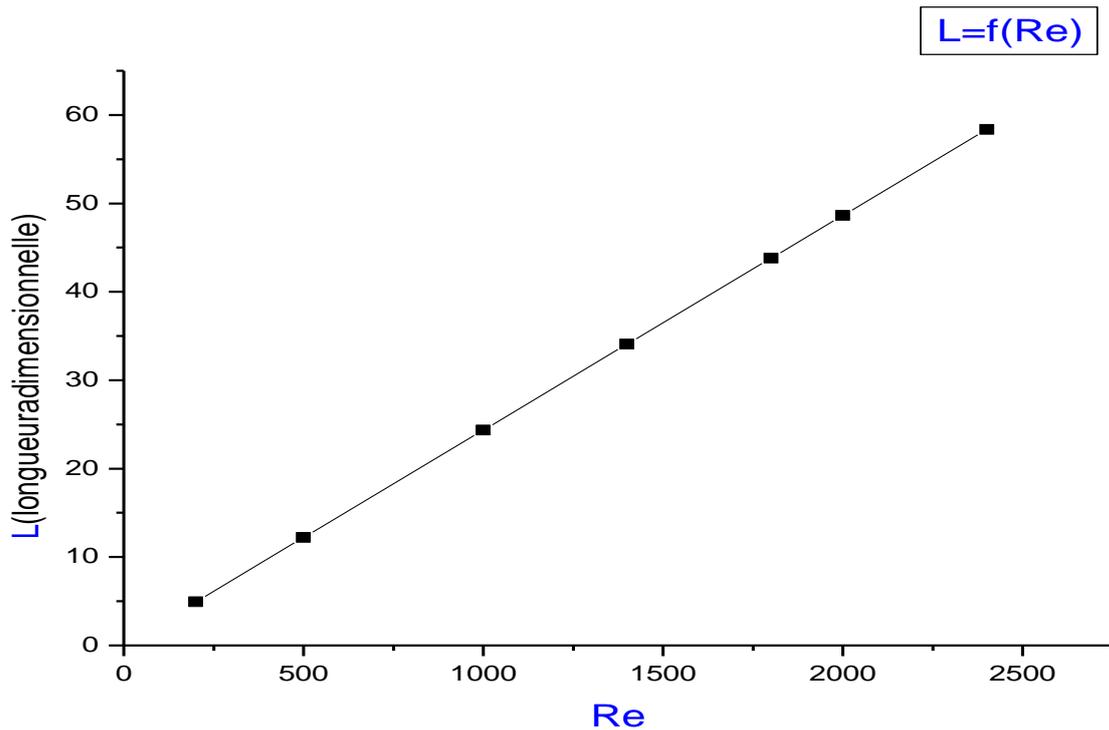


Figure IV.8. Représentation de la longueur de la bulle recirculation pour les différents de nombres Re Cas de (a=3)

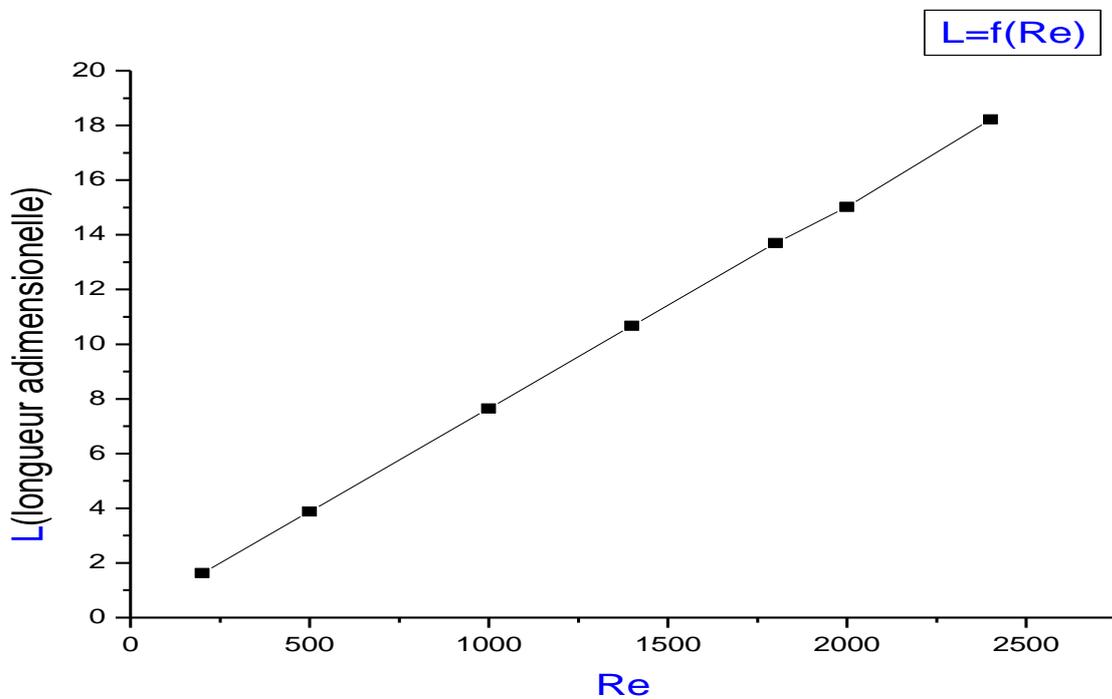


Figure IV.9. Représentation de la longueur de la bulle de recirculation pour les différents de nombres Re Cas de (a=2)

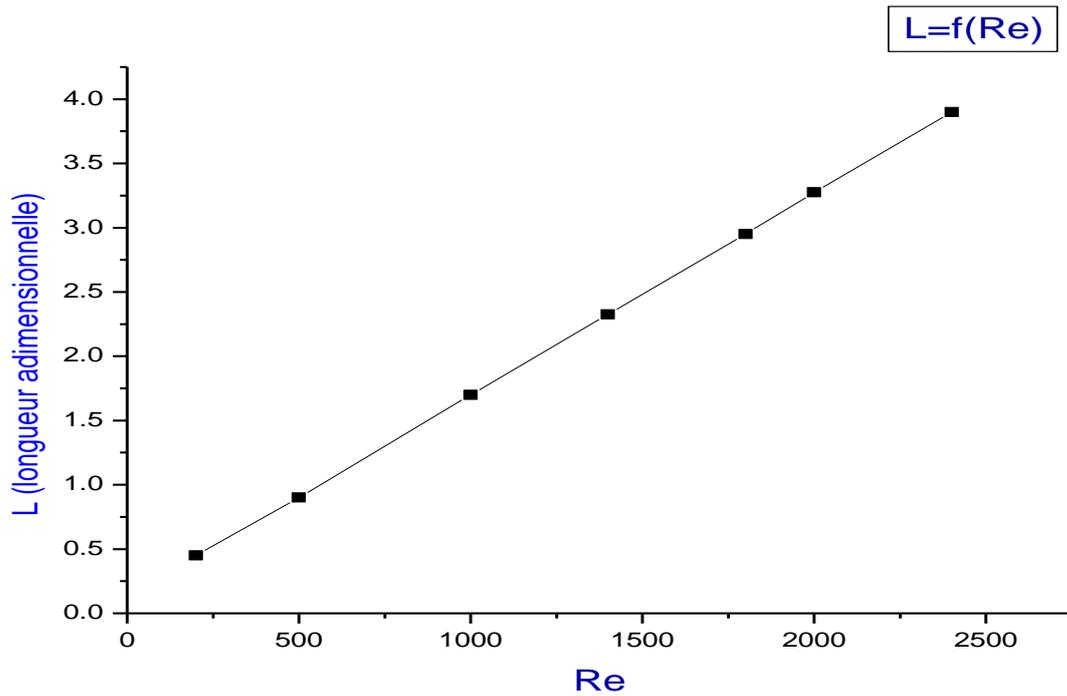


Figure IV.10. Représentation de la longueur de la bulle de recirculation pour les différents nombres de Re Cas de (a=1,5)

Les figures(IV.8) (IV.9) (IV.10) illustrent bien les courbes linéaires $L=f(Re)$ la longueur de bulle recirculation (longueur adimensionnelle) On remarque que la longueur augmente avec la croissance du nombre de Reynolds.

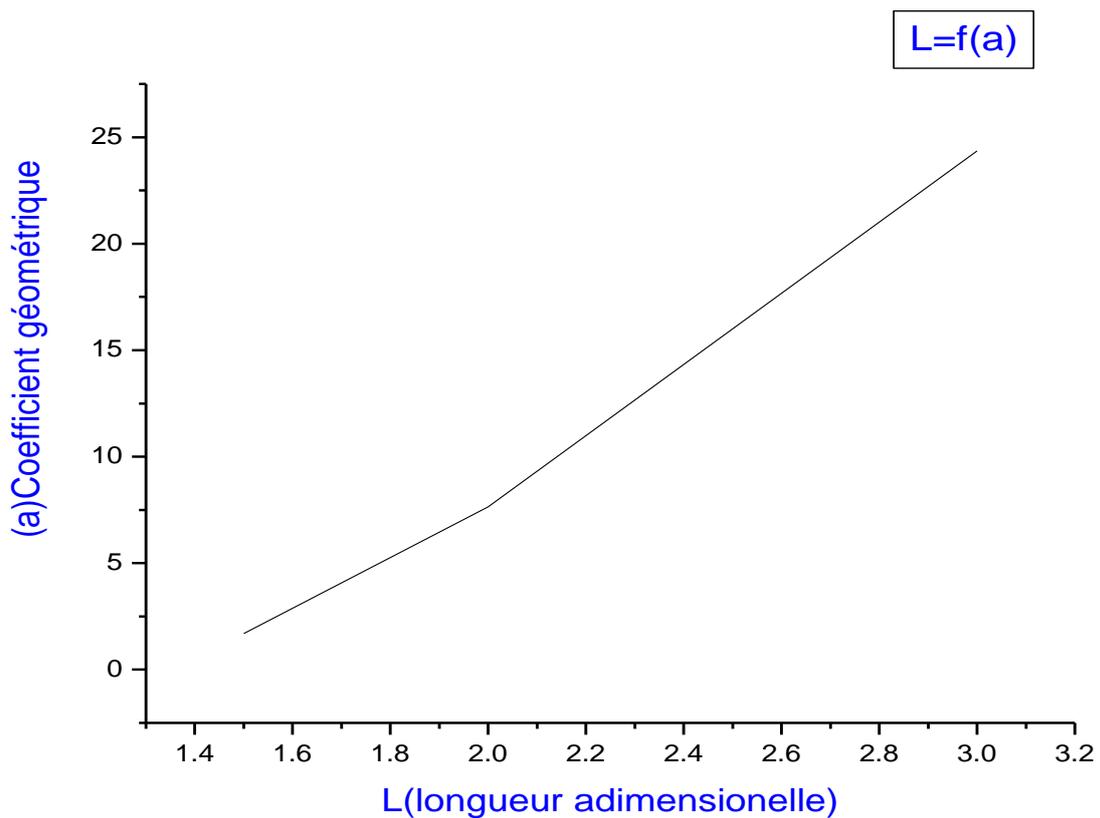


Figure IV.11. Représentation la longueur de la bulle de recirculation pour les différents valeurs coefficient (a) ,cas de $Re = 1000$.

La figure (IV.11) illustre la courbe $L=f(a)$ la longueur de la bulle de recirculation (longueur adimensionnelle) pour les différents coefficients géométriques ($a=1.5, a=2$ et $a=3$).

- On remarque que la longueur de la bulle de recirculation augmente avec la croissance la du coefficient (a).
- Le même comportement se manifeste pour autre valeurs du nombre de Reynolds.

CONCLUSION GENERALE

L'élargissement brusque de la section de passage d'écoulement est rencontré dans de nombreuses applications industrielles telles que : domaine des hydrocarbures, transport de l'eau ...

Notre travail porte sur l'étude numérique d'un écoulement laminaire, bidimensionnel incompressible à proximité de la région de l'élargissement brusque, il s'agit d'une étude paramétrique des effets de la différence des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds pour déterminer les caractéristiques physique, (u, v) et la distribution des vitesses dans le domaine étude.

Les équations différentielles gouvernantes sont discrétisées par la technique des différences finies. L'algorithme Gauss-Seidel est utilisé pour trouver la fonction de courant (Ψ) et la fonction de vorticité (Ω) afin de définir les caractéristiques physiques (u, v) avec la méthode indirecte.

La séparation du fluide à travers une conduite avec élargissement brusque produit à l'entrée de l'élargissement une zone tourbillonnaire dans le coin supérieur du fluide.

D'après cette étude, il en résulte les points suivants :

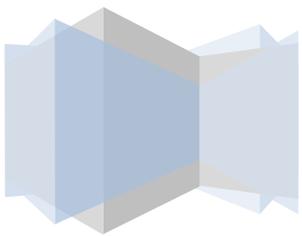
- la longueur de la zone tourbillonnaire augmente avec la croissance du nombre de Reynolds.
- les caractéristiques géométriques ont une influence sur la longueur de la zone tourbillonnaire.
- La longueur de la bulle de recirculation augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds et sa valeur maximale se déplace vers l'aval de la conduite.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] S.GONG . C, LIU. R. G, CHOU. F. C, CHIANG. A. S. T, “Chiang Experiment and Simulation of the Recirculation Flow in a CVD Reactor for Monolithic Materials” Experimental Thermal and Fluid Science; 12: 45-51, 1996.
- [02] K.BOUKERMA, “Etude de l'écoulement laminaire accompagnée du transfert de chaleur une conduite rectangulaire présentant un changement de section ” élargissement brusque), . Mémoire de Magister, Université Skikda 2007.
- [03] R.COMOLET . Mécanique expérimentale des fluides, éd. Masson, 1994.
- [04] S.GUERBAAI . “Simulation de l'écoulement d'un fluide visqueux à l'intérieur d'un diffuseur à angle variable” Mémoire de Magister 2004.
- [05] A.LENCASTRE, Hydraulique générale , Editions Eyrolles (1996).
- [06] J. PADET . Fluides en Écoulements Méthodes et Modèles ,Université de Reims Méthodes et modèles (FEMM Chapitre 06)Octobre 1990.
- [07] T.P.CHIANG, TONY W.H. SHEU, FANG. C.C, “Numerical investigation of vertical evolution in a backward-facing step expansion flow” ,Applied Mathematical Modelling 23 (1999) 915-932.
- [08] N,H,C. Hwang and Carlos Hita , “Fundamentals of Hydraulic Engineering Systems” prentice Halle Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1987.
- [09] B.F. ARMALY, LI. A, NIE. J.H; “Measurements in three-dimensional laminar separated flow”, International Journal of Heat and Mass Transfer 46, 3573–3582. 2003.



ANNEXE



Annexe

```
clear
clc

%GEOMETRIE DU DOMAINE:
a=1.5; %a=hauteur du canal/entrée du canal
b=20; %b=longueur du canal/hauteur du canal
A=1/4; %A=entrée du canal adimensionnelle (invariable)
B=A*a; %B=hauteur du canal adimensionnelle
C=B*b; %C=longueur du canal adimensionnelle

%MAILLAGE DU DOMAINE:
m=11; %m=nombre de noeuds suivant A
M=(m-1)*a+1; %M=nombre de noeuds suivant B
N=(M-1)*b+1; %N=nombre de noeuds le long du canal
dX=C/(N-1); %dX=pas suivant X
dY=B/(M-1); %dY=pas suivant Y
Re=2400;
X=zeros(1,N);
Y=zeros(M,1);
for i=1:N
    X(i)=dX*(i-1);
end
for j=1:M
    Y(j)=dY*(j-1);
end
%ESTIMATION INITIALE DE VARIABLES:
PSI=zeros(M,N);
OMEGA=zeros(M,N);
%CONDITIONS AUX LIMITES:
for j=1:m
    PSI(j,1)=-8*Y(j)^3+3/2*Y(j);
end
for j=m+1:M
    PSI(j,1)=PSI(m,1);
end
for i=2:N
    PSI(M,i)=PSI(m,1);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

er=1;

it=0;

while er>1e-3
    PSIo=PSI;
    OMEGAo=OMEGA;

%les coeffecient de PSI
Ap=2/dX^2+2/dY^2;
Bp=1/dX^2;
Cp=1/dX^2;
Dp=1/dY^2;
```

```

Ep=1/dY^2;
for j=2:M-1
    for i=2:N-1
        if i>2 & i<N-1 & j>2 & j<M-1
            PSI(j,i-1)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j,i-2)+Cp*PSI(j,i)+Dp*PSI(j-1,i-1)+Ep*PSI(j+1,i-1)+OMEGA(j,i-1));
            PSI(j,i+1)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j,i)+Cp*PSI(j,i+2)+Dp*PSI(j-1,i+1)+Ep*PSI(j+1,i+1)+OMEGA(j,i+1));
            PSI(j-1,i)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j-1,i-1)+Cp*PSI(j-1,i+1)+Dp*PSI(j-2,i)+Ep*PSI(j,i)+OMEGA(j-1,i));
            PSI(j+1,i)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j+1,i-1)+Cp*PSI(j+1,i+1)+Dp*PSI(j,i)+Ep*PSI(j+2,i)+OMEGA(j+1,i));
            PSI(j,i)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j,i-1)+Cp*PSI(j,i+1)+Dp*PSI(j-1,i)+Ep*PSI(j+1,i)+OMEGA(j,i));
        else
            PSI(j,i)=(1/Ap)*(Bp*PSI(j,i-1)+Cp*PSI(j,i+1)+Dp*PSI(j-1,i)+Ep*PSI(j+1,i)+OMEGA(j,i));
        end
    end
end
for j=2:M-1
    PSI(j,N)=4/3*PSI(j,N-1)-1/3*PSI(j,N-2);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%entrée
for j=1:m-1
    OMEGA(j,1)=(-2/dX^2)*(PSI(j,2)-PSI(j,1))+48*Y(j);
end
%paroi solide verticale
for j=m+1:M
    OMEGA(j,1)=(-2/dX^2)*(PSI(j,2)-PSI(j,1));
end
%paroi solide horizontale
for i=1:N
    OMEGA(M,i)=(-2/dY^2)*(PSI(M-1,i)-PSI(M,i));
end
OMEGA(m,1)=(-2/dX^2)*(PSI(m,2)-PSI(m,1))+(-2/dY^2)*(PSI(m-1,1)-PSI(m,1));

for j=2:M-1
    for i=2:N-1
        Ao(j,i)=2/(Re*dX^2)+2/(Re*dY^2)+abs(((PSI(j+1,i)-PSI(j-1,i))/(2*dY)))/dX+abs((-PSI(j,i+1)-PSI(j,i-1))/(2*dX))/dY;
        Bo(j,i)=1/(Re*dX^2)+(max(((PSI(j+1,i)-PSI(j-1,i))/(2*dY)),0))/dX;
        Co(j,i)=1/(Re*dX^2)+(max(-((PSI(j+1,i)-PSI(j-1,i))/(2*dY)),0))/dX;
        Do(j,i)=1/(Re*dY^2)+(max((-PSI(j,i+1)-PSI(j,i-1))/(2*dX)),0))/dY;
        Eo(j,i)=1/(Re*dY^2)+(max(-(-PSI(j,i+1)-PSI(j,i-1))/(2*dX)),0))/dY;
    end
end

for j=2:M-1
    for i=2:N-1
        OMEGA(j,i)=(1/Ao(j,i))*(Bo(j,i)*OMEGA(j,i-1)+Co(j,i)*OMEGA(j,i+1)+Do(j,i)*OMEGA(j-1,i)+Eo(j,i)*OMEGA(j+1,i));
    end
end

```

```

end
for j=2:M-1
    OMEGA(j,N)=(4/3)*OMEGA(j,N-1)-(1/3)*OMEGA(j,N-2);
end

%erreur de calcul:
for i=2:N
    for j=2:M-1
        ep(j,i)=abs((PSI(j,i)-PSIo(j,i))/PSIo(j,i));
    end
end

for i=2:N
    for j=2:M-1
        eo(j,i)=abs((OMEGA(j,i)-OMEGAo(j,i))/OMEGAo(j,i));
    end
end

er=max([max(max(ep)) max(max(eo))])
it=it+1
end

U=zeros(M,N);
V=zeros(M,N);
for j=1:m
    U(j,1)=6*(1/4-4*Y(j)^2);
end
for i=2:N
    for j=1:M-1
        if j==1
            U(j,i)=(PSI(j+1,i)-PSI(j,i))/(dY);
        else
            U(j,i)=(PSI(j+1,i)-PSI(j-1,i))/(2*dY);
        end
    end
end
for i=2:N
    for j=2:M-1
        if i==N
            V(j,i)=-(PSI(j,i)-PSI(j,i-1))/(dX);
        else
            V(j,i)=-(PSI(j,i+1)-PSI(j,i-1))/(2*dX);
        end
    end
end
end

```

Résumé:

La mécanique des fluides cherche à déterminer les caractéristiques des fluides (vitesse ,pression, température, débit..) pour assurer leurs transport par canalisation dans différentes formes de conduites surtout dans le domaine industriel (transport de pétrole, de l'eau,...).

Dans ce travail, On présente une contribution à l'étude de l'écoulement laminaire dans une conduite à élargissement brusque, A partir des équations de Navier-Stokes transformées en variables adimensionnelle (ψ et Ω) appliquées au domaine d'étude choisi, nous avons solutionner le problème numériquement utilisant le MATLAB.

Les résultats obtenus reflètent le comportement physique du phénomène, par l'apparition des zones de recirculations dont les bulles augment en fonction du coefficient géométrique (a) est du nombre adimensionnel ce qui concordent avec les travaux antérieurs dans le même domaine.

Mots-clés: Ecoulement laminaire, élargissement brusque, Reynolds, Matlab, coefficient géométrique (a), bulle de recirculation.

ملخص :

ميكانيك الموائع تسعى إلى تحديد خصائص الموائع (السرعة والضغط، ودرجة الحرارة، وتدفق ..) لضمان نقلها عبر قنوات بأشكال مختلفة، وخاصة في التطبيقات الصناعية (نقل النفط والمياه، ...).

في هذا العمل ساهمنا، في دراسة الجريان الصفائحي داخل قناة ذات التوسع المفاجئ، قمنا بتغيير معادلات Navier-Stokes إلى شكلها اللابعدى (ψ و Ω) والمطبقة على مجال معين من الدراسة، و التي تمكننا من حل المشكلة عدديا باستخدام MATLAB.

النتائج تظهر السلوك الفيزيائي لهذه الظاهرة، بظهور مناطق دوران المائع التي تزداد بدلالة المعامل الهندسي (a) وعدد Reynolds اللابعدى مما اظهر توافقا مع الاعمال المنجزة سابقا في نفس المجال.

المفاتيح: جريان صفائحي، توسيع المفاجئ، رينولدز، MATLAB، المعامل الهندسي (a)، منطقة دوران المائع