REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE MOHAMED KHIDER BISKRA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES, DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité: **MATHÉMATIQUES**

Option: **Probabilités**

Sur le thème

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES CONTRÖLES OPTIMALES STOCHASTIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

CHALA ADEL

Le: 20./.11/2013

Devant le jury composé de:

MEZERDI Brahim	**Professeur**	**Université de Biskra**	**Président**
MELKEMI Khaled	**Professeur**	**Université de Biskra**	**Examinateur**
MELKEMI Lamine	**Professeur**	**Université de Batna**	**Examinateur**
REBIAI Sallah eddine	**Professeur**	**Université de Batna**	**Examinateur**
YOUKANA Amar	**Maitre de conférences A**	**Université de Batna**	**Examinateur**
LABED Boubakeur	**Maitre de conférences A**	**Université de Biskra**	**Rapporteur**

Remerciments

Tout d'abord je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Bahlali Seid qui a encadré mon travail de recherche depuis l'année de DES et qui a cru en mes capacités. Ses qualités scientifiques et humaines, son suivi attentif et le soutien qu'il m'a toujours témoigné m'a permis de mener à bien cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Pr Seid Bahlali s'est éteint le 31 janvier 2010 suite à un malaise cardiaque, en plein exercice de ses fonctions à l'intérieur même de l'enceinte de l'université Mohamed Khider de Biskra. Que Dieu puisse l'accueillir en son vaste paradis.

Je tiens tout particulièrement à remercier le Professeur Brahim Mezerdi : pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté la lourde tâche de présider cette thèse en cette période très prenante de l'année.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux Professeurs Melkemi Lamine et Rebiai Salah eddine de l'université de Batna pour avoir acceptés d'examiner cette thèse et de faire des membres du jury malgré la distance et leurs nombreuses occupations. Je les remercie également pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mes travaux ainsi que pour leurs invitations et leurs nombreux échanges que j'ai eus avec lui et qui m'ont permis d'approfondir ce sujet.

Je suis très honoré de la présence du Professeur Melkemi Khaled au sein de mon jury, pour ses intérêts à cette thèse et son encouragement.

Un grand merci également pour les membres du laboratoire des mathématiques appliquée pour leurs accueil chaleureux et cela depuis le début de ma thèse, Professeur Bahlali Khaled de l'université de Toulon a été très présent. Il m'a accueilli gentiment chaque fois que je venais l'embêter pour lui poser des questions et ses réponses m'ont toujours éclairci les idées, et j'admirerai toujours son savoir ainsi que sa capacité à l'exposer et à le partager. Il a aussi dédié beaucoup de son temps à discuter avec moi à propos de mon avenir et je lui en suis très reconnaissant. Il n'aurait jamais pu être écrit sans les discussions que j'ai eu avec lui pour des discussions fructueuses en mathématiques fondamentales, et de m'aider de terminer les travaux de l'article.

Aussi je ne faut pas oublier le professeur Labed Boubakeur Maitre de conférence à l'université de Biskra d'accepter de m'aider et de son ouverture d'esprit pour terminer ce travail avec moi et surtout après la mort de Ma directeur de thèse, et particulièrement à cette étape de la thèse. Donnez-lui tous mes remerciements à tous les temps qu'il a passé avec moi et tous les renseignements utiles et de ses conseils et aussi ses instructions.

Enfin, je voudrais dire merci à tous ceux, famille ou amis, qui m'entourent et à l'ensemble des personnes présentes à cette soutenance.

Je dédie cette thèse. . . . .

A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

A ma chère femme Houda.

Pour l'esprit du professeur d'université décédée ....
Professeur Bahlali Seid

Table des matières

Introduction

Il existe deux approches très appropriées pour aborder la résolution des problèmes de contrôle : le principe de programmation dynamique, appelé aussi principe de Bellmann et le principe de maximum de Pontriagin.

Dans cette thèse, on s'intéresse au principe du maximum de Pontriagin, connue aussi sous le nom de conditions nécessaires d'optimalitées. L'idée est de partir d'un contrôle optimal minimisant la fonction de coût sur l'ensemble des contrôles et de donner des conditions nécessaires d'optimalité, vérifiées par ce contrôle. Ceci nous amène à introduire un processus adjoint comme solution d'une certaine équation différentielle rétrograde, et d'une inégalité variationnelle vérifiée par le contrôle optimal. Le principe du maximum pour contrôler les équations différentielles stochastiques (EDS), dont l'objectif est d'obtenir les conditions nécessaires (ainsi que suffisante) d'optimalité des contrôles, a été largement étudié depuis les années 1970's. Le travail initial a été fait par Kushner [33]. L'avance des autres droits fondamentaux a été développée par Haussmann [25], [26]. Les versions du principe du maximum stochastique, dans lequel le coefficient de diffusion est autorisé à dépendre explicitement sur la variable de contrôle, ont été obtenues par Arkin et Saksonov [?], Bensoussan [2], Bismut [8], [9], et [10], Elliot [19], Elliot et Kohlmann [20]. Les résultats de [?] et [8], [9], et [10]. en Considérant le cas des coefficients aléatoires. Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les systèmes linéaires à coefficients aléatoires, où aucun L^p-limites sont imposées sur les contrôles, sont établies par Cadellinas-Karatzas [15]. Le cas général, où le domaine du contrôle n'est pas convexe et le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable contrôle, a été calculée par Peng [36], en introduisant deux processus adjoint et une inégalité variationnelle du second ordre. Récemment, en considérant les contrôles relaxé, Bahlali [2] généralise les résultats antérieurs sur le sujet et essaie d'en tirer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, en utilisant seulement l'expansion du premier ordre et l'équation adjointe associée. Les premiers travaux sur le contrôle optimal des processus de saut a été d'abord examiné par Boel [11], Rishel [38], et Varaiya Boel [12], Davis et Elliott [17] et Kohlmann [31]. Plus tard, de nombreux auteurs ont étudié ce genre de problèmes de contrôle, y compris dans Situ [39], Kabanov [30], Cadellinas [13], et Framstad, Øksendal et Suelem [24]. Nous notons que dans [13] et [24], certaines applications en finance sont traitées. Le cas général, où le domaine du contrôle n'est pas convexe et le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable de contrôle, a été dérivé par Tang et Li [40], en utilisant l'extension du second ordre. Ensuite, les résultats de [40] sont donnés avec deux processus adjoint et une inégalité variationnelle du second ordre. Pour plus de détails sur les systèmes de contrôle avec des sauts et leurs applications, voir Øksendal et Sulem [35] et les ses références.

La première version de problèmes du principe de maximum stochastique de contrôle singulier ont été étudiés par de nombreux auteurs y compris Benes, Shepp, et Witsenhausen [6] ; Chow, Menaldi, et Robin [16], Karatzas, Shreve [32] ; Davis, Norman [18] ; Haussmann, Suo [27], [28], et [29] Voir [27] pour une liste complète des références sur le sujet. Les approches utilisées dans ces papiers, pour résoudre le problème sont principalement basées sur la programmation dynamique. Il a été montré en particulier que la fonction valeur est une solution d'une inégalité variationnelle, notez que dans [27], les auteurs appliquent la méthode de compactification pour montrer l'éxistence d'un contrôle optimal singulier.

Dans cette partie de thèse, nous sommes préoccupés par une optimisation dynamique des systèmes aléatoires dont l'état évolue dans l'espace $\mathbb{R}^d$ sous l'influence d'un mouvement brownien et d'un contrôle qui prend ses valeurs dans un sous-espace de $\mathbb{R}^d$. Ces systèmes évoluent sur un intervalle fini $[0,T]$, avec une condition initiale x_0 et dont la dynamique est décrite par une solution de diffusion d'une équation différentielle stochastique du type Itô. Nous sommes intéressés en particulier dans l'optimisation des contrôles des systèmes par une variable qui comporte deux composantes, le premier absolument continu et le seconde singulier Ce système sera contrôlé par une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t & = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + G\left(t\right) d\xi_t, \\ x\left(0\right) & = x_0, \end{cases}$$

où b, f et G sont déterministes cartes donné, x_0 est l'état initial au temps 0 et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in[0,T]}, P\right)$ satisfaisant aux conditions habituelles. La variable de contrôle est un processus (υ, η) où $\upsilon : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A_1 \subset \mathbb{R}^k$ et $\eta : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A_1 = ([0,\infty))^m$ sont $B\left([0,T]\right) \otimes \mathcal{F}$-mesurable, $\left(\mathcal{F}_t\right)_t$ −adaptée, et η est un processus croissant, avec des variations bornées, continue sur la gauche avec des limites sur la droite avec $\eta_0 = 0$.

L'objectif du problème de contrôle optimal est de minimiser, sur l'ensemble U de tous les contrôles recevable, un J coûts fonctionnels $J(.)$ de la forme

$$J(u,\xi) = \mathbb{E}\left[g(x_T) + \int_0^T h(t,x_t,u_t)\,dt + \int_0^T k(t)\,d\xi_t\right].$$

Un contrôle est dite optiimal si

$$J(u,\xi) = \inf_{(v,\eta)\in\mathcal{U}} J(v,\eta).$$

Soit un contrôle optimal minimisant les coûts J sur U existe, on cherche des conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par ce contrôle sous la forme de principe du maximum stochastique.

Le premier résultat dans le principe du maximum stochastique pour un problème de contrôle singulier a été obtenue par Cadellinas-Haussmann [14], (si le domaine de de contrôle U est convexe, les coefficients b et σ de l'équation d'état sont linéaires en (x,v) et les coefficients g et h de la fonction de coût sont convexes dans v. La méthode utilisée pour cette problème repose sur un principe connu de l'analyse convexe qui est la minimisation de la convexe et différentiable au sens de Gâteaux sur un convexe fermé).

Dans cette thèse, nous allons apporter une généralisation du résultat de Cadellinas-Haussmann [14], dans la mesure où les coefficients de l'équation de l'état ne sont pas linéaires et les coefficients de la fonction de coût sont non convexes. La méthode de l'analyse convexe utilisée dans [14] n'est pas applicable pas plus, pour cela, nous allons utiliser une autre méthode (voir Bensoussan [2]) qui consiste à perturber un contrôle optimal donné et pour cette raison on se donne une contrôleoptimal (u,ξ) en minimisant les coûts J fonctionnelle sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles et pour tout $(v,\eta)\in U$, on supose $\left(u^\theta,\xi^\theta\right) = (u,\xi) + \theta\,(v,\eta)$, voir chapitre 02 ou bien [3] dans le cas plus générale sur le domaine des contrôles admissibles non convexe on peut voir le contrôle perturbé comme suit

$$\left(u^\theta(t),\xi^\theta(t)\right) = \begin{cases} \left(v,\widehat{\xi}(t) + \theta\left(\eta(t) - \widehat{\xi}(t)\right)\right) & \text{Si } t\in[\tau,\tau+\theta], \\ \left(\widehat{u}(t),\widehat{\xi}(t) + \theta\left(\eta(t) - \widehat{\xi}(t)\right)\right) & \text{D'ailleurs.}\end{cases}$$

L'autre approche importante pour résoudre les problèmes de contrôle est de dériver conditions nécessaires satisfaisants par un certains contrôle optimal, connue comme principe du maximum stochastique. Il a été montré en particulier que la fonction valeur est une solution d'une inégalité variationnelle. La première version du principe du maximum stochastique qui couvre les problèmes de contrôle singulier a été obtenu par Cadenillas et Haussmann [14], dans laquelle ils considèrent la dynamique linéaire, la fonctionnelle coût convexe et contraintes sur l'état convexe. La méthode utilisée dans [14] est basée sur le principe connu de l'analyse convexe, liée à la minimisation des convexes, fonctionnelles Gâteaux différentiable définis sur un convexe fermé. Les conditions nécessaires d'optimalité pour les équations différentielles stochastiques non linéaires avec contraintes sur l'état convexe où la diffusion non contrôlée ont été obtenus par Bahlali & Chala [4] et Bahlali & al [?] .

Dans le cas stricte, le système est gouverné par une EDS de type

$$\begin{cases} dx_t^v = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dW_t + \displaystyle\int_\Theta f\left(t, x_{t^-}^v, \theta, v_t\right) N\left(d\theta, dt\right), \\ x_0^v = \xi, \end{cases}$$

où b et f sont des fonctions données, ξ est la donnée initiale, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un standard mouvement brownien d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P}\right)$ satisfaisant aux conditions habituelles et $N\left(d\theta, dt\right)$ est une mesure martingale de Poisson avec une caractéristique $m\left(d\theta\right) dt$.

La variable de contrôle $v = (v_t)$, est appellé un contrôle strict, est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans certains ensemble U de $\mathbb{R}^k$. On désignons par $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles stricts. Le critère pour être minimisée sur $\mathcal{U}$ a la forme

$$J\left(v\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^v\right) + \int_0^T h\left(t, x_t^v, v_t\right) dt\right],$$

où g et h sont donnés cartes et x_t^v est la trajectoire contrôlée par v.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est appelé optimal s'il satisfait

$$J\left(u\right) = \inf_{v\in\mathcal{U}} J\left(v\right).$$

Dans le modèle relaxé, le système est gouverné par la EDS avec des sauts

$$\begin{cases} dx_t^q = & \displaystyle\int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dW_t \\ & + \displaystyle\int_\Theta \int_U f\left(t, x_{t^-}^q, \theta, a\right) q_t\left(da\right) N\left(d\theta, dt\right), \\ x_0^q = & \xi. \end{cases}$$

Le coût à minimiser, sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés, est donnée par

$$\mathcal{J}\left(q\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^q\right) + \int_0^T \int_U h\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt\right].$$

Un contrôle relaxé μ est appelé optimal s'il résout

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q).$$

Le problème de contrôle relaxé trouve son intérêt dans trois points essentiels. Le premier est que nous pouvons utiliser la propriété de convexité de l'ensemble des contrôles relaxés pour dériver les conditions d'optimalité, sans utiliser l'expansion de second ordre et avec des hypothèses minimales sur les coefficients. Le deuxième point est que le problème des contrôles relaxés est une généralisation de contrôle stricte. En effet, si $q_t(da) = \delta_{v_t}(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un point unique $v_t \in U$, alors nous avons un problème de contrôle stricte comme un cas particulier de celle relaxée. Le troisième intérêt concerne l'existence d'une solution optimal. Nous pouvons avoir l'existence d'un contrôle optimal relaxé et de ne pas avoir l'éxistence d'une solution optimal stricte (voir l'exemple ci-dessous sur les pages 6-7).

Pour atteindre l'objectif de ce travail et créer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, nous procédons comme suit :

Tout d'abord, nous donnons les conditions d'optimalité pour les contrôles relaxés. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe. Ensuite, nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant la voie classique de la méthode des perturbations convexes. Plus précisément, si on note par μ un contrôle optimal relaxé et q est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, puis avec une assez petite $\theta > 0$ et pour chaque $t \in [0, T]$, nous pouvons définir un contrôle perturbé comme suit

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t - \mu_t).$$

Nous tirons de l'équation variationnelle de l'équation d'état, et l'inégalité variationnelle

$$0 \leq \mathcal{J}\left(\mu^\theta\right) - \mathcal{J}(\mu).$$

En utilisant le fait que les coefficients b, f et h sont linéaires par rapport à la contrôle relaxé,. Pour résoudre cette partie de problème, nous prouvons dans un minimum d'hypothèses supplémentaires, que ces conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés sont également suffisantes.

Nous établirons trois résultats concernant le problème de contrôle stochastique et qui peuvent être divises en deux thèmes. Le premier concernant les équations différentielles stochastiques où les contrôles ordinaires et qui sont des processus à valeurs dans des boreliennes de $\mathbb{R}$ et on établira un principe de maximum pour des diffusions singulières dont les coefficients non linéaires, celles qui donnent des généralisations du résultat obtenu par par Cadellinas-Haussmann.

Le second thème concerne les contrôles relaxés qui sont des processus à valeurs mesure. On établira le principe de maximum en contrôle relaxé avec des diffusions de sauts, Les résultats de cette étude généralisent tous les travaux antérieurs sur le sujet. Il peut également être vu comme une extension de celle de Bahlali [2] pour les diffusions avec sauts.

Le plan de ce travail est comme suit :

Chapitre 01 (Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients linéaires). dans ce chapitre introductif est qui nous sera d'une grande utilité pour la suite, on donnera une démonstration détaillée du principe du maximum pour des diffusions singulières dans le cas où le domaine du contrôle est convexe, les coefficients de l'équation d'état linéaire et les coefficient de la fonction coût convexes. Ce résultat obtenue par Cadellinas-Haussmann [14].

Chapitre 02 (Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires). Dans ce chapitre on apportera la première contribution dans ce travail, on établira une généralisation des résultats du premièr chapitre dans la mesure où on considère que les coefficients de l'équation d'états ne sont pas linéaires, de plus on ne se posse plus que les coefficients de la fonction coût convexes et sans utilisée la condition principale du premier chapitre. Pour obtenir le résultat, on utilise une méthode basée sur perturbation faible sur les contrôles et en suivant une méthode variationnelle simple basée sur le développement de Taylor des coefficients de l'équation d'état et des coefficients de la fonction coût.Le théorème du principe du maximum sera donnée sous sa forme intégrale et aussi sa forme générale.

Ce résultat à la fois comme une généralisation du principe de maximum pour des diffusions singulières obtenues par Cadellinas-Haussmann du premier chapitre et aussi comme une généralisation de principe de maximum obtenue par Bensoussan.

Chapitre 03 (Principe du maximum du second ordre en contrôle stochastique pour des diffusions singulières). Dans ce chapitre on apportera la première contribution dans ce travail. Nous considérons le problème de contrôle stochastique dans laquelle les domaines de contrôle ne doivent pas être convexe, la variable de contrôle a deux composantes, la première étant absolument continue et la seconde est singuliere. Les coefficients de l'équation d'état ne sont pas linéaires et dépendent explicitement sur la composante absolument continue de la commande. Nous établissons une principe du maximum, en utilisant une principe de variation sur la partie absolument continue du contrôle et une perturbation convexe sur le singulier. Ce résultat est une généralisation du principe du maximum Peng à des problèmes de contrôle singulier.

Dans notre situation, puisque le système est non linéaire et le domaine du contrôle n'est pas nécessairement convexe, l'approche de l'analyse convexe utilisée dans [14] n'est plus valable. En outre, depuis le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable de contrôle, la méthode de variation de premier ordre utilisés dans [**?**] ne peut pas être appliquée. L'approche que nous utilisons pour établir notre résultat principal est basé sur une perturbation double de la commande optiimal $(\widehat{u}, \widehat{\xi})$. La perturbation au premier contrôle est une variation, sur la partie absolument continue de la commande et le second est convexe, sur la composante singulière.

Chapitre 04 (Les conditions générales d'optimalitées pour un problème des contrôles stochastiques relaxé des diffusions de Poisson). Objectif dans ce chapitre est de dériver les conditions nécessaires d'optimalité ainsi que suffisantes pour les contrôles relaxés, où le système est régi par une équation différentielle stochastique non linéaires avec sauts dans sa forme générale. Nous donnons les résultats, sous forme de principe maximum stochastique global, en utilisant seulement l'expansion du premier ordre et l'équation adjointe associée.

Le contenu de cette thèse a fait l'objet des publications suivantes :

S.Bahlali, A. Chala, *A general optimality conditions for stochastic control problems of jump diffusions* Appl. Math Optim. Vol. 65, N°1 (2012), pp. 15-29.

S.Bahlali, A. Chala, *The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients*, Rand. Operat. And Stoch. Equ., Vol. 13, N°1 (2005), pp. 1-10.

Chapitre 1

Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients linéaires

Dans ce chapitre, nous allons.donner une démonstartion détaillée du principe du maximum en contôle stochastique pour des diffusions singulières et à coefficients linéaires. Ce résultat a été obtenu par Cadellinas-Haussmann [14] en utilisant le principe de minimisation des fonctionnelles convexes Gâteaux-différentiables (Voir Ekeland-Temmam [21]).

1.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et on suppose que : $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s;\ 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien.

Soit T un reèl strictement positif, A_1 un fermé, convexe de $\mathbb{R}^n$ et $A_2 = ([0,\infty))^m \subset \mathbb{R}^m$.

On suppose que u et ξ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$ $-$adaptés, $\mathcal{B}[0,T] \otimes \mathcal{F}$-mesurable et ξ est un processus croissant, continue à gauche avec limite à droite (caglad) avec $\xi_0 = 0$.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t & = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + G\left(t\right) d\xi_t \\ x\left(0\right) & = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de B telle que :

$$\mathbb{E}\left[\left| \ x_0\right|^m\right] < \infty \,; \ \text{ pour tout } m > 1.$$

On suppose que b et σ sont linéaires en leurs variable et sont données par :

$$\begin{aligned} b\left(t, x, u\right) &= A_t x + B_t u + C_t, \\ \sigma\left(t, x, u\right) &= D_t x + E_t u + F_t, \end{aligned} \tag{1.2}$$

avec :

$A : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $B : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n\right)$, $C : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right)\right)$, $E : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right)\right)$, $F : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right)$, $G : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$.

Où $\mathcal{L}\left(E, H\right)$ est l'éspace des transformations linéaires de E dans H.

On suppose que A, B, C, D, E, F, G sont progressivement mesurables par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$, uniformément bornées en $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ et G continue.

Pour que l'équation (1.1) ait un sens, on suppose que :

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T \left[\ b\left(t, x_t, u_t\right)\right] dt + \int_0^T \left| \ \sigma\left(t, x_t, u_t\right)\right|^2 dt + \int_0^T \left| \ G\left(t\right)\right| d\xi_t < \infty \right\} = 1. \tag{1.3}$$

Pour cela il suffit de voir que :

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T \left|B_t u_t \ \right| dt < \infty, \int_0^T \left|E_t u_t \ \right|^2 dt < \infty, \int_0^T \left|G\left(t\right) \ \right| d\xi_t < \infty \right\} = 1.$$

Les coefficients de l'équation d'état (1.1) étant linéaires, donc Lipshitziennes, alors cette équation admet une solution forte unique donnée par :

$$x_t^{(u,\xi)} = x_0 + \int_0^t \left(A_s x_s + B_s u_s + C_s\right) ds + \int_0^t \left(D_s x_s + E_s u_s + F_s\right) dB_s + \int_0^t G\left(s\right) d\xi_s.$$

De plus cette solution est continue et vérifie pour tout $m > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|x_t\right|^m\right] < \infty.$$

Définition 1 *(Admissibilté) : Soit V un convexe de $\mathbb{R}^n$ fixé, pour tout $x \in V$, on note par $\mathcal{U}$ la classe des processuses adaptés, mesurables $(u, \xi) : [0, T] \times \Omega \mapsto A_1 \times A_2$ et ξ est un processus croissant, continue à gauche avec limite à droite (caglad) avec $\xi_0 = 0$ tels que :*

$$x_t^{(u,\xi)} \in V; \quad pour\ tout\ t \in [0, T]\ ;\ \mathbb{P} - ps.$$

Le couple (u, ξ) est appelé contrôle admissible et la solution $x^{(u,\xi)}$ est appellée la trajéctoire du système linéaire (1.1) contrôlée par (u, ξ).

Puisque notre équation d'état est linéaire, il est évident que pour tout processus (u, ξ) ; (v, η) et pour tout $\alpha \in [0, 1]$ on a :

$$x_t^{\alpha(u,\xi)+(1-\alpha)(v,\eta)} = \alpha x_t^{(u,\xi)} + (1 - \alpha)\, x_t^{(v,\eta)}\ ;\ \mathbb{P} - ps.$$

Remarque 2 *L'ensemble $\mathcal{U}$ des contrôles admissibles est convexe.*

On considère maintenant la fonction coût suivante :

$$J(u, \xi) = \mathbb{E}\left[g(x_T) + \int_0^T h(t, x_t, u_t)\, dt + \int_0^T k(t)\, d\xi_t\right],$$

avec : $h : [0, T] \times \Omega \longrightarrow C^{1,1}(V \times A_1, \mathbb{R})$; $g : \Omega \longrightarrow C^1(V, \mathbb{R})$; $k : [0, T] \times \Omega \longrightarrow A_2$ tels que h et k soient $(\mathcal{F}_t)_t$-progressivement mesurables, g est $\mathcal{F}_T-$mesurable et k est continue en t.

On suppose que :

1) g et h sont continument dérivables en leurs variables.

2) b , σ et G sont uniformement bornées en $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

3) Pour tout $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ les fonctions $h(t., .) \in C^{1,1}(V \times A; \mathbb{R})$ et $g(.) \in C^1(V; \mathbb{R})$ sont convexes.

Le problème du contrôle optiimal consiste a minimiser la fonctionnelle $J(.)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}$ du contrôle admissible c'est a dire trouver un contrôle $(u,\xi) \in \mathcal{U}$ tel que $J(u, \xi) \leq J(v, \eta)$ pour tout $(v, \eta) \in \mathcal{U}$. C'est à dire :

$$J(u, \xi) = \inf_{(v,\eta)\in\mathcal{U}} J(v, \eta),$$

on remarque que les fonctions h, g et k peuvent être considérées comme suit : $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$; $k : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 3 *Les hypothéses sur h et g implique que la fonctionnelle J est bien définit pour chaque contrôle admissible.*

Proposition 4 *Puisque h et g sont convexes, alors la fonctionnelle J est convexe. De plus si pour tout $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ les fonctions $h(t,.,.)$ et $g(.)$sont strictement convexes, alors J est strictement convexe.*

Proof. Pour tout (u,ξ), $(v,\eta) \in \mathcal{U}$, on a :

$$\begin{aligned} J\left(\lambda\left(u,\xi\right)+\left(1-\lambda\right)\left(v,\eta\right)\right) &= \mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(\lambda(u,\xi)+(1-\lambda)(v,\eta))}\right)\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t,x_t^{(\lambda(u,\xi)+(1-\lambda)(v,\eta))},\lambda u+\left(1-\lambda\right)v\right)dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T k\left(t\right)d\left(\xi_t+\left(1-\lambda\right)\eta_t\right)\right]. \end{aligned}$$

Puisque h et g sont convexes et x est linéaires alors, on aura :

$$\begin{aligned} J\left(\lambda\left(u,\xi\right)+\left(1-\lambda\right)\left(v,\eta\right)\right) &\leq \mathbb{E}\left[\lambda g\left(x_T^{(u,\xi)}\right)+\left(1-\lambda\right)g\left(x_T^{(v,\eta)}\right)\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda h\left(t,x_t^{(u,\xi)},u\right)+\left(1-\lambda\right)h\left(t,x_t^{(v,\eta)},v\right)dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\lambda\int_0^T k\left(t\right)d\xi_t\right]+\left(1-\lambda\right)E\left[\int_0^T k\left(t\right)d\eta_t\right]. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$J\left(\lambda\left(u,\xi\right)+\left(1-\lambda\right)\left(v,\eta\right)\right) \leq \lambda J\left(u,\xi\right)+\left(1-\lambda\right)J\left(v,\eta\right).$$

D'où le résultat. ■

1.2 Equation adjointe et processus adjoint

Le but du principe du maximum stochastique est de trouver des conditions nécessaire d'optimalité vérifiées par un contrôle optimal et pour cela, on se donne un contrôle optimal $\left(\widehat{u};\widehat{\xi}\right)$ minimisant le coût J sur l'ensembles des contrôles admissibles $\mathcal{U}$ et soit $\widehat{x}$ la trajectoire optiimal, c'est à dire la solution de l'équation d'état assocoée à $\left(\widehat{u};\widehat{\xi}\right)$.

On considère l'équation adjointe donnée par :

$$\begin{cases} dp_t = \left[h_x\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t\right) - A_t^* p_t - D_t^* q_t\ \right] dt + q_t dB_t, \\ p_T = -g_x(\widehat{x}_T). \end{cases} \quad \textbf{(1.4)}$$

On cherche à trouver un couple (p, q) mesurable et adapté $p : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $q : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right)$ solution de l'équation adjointe (1.4) .

Ce couple est appelé processus adjoint où couple adjoint associé à notre problème de contrôle.

On suppose que :

$$\mathbb{E}\left[\left|g_x(\widehat{x}_T)\right|^2 + \int_0^T \left|h_x\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t\right)\right|^2 dt\right] < \infty. \quad \textbf{(1.5)}$$

L'équation adjointe (1.4) est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire à coefficients bornés, donc elle admet une solution forte unique donnée par :

$$p_t = -g(\widehat{x}_T) + \int_t^T \left[h_x\left(s, \widehat{x}_s, \widehat{u}_s\right) - A_s^* p_s - D_s^* q_s\right] ds + \int_t^T q_s dB_s. \quad \textbf{(1.6)}$$

De plus cette solution est continue et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|p(t)\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left|q(t)\right|^2\right] < \infty.$$

1.3 Principe du maximum

Puisque $\mathcal{U}$ est convexe et $J : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe definit sur $\mathcal{U}$. Alors on remarque que notre problème du contrôle stochastique est un cas particulier du problème de minimisation d'une fonctionnelle convexe. Alors il est naturel d'utiliser les résultats de la théorie de l'analyse convexe. Et pour cela, on peut appliquer à notre problème le théorème classique de la minimisation des fonctionnelles convexes suivant :

Théorème 5 *Soit E un éspace de Banach reflexif et H un convexe fermé non vide de E. soit f une fonction de H dans $\mathbb{R}$ convexe et semi continue inferieurement (SCI).*

Soit le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u \in H} f(u).$$

Si f est Gâteaux-différentiable de différentielle $f^{'}$ continue , alors si $u \in H$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) u est solution de ce problème.

2) $\left\langle f^{'}(u), v-u \right\rangle \geq 0$ pour tout $v \in H$.

3) $\left\langle f^{'}(v), u-v \right\rangle \geq 0$ pour tout $v \in H$.

Proof. Voir Ekeland-Temmam [21] ; prop 2.1 page 35. ■

Définition 6 *Pour tout couple adjoint (p, q), on définit le hamiltonien $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n\right) \times V \times A \mapsto \mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned} H(t, p, q, x, u) &= -h(t, x, u) + p_t.b(t, x, u) + q_t.\sigma(t, x, u), \\ &= -h(t, x, u) + p_t.(A_t x + B_t u + C_t) + q_t.(D_t x + E_t u + F_t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Maintenant on considère les fonctionnelles :$J_1 : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ et $J_2 : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ et $J_3 : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ définies comme par :

$$J_1(u, \xi) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, x_t^{(u,\xi)}, u_t)dt\right],$$

$$J_2(u, \xi) = \mathbb{E}\left[g(x_T^{(u,\xi)})\right],$$

$$J_3(u, \xi) = \mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d\xi_t\right].$$

On remarque que $J = J_1 + J_2 + J_3$.

Puisque $h(t, ., .)$ et $g(.)$ sont convexes ,et $x^{(u,\xi)}$ est affine en (u, ξ), alors J_1 et J_2 sont convexes. De plus J_3 est linéaire.

1.3.1 Linéairisation des solutions

Pour tout $(u,\xi)\in\mathcal{U}$ et soit $x^{(u,\xi)}$ sa trajectoire. Soit $Z^{(u,\xi)}$ la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire associée à l'équation d'état :

$$Z_t^{(u,\xi)}=\int_0^t\left(A_sZ_s+B_su_s\right)ds+\int_0^t\left(D_sZ_s+E_su_s\right)dB_s+\int_0^t G(s)d\xi_s. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Proposition 7 *Puisque l'application* $(u,\xi)\longrightarrow Z^{(u,\xi)}$ *est linéaire, alors pour tout* $(u,\xi)\,;(\nu,\eta)\in\mathcal{U}$ *, on a :*

$$Z^{(u,\xi)}-Z^{(\nu,\eta)}=x^{(u,\xi)}-x^{(\nu,\eta)}.$$

Proof. Soit $(u,\xi)\,,\ (v,\eta)\in\mathcal{U}$, on pose $\Delta Z=Z^{(u,\xi)}-Z^{(\nu,\eta)}$ et $\Delta x=x^{(u,\xi)}-x^{(\nu,\eta)}$.

On a :

$$\begin{aligned}\Delta Z-\Delta x\ &=\ \int_0^t\left(A_sZ_s^{(u,\xi)}+B_su_s\right)ds+\int_0^t\left(D_sZ_s^{(u,\xi)}+E_su_s\right)dB_s+\int_0^t G(s)d\xi_s\\&\quad-\int_0^t\left(A_sZ_s^{(\nu,\eta)}+B_sv_s\right)ds-\int_0^t\left(D_sZ_s^{(\nu,\eta)}+E_sv_s\right)dB_s-\int_0^t G(s)d\eta_s\\&\quad-x_0-\int_0^t\left(A_sx_s^{(u,\xi)}+B_su_s+C_s\right)ds-\int_0^t\left(D_sx_s^{(u,\xi)}+E_su_s+F_s\right)dB_s-\int_0^t G\left(s\right)d\xi_s\\&\quad+x_0+\int_0^t\left(A_sx_s^{(\nu,\eta)}+B_sv_s+C_s\right)ds+\int_0^t\left(D_sx_s^{(\nu,\eta)}+E_sv_s+F_s\right)dB_s+\int_0^t G\left(s\right)d\eta_s.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta Z-\Delta x=\int_0^t A_s\left(\Delta Z-\Delta x\right)ds+\int_0^t\left(D_s\left(\Delta Z-\Delta x\right)\right)dB_s.$$

En appliquant l'espérence et l'isométrie stochastique, on obtient :

$$\mathbb{E}\left|\Delta Z-\Delta x\right|^2\leq 2\int_0^t\mathbb{E}\left|A_s\left(\Delta Z-\Delta x\right)\ \right|^2ds+2\int_0^t\mathbb{E}\left|D_s\left(\Delta Z-\Delta x\right)\ \right|^2ds.$$

Puisque A et D sont bornés alors, on a :

$$\mathbb{E}\left|\Delta Z-\Delta x\right|^2\leq M\int_0^t\mathbb{E}\left|\Delta Z-\Delta x\right|^2ds.$$

Enfin par l'inégalité de Gronwall, on conclut ■

Soit (u,ξ) et (ν,η) des contrôles admissibles avec trajectoires correspondantes $x^{(u,\xi)}$ et $x^{(\nu,\eta)}$.

On suppose que :

1) Il existe une variable aléatoire $\widetilde{Y}$ $:\Omega \mapsto \mathbb{R}$ et un processus mesurable Y : $[0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{Y}\right| + \int_0^T |Y_t|\,dt\right] < \infty.$$

2) Pour tout $(u,\xi)\,;(\nu,\eta)\in\mathcal{U}$ et $\rho\in[0,1]$ on a::

$$\widetilde{Y} \geq Z_T^{(u,\xi)}.g_x\left(x_T^{(\nu,\eta)} + \rho Z_T^{(u,\xi)}\right) = \Lambda(\rho),$$

$$Y_t \geq Z_t^{(u,\xi)}.h_x\left(t, x_t^{(\nu,\eta)} + \rho Z_t^{(u,\xi)}, v_t + \rho u_t\right) + u_t.h_u(t, x_t^{(\nu,\eta)} + \rho Z_t^{(u,\xi)}, v_t + \rho u_t) = \Gamma(\rho).$$

1.3.2 Dérivabilité au sens de Gâteaux de La fonction coût

Lemme 8 *J_1, J, , et J_3 sont Gâteaux-differentiables avec différentielles J_1'; J_2' et J_3' données par*

$$\begin{aligned}
\langle J_1'(v,\eta),(u,\xi)\rangle &= \mathbb{E}\int_0^T \left[Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t) + u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right]dt,\\
\langle J_2'(v,\eta),(u,\xi)\rangle &= \mathbb{E}\left[Z_T^{(u,\xi)}.g_x(x_T^{(v,\eta)})\right],\\
\langle J_3'(v,\eta),(u,\xi)\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d\xi_t\right].
\end{aligned}$$

Donc, $J = J_1 + J_2 + J_3$ est Gâteaux-différentiable avec une différentielle donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle J'(v,\eta),(u,\xi)\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t) + u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right]dt\right] \qquad (\mathbf{1.9})\\
&\quad + \mathbb{E}\left[Z_T^{(u,\xi)}.g_x(x_T^{(v,\eta)}) + \int_0^T k(t)d\xi_t\right].
\end{aligned}$$

Proof. `1) La dérivée de` J_1 :

On va analyser la limite quand $\lambda \downarrow 0$ de la quantité :

$$\frac{J_1(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi)-J_1(v,\eta)}{\lambda}$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T h(t,x_t^{(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi)},v_t+\lambda u_t)dt\right]-\mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t,x_t^{(v,\eta)},v_t\right)dt\right]\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t,x_t^{(v,\eta)}+\lambda Z_t^{(u,\xi)},v_t+\lambda u_t\right)dt\right]-\mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t,x_t^{(v,\eta)},v_t\right)dt\right]\right).$$

Et comme $h:[0,T]\times\Omega\mapsto C^{1,1}(\mathbb{V}\times\mathcal{U};\mathbb{R}\ )$; alors pour tout $\lambda\in[0,1]$ il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable $\theta^\lambda=\theta^\lambda(\omega)$ sur l'intervalle $]0,1[$ telle que :

$$\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^T\left\{h\left(t,x_t^{(v,\eta)}+\lambda Z_t^{(u,\xi)},v_t+\lambda u_t\right)-h\left(t,x_t^{(v,\eta)},v_t\right)\right\}dt\right]$$
$$=\int_0^T\left[Z_t^{(u,\xi)}.h_x\left(t,x_t^{(v,\eta)}+\lambda\theta^\lambda Z_t^{(u,\xi)},v_t+\lambda u_t\right)\right]dt$$
$$+\int_0^T u_t.h_u\left(t,x_t^{(v,\eta)}+\lambda\theta^\lambda Z_t^{(u,\xi)},v_t+\lambda u_t\right)dt$$
$$=\Gamma(\lambda).$$

On définit :

$$\begin{aligned}J_1'(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\left(J_1(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi)-J_1(v,\eta)\right),\\ &= \mathbb{E}\left[\Gamma(\lambda)\ \right].\end{aligned}$$

Puisque h et J_1 sont des fonctions convexes, alors leurs dérivées au sens de Gateaux sont des fonctions croissantes en λ, Donc $\Gamma(\lambda)$ et $J_1'(\lambda)$ sont des fonctions croissantes en λ , donc $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}J_1'(\lambda)$ existe et égale à $\lim\limits_{k\uparrow\infty}J_1'(\lambda_k)$ si $\lambda_k\downarrow 0$ quand $k\uparrow\infty$. Et par la continuitie de h_x et h_u ce qui nous donne la continuitie de Γ sur l'intervalle $(0,1)$. Si on considère pour toute suite (λ_k) telle que $\lambda_k\downarrow 0$ quand $k\uparrow\infty$;on a :

$$Y\geq\Gamma(\lambda_k)\downarrow\Gamma(0)=\int_0^T\left\{Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)+u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right\}dt\qquad\mathbb{P}-ps.$$

Et en appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue ;on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{J_1\left(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi\right)-J_1\left(v,\eta\right)}{\lambda} &= \lim_{k\uparrow\infty}\frac{J_1\left(v+\lambda_k u,\eta+\lambda_k\xi\right)-J_1\left(v,\eta\right)}{\lambda_k}\\ &= \lim_{k\uparrow\infty}\mathbb{E}\left[\Gamma\left(\lambda_k\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\int_0^T\left[Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)+u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right]dt.\end{aligned}$$

Alors J_1 est un Gâteaux -différentiable avec la dirévée donne par :

$$\left\langle J_1'\left(v,\eta\right),\left(u,\xi\right)\right\rangle=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)+u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right\}dt\right].$$

`2) La dérivée de` J_2 :

Et par une démenstration analogue ;on definit la limite quand $\lambda\downarrow 0$ de la quantité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\left(J_2\left(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi\right)-J_2\left(v,\eta\right)\right) &= \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi)}\right)\right]-\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(u,\xi)}\right)\right]\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(v,\eta)}+\lambda Z_T^{(u,\xi)}\right)\right]-\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(u,\xi)}\right)\right]\right).\end{aligned}$$

Et comme $g:\Omega\mapsto C^1\left(\mathbb{V};\mathbb{R}\right)$;est $\mathcal{F}_T$ -mesurable ;alors pour tout $\lambda\in[0,1]$ il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable $\theta^\lambda=\theta^\lambda\left(\omega\right)$ sur l'intervalle $]0,1[$ telle que preseque surement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(v,\eta)}+\lambda Z_T^{(u,\xi)}\right)\right]-\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{(u,\xi)}\right)\right]\right) &= Z_T^{(u,\xi)}.g_x\left(x_T^{(v,\eta)}+\lambda\theta^k Z_T^{(u,\xi)}\right)\\ &= \Lambda\left(\lambda\right).\end{aligned}$$

On definit alors :

$$\begin{aligned}J_2'\left(\lambda\right) &= \frac{1}{\lambda}\left(J_2\left(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi\right)-J_2\left(v,\eta\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left[\Lambda\left(\lambda\right)\ \right].\end{aligned}$$

Mais g et J_2 sont convexes, alors Λ etJ_2' sont des fonctions croissantes de λ, donc $\lim_{\lambda\downarrow 0}J_2'(\lambda)$ existe et égale à $\lim_{k\uparrow\infty}J_2'\left(\lambda_k\right)$si $\lambda_k\downarrow 0$ quand $k\uparrow\infty$. Puisque de g_x est continue, Λ est continue sur l'intervalle $(0,1)$. soit (λ_k) une suite telle que $\lambda_k\downarrow 0$ quand $k\uparrow\infty$, on a :

$$\widetilde{Y}\geq\Lambda\left(\lambda_k\right)\downarrow\Lambda\left(0\right)=Z_T^{(u,\xi)}.g_x\left(x_T^{(v,\eta)}\right)\quad;\ \mathbb{P}-ps.$$

Et en appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue ;on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\left(J_2\left(v+\lambda u,\eta+\lambda\xi\right)-J_2\left(v,\eta\right)\right) &= \lim_{k\uparrow\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left(J_2\left(v+\lambda_k u,\eta+\lambda_k\xi\right)-J_2\left(v,\eta\right)\right)\\ &= \lim_{k\uparrow\infty}\mathbb{E}\left[\Lambda\left(\lambda_k\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[Z_T^{(u,\xi)}.g_x\left(x_T^{(v,\eta)}\right)\right].\end{aligned}$$

En fin on dit que :J_2 est Gâteaux -différentiable avec la différentielle donnée par :

$$\left\langle J_2'\left(v,\eta\right).\left(u,\xi\right)\right\rangle=\mathbb{E}\left[Z_T^{(u,\xi)}.g_x\left(x_T^{(v,\eta)}\right)\right].$$

3) La dérivée de J_3 :

On sait que la fonctionnelle J_3 est linéaire par rapport à ξ, donc sa derivée est la même fonction et est donnée par :

$$\left\langle J_3'\left(v,\eta\right).\left(u,\xi\right)\ \right\rangle=\mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d\xi_t\right].$$

Finalement on conclut que J est Gâteaux -différentiable avec la différentielle donnée par :

$$\begin{aligned}\left\langle J'\left(v,\eta\right).\left(u,\xi\right)\right\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{Z_t^{(u,\xi)}.h_x(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)+u_t.h_u(t,x_t^{(v,\eta)},v_t)\right\}dt\right]\\ &+\mathbb{E}\left[Z_T^{(u,\xi)}.g_x(x_t^{(v,\eta)})+\int_0^T k(t)d\xi_t\right].\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme ■

1.3.3 Principe du maximum

Conséderons maintenant les semi-martingales $x^{(u,\xi)}$ et p données par l'équations (1.1) et (1.4). En appliquant la formule de Itô à $p.x^{(u,\xi)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}p_t.x_t^{(u,\xi)} &= p_0.x_0^{(u,\xi)}+\int_0^t p_s.\left[\ b(s,x_s^{(u,\xi)},u_s)ds+\sigma\left(s,x_s^{(u,\xi)},u_s\right)dB_s+G(s)d\xi_s\right]\\ &+\int_0^t x_s^{(u,\xi)}.\left[\ \left(h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right)-A_s^*p_s-D_s^*q_s\right)ds+q_s dB_s\right]\\ &+\int_0^t q_s.\sigma\left(s,x_s^{(u,\xi)},u_s\right)ds.\end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$
\begin{aligned}
p_t.x_t^{(u,\xi)} &= p_0.x_0^{(u,\xi)} + \int_0^t \left[p_s.b(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s) + q_s\sigma\left(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s\right)\right] ds \qquad (\mathbf{1.10}) \\
&+ \int_0^t x_s^{(u,\xi)} \left[h_x\left(s, \widehat{x}_s, \widehat{u}_s\right) - A_s^* p_s - D_s^* q_s\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[p_s^*.\sigma\left(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s\right) + x_s^{*(u,\xi)}.q_s\right] dB_s + \int_0^t p_s^*.G(s) d\xi_s.
\end{aligned}
$$

On pose, pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U}$; $t \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
S^{(u,\xi)}(t) &= \int_0^t \left\{p_s^*.\sigma\left(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s\right) + x_s^{*(u,\xi)}.q_s\right\} dB_s \\
R^{(u,\xi)}(t) &= p_t.x_t^{(u,\xi)} - \int_0^t \left\{x_s^{(u,\xi)}.h_x\left(s, \widehat{x}_s, \widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s.u_s + q_s E_s u_s\right\} ds \\
&- \int_0^t p_s^*.G(s) d\xi_s.
\end{aligned}
$$

Ceci nous permet d'écrire l'équation (1.10) comme suit :

$$
R^{(u,\xi)}(t) = p_0.x_0 + \int_0^t \left(p_s.C_s + q_s.F_s\right) ds + S^{(u,\xi)}(t).
$$

Remarque 9 *Si pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U}$; $S^{(u,\xi)}(t)$ n'est pas seulement une martingale locale, mais aussi une martingale, alors on :*

$$
\mathbb{E}\left[S^{(u,\xi)}(t)\right] = 0.
$$

pour tout $t \in [0,T]$ on a :

$$
\mathbb{E}\left[\ R^{(u,\xi)}(t)\right] = \mathbb{E}\left[p_0.x_0 + \int_0^t \left(p_s.C_s + q_s.F_s\right) ds\right] = \mathbb{E}\left[R^{(\widehat{u},\widehat{\xi})}(t)\right].
$$

Mais en générale ;$S^{(u,\xi)}(t)$ pas nésessairement une martingale, alors pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalités, on suppose que pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U}$, on a :

$$
\mathbb{E}\left[R^{(\widehat{u},\widehat{\xi})}(T)\right] \leq \mathbb{E}\left[\ R^{(u,\xi)}(T)\right],
$$

où d'une manière équivalente :

$$\mathbb{E}\left[p_T.\widehat{x}_T - \int_0^T \left(\widehat{x}_s.h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s.\widehat{u}_s + q_sE_s\widehat{u}_s\right)ds - \int_0^T p_s^*.G(s)d\widehat{\xi}_s\right] \quad (\mathbf{1.11})$$
$$\leq \mathbb{E}\left[p_T.x_T^{(u,\xi)} - \int_0^T \left(x_s^{(u,\xi)}.h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s.u_s + q_sE_su_s\right)ds - \int_0^T p_s^*.G(s)d\xi_s\right].$$

L'inégalité (1.11) sera essentiellement utilisée pour obtenir le principe du maximum et qui est donné sous sa forme intégrale par le théorème suivant :

Théorème 10 *Soit* $\left(\widehat{u},\widehat{\xi}\right)$ *est un contrôle optimal minimisant le coût* J *sur l'ensemble des contrôles admissibles. Si la condition* (1.11) *est satisfaite, alors il existe un processus adapté* p*, donné par* (1.4) *tel que pour tout* $(u,\xi)\in\mathcal{U}$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[-H_u\left(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t\right).\left(u_t-\widehat{u}_t\right)\right]dt + \int_0^T \left\{k\left(t\right)-G^*\left(t\right).p_t\right\}.d\left(\xi-\widehat{\xi}\right)_t\right] \geq 0. \quad (\mathbf{1.12})$$

Proof. Soit $\left(\widehat{u},\widehat{\xi}\right)$ une solution optimale pour notre problème de contrôle. Puisque $\mathcal{U}$ est convexe et la fonctionnelle $J\left(.\right)$ est convexe et Gâteaux -différentiable alors, en appliquant le théorème5, on a :

$$\left\langle J'(\widehat{u},\widehat{\xi});(u,\xi)-(\widehat{u},\widehat{\xi})\right\rangle \geq 0\ ,\ \text{pour tout}\ \ (u,\xi)\in\mathcal{U}\ .$$

Puisque on a :

$$\begin{aligned}\left\langle J'(\widehat{u},\widehat{\xi});(u,\xi)-(\widehat{u},\widehat{\xi})\right\rangle &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\left(x_t^{(u,\xi)}-\widehat{x}_t\right).h_x\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t\right)+\left(u_t-\widehat{u}_t\right).h_u(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d(\xi_t-\widehat{\xi}_t)+\left(x_T^{(u,\xi)}-\widehat{x}_T\right)p_T\right].\end{aligned}$$

Alors, en remplaçant $p_T=-g_x\left(\widehat{x}_T\right)$, on a :

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\left(x_t^{(u,\xi)}-\widehat{x}_t\right).h_x\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t\right)+\left(u_t-\widehat{u}_t\right).h_u(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d(\xi-\widehat{\xi})_t-(x_T^{(u,\xi)}-\widehat{x}_T)g_x\left(\widehat{x}_T\right)\right]. \quad (\mathbf{1.13})\end{aligned}$$

D'aprés notre hypothèse (1.11) on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[p_T.x_T^{(u,\xi)} - \int_0^T \left[x_s^{(u,\xi)}.h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s.u_s + q_sE_su_s\right]ds - \int_0^T p_s^*.G(s)d\xi_s\right] \\ &-\mathbb{E}\left[p_T.\widehat{x}_T - \int_0^T \left[\widehat{x}_s.h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s.\widehat{u}_s + q_sE_s\widehat{u}_s\right]ds - \int_0^T p_s^*.G(s)d\widehat{\xi}_s\right]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[p_T.\left(x_T^{(u,\xi)} - \widehat{x}_T\right)\right] - E\left[\int_0^T p_s^*.G(s)d\left(\xi_s - \widehat{\xi}_s\right)\right] \\ &-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left(x_s^{(u,\xi)} - \widehat{x}_s\right).h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s\left(u_s - \widehat{u}_s\right) + q_sE_s\left(u_s - \widehat{u}_s\right)\right]ds\right]. \end{aligned}$$

En ajoutant cette dernière équation avec (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[p_T.\left(x_T^{(u,\xi)} - \widehat{x}_T\right)\right] - E\left[\int_0^T p_s^*.G(s)d\left(\xi_s - \widehat{\xi}_s\right)\right] \\ &-\mathbb{E}\int_0^T \left[\left(x_s^{(u,\xi)} - \widehat{x}_s\right).h_x\left(s,\widehat{x}_s,\widehat{u}_s\right) + p_s^*.B_s\left(u_s - \widehat{u}_s\right) + q_sE_s\left(u_s - \widehat{u}_s\right)\right]ds \\ &+\mathbb{E}\int_0^T \left[-\left(x_t^{(u,\xi)} - \widehat{x}_t\right).h_x\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t\right) + \left(u_t - \widehat{u}_t\right).h_u(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T k(t)d(\xi - \widehat{\xi})_t - \left(x_T^{(u,\xi)} - \widehat{x}_T\right)p_T\right]. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[k(t) - p_s^*.G(s)\right]d\left(\xi_s - \widehat{\xi}_s\right)\right] \\ &-\mathbb{E}\int_0^T \left[\left(-h_u(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) + p_t^*.B_t + q_tE_t\right)\left(u_t - \widehat{u}_t\right)\right]dt. \end{aligned}$$

En posant le Hamiltonien H par sa formule, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \{-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t).(u_t-\widehat{u}_t)\}\,dt+\int_0^T \{k(t)-G^*(t).p_t\}.d\left(\xi-\widehat{\xi}\right)_t\right]\geq 0.$$

Ceci prouve le théorème. ■

Le principal résultat de ce chapitre est le principe du maximum pour des diffusions singulière et est donné par le théorème suivant :

Théorème 11 *Supposons que* $V=\mathbb{R}^n$*.Soit* $\left(\widehat{u},\widehat{\xi}\right)$ *est un contrôle optimal minimisant le coût* J *sur l'ensemble des contrôles admissibles. Si la condition* (1.11) *est satisfaite, Alors on a :*

$$H(t,p(t),q(t),\widehat{x}_t,u_t)\leq H(t,p(t),q(t),\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) \qquad \textit{pout tout } u\in\mathcal{U}\ ;\ dt-pp\ ;\ \mathbb{P}-ps. \tag{1.14}$$

Proof. Soit $\left(\widehat{u},\widehat{\xi}\right)$ un couple optimal, d'aprés le théorème du principe du maximum sous forme intégrale (théorème 10), on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T -H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t).(u_t-\widehat{u}_t)\,dt+\int_0^T (k(t)-G^*(t).p_t).d\left(\xi-\widehat{\xi}\right)_t\right]\geq 0.$$

Si on choisit $\xi=\widehat{\xi}$ on aura :

$$\mathbb{E}\int_0^T [-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t).(u_t-\widehat{u}_t)]\,dt\geq 0.$$

Et pour prouver (1.14), il suffit de prouver que :

$$-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\bullet(u-\widehat{u}_t(\omega))\geq 0 \quad \forall u\in U_1\ ;\ \text{pour tout }\ (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega.$$

On définit pour tout $v\in U$, l'ensemble Δ^v par :

$$\Delta^v=\{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega;-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\bullet(u-\widehat{u}_t(\omega))<0\}.$$

On définit contrôle $\widehat{v}:[0,T]\times\Omega\to A$ par :

$$\widehat{v}(t,\omega)=\begin{cases} v & \textit{si }\ (t,\omega)\in\Delta^{\widehat{v}},\\ \widehat{u}(t,\omega) & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Alors $\widehat{v}$ est adapté et on aura :

$$\mathbb{E}\int_0^T \{-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\bullet(\widehat{v}_t(\omega)-\widehat{u}_t(\omega))\}\,dt<0.$$

Contradiction avec (1.14) ; à moins que $(Leb\otimes\mathbb{P})\{\Delta^v\}=0$ pour tout $v\in A$.; Alors, pour tout $v\in A$:

$$-H_u(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\bullet(v-\widehat{u}_t)\geq 0.$$

Ceci prouve que $\widehat{u}$ minimise la fonction hamiltonien $-H$ sur l'ensemble U_1, ce qui nous donne :

$$H(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\geq H(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,u)\ \text{ pour tout } u\in U.$$

Ceci prouve le théorème. ■

Remarque 12 *1) Si on suppose que* $\mathbb{E}\left[R^{(\widehat{u},\widehat{\xi})}(T)\right]\geq\mathbb{E}\left[R^{(u,\xi)}(T)\right]$, *alors nous obtenons des conditions suffisantes d'optimalité pour notre problème de contrôle.*

Remarque 13 *2) Si on suppose que* $\mathbb{E}\left[R^{(\widehat{u},\widehat{\xi})}(T)\right]=\mathbb{E}\left[R^{(u,\xi)}(T)\right]$, *alors nous obtenons des conditions necessairses et suffisantes pour notre problème de contrôle.*

Chapitre 2

Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires

Dans ce chapitre, nous allons généraliser le résultat du chapitre 1 et établir un principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires. Avec des hypothèses et des conditions en moins, on ne suppose plus que les coefficients du coût sont convexes donc un coût non convexe.

2.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et on suppose que : $\mathcal{F}_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s;\ 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien. soit $T > 0$, A_1 un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$ et $A_2 = ([0,\infty))^m \subset \mathbb{R}^m$.

On suppose que u et ξ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$ $-$adaptés, $\mathcal{B}[0,T] \otimes \mathcal{F}$-mesurable et ξ est un processus croissant, continue à gauche avec limite à droite (caglad) avec $\xi_0 = 0$.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t & = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + G\left(t\right) d\xi_t, \\ x\left(0\right) & = x_0, \end{cases} \quad (\mathbf{2.1})$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de W telle que :

$$\mathbb{E}\left[\left|x_0\right|^m \ \right] < \infty \, ; \ \text{ pour tout } m > 1.$$

Avec $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \to \mathbb{R}^n$; $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \to \mathcal{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right)$ et $G : [0,T] \to \mathcal{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$.

Il est nécessaire de définir l'éspace des contrôles admissible dans le cas des couples et cette définition est donnée par.

Définition 14 *(Admissibilté)* **:** *On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus mesrables, adeptés $(u, \xi) \in U_1 \times U_2$ telle que :*

$$\mathbb{E}\int_0^T \mid v_t|^2 \, dt + \mathbb{E} \mid \eta_T|^2 < \infty.$$

Le couple (u, ξ) est appelé contrôle admissible et la solution $x^{(u,\xi)}$ est appellée la trajectoire du système (2.1) *contrôlée par* (u, ξ).

On note par U_1 et U_2 les ensembles suivants : $U_1 = \{u : [0,T] \times \Omega \mapsto A_1\}$ *et* $U_2 = \{\xi : [0,T] \times \Omega \mapsto A_2\}$.

On considère maintenant la fonction coût suivante :

$$J\left(u, \xi\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + \int\limits_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt + \int_0^T k\left(t\right) d\xi_t\right],$$

avec :

$h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$; $k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

On suppose que :

1) $b, \sigma,\ g$ et h sont dérivables en leurs variables et à dérivées continues et bornées.

2) G et k sont continues.

3/ $\mathbb{E}\left|\int_0^t G\left(s\right) d\eta\right|^2 < \infty.$

Le problème du contrôle optiimal consiste a minimiser la fonctionnelle $J(.)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}$ du contrôle admissible c'est a dire trouver un contrôle $(u,\xi) \in \mathcal{U}$ tel que $J(u,\xi) \leq J(v,\eta)$ pour tout $(v,\eta) \in \mathcal{U}$. C'est à dire :

$$J(u,\xi) = \inf_{(v,\eta)\in\mathcal{U}} J(v,\eta).$$

Remarque 15 *1) Puisque les coefficients de l'équation d'état sont dérivables et à dérivées bornées, donc lipschitziennes, alors cette équation admet une solution forte unique donnée par :*

$$x_t = x_0 + \int_0^t b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \int_0^t \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + \int_0^t G\left(t\right) d\xi_t.$$

De plus cette solution est continue et vérifie pour tout $m > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^m\right] < \infty.$$

2) Les hypothéses sur h et g implique que la fonctionnelle J est bien défini pour chaque contrôle admissible.

2.2 Résultats préliminaires

Soit $x^{(u;\xi)}$ la trajectoire optiimal, c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à (u,ξ).

On considère la perturbation suivante :

$$\left(u^\theta, \xi^\theta\right) = (u,\xi) + \theta\left(v,\eta\right) = \left(u + \theta v, \xi + \theta\eta\right) \ ; \ \forall\left(v,\eta\right) \in \mathcal{U}. \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Soit x^θ la trajectoire associée au contrôle $\left(u^\theta, \xi^\theta\right)$ ∈U, est donnée par :

$$x_t^\theta = x_0 + \int_0^t b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) dB_s + \int_0^t G\left(s\right) d\xi_s^\theta.$$

2.2.1 Estimation des solutions

Proposition 16 *On a*

$$\mathbb{E}\left|x^{\theta}-x\right|^{2}\leq k\theta^{2}. \tag{2.3}$$

Proof. En remplaçant x^{θ} et x par leurs valeurs, on a :

$$\begin{aligned} x^{\theta}-x &= \int_{0}^{t}\left[b\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-b\left(s,x_{s},u_{s}\right)\ \right]ds+\int_{0}^{t}\left[\ \sigma\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-\sigma\left(s,x_{s},u_{s}\right)\right]dB_{s} \\ &\quad +\theta\int_{0}^{t}G\left(s\right)d\eta. \end{aligned}$$

En passant aux ésperances, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|x^{\theta}-x\right|^{2} &\leq \int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|b\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-b\left(s,x_{s},u_{s}\right)\right|^{2}ds+\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|\sigma\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-\sigma\left(s,x_{s},u_{s}\right)\right|^{2}ds \\ &\quad +\theta^{2}\mathbb{E}\left|\int_{0}^{t}G\left(s\right)d\eta\right|^{2}. \end{aligned}$$

Cequi nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|x^{\theta}-x\right|^{2} &\leq 3\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|b\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-b\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}\right)\right|^{2}ds+3\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|b\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}\right)-b\left(s,x_{s},u_{s}\right)\right|^{2}ds \\ &\quad +3\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|\sigma\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta}\right)-\sigma\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}\right)\right|^{2}ds+3\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|\sigma\left(s,x_{s}^{\theta},u_{s}\right)-\sigma\left(s,x_{s},u_{s}\right)\right|^{2}ds \\ &\quad +3\theta^{2}\mathbb{E}\left|\int_{0}^{t}G\left(s\right)d\eta\right|^{2}. \end{aligned}$$

Puisque b et σ sont lipschitzienne en x et en u, on a :

$$\mathbb{E}\left|x^{\theta}-x\right|^{2}\leq 6\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|u_{s}^{\theta}-u_{s}\right|^{2}ds+6\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|x_{s}^{\theta}-x_{s}\right|^{2}ds+3\theta^{2}\mathbb{E}\left|\int_{0}^{t}G\left(s\right)d\eta\right|^{2}.$$

Puisque $u_{s}^{\theta}=u_{s}+\theta v$, alors on obtient :

$$\mathbb{E}\left|x^{\theta}-x\right|^{2}\leq 6\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|x_{s}^{\theta}-x_{s}\right|^{2}ds+M_{t}^{\theta},$$

où :

$$M_{t}^{\theta}=6\theta^{2}\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|v\right|^{2}ds+3\theta^{2}\mathbb{E}\left|\int_{0}^{t}G\left(s\right)d\eta\right|^{2}.$$

Puisque $\mathbb{E}\left|v\right|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}\left|\int_0^t G\left(s\right)d\eta\right|^2 < \infty$, alors on a :

$$M_t^\theta \leq k\theta^2.$$

Ce qui implique que :

$$\mathbb{E}\left|x^\theta - x\right|^2 \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left|x_s^\theta - x_s\right|^2 ds + k\theta^2.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on conclut. ■

2.2.2 Linéarisation de l'équation d'état

On considère x et x^θ les trajéctoires associées réspectivement aux contrôles (u, ξ) et $\left(u^\theta, \xi^\theta\right)$.

On pose :

$$Z = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(x^\theta - x\right). \tag{2.4}$$

Proposition 17 *Z vérifie l'équation linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dZ_t = \left[\ b_x\left(t, x_t, u_t\right)Z_t + b_u\left(t, x_t, u_t\right)v_t\right]dt \\ +\left[\ \sigma_x\left(t, x_t, u_t\right)Z + \sigma_u\left(t, x_t, u_t\right)v\right]dB_t + G\left(t\right)d\eta_t, \\ Z_0 = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Proof. En faisant le dévellopement de Taylor avec rèste intégrale au point (x, u) et à l'ordre 1 des fonctions $b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right)$ et $\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right)$, on a :

$$\begin{aligned} b\left(t, x_\theta, u^\theta\right) - b\left(t, x, u\right) &= \int_0^1 d\lambda b_x\left[\ t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right) \\ &\quad + \int_0^1 d\lambda b_v\left[\ t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(u^\theta - u\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(t, x_\theta, u^\theta\right) - \sigma\left(t, x, u\right) &= \int_0^1 d\lambda\sigma_x\left[\ t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right) \\ &\quad + \int_0^1 d\lambda\sigma_v\left[\ t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(u^\theta - u\right), \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left(x^{\theta}-x\right) &= \int_0^t\int_0^1 d\lambda b_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\left(u^{\theta}-u\right)\right)\right]\left(x^{\theta}-x\right)ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda b_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\left(u^{\theta}-u\right)\right)\right]\left(u^{\theta}-u\right)ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\left(u^{\theta}-u\right)\right)\right]\left(x^{\theta}-x\right)dB_s \\ &\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\left(u^{\theta}-u\right)\right)\right]\left(u^{\theta}-u\right)dB_s \\ &+\theta\int_0^t G\left(s\right)d\eta.\end{aligned}$$

Puisque $u^{\theta}(t)-u(t)=\theta v$, alors on a :

$$\begin{aligned}\left(x^{\theta}-x\right) &= \int_0^t\int_0^1 d\lambda b_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\left(x^{\theta}-x\right)ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda b_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\theta v ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\left(x^{\theta}-x\right)dW_s \\ &\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\theta v dW_s \\ &+\theta\int_0^t G\left(s\right)d\eta.\end{aligned}$$

En divisant par θ, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\left(x^{\theta}-x\right) &= \int_0^t\int_0^1 d\lambda b_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\frac{1}{\theta}\left(x^{\theta}-x\right)ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda b_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]v ds \\ &+\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_x\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\frac{1}{\theta}\left(x^{\theta}-x\right)dB_s \\ &\int_0^t\int_0^1 d\lambda \sigma_v\left[s,x+\lambda\left(x^{\theta}-x\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]v dB_s \\ &+\int_0^t G\left(s\right)d\eta.\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient le résultat.. ■

2.3 Principe du maximum

Puisque (u,ξ) est optimal, alors on a :

$$J\left(u^{\theta},\xi^{\theta}\right)-J\left(u,\xi\right)\geq 0.$$

Ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_{T}^{\theta}\right)-g\left(x_{T}\right)\right]+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\left[h\left(t,x_{t}^{\theta},u_{t}^{\theta}\right)-h\left(t,x_{t},u_{t}\right)\right]dt+\mathbb{E}\int_{0}^{T}k\left(t\right)d\left(\xi_{t}^{\theta}-\xi_{t}\right)\geq 0. \tag{2.6}$$

Proposition 18 *Si on pose*

$$\widetilde{x}_{t}^{\theta}=\frac{1}{\theta}\left(x_{t}^{\theta}-x_{t}\right)-Z_{t}, \tag{2.7}$$

alors on a :

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{x}_{t}^{\theta}\right|^{2}\underset{\theta\rightarrow 0}{\longrightarrow}0. \tag{2.8}$$

Proof. En passant aux différentielles dans (2.7), on obtient :

$$d\widetilde{x}_{\theta}=\frac{1}{\theta}\left(dx_{\theta}-dx\right)-dZ.$$

En remplaçant dx_{θ}, dx et dZ par leurs valeurs, on a :

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x}_{\theta} &= \frac{1}{\theta}\left[\ x_{0}+b\left(t,x^{\theta},u^{\theta}\right)dt+\sigma\left(t,x^{\theta},u^{\theta}\right)dB_{t}+G\left(t\right)d\xi_{t}^{\theta}\right] \\
&\quad -\frac{1}{\theta}\left[\ x_{0}+b\left(t,x,u\right)dt+\sigma\left(t,x,u\right)dB_{t}+G\left(t\right)d\xi\right] \\
&\quad -\left[\ b_{x}\left(t,x_{t},u_{t}\right)Z_{t}+b_{u}\left(t,x_{t},u_{t}\right)v_{t}\right]dt \\
&\quad -\left[\ \sigma_{x}\left(t,x_{t},u_{t}\right)Z+\sigma_{u}\left(t,x_{t},u_{t}\right)v\right]dB_{t}-G\left(t\right)d\eta_{t}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x}_{\theta} &= \frac{1}{\theta}\left[b\left(t,x^{\theta},u^{\theta}\right)-b\left(t,x,u\right)\ \right]dt+\frac{1}{\theta}\left[\ \sigma\left(t,x^{\theta},u^{\theta}\right)-\sigma\left(t,x,u\right)\right]dB_{t} \\
&\quad -\left[b_{x}\left(t,x_{t},u_{t}\right)Z_{t}+b_{u}\left(t,x_{t},u_{t}\right)v_{t}\ \right]dt-\left[\ \sigma_{x}\left(t,x_{t},u_{t}\right)Z+\sigma_{u}\left(t,x_{t},u_{t}\right)v\right]dB_{t}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Par le développement de Taylor avec rèste intégral aux points (x, u) et l'ordre 0 des fonctions $b\left(t, x_\theta, u^\theta\right)$ et $\sigma\left(t, x_\theta, u^\theta\right)$, on a :

$$
\begin{aligned}
b\left(t, x_\theta, u^\theta\right) - b\left(t, x, u\right) &= \int_0^1 d\lambda b_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right) \\
&\quad + \int_0^1 d\lambda b_v \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(u^\theta - u\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(t, x_\theta, u^\theta\right) - \sigma\left(t, x, u\right) &= \int_0^1 d\lambda \sigma_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right) \\
&\quad + \int_0^1 d\lambda \sigma_v \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(u^\theta - u\right).
\end{aligned}
$$

En remplaçanat ces deux quantités dans (2.9), on obtient :

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{x}_\theta &= \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 d\lambda b_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right)\right] dt \\
&\quad \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 d\lambda b_u \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\theta v\right] dt \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 d\lambda \sigma_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\left(x^\theta - x\right)\right] dB_t \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 d\lambda \sigma_u \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\left(\left(u^\theta - u\right)\right)\right]\theta v\right] dB_t \\
&\quad - \left[b_x\left(t, x_t, u_t\right) Z_t + b_u\left(t, x_t, u_t\right) v_t\right] dt - \left[\sigma_x\left(t, x_t, u_t\right) Z + \sigma_u\left(t, x_t, u_t\right) v_t\right] dB_t.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $\left(x^\theta - x\right) = \theta\left(\widetilde{x}_\theta + Z\right)$ et $\left(u^\theta - u\right) = \theta v$ et en passnt aux éspe-rances carrées, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\widetilde{x}_\theta\right|^2 &\leq k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda b_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\theta v\right]\widetilde{x}_\theta\right|^2 dt \\
&\quad + k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda \sigma_x \left[t, x + \lambda\left(x^\theta - x\right), u + \lambda\theta v\right]\widetilde{x}_\theta\right|^2 dt \\
&\quad + \rho^\theta,
\end{aligned}
$$

où ρ^θ est donnée par :

$$\begin{aligned}\rho^\theta &= k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda\left\{b_x\left[s,x+\lambda\left(x^\theta-x\right),u+\lambda\theta v\right]-b_x\left(s,x_s,u_s\right)\right\}Z\right|^2 dt\\ &\quad+k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda\left\{b_u\left[s,x+\lambda\left(x^\theta-x\right),u+\lambda\theta v\right]-b_u\left(s,x_t,u_t\right)\right\}v\right|^2 dt\\ &\quad+k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda\left\{\sigma_x\left[t,x+\lambda\left(x^\theta-x\right),u+\lambda\theta v\right]-\sigma_x\left(t,x_t,u_t\right)\right\}Z\right|^2 dt\\ &\quad+k\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda\left\{\sigma_u\left[t,x+\lambda\left(x^\theta-x\right),u+\lambda\theta v\right]-\sigma_u\left(t,x_t,u_t\right)\right\}v\right|^2 dt.\end{aligned}$$

Puisque b_x et σ_x sont continues et en passant à la limite quand θ tends vers 0 on a :

$$\lim_{\theta\to 0}\rho^\theta = 0.$$

Puisque b_x et σ_x sont bornées, alors (2.9) devient :

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{x_\theta}\right|^2 \leq 2kM\int_0^t \mathbb{E}\left|\widetilde{x_\theta}\right|^2 dt+\rho^\theta.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on conclut.. ■

Pour obtenir le principe du maximum, il suffit de calculer les quantités $\mathbb{E}\left[\ g\left(x_T^\theta\right)-g\left(x_T\right)\right]$ et $\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,x_t^\theta,u_t^\theta\right)-h\left(t,x_t,u_t\right)\ \right]dt$. D'où la proposition suivante :

Proposition 19 *On a :*

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right)-g\left(x_T\right)\right]\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}\mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right).Z_T\right], \qquad \mathbf{(2.10)}$$

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,x_t^\theta,u_t^\theta\right)-h\left(t,x_t,u_t\right)\right]dt\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}\mathbb{E}\int_0^T\left[h_x\left(t,x_t,u_t\right)Z+h_u\left(t,x_t,u_t\right)v\right]dt. \qquad \mathbf{(2.11)}$$

Proof. 1)Montrons (2.10).

En faisant le dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point x et à l'ordre 1 de la fonction $g\left(x_T^\theta\right)$, on a :

$$g\left(x_T^\theta\right)-g(x_T)=\int_0^1 g_x\left[x_T+\lambda\left(x_T^\theta-x_T\right)\right]\left(x_T^\theta-x_T\right)d\lambda.$$

Puisque $\widetilde{x}_t^\theta = \dfrac{1}{\theta}\left(x_t^\theta - x_t\right) - Z_t$, on a :

$$\left(x_t^\theta - x_t\right) = \theta \widetilde{x}_t^\theta + \theta Z_t.$$

Ce qui nous donne :

$$g\left(x_T^\theta\right) - g(x_T) = \int_0^1 g_x\left[x_T + \lambda\theta\left(\widetilde{x}_t^\theta + Z_t\right)\right]\theta\left(\widetilde{x}_t^\theta + Z_t\right)d\lambda.$$

Donc :

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right) - g(x_T)\right] = \mathbb{E}\int_0^1 g_x\left[x_T + \lambda\theta\left(\widetilde{x}_t^\theta + Z_t\right)\right]Z_t d\lambda + \mathbb{E}\int_0^1 g_x\left[x_T + \lambda\theta\left(\widetilde{x}_t^\theta + Z_t\right)\right]\widetilde{x}_t^\theta d\lambda.$$

Puisque g_x est bornée alors en faisant tendre θ vers 0, on obtient le résultat.

2) Montrons (2.11)

De la même manière, en faisant le dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point (x, u) et à l'ordre 1 de la fonction $h\left(t, x_t^\theta, u_t^\theta\right)$, on a :

$$\begin{aligned} h\left(t, x_t^\theta, u_t^\theta\right) - h\left(t, x_t, u_t\right) &= \int_0^1 h_x\left[t, x + \lambda\left(x_T^\theta - x_T\right), u + \lambda\left(u_t^\theta - u_t\right)\right]\left(x_T^\theta - x_T\right)d\lambda \\ &+ \int_0^1 h_x\left[t, x + \lambda\left(x_T^\theta - x_T\right), u + \lambda\left(u_t^\theta - u_t\right)\right]\left(u_T^\theta - u_T\right)d\lambda, \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} h\left(t, x_t^\theta, u_t^\theta\right) - h\left(t, x_t, u_t\right) &= \int_0^1 h_x\left[t, x + \lambda\left(x_T^\theta - x_T\right), u + \lambda\theta v\right]\left(x_T^\theta - x_T\right)d\lambda \\ &+ \int_0^1 h_x\left[t, x + \lambda\left(x_T^\theta - x_T\right), u + \lambda\theta v\right]\theta v d\lambda. \end{aligned}$$

Le résultat sera obtenu de la même manière que précedement et en utilisant les mêmes arguments. ■

En utilisant les résultats de la proposition précedente dans (2.6), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right).Z_T\ \right]+\mathbb{E}\int_0^T\left[\ h_x\left(t,x_t,u_t\right)Z-h_u\left(t,x_t,u_t\right)v\right]dt+\mathbb{E}\int_0^T k\left(t\right)d\eta\geq 0.$$

Pour obtenir le principe du maximum, il suffit de calculer $\mathbb{E}\left[\ g_x\left(x_T\right).Z_T\right]$ et $\mathbb{E}\int_0^T\left[\ h_x\left(t,x_t,u_t\right)Z+h_u\left(t,x_t,u_t\right)v\right]dt$.

On considère l'équation linéaire associée à (2.5) :

$$\begin{cases} d\Phi(t)=b_x\left(t,x_t,u_t\right)\Phi_t dt+\sigma_x\left(t,x_t,u_t\right)\Phi_t dB_t, \\ \Phi(0)=I_d. \end{cases}$$

Cette équation étant linéaire à coefficient bornés alors elle admet une solution forte unique. De plus la solution Φ est inversible et son inverse Ψ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi=\left[-b_x\left(t\right)\Psi\left(t\right)+\Psi\left(t\right)\sigma_x\left(t\right)\sigma_x\left(t\right)\ \right]dt-\sigma_x\left(t\right)\Psi\left(t\right)dB_t, \\ \Psi(0)=I_d. \end{cases}$$

Pour vérifier que Ψ est l'inverse de Φ, on vérifie que $\Phi\Psi=\Psi\Phi=I_d$ en appliquant la formule de Itô.

En suivant la méthode de la résolvante des équations différentielles ordinaires linéaires, on pose $\alpha(t)=\Psi(t)Z(t)$ et par la formule de Itô on a :

$$d\alpha_t=\left[\Psi\left(t\right)b_v\left(t\right)v-\sigma_x\left(t\right)\Psi\left(t\right)\sigma_v\left(t\right)v\ \right]dt+\Psi\left(t\right)\sigma_v\left(t\right)vdB_t+\Psi\left(t\right)G\left(t\right)d\eta_t.$$

On pose :

$$Y=\Phi\left(T\right)g_x\left(x_T\right)+\int_0^T\Phi\left(s\right)h_x\left(s,x_s,u_s\right)ds,$$

$$\beta_t=\mathbb{E}\left[Y/\ \mathcal{F}_t\ \right]-\int_0^t\Phi\left(s\right)h_x\left(s,x_s,u_s\right)ds.$$

On remarque que $\mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right)Z_T\right]=\mathbb{E}\left[\ \Phi\left(T\right)g_x\left(x_T\right)\alpha_T\right]=\mathbb{E}\left[\ \alpha_T\beta_T\right]$. Donc pour calculer $\mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right)Z_T\ \right]$, il suffit de calculer $\mathbb{E}\left[\alpha_T\beta_T\ \right]$.

Puisque Y est de carré integrable , et $\mathcal{F}_t=\sigma\left(B_s;0\leq s\leq t\right)$, et $\mathbb{E}\left[Y\ /\ \mathcal{F}_t\right]$ est une martingale de carré intégrable, alors par la décomposition de Itô on peut réecrire $\mathbb{E}\left[Y/\ \mathcal{F}_t\right]$ sous la forme :

$$\mathbb{E}\left[Y/\ \mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]+\int_0^t Q\left(s\right)dB_s,$$

où $Q(s)$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}\int_0^t |Q(s)|^2 ds < \infty$.
Ceci nous permet d'écrie β_t, sous une forme adapté à notre problème

$$\beta_t = \mathbb{E}[Y\ ] + \int_0^t Q(s)\,dB_s - \int_0^T \Phi(s)\,h_x(s, x_s, u_s)\,ds,$$

ce qui nous donne :

$$d\beta_t = -\Phi(t)\,h_x(t, x_t, u_t)\,dt + Q(t)\,dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\alpha_t\beta_t$ et en passant aux espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\alpha_T\beta_T)\ ] &= \mathbb{E}\int_0^T [\ p_t b_v(t)\,v - p_t\sigma_x(t)\,\sigma_v(t)\,v + Q(t)\,\Psi(t)\,\sigma_v(t)\,v]\,dt \\ &\quad -\mathbb{E}\int_0^T h_x(t)\,Z_t dt + \mathbb{E}\int_0^T p_t G(t)\,d\eta_t,\end{aligned}$$

où p_t est donnée par :

$$p_t = \Psi^*(t)\,\beta_t. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Puisque $\mathbb{E}[\ (\alpha_T\beta_T)] = \mathbb{E}[\ g_x(x_T)\,Z_T]$, alors par (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T [\ p_t b_v(t)\,v - p_t\sigma_x(t)\,\sigma_v(t)\,v + Q(t)\,\Psi(t)\,\sigma_v(t)\,v]\,dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T p_t G d\eta_t - \mathbb{E}\int_0^T h_u(t, x_t, u_t)\,v dt + \mathbb{E}\int_0^T k(t)\,d\eta.\end{aligned}$$

On pose :

$$K_t = Q(t)\,\Psi(t) - p_t\sigma_x(t)\,.$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T [\ p_t b_u(t) + K_t\sigma_u(t) - h_u(t, x_t, u_t)]\,v dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T (p_t G + k(t))\,d\eta_t.\end{aligned} \qquad \textbf{(2.13)}$$

2.3.1 Equation adjointe et processus adjoint

En remplaçant $\Psi^*(t)$ et β_t par leurs valeurs dans (2.12), on obtient la formule du processus adjoint p et qui est donnée par :

$$p(t) = \mathbb{E}\left[\Psi^*(t)\Phi^*(T)g_x(x(T)) \;/\; \mathcal{F}_t\right] + \Psi^*(t)\int_t^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds. \qquad \mathbf{(2.14)}$$

Pour obtenir l'équation adjointe vérifiée par le processus adjoint p, il suffit d'appliquant la formule de Itô à $p(t) = \Psi^*(t)\beta_t$, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[\, b_x^*\left(t,x(t),u(t)\right)p(t) + \sigma_x^*\left(t,x(t)\right)K(t) + h_x\left(t,x(t),u(t)\right)\right]dt - K(t)dB_t, \\ p(T) = g_x(x(T)), \end{cases} \qquad \mathbf{(2.15)}$$

où K est donnée par :

$$K(t) = \Psi^*(t)Q(t) - \sigma_x^*\left(t,x(t)\right)p(t),$$

et G vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^t Q(s)dB_s &= \mathbb{E}\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds \;/\; F_t\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right]. \end{aligned}$$

La forme intégrale solution de l'équation stochastique rétrograde (2.15) est donnée par :

$$p(t) = g_x(x(T)) - \int_t^T \left[\, b_x^*\left(t,x(t),u(t)\right)p(t) + \sigma_x^*\left(t,x(t)\right)K(t) + h_x\left(t,x(t),u(t)\right)\right]dt + \int_t^T K(t)dB_t.$$

Remarque 20 *1) Il est intéressant de voir que la solution de l'équation rétrograde* (2.15) *est donnée par* (2.14) *.*

Remarque 21 *2) L'équation* (2.15) *est une équation rétrograde linéaire à coefficient bornés, donc elle admet une solution forte unique.*

2.3.2 Principe du maximum

On définit le hamiltonien par :

$$H(t,p,K,x,u) = -h(t,x,u) + p.b(t,x,u) + K.\sigma(t,x,u).$$

L'inégalité (2.13) , nous permet d'énnoncer le théorème du principe du maximum sous sa forme intégrale et qui est donnée par.

Théorème 22 *Soit (u,ξ) est un contrôle optimal minimisant le coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles, alors il existe un processus adapté p, donné par* (2.15) *tel que pour tout $(w,\eta) \in \mathcal{U}$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T [\ H_u(t,p_t,K_t,x_t,u_t) \,.\, (u_t - w_t)]\, dt + \int_0^T \{k(t) + G^*(t) \,.p_t\} \,.d(\eta - \xi)_t\right] \geq 0. \tag{2.16}$$

Proof. On pose $v = u - w$ et $\pi = \xi - \eta$, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \mathbb{E}\int_0^T [\ p_t b_u(t) + K_t \sigma_u(t) - h_u(t,x_t,u_t)]\,(u-w)\,dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T (p_t G + k(t))\, d(\eta - \xi)_t \,. \end{aligned}$$

En remplaçant le hamiltonien par sa valeur, on obtient le résultat. ■

Le principal résultat de ce chapitre est le principe du maximum pour des diffusions singulières et est donné par le théorème suivant :

Théorème 23 *Supposons que V=$\mathbb{R}^n$.Soit (u,ξ) est un contrôle optimal minimisant le coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles. Alors on a :*

$$H(t,p(t),K(t),x_t,w_t) \leq H(t,p(t),K(t),x_t,u_t) \quad \textit{pout tout } w \in \mathcal{U}\ ;\ dt\textit{−pp}\ ;\ I\!\!P\textit{−ps}. \tag{2.17}$$

Proof. Soit (u,ξ) un contrôle optimal, d'aprés le théorème du principe du maximum sous forme intégrale (théorème 21), on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t,p_t,K_t,x_t,u_t) \,.\, (u_t - w_t)\, dt + \int_0^T (k(t) - G^*(t) \,.p_t) \,.d(\xi - \eta)_t\right] \geq 0.$$

Cette inéquation est vraie pour tout $(w,\eta) \in \mathcal{U}$. Donc elle est vraie pour $\eta = \xi$. Si on pose $\eta = \xi$, on obtient :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left[H_u\left(t,p_t,K_t,x_t,u_t\right).\left(u_t - w_t\right)\right] dt \geq 0.$$

Et pour prouver (2.17), il suffit de prouver que :

$$H_u\left(t,p_t,K_t,x_t,u_t\right) \bullet \left(u_t - w_t\left(\omega\right)\right) \geq 0 \quad \forall u \in U_1 \text{ ; pour tout } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega.$$

On définit pour tout $v \in U$, l'ensemble Δ^v par :

$$\Delta^v = \left\{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega; -H_u\left(t,p_t,K_t,x_t,u_t\right) \bullet \left(u - w_t\left(\omega\right)\right) < 0\right\}.$$

On définit contrôle $\widehat{v} : [0,T] \times \Omega \to A$ par :

$$\widehat{v}\left(t,\omega\right) = \begin{cases} v & \textit{si } (t,\omega) \in \Delta^{\widehat{v}}, \\ u\left(t,\omega\right) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\widehat{v}$ est adapté et on aura :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left[H_u\left(t,p_t,q_t,x_t,u_t\right) \bullet \left(\widehat{v}_t\left(\omega\right) - u_t\left(\omega\right)\right)\right] dt < 0.$$

Contradiction avec (2.17), sauf si $(dt \otimes \mathbb{P})\left\{\Delta^v\right\} = 0$, pour tout $v \in A$.; Alors, pour tout $v \in A$:

$$H_u\left(t,p_t,q_t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t\right) \bullet \left(v - u_t\right) \geq 0.$$

Puisque u minimise la fonction hamiltonienne $-H$ (où maximise H)sur l'ensemble U_1, alors :

$$H\left(t,p_t,q_t,x_t,u_t\right) \geq H\left(t,p_t,q_t,x_t,w\right) \text{ pour tout } u \in U.$$

Ceci prouve le théorème. ■

Remarque 24 *Les résultats du premier chapitre ont été généraliser sans supposer le principale hypothèse du premier chapitre. De plus, on ne suppose plus que les coefficients de la fonction coût convexes.*

Remarque 25 *Puisque la principale hypothèse du premier chapitre n'est pas utilisée, il est intéressant de voir si les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.*

Chapitre 3

Principe du maximum du second ordre en contrôle stochastique pour des diffusions singulières

On considère un problème des contrôles stochastiques sur lesquelles domaine des contrôles pas convexe, les coefficients ne sont pas linéaires, et on essai d'établir un principe du maximum en utilisant souvent les variations dans la partie absolument continue du contrôle de plus la perturbation convexe dans une terme singulière. Ce résultat est la généralisation de principe du maximum dans les contrôles singuliers établit par Peng [36].

3.1 - Formulation du problème et hypothèses

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et on suppose que : $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma\left(B_s;\ 0 \leq s \leq t\right)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien.

Soit $T > 0$, A_1 un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$ et $A_2 = ([0,\infty))^m \subset \mathbb{R}^m$.

U_1 c'est la classe des processus adaptées mesurables $u : [0,T] \times \Omega \to A_1$.

U_1 c'est la classe des processus adaptées mesurables $\xi : [0,T] \times \Omega \rightarrow A_2$, telle que ξ est un processus croissant, continue à gauche avec limite à droite (caglad) avec $\xi_0 = 0$.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t & = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + G\left(t\right) d\xi_t, \\ x\left(0\right) & = x_0. \end{cases} \quad \textbf{(3.1)}$$

Où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de B telle que :

$$\mathbb{E}\left[\ |x_0|^m\right] < \infty\,;\ \text{ pour tout } m > 1,$$

avec $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \rightarrow \mathcal{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right)$ et $G : [0,T] \rightarrow \mathcal{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$.

Il est nécessaire de définir l'éspace des contrôles admissible dans le cas des couples et cette définition est donnée par.

Définition 26 *(Admissibilté) : On appelle un contrôle admissible c'est un couple des $\mathcal{F}_t-$adaptées $(u,\xi) \in U_1 \times U_2$ telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid u\left(t\right)\mid^2 + \mid \xi_T\mid^2\right] < \infty.$$

Le couple (u,ξ) est appelé contrôle admissible et la solution $x^{(u,\xi)}$ est appellée la trajectoire du système (3.1) *contrôlée par (u,ξ).*

Et on note de plus par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tout les contrôles admissible.

On considère maintenant la fonction coût suivante :

$$J\left(u,\xi\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt + \int_0^T k\left(t\right) d\xi_t\right],$$

avec :

$h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$; et $k : [0,T] \longrightarrow A_2$ des fonctions mesurables.

Hypothèse H 3 :

On suppose que :

1) b, σ, g et h sont deux fois continuments dérivables en x, et leurs dérivées sont continues en (x, u) et uniformement bornées.

2) b, σ sont bornées par $C\left(1+|x|+|u|\right)$.

3) G et k sont continues, et G est bornée.

Le problème du contrôle optiimal consiste a minimiser la fonctionnelle $J(.)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}$ du contrôle admissible, c'est à dire trouver un contrôle $(\widehat{u},\widehat{\xi}) \in \mathcal{U}$, tel que $J(\widehat{u},\widehat{\xi}) \leq J(u,\xi)$ pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U}$. C'est à dire :

$$J(\widehat{u},\widehat{\xi}) = \inf_{(u,\xi)\in\mathcal{U}} J(u,\xi).$$

Remarque 27 *1) Puisque les coefficients de l'équation d'état sont dérivables et à dérivées bornées, donc elle sont Lipschitziennes, alors cette équation admet une solution forte unique donnée par :*

$$x_t^{(u,\xi)} = x_0 + \int_0^t b\left(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s\right) dt + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^{(u,\xi)}, u_s\right) dB_s + \int_0^t G\left(s\right) d\xi_s,$$

de plus cette solution est continue et vérifie pour tout $m > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^m\right] < \infty.$$

Remarque 28 *2) Les hypothéses sur h et g implique que la fonctionnelle J est bien défini pour chaque contrôle admissible.*

3.1 Résultats préliminaires

Soit $x^{(\widehat{u},\widehat{\xi})} = \widehat{x}$ la trajéctoire optiimal, c'est à dire la solution de l'équation d'état (3.1) associée à $(\widehat{u},\widehat{\xi})$.

On considère la perturbation suivante :

$$\left(u^\theta\left(t\right), \xi^\theta\left(t\right)\right) = \begin{cases} \left(v, \widehat{\xi}\left(t\right) + \theta\left(\eta\left(t\right) - \widehat{\xi}\left(t\right)\right)\right) & \text{Si } t \in [\tau, \tau+\theta], \\ \left(\widehat{u}\left(t\right), \widehat{\xi}\left(t\right) + \theta\left(\eta\left(t\right) - \widehat{\xi}\left(t\right)\right)\right) & \text{D'ailleurs,} \end{cases} \quad \textbf{(3.2)}$$

avec $0 \leq \tau < T$ est fixé, θ est strictement positive et suffisament petite, v est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable et η est un processus non décroissante avec $\eta_0 = 0$.

Soit x^θ la trajéctoire associée au contrôle $\left(u^\theta,\xi^\theta\right)\in\mathcal{U}$, x^θ c'est la trajéctoire qui est donnée par :

$$x_t^\theta = x_0 + \int_0^t b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) dB_s + \int_0^t G\left(s\right) d\xi_s^\theta.$$

Comme $(\widehat{u},\widehat{\xi})$ est optiimal, alors on a :

$$0 \leq J\left(u^\theta,\xi^\theta\right) - J(\widehat{u},\widehat{\xi}). \tag{3.3}$$

Soit :

$$\begin{aligned} J_1 &= J\left(u^\theta,\xi^\theta\right) - J(u^\theta,\widehat{\xi}), & (3.4)\\ J_2 &= J(u^\theta,\widehat{\xi}) - J(\widehat{u},\widehat{\xi}). & (3.5)\end{aligned}$$

Alors l'inégalité variationnelle (3.3) devient comme suit :

$$0 \leq \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}J_1 + \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}J_2. \tag{3.6}$$

Soient x_t^θ, $x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}$ sont les trajéctoires associants réspectivement pour $\left(u^\theta,\xi^\theta\right)$ et $(u^\theta,\widehat{\xi})$. Pour simplifier les calcules, on note par :

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= f\left(t,\widehat{x},\widehat{u}\right),\\ f^\theta\left(t\right) &= f\left(t,\widehat{x},u^\theta\right),\end{aligned}$$

où f est notée pour les fonctions suivantes : b, b_x, b_{xx}, σ, σ_x, σ_{xx}, h, h_x, et h_{xx}.

Lemme 29 *Sous l'hypothèses H 3, et la définition de la perturbation* $\left(u^\theta,\xi^\theta\right)$, *on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x^\theta\left(t\right) - x_t^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2\right] &= 0,\\ \lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\left(t\right) - \widehat{x}_t\right|^2\right] &= 0.\end{aligned}$$

Proof. En remplaçant x^θ et $x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} x^\theta(t) - x_t^{(u^\theta,\widehat{\xi})} &= \int_0^t \left[b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - b\left(s, x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}, u_s^\theta\right)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}, u_s^\theta\right)\right] dB_s \\ &+ \theta \int_0^t G(s)\, d\left(\eta - \widehat{\xi}\right)_s . \end{aligned}$$

En passant aux espérance au carée, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left| x^\theta(t) - x_t^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2 &\leq 3\int_0^t \mathbb{E}\left| b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - b\left(s, x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}, u_s^\theta\right)\right|^2 ds \\ &+ 3\int_0^t \mathbb{E}\left| \sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}, u_s^\theta\right)\right|^2 ds \\ &+ 3\theta^2 \mathbb{E}\left| \int_0^t G(s)\, d\left(\eta - \widehat{\xi}\right)_s \right|^2 . \end{aligned}$$

Puisque b et σ sont Lipschitziennes en x, alors :

$$\mathbb{E}\left| x^\theta(t) - x_t^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2 \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left| x^\theta(s) - x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2 ds + 3\theta^2 \mathbb{E}\left| \int_0^t G(s)\, d\left(\eta - \widehat{\xi}\right)_s \right|^2 ,$$

où

$$M_t^\theta = 3\theta^2 \mathbb{E}\left| \int_0^t G(s)\, d\left(\eta - \widehat{\xi}\right)_s \right|^2 .$$

Puisque $\mathbb{E}\left| \int_0^t G(s)\, d\eta \right|^2 < \infty$, alors on a :

$$M_t^\theta \leq k\theta^2 .$$

Ce qui implique que :

$$\mathbb{E}\left| x^\theta(t) - x_t^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2 \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left| x^\theta(s) - x_s^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\right|^2 ds + k\theta^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, le résultat sera établit en utilisant l'inégalité de Buckholder-Davis-Gundy. ■

Lemme 30 *Sous l'hypothèses H 3, on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{x^{\theta}(t)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(t)}{\theta}-z(t)\right|^{2} &= 0, \\ \mathbb{E}\left[\left|z(t)\right|^{2}\right] &< \infty,\end{aligned} \qquad \textit{(}\mathbf{3.7}\textit{)}$$

où z est la solution de l'équation différentielle stochastique contrôlée linéaire suivante :

$$z(t)=\int_{0}^{t} b_{x}(s)\,z(s)\,ds+\int_{0}^{t}\sigma_{x}(s)\,z(s)\,dB_{s}+\int_{0}^{t}G(s)\,d\left(\eta-\widehat{\xi}\right)_{s}. \qquad (\mathbf{3.8})$$

Proof. Soit :

$$y^{\theta}(t)=\frac{x^{\theta}(t)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(t)}{\theta}-z(t).$$

En remplaçant $x^{\theta}(t)$, $x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(t)$ et $z(t)$ par leurs valeurs, on aura :

$$\begin{aligned}y^{\theta}(t) &= \frac{1}{\theta}\int_{0}^{t}\left(x^{\theta}(s)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right)ds-\int_{0}^{t}z(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\theta}\int_{0}^{t}\left(b^{\theta}(s)-b^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right)ds-\int_{0}^{t}b_{x}(s)\,z(s)\,ds \\ &\quad+\frac{1}{\theta}\int_{0}^{t}\left(\sigma^{\theta}(s)-\sigma^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right)dB_{s}-\int_{0}^{t}\sigma_{x}(s)\,z(s)\,dB_{s}.\end{aligned}$$

En appliquant le dévellopement de Taylor avec un rèste intégrale d'ordre 1 au point $x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}$ pour les fonctions $b^{\theta}(s)$ et $\sigma^{\theta}(s)$ on a :

$$\begin{aligned}& b^{\theta}(s)-b^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) \\ =& \int_{0}^{1}d\lambda b_{x}\left(s,x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)+\lambda\left[x^{\theta}(s)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right],u^{\theta}(s)\right).\left(x^{\theta}(s)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right) \\ & \sigma^{\theta}(s)-\sigma^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) \\ =& \int_{0}^{1}d\lambda\sigma_{x}\left(s,x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)+\lambda\left[x^{\theta}(s)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right],u^{\theta}(s)\right).\left(x^{\theta}(s)-x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right).\end{aligned}$$

Alors $y^{\theta}(t)$ devient :

$$\begin{aligned}
y^{\theta}(t) &= \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right) ds - \int_0^t z(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^t \int_0^1 d\lambda b_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right).\left(x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right) ds \\
&\quad - \int_0^t b_x(s) z(s)\, ds - \int_0^t \sigma_x(s) z(s)\, dB_s \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\int_0^t \int_0^1 d\lambda \sigma_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right).\left(x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right) dB_s \\
&= \int_0^t \int_0^1 d\lambda b_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right) y^{\theta}(s)\, ds \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 d\lambda \sigma_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right) y^{\theta}(s)\, dB_s + \rho^{\theta}(t),
\end{aligned}$$

où $\rho^{\theta}(t)$ donnée par :

$$\begin{aligned}
&\rho^{\theta}(t) \\
&= \int_0^t \left[\int_0^1 d\lambda b_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right) - b_x\left(s, \widehat{x}(s), \widehat{u}(s)\right) z(s)\right] ds \\
&\quad + \int_0^t \left[\int_0^1 d\lambda \sigma_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right) - \sigma_x\left(s, \widehat{x}(s), \widehat{u}(s)\right) z(s)\right] dB_s.
\end{aligned}$$

En passant a l'ésperance on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y^{\theta}(t)\right|^2 &\leq 3\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda b_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right).y^{\theta}(s)\right|^2 ds \\
&\quad + 3\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 d\lambda \sigma_x\left(s, x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s) + \lambda\left[x^{\theta}(s) - x^{(u^{\theta},\widehat{\xi})}(s)\right], u^{\theta}(s)\right).y^{\theta}(s)\right|^2 ds \\
&\quad + 3\mathbb{E}\left|\rho^{\theta}(t)\right|^2.
\end{aligned}$$

Comme b_x et σ_x sont bornées, alors on a :

$$\mathbb{E}\left|y^{\theta}(t)\ \right|^2 \leq 6C\int_0^t \mathbb{E}\left|y^{\theta}(s)\ \right|^2 ds + 3\mathbb{E}\left|\rho^{\theta}(t)\ \right|^2.$$

De plus les coefficients b_x et σ_x sont continues et bornées, et en appliquant le lemme 26 et théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left| \rho^\theta (t) \ \right|^2 = 0.$$

Alors par le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{E} \left| \ y^\theta (t) \right|^2 \leq 0 \exp (6CT) = 0.$$

Finalement on obtient (3.7) par l'inégalité de de Bukholder-Davis-Gundy. ■

Lemme 31 *Sous l'hypothèses H 3, l'éstimation suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| x^{(u^\theta, \widehat{\xi})} (t) - \widehat{x} (t) - x_1 (t) - x_2 (t) \right|^2 \right] \leq C\theta^2, \qquad \textbf{(3.09)}$$

où $x_1 (t)$, $x_2 (t)$ sont solutions des :

$$\begin{aligned} x_1 (t) &= \int_0^t \left(\ b_x (s) x_1 (s) + b^\theta (s) - b (s) \right) ds \\ &+ \int_0^t \left(\ \sigma_x (s) x_1 (s) + \sigma^\theta (s) - \sigma (s) \right) dB_s, \end{aligned} \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$\begin{aligned} x_2 (t) &= \int_0^t \left(b_x^\theta (s) - b_x (s) \right) x_1 (s) ds \\ &+ \int_0^t \left(b_x (s) x_2 (s) + \frac{1}{2} b_{xx} (s) x_1 (s) x_1 (s) \right) ds \\ &+ \int_0^t \left(\sigma_x^\theta (s) - \sigma_x (s) \right) x_1 (s) dB_s \\ &+ \int_0^t \left(\sigma_x (s) x_2 (s) + \frac{1}{2} \sigma_{xx} (s) x_1 (s) x_1 (s) \right) dB_s. \end{aligned} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Proof. Tout d'abord on montre que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| x_1 (t) \right|^2 \right] \leq C\theta, \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_2(t)|^2\right]\leq C\theta^2. \tag{3.13}$$

En effet, en utilusant l'ingalité $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x_1(t)|^2 &\leq 4\int_0^t\mathbb{E}|\ b_x(s,x(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds\\ &+4\int_0^t\mathbb{E}|\ \sigma_x(s,x(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds\\ &+4\int_0^t\mathbb{E}\Big|\ b\left(s,\widehat{x}(s),u^\theta(s)\right)-b(s,\widehat{x}(s),u(s))\,x_1(s)\Big|^2\,ds\\ &+4\int_0^t\mathbb{E}\Big|\ \sigma\left(s,\widehat{x}(s),u^\theta(s)\right)-\sigma(s,\widehat{x}(s),u(s))\,x_1(s)\Big|^2\,ds.\end{aligned}$$

De la définition de $u^\theta(s)$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x_1(t)|^2 &\leq 4\int_0^t\mathbb{E}|\ b_x(s,x(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds\\ &+4\int_0^t\mathbb{E}|\ \sigma_x(s,x(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds\\ &+4\int_\tau^{\tau+\theta}\mathbb{E}|\ b(s,\widehat{x}(s),v)-b(s,\widehat{x}(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds\\ &+4\int_\tau^{\tau+\theta}\mathbb{E}|\ \sigma(s,\widehat{x}(s),v)-\sigma(s,\widehat{x}(s),u(s))\,x_1(s)|^2\,ds.\end{aligned}$$

Alors d'après l'hypothèse H 3 on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x_1(t)|^2 &\leq 8M\int_0^t\mathbb{E}|x_1(s)|^2\,ds+8\int_\tau^{\tau+\theta}c\left(1+\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|x_1(s)|^2\right)ds\\ &\leq 8M\int_0^t\mathbb{E}|x_1(s)|^2\,ds+8c(1+K)\,\theta.\end{aligned}$$

Par les inégalités de Gronwall et Bukholder-Davis-Gundy on obtient (3.12).

De la même manière on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_2(t)\right|^2 \leq\; & 6\int_0^t \mathbb{E}\left|\, b_x(s,x(s),u(s))\,x_2(s)\right|^2 ds \\
& +6\int_0^t \mathbb{E}\left|\, b\left(s,\widehat{x}(s),u^\theta(s)\right)-b\left(s,\widehat{x}(s),u(s)\right)x_1(s)\right|^2 ds \\
& +3\int_0^t \mathbb{E}\left|\, b_{xx}(s,x(s),u(s))\,x_1(s)\,x_1(s)\right|^2 ds \\
& +6\int_0^t \mathbb{E}\left|\, \sigma_x(s,x(s),u(s))\,x_2(s)\right|^2 ds \\
& +6\int_0^t \mathbb{E}\left|\, \sigma\left(s,\widehat{x}(s),u^\theta(s)\right)-\sigma\left(s,\widehat{x}(s),u(s)\right)x_1(s)\right|^2 ds \\
& +3\int_0^t \mathbb{E}\left|\, \sigma_{xx}(s,x(s),u(s))\,x_1(s)\,x_1(s)\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèses H 3, et la définition de $u^\theta(s)$ et (3.12) on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_2(t)\right|^2 &\leq 6M\left(2\int_0^t \mathbb{E}\left|x_2(s)\right|^2 ds+2\int_\tau^{\tau+\theta}\theta ds+\int_0^t\theta^2 ds\right) \\
&\leq 12M\int_0^t \mathbb{E}\left|x_2(s)\right|^2 ds+6M(2+T)\,\theta^2.
\end{aligned}$$

Par les inégalités de Gronwall et Bukholder-Davis-Gundy on obtient (3.13).
On pose

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(t) &= \widehat{x}(t)-\int_0^t G(s)\,d\widehat{\xi}_s, \\
\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t) &= x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\int_0^t G(s)\,d\widehat{\xi}_s.
\end{aligned}$$

Alors il est clair que

$$x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widehat{x}(t)-x_1(t)-x_2(t)=\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)-x_2(t).$$

Les relations (3.12) et (3.13) vont nous permettre de démontrer la relation (3.9).
Pour la simplicité des calculs on pose $x_3=x_1+x_2$.

En appliquant le dévellopement de Taylor avec un rèste intégrale d'ordre 2 au point $\widetilde{x}$ pour les fonctions $b\left(t, \widetilde{x}+x_3, u_\theta\right)$ et $\sigma\left(t, \widetilde{x}+x_3, u_\theta\right)$ on a :

$$\begin{aligned} b\left(t, \widetilde{x}\left(t\right)+x_3\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) &= b\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right)+b_x\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) x_3\left(t\right) \\ &\quad +\int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta b_{xx}\left(t, \widetilde{x}+\lambda\theta x_3\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) x_3\left(t\right) x_3\left(t\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(t, \widetilde{x}\left(t\right)+x_3\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) &= \sigma\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right)+\sigma_x\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) x_3\left(t\right) \\ &\quad +\int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta \sigma_{xx}\left(t, \widetilde{x}+\lambda\theta x_3\left(t\right), u_\theta\left(t\right)\right) x_3\left(t\right) x_3\left(t\right). \end{aligned}$$

En passant aux intégrales on obtient :

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t b\left(s, \widetilde{x}(s)+x_3(s), u_\theta(s)\right) ds+\int_0^t \sigma\left(s, \widetilde{x}(s)+x_3(s), u_\theta(s)\right) dB_s \\
= & \int_0^t b\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right) ds+\int_0^t b_x\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right) x_3(t) ds \\
& +\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta b_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s)+\lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)\right) x_3(s) x_3(s) ds \\
& +\int_0^t \sigma\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right) ds+\int_0^t \sigma_x\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right) x_3(t) ds \\
& +\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta \sigma_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s)+\lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)\right) x_3(s) x_3(s) dB_s \\
= & \int_0^t b\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right) ds+\int_0^t b_x\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right) x_3(t) ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^t b_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right) x_3(s) x_3(s) ds \\
& +\int_0^t \sigma\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right) dB_s+\int_0^t \sigma_x\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right) x_3(t) dBs \\
& +\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right) x(s) x_3(s) dB_s \\
& +\int_0^t \left[\, b\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right)-b\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] ds \\
& +\int_0^t \left[\, b_x\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right)-b_x\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] x_3(s) ds \\
& +\int_0^t \left[\, \sigma\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right)-\sigma\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] dB_s \\
& +\int_0^t \left[\, \sigma_x\left(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)\right)-\sigma_x\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] x_3(s) dB_s \\
& +\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta \left[\, b_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s)+\lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)\right)-b_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] x_3(s) x_3(s) ds \\
& +\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta \left[\, \sigma_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s)+\lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)\right)-\sigma_{xx}\left(s, \widetilde{x}(s), u(s)\right)\right] x_3(s) x_3(s) dB_s .
\end{aligned}
$$

En remplaçant x_3 par sa valeur on obtient :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}(t) + x_1(t) + x_2(t) - x_0 + \int_0^t \Gamma^\theta(s)\, ds + \int_0^t \Sigma^\theta(s)\, dB_s \\
= &\int_0^t b(s, \widetilde{x}(s) + x_3(s), u_\theta(s))\, ds + \int_0^t b(s, \widetilde{x}(s) + x_3(s), u_\theta(s))\, dB_s,
\end{aligned}$$

où $\Gamma^\theta(s)$ et $\Sigma^\theta(s)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta(s) = {} & \frac{1}{2}\int_0^t b_{xx}(s, \widetilde{x}(s), u(s))(x_2(s)x_2(s) + 2x_1(s)x_2(s)) \\
& + [\, b_x(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)) - b(s, \widetilde{x}(s), u(s))]\, x_2(s) \\
& + \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta\, [\, b_{xx}(s, \widetilde{x}(s) + \lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)) \\
& - b_{xx}(s, \widetilde{x}(s), u(s))(x_1(s) + x_2(s))(x_1(s) + x_2(s))\ ],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^\theta(s) = {} & \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_{xx}(s, \widetilde{x}(s), u(s))(x_2(s)x_2(s) + 2x_1(s)x_2(s)) \\
& + [\, \sigma_x(s, \widetilde{x}(s), u_\theta(s)) - \sigma(s, x(s), u(s))]\, x_2(s) \\
& + \int_0^1 \int_0^1 d\lambda d\theta\, [\sigma_{xx}(s, \widetilde{x}(s) + \lambda\theta x_3(s), u_\theta(s)) \\
& - \sigma_{xx}(s, \widetilde{x}(s), u(s))(x_1(s) + x_2(s))(x_1(s) + x_2(s))\ ],
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}^{(u^\theta, \widehat{\xi})}(t) - \widetilde{x}(t) - x_1(t) - x_2(t) \\
= &\int_0^t \left[b\left(s, \widetilde{x}^{(u^\theta, \widehat{\xi})}(s), u_\theta(s)\right) - b(s, \widetilde{x}(s) + x_1(s) + x_2(s), u_\theta(s)) \right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, \widetilde{x}^{(u^\theta, \widehat{\xi})}(s), u_\theta(s)\right) - \sigma(s, \widetilde{x}(s) + x_1(s) + x_2(s), u_\theta(s)) \right] dB_s \\
&+ \int_0^t \Gamma^\theta(s)\, ds + \int_0^t \Sigma^\theta(s)\, dB_s.
\end{aligned}$$

En passant l'ésperance au carrée on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)-x_2(t)\right|^2\\
\leq\ & 3\int_0^t \mathbb{E}\left|b\left(s,\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(s),u_\theta(s)\right)-b\left(s,\widetilde{x}(s)+x_1(s)+x_2(s),u_\theta(s)\right)\right|^2 ds\\
&+3\int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma\left(s,\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(s),u_\theta(s)\right)-\sigma\left(s,\widetilde{x}(s)+x_1(s)+x_2(s),u_\theta(s)\right)\right|^2 ds\\
&+6\int_0^t \mathbb{E}\left|B^\theta(s)\right|^2 ds+6\int_0^t \mathbb{E}\left|\Sigma^\theta(s)\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Puisque b et σ sont Lipschitziennes alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)-x_2(t)\right|^2\\
\leq\ & 6K\int_0^t \mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(s)-\widetilde{x}(s)-x_1(s)-x_2(s)\right|^2 ds\\
&+6\int_0^t \mathbb{E}\left|\ B^\theta(s)\right|^2 ds+6\int_0^t \mathbb{E}\left|\ \Sigma^\theta(s)\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Puisque b_x et b_{xx} sont bornnées alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\ B^\theta(s)\right|^2 \leq\ & 2M\mathbb{E}\left|\ x_2(s)\,x_2(s)\right|^2+8\mathbb{E}\left|\ x_1(s)\,x_2(s)\right|^2+4M\mathbb{E}\left|\ x_2(s)\right|^2\\
&+2M\mathbb{E}\left|(x_1(s)+x_2(s)).(x_1(s)+x_2(s))\ \right|^2.
\end{aligned}$$

Par (3.12), (3.13) et inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\mathbb{E}\left|B^\theta(s)\ \right|^2 \leq C\left(\theta^4+\theta^2+\theta\sqrt{\theta}\right)=\circ(\theta).$$

De même manière et puisque σ_x et σ_{xx} sont bornnées on a :

$$\mathbb{E}\left|\Sigma^\theta(s)\ \right|^2 \leq C\left(\theta^4+\theta^2+\theta\sqrt{\theta}\right)=\circ(\theta).$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)-x_2(t)\right|^2\\
\leq\ & 6K\int_0^t \mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(s)-\widetilde{x}(s)-x_1(s)-x_2(s)\right|^2 ds\\
&+\circ(\theta).
\end{aligned}$$

Alors par le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)-x_2(t)\right|^2\leq\circ(\theta)\exp(6CT)=\circ(\theta).$$

Finalement on obtient (3.9) par l'inégalité de de Bukholder-Davis-Gundy. ■

Remarque 32 *Les équations* (3.10) *et* (3.11) *sont appellées réspectivement équation variationnelle du premier ordre et du second ordre.*

Remarque 33 *On introduit l'équation* (3.11) *car si on utillise seulement l'équation* (3.10) *on aura l'estimation suivante :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\widetilde{x}^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)-\widetilde{x}(t)-x_1(t)\right|^2\right]\leq C\theta=O(\theta).$$

Lemme 34 *Sous l'hypothèses du lemme* 28*, on a :*

$$\lim_{\theta\to0}\frac{J_1}{\theta}=\mathbb{E}\left[z(T)\,g_x(\widehat{x}(T))\ \right]+\mathbb{E}\int_0^T z(t)\,h_x(t)\,dt+\mathbb{E}\int_0^T k(t)\,d\left(\eta-\widehat{\xi}\right)_t. \quad \textbf{(3.14)}$$

Proof. En appliquant le dévellopement de Taylor avec un reste intégrale d'ordre 1 au point $x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)$ pour les fonctions $h\left(t,x^\theta(t),u_\theta(t)\right)$ et $g\left(x_T^\theta\right)$ on a :

$$\begin{aligned}h\left(t,x^\theta(t),u_\theta(t)\right)&=h\left(t,x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t),u_\theta(t)\right)\\&\quad+\int_0^1 d\lambda h_x\left(t,x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)+\lambda\left[x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)\right],u^\theta(t)\right).\left(x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\left(x_T^\theta\right)&=g\left(x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(T)\right)\\&\quad+\int_0^1 d\lambda g_x\left(x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(T)+\lambda\left[x^\theta(T)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(T)\right]\right).\left(x^\theta(T)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(T)\right).\end{aligned}$$

Alors on peut réecrir la fonction J_1 comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{J_1}{\theta}&=\frac{J\left(u^\theta,\xi^\theta\right)-J(u^\theta,\widehat{\xi})}{\theta}\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 d\lambda h_x\left(t,x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)+\lambda\left[x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)\right],u^\theta(t)\right).\left(\frac{x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)}{\theta}\right)\right]\\&\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^1 d\lambda g_x\left(x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)+\lambda\left[x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)\right]\right).\left(\frac{x^\theta(t)-x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}(t)}{\theta}\right)\right]\\&\quad+\mathbb{E}\int_0^T k(t)\,d\left(\eta-\widehat{\xi}\right)_t.\end{aligned}$$

Ainsi g_x et h_x sont des fonctions continues et bornnées, et d'apres (3.2), (3.7) et le lemme 26 et par passage à la limite quand θ tend vers zéro on en conclure. ■

Lemme 35 *Sous l'hypothèses du lemme 28, on a*

$$\begin{aligned} \frac{J_2}{\theta} &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)+x_2\left(T\right)\right) + \int_0^T h_x\left(t\right)\left(x_1\left(t\right)+x_2\left(t\right)\right)dt\right] \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[g_{xx}\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)x_1\left(T\right)x_1\left(T\right) + \int_0^T h_{xx}\left(t\right)x_1\left(t\right)x_1\left(t\right)dt\right] \\ &\mathbb{E}\int_0^T \left(h^\theta\left(t\right)-h\left(t\right)\right)dt+\circ\left(\theta\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Proof. D'aprés le définition de la fonctionelle J_2, on a

$$\begin{aligned} J_2 &= J(u^\theta,\widehat{\xi})-J(\widehat{u},\widehat{\xi}) \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left[h\left(t,x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(t,\widehat{x}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)\right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[g\left(x^{(u^\theta,\widehat{\xi})}\left(T\right)\right)-g\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En appliquant le dévellopement de Taylor avec un reste intégrale d'ordre 2 au point $x(t)$ pour les fonctions $h(t,x+x_3,u_\theta)$ et $g(x+x_3)$ on a :

$$\begin{aligned} h\left(t,x\left(t\right)+x_3\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right) &= h\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)+h_x\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)x_3\left(t\right) \\ &+\frac{1}{2}h_{xx}\left(t,x,u_\theta\left(t\right)\right)x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)+\circ\left(\theta\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(x\left(T\right)+x_3\left(T\right)\right) &= g\left(x\left(T\right)\right)+g_x\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(t\right) \\ &+\frac{1}{2}g_{xx}\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)+\circ\left(\theta\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &h\left(t,x\left(t\right)+x_3\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right) \\ =\ &\left[h\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]+h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)x_3\left(t\right) \\ &+\frac{1}{2}h_{xx}\left(t,x,u\left(t\right)\right)x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)+\circ\left(\theta\right) \\ &+\left[h_x\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h_x\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]x_3\left(t\right) \\ &+\frac{1}{2}\left[h_{xx}\left(t,x,u_\theta\left(t\right)\right)-h_{xx}\left(t,x,u\left(t\right)\right)\right]x_3\left(t\right)x_3\left(t\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(x\left(T\right)+x_3\left(T\right)\right)-g\left(x\left(T\right)\right) &= g_x\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(T\right) \\ &+\frac{1}{2}g_{xx}\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(T\right)x_3\left(T\right)+\circ\left(\theta\right). \end{aligned}$$

Donc on peut réecrire (3.16) comme suit :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,x\left(t\right)+x_3\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\ \right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[\ g\left(x\left(T\right)+x_3\left(T\right)\right)-g\left(x\left(T\right)\right)\right]+\circ\left(\theta\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\ \right]dt+\mathbb{E}\int_0^T h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)x_3\left(t\right)dt \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T h_{xx}\left(t,x,u\left(t\right)\right)x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)dt \\ &+\mathbb{E}\int_0^T\left[h_x\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h_x\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\ \right]x_3\left(t\right)dt \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T\left[h_{xx}\left(t,x,u_\theta\left(t\right)\right)-h_{xx}\left(t,x,u\left(t\right)\right)\ \right]x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)dt \\ &+\mathbb{E}\left[g_x\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(t\right)\ \right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ g_{xx}\left(x\left(T\right)\right)x_3\left(t\right)x_3\left(t\right)\right]+\circ\left(\theta\right) \\ &= \circ\left(\theta\right)+\alpha\left(T\right)+\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,x\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]dt \\ &+\mathbb{E}\left[g_x\left(x\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)+x_2\left(T\right)\right)\ \right]+\mathbb{E}\int_0^T h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\left(x_1\left(t\right)+x_2\left(t\right)\right)dt \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T h_{xx}\left(t,x,u\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)x_1\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ g_{xx}\left(x\left(T\right)\right)x_1\left(t\right)x_1\left(t\right)\right], \quad \textbf{(3.17)} \end{aligned}$$

où $\alpha(T)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\alpha(T) &= \mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, x(t), u_\theta(t)\right) - h_x\left(x(t), u(t)\right)\ \right]\left(x_1(t) + x_2(t)\right)dt \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \left[h_{xx}\left(t, x, u(t)\right)\left(\ x_1(t)\, x_2(t) + x_2(t)\, x_1(t) + x_2(t)\, x_2(t)\right)\right]dt \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \left[\ h_{xx}\left(t, x(t), u_\theta(t)\right) - h_{xx}\left(t, x(t), u(t)\right)\right]\left(x_1(t) + x_2(t)\right)\left(x_1(t) + x_2(t)\right)dt \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ g_{xx}\left(x(T)\right) x_1(T)\, x_2(T)\right] + \frac{1}{2}E\left[\ g_{xx}\left(x(T)\right) x_2(T)\, x_1(T)\right] \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[g_{xx}\left(x(T)\right) x_2(T)\, x_2(T)\ \right].
\end{aligned}$$

De la définition de u_θ et l'hypothèses, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K}\alpha(T) &\leq \mathbb{E}\left[\ x_1(T)\, x_2(T)\right] + \mathbb{E}\left[\ x_2(T)\, x_1(T)\right] + \mathbb{E}\left[\ x_2(T)\, x_2(T)\right] \\
&+\int_\tau^{\tau+\theta}\mathbb{E}\left[x_1(t) + x_2(t)\ \right]dt + \int_0^T \mathbb{E}\left[\ \left(x_1(t) + x_2(t)\right)\left(x_1(t) + x_2(t)\right)\right]dt \\
&+\int_0^T \mathbb{E}\left[\ x_1(t)\, x_2(t)\right]dt + \int_0^T \mathbb{E}\left[\ x_2(t)\, x_1(t)\right]dt + \int_0^T \mathbb{E}\left[\ x_2(t)\, x_2(t)\right]dt,
\end{aligned}$$

où $K = \max\left\{MT, \frac{1}{2}C\right\}$. Par (3.12), (3.13) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\alpha(T) \leq K\theta\left(\sqrt{\theta} + \theta\right) + K\theta\left(2\theta\sqrt{\theta} + \theta + \theta^2\right) + K\theta\sqrt{\theta} + K\theta^2 = \circ(\theta).$$

En remplaçant $\alpha(T)$ par sa valeur dans (3.17) on en conclure. ■

3.2 Principe du maximum du second ordre

Le principe du maximum généraliré sera établi essentiellement à partir du lemme 31 et lemme 32 et les relations (3.14) et (3.15)

Mais dans ce cas on a deux estimations à faire. C'est-à-dire dans (3.14) on calcule en première l'éstimation du premier ordre :

$$\mathbb{E}\left[z(T)\, g_x\left(\widehat{x}(T)\right) + \int_0^T z(t)\, h_x(t)\, dt\right],$$

et :

$$\mathbb{E}\left[g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)+x_2\left(T\right)\right)\ \ +\int_0^T h_x\left(t\right)\left(x_1\left(t\right)+x_2\left(t\right)\right)dt\right],$$

puis dans (3.15) celle du second ordre :

$$\mathbb{E}\left[g_{xx}\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)x_1\left(T\right)\right)\ \ +\int\limits_0^T h_{xx}\left(t\right)\left(x_1\left(t\right)x_1\left(t\right)\right)dt\right].$$

Notation 36 *Pour la simplicité des calculs, on note :* $f\left(x\right)=f\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)$ *et* $f^{\theta}\left(x\right)=f\left(t,x\left(t\right),u_{\theta}\left(t\right)\right)$ *pour* $f=b,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma,\ \sigma_x,\ \sigma_{xx},\ h,\ h_x,\ h_{xx},\ g,\ g_x,$ *et* g_{xx}.

3.2.1 Principe du maximum du premier ordre

L'éstimation du premier ordre consiste à calculer la partie où on a les dérivées du premier ordre dans (3.14) et (3.15) . C'est-à-dire les quantités $\mathbb{E}\left[z\left(T\right)g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\ \right]$ et $\mathbb{E}\left[g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)+x_2\left(T\right)\right)\ \right]$, Les quatités $\mathbb{E}\left[\int_0^T z\left(t\right)h_x\left(t\right)dt\right]$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T h_x\left(t\right)\left(x_1\left(t\right)+x_2\left(t\right)\right)dt\right]$ se simplifiera dans les calcules.

On considère l'équation linéaire associée aux équations (3.10) et (3.11) :

$$\begin{cases} d\Phi_1\left(t\right)=b_x\left(t\right)\Phi_1\left(t\right)dt+\sigma_x\left(t\right)\Phi_1\left(t\right)dB_t, \\ \Phi_1\left(0\right)=I_d. \end{cases}$$

Cette équation est linéaire et à coefficient bornés, donc elle admet une solution forte unique. De plus la solution Φ_1 est inversible et son inverse Ψ_1 vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi_1\left(t\right)=\left[\ \sigma_x^*\left(t\right)\Psi_1\left(t\right)\sigma_x\left(t\right)-b_x\left(t\right)\Psi_1\left(t\right)\right]dt-\sigma_x\left(t\right)\Psi_1\left(t\right)dB_t, \\ \Psi_1\left(0\right)=I_d. \end{cases}$$

Pour vérifier que Ψ_1 est l'inverse de Φ_1, on vérifie que $\Phi_1\Psi_1=\Psi_1\Phi_1=I_d$ en appliquant la formule de Itô. De plus, Φ_1 et Ψ_1 satisfaits :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\Phi_1\left(t\right)\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\Psi_1\left(t\right)\right|^2\right]<\infty. \qquad \textbf{(3.18)}$$

En suivant la méthode de la résolvante des équations différentielle ordinaires linéaires, on pose :

$$\alpha_1(t) = \Psi_1(t)(x_1(t) + x_2(t)), \quad \textbf{(3.19)}$$

$$\beta_1(t) = \Psi_1(t) z(t). \quad \textbf{(3.20)}$$

Par la formule d'Itô on a :

$$\begin{aligned} d\alpha_1(t) &= d(\Psi_1(t)(x_1(t) + x_2(t))) \\ &= (d\Psi_1(t))(x_1(t) + x_2(t)) + \Psi_1(t)(d((x_1(t) + x_2(t)))) \\ &\quad + \langle \Psi_1(t); (x_1(t) + x_2(t)) \rangle dt \\ &= \Psi_1(t) \left[\left(b^\theta(t) - b(t)\right) + \left(b_x^\theta(t) - b_x(t)\right) x_1(t) \right] dt \\ &\quad - \sigma_x^*(t) \Psi_1(t) \left[\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right) + \left(\sigma_x^\theta(t) - \sigma_x(t)\right) x_1(t) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_1(t) b_{xx}(t) x_1(t) x_1(t) dt \\ &\quad + \Psi_1(t) \left[\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right) + \left(\sigma_x^\theta(t) - \sigma_x(t)\right) x_1(t) \right] dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_1(t) \sigma_{xx}(t) x_1(t) x_1(t) dB_t. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} d\beta_1(t) &= d(\Psi_1(t) z(t)) \\ &= (d\Psi_1(t)) z(t) + \Psi_1(t)(dz(t)) + \langle \Psi_1(t); z(t) \rangle dt \\ &= \Psi_1(t).G(t) d(\eta - \xi)_t. \end{aligned}$$

On pose :

$$X_1 = \Phi_1^*(t) g_x(\widehat{x}(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds, \quad \textbf{(3.21)}$$

$$Y_1(t) = E[X_1 \, / \, \mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds. \quad \textbf{(3.22)}$$

On remarque à partir de (3.19) , (3.20), (3.21) et (3.22) que :

$$\begin{aligned} E[z(T) g_x(\widehat{x}(T))] &= E[\Phi_1^*(T) g_x(\widehat{x}(T)) \beta_1(T)] \\ &= E[\beta_1(T) Y_1(T)], \quad \textbf{(3.23)} \\ E[g_x(\widehat{x}(T))(x_1(T) + x_2(T))] &= E[\Phi_1^*(T) g_x(\widehat{x}(T)) \alpha_1(T)] \\ &= E[\alpha_1(T) Y_1(T)]. \quad \textbf{(3.24)} \end{aligned}$$

Donc pour calculer les premièrs termes $\mathbb{E}\left[z(T)\, g_x(\widehat{x}(T))\ \right]$ et $\mathbb{E}\left[g_x(\widehat{x}(T))\,(x_1(T)+x_2(T))\ \right]$ de l'éstimation du premier ordre, il suffit de calculer $\mathbb{E}\left[\beta_1(T)\, Y_1(T)\ \right]$ et $\mathbb{E}\left[\alpha_1(T)\, Y_1(T)\ \right]$. Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$, $X_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X_1 \ / \ \mathcal{F}_t]$ est une martingale de carré intégrable, alors la décomposition de Itô nous donne :

$$\mathbb{E}[X_1 \ / \ \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_1\ ] + \int_0^t Q_1(s)\, dB_s,$$

où $Q_1(s)$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}\int_0^T |Q_1(s)|^2\, ds < \infty$.

Donc on peut utiliser une formule de $Y_1(t)$ mieux adaptée à notre problème :

$$Y_1(t) = \mathbb{E}[X_1\ ] + \int_0^t Q_1(s)\, dB_s - \int_0^t \Phi_1^*(s)\, h_x(s)\, ds.$$

Et par suite on aura :

$$dY_1(t) = -\Phi_1^*(t)\, h_x(t)\, dt + Q_1(t)\, dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\beta_1(t)\, Y_1(t)$ et $\alpha_1(t)\, Y_1(t)$ et en passant à l'ésperance on obtient :

$$\mathbb{E}(\beta_1(t)\, Y_1(t)) = \mathbb{E}\left[z(T)\,.g_x(\widehat{x}(T))\ \right] = \mathbb{E}\int_0^T p_1(t)\, G(t)\, d(\eta-\xi)_t - \mathbb{E}\int_0^T h_x(t)\, z(t)\, dt,$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\alpha_1(t)\, Y_1(t)) &= \mathbb{E}\left[g_x(\widehat{x}(T))\,(x_1(T)+x_2(T))\ \right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T p_1(t)\left[\left(b^\theta(t)-b(t)\right)+\left(b_x^\theta(t)-b_x(t)\right)x_1(t)\ \right] dt \\
&\quad +\mathbb{E}\int_0^T q_1(t)\left[\left(\sigma^\theta(t)-\sigma(t)\right)+\left(\sigma_x^\theta(t)-\sigma_x(t)\right)x_1(t)\ \right] dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T p_1(t)\, b_{xx}(t)\, x_1(t)\, x_1(t)\, dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T q_1(t)\, \sigma_{xx}(t)\, x_1(t)\, x_1(t)\, dt - \mathbb{E}\int_0^T h_x(t)\,(x_1(t)+x_2(t))\, dt,
\end{aligned}$$

où :

$$p_1(t) = \Psi_1^*(t)\, Y_1(t) \quad ; \quad p_1 \in \mathcal{L}^2([0,T]; R^n), \tag{3.25}$$

$$q_1(t) = \Psi_1^*(t)\, Q_1(t) - \sigma_x^*(t)\, p_1(t) \quad ; \quad q_1 \in \mathcal{L}^2\left([0,T]; R^{n\times d}\right). \tag{3.26}$$

En définissant le Hamiltonien H par :

$$H\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right)=h\left(t\right)+p\left(t\right)b\left(t\right)+\sum_{i=1}^{d}\sigma_i\left(t\right)q_i\left(t\right),$$

où $\sigma_i\left(t\right)$ et $q_i\left(t\right)$ notent réspectivement la i^{im} colonne de matrice σ et q.

Et en remplaçant $\mathbb{E}\left[\ z\left(T\right)g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\right]$ et $\mathbb{E}\left[\ g_x\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\left(x_1\left(T\right)+x_2\left(T\right)\right)\right]$ par ses valeurs, on peut réecrire (3.14) et (3.15) comme suit :

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{J_1}{\theta} &= \mathbb{E}\int_0^T\left[\ k\left(t\right)+G^*\left(t\right)p_1\left(t\right)d\left(\eta-\xi\right)_t\right], && \textbf{(3.27)}\\
J_2 &\leq \mathbb{E}\int_0^T\left[\ H\left(t,\widehat{x}\left(t\right),u_\theta\left(t\right),p_1\left(t\right),q_1\left(t\right)\right)-H\left(t,\widehat{x}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right),p_1\left(t\right),q_1\left(t\right)\right)\right]dt\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T x_1^*\left(t\right)H_{xx}\left(t,\widehat{x}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right),p_1\left(t\right),q_1\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)dt && \textbf{(3.28)}\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ x_1^*\left(T\right)g_{xx}\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)x_1\left(T\right)\right]+\circ\left(\theta\right).
\end{aligned}$$

Cette inégualité est appellée inégualité variationnelle du premier ordre.

3.2.2 Principe du maximum du second ordre

L'éstimation de second ordre consiste à calculer la partie où on a les dérivées du second ordre dans (3.28). C'est-à-dire les quantités :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ x_1^*\left(T\right)g_{xx}\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)x_1\left(T\right)\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T x_1^*\left(t\right)H_{xx}\left(t,\widehat{x}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right),p_1\left(t\right),q_1\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)dt.$$

Comme nous nous trouvons devant un cas non linéaire, on ne peut pas appliquer directement la méthode du premier ordre. Dans ce cas on doit d'abords linéariser la quantité à estimer et pour cela on pose $Z=x_1^*x_1$ et par la formule d'Itô on obtient :

$$\begin{aligned}
dZ\left(t\right) &= \left[\ Z\left(t\right)b_x^*\left(t\right)+b_x\left(t\right)Z\left(t\right)+\sigma_x\left(t\right)Z\left(t\right)\sigma_x^*\left(t\right)+\Gamma_\theta\left(t\right)\right]dt\\
&\quad+\left[\ Z\left(t\right)\sigma_x^*\left(t\right)+\sigma_x\left(t\right)Z\left(t\right)+\Lambda_\theta\left(t\right)\right]dB_t, && \textbf{(3.29)}
\end{aligned}$$

où les $\Gamma_\theta\left(t\right)$ et $\Lambda_\theta\left(t\right)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\theta\left(t\right) &= x_1\left(t\right)\left(b^\theta\left(t\right)-b\left(t\right)\right)^*+\left(\ b^\theta\left(t\right)-b\left(t\right)\right)x_1^*\left(t\right)+\sigma_x\left(t\right)x_1\left(t\right)\left(\ \sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right)^*\\
&\quad+\left(\ \sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right)x_1^*\left(t\right)\sigma_x^\theta\left(t\right)+\left(\ \sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right).\left(\ \sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right)^*,\\
\Lambda_\theta\left(t\right) &= x_1\left(t\right)\left(\sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\ \right)^*+\left(\sigma^\theta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\ \right)x_1^*\left(t\right).
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\mathbb{E}\int_0^T \Gamma_\theta(t)\,dt \leq \mathbb{E}\int_0^T \left(\sigma^\theta(t)-\sigma(t)\right)\left(\sigma^\theta(t)-\sigma(t)\right)^* dt + \circ(\theta), \tag{3.30}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T \Lambda_\theta(t)\,dB_t \leq \circ(\theta). \tag{3.31}$$

On considère l'équation linéaire associée aux équation (3.29) :

$$\begin{cases} d\Phi_2(t) = [\,b_x(t)\,\Phi_2(t)+\Phi_2(t)\,b_x^*(t)+\sigma_x(t)\,\Phi_2(t)\,\sigma_x^*(t)]\,dt \\ \qquad\qquad +[\Phi_2(t)\,\sigma_x^*(t)+\sigma_x(t)\,\Phi_2(t)]\,dB_t, \\ \Phi_2(0) = I_d. \end{cases}$$

Cette équation est linéaire et à coefficieant bornés, donc elle admet une solution forte unique. De plus la solution Φ_2 est inversible et son inverse Ψ_2 vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi_2(t) = [\,(\,\sigma_x(t)+\sigma_x^*(t))\,\Psi_2(t)\,(\,\sigma_x(t)+\sigma_x^*(t))^* - \Psi_2(t)\,b_x^*(t) - b_x(t)\,\Psi_2(t)]\,dt \\ \qquad\qquad -\sigma_x(t)\,\Psi_2(t)\,\sigma_x^*(t) - [\,\Psi_2(t)\,\sigma_x^*(t)+\sigma_x(t)\,\Psi_2(t)]\,dB_t, \\ \Phi_2(0) = I_d. \end{cases}$$

Pour vérifier que Ψ_2 est l'inverse de Φ_2, on vérifie que $\Phi_2\Psi_2 = \Psi_2\Phi_2 = I_d$ en appliquant la formule de Itô. De plus, Φ_2 et Ψ_2 satisfaits :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Phi_2(t)|^2\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Psi_2(t)|^2\right]<\infty. \tag{3.32}$$

En suivant la méthode de la résolvante des équations différentielle ordinaires linéaires, on pose :

$$\alpha_2(t) = \Psi_2(t)\,Z(t). \tag{3.33}$$

Par la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} d\alpha_2(t) &= d(\Psi_2(t)\,Z(t)) \\ &= (d\Psi_2(t))\,Z(t)+\Psi_2(t)\,(d(Z(t)))+\langle\Psi_2(t)\,;Z(t)\rangle\,dt \\ &= [\Psi_2(t)\,A_\theta(t)-\sigma_x^*(t)\,\Psi_2(t)\,B_\theta(t)-\sigma_x(t)\,\Psi_2(t)\,B_\theta(t)\;]\,dt \\ &\quad +B_\theta(t)\,\Psi_2(t)\,dB_t. \end{aligned}$$

On pose :

$$X_2 = \Phi_2^*(t)\, g_{xx}(x(T)) + \int_0^T \Phi_2^*(s)\, H_{xx}(s)\, ds, \tag{3.34}$$

$$Y_2(t) = \mathbb{E}[X_2 \;/\; \mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_2^*(s)\, H_{xx}(s)\, ds. \tag{3.35}$$

On remarque à partir de (3.33), (3.34) et (3.35) que :

$$\mathbb{E}[\,x_1^*(T)\, g_{xx}(\widehat{x}(T))\, x_1(T)] = \mathbb{E}[\Phi_2^*(T)\, g_{xx}(\widehat{x}(T))\, \alpha_2(T)\ ] = \mathbb{E}[\alpha_2(T)\, Y_2(T)\ ]. \tag{3.36}$$

Donc pour calculer le premier terme $\mathbb{E}[\,x_1^*(T)\, g_{xx}(\widehat{x}(T))\, x_1(T)]$ de l'éstimation de second ordre, il suffit de calculer $\mathbb{E}[\alpha_2(T)\, Y_2(T)\ ]$.

Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$, $X_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X_2 \;/\; \mathcal{F}_t]$ est une martingale de carré intégrable, alors la décomposition de Itô nous donne :

$$\mathbb{E}[X_2 \;/\; \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_2\ ] + \int_0^t Q_2(s)\, dB_s,$$

où $Q_2(s)$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}\int_0^T |Q_2(s)|^2\, ds < \infty$.

Donc on peut utiliser une formule de $Y_2(t)$ mieux adapté à notre problème :

$$Y_2(t) = \mathbb{E}[X_2\ ] + \int_0^t Q_2(s)\, dB_s - \int_0^t \Phi_2^*(s)\, H_{xx}(s)\, ds.$$

Et par suite, on aura :

$$dY_2(t) = -\Phi_2^*(t)\, H_{xx}(t)\, dt + Q_2(t)\, dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\alpha_2(t)\, Y_2(t)$ et en passant à l'ésperance on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha_2(t)\, Y_2(t)\ ] &= \mathbb{E}[\ Z(T)\, g_{xx}(\widehat{x}(T))] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T Tr\left(\sigma^\theta(t) - \sigma^*(t)\right) p_2(t) \left(\sigma^\theta(t) - \sigma^*(t)\right)^* dt \\ &\quad -\mathbb{E}\int_0^T H_{xx}(t)\, x_1(t)\, x_1^*(t)\, dt, \end{aligned}$$

où :

$$p_2(t) = \Psi_2^*(t)\, Y_2(t) \qquad ; \qquad p_2 \in \mathcal{L}^2\left([0,T]; R^{n\times n}\right). \tag{3.37}$$

En définissant la hamiltonien H par :

$$H\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right) = h\left(t\right) + p\left(t\right) b\left(t\right) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i\left(t\right) q_i\left(t\right),$$

où $\sigma_i\left(t\right)$ et $q_i\left(t\right)$ notent respectivement la i^{im} colonne de matrice σ et q.

Et en remplaçant $\mathbb{E}\left[Z\left(T\right) g_{xx}\left(\widehat{x}\left(T\right)\right)\ \right]$ par sa valeur, on peut réecrire (3.28) comme suit :

$$\begin{aligned} J_2 \ \leq\ & \mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t, \widehat{x}\left(t\right), u_\theta\left(t\right), p_1\left(t\right), q_1\left(t\right)\right) - H\left(t, \widehat{x}\left(t\right), \widehat{u}\left(t\right), p_1\left(t\right), q_1\left(t\right)\right)\right] dt \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T Tr\left(\sigma^\theta\left(t\right) - \sigma^*\left(t\right)\right) p_2\left(t\right) \left(\sigma^\theta\left(t\right) - \sigma^*\left(t\right)\right)^* dt. \qquad (\mathbf{3.38}) \end{aligned}$$

Cette inégalité est appellée inégalité variationnelle du second ordre.

3.2.3 Principe du maximum

En utilisant la définition de u_θ, l'inéquation variationnelle (3.38), nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{J_2}{\theta} \ \leq\ & \qquad (3.1) \\ & \mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta} \left[H\left(t, \widehat{x}\left(t\right), v, p_1\left(\tau\right), q_1\left(\tau\right)\right) - H\left(t, \widehat{x}\left(t\right), \widehat{u}\left(t\right), p_1\left(t\right), q_1\left(t\right)\right)\right] dt \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta} Tr\left(\sigma\left(t, \widehat{x}\left(t\right), v\right) - \sigma^*\left(t, \widehat{x}\left(t\right), \widehat{u}\left(t\right)\right)\right) p_2\left(t\right) \left(\sigma\left(t, \widehat{x}\left(t\right), v\right) - \sigma^*\left(t, \widehat{x}\left(t\right), \widehat{u}\left(t\right)\right)\right)^* dt. \end{aligned}$$

En faisant tendre θ vers 0, on obtient finalemant :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0}\frac{J_2}{\theta} \ \leq\ & \mathbb{E}\left[H\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), v, p_1\left(\tau\right), q_1\left(\tau\right)\right) - p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), \widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right] \qquad (\mathbf{3.40}) \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Tr\left(\sigma\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), v\right)\sigma\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), v\right)\right) p_2\left(\tau\right)\right] \\ & - \mathbb{E}\left[H\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), \widehat{u}\left(\tau\right), p_1\left(\tau\right), q_1\left(\tau\right)\right) - p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), \widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right] \\ & - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Tr\left(\sigma\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), \widehat{u}\left(\tau\right)\right)\sigma\left(\tau, \widehat{x}\left(\tau\right), \widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right) p_2\left(\tau\right)\right], \\ & \forall v \ \in\ \mathcal{U} \quad , \quad \mathbb{P}\ \ p.s \quad ; \quad dt\ \ pp. \end{aligned}$$

Remarque 37 *Les formules explicites des processus adjointes p_1 et p_2 sont calculés à partir de* (3.25) *et* (3.37) *et sont données par :*

$$p_1(t) = \mathbb{E}\left[\Psi_1^*(t)\,\Phi_1^*(t)\,g_x(x(T)) \;/\; \mathcal{F}_t\right] + \Psi_1^*(t)\int_t^T \Phi_1^*(s)\,h_x(s, x(s), u(s))\,ds, \tag{3.41}$$

et :

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \mathbb{E}\left[\Psi_2^*(t)\,\Phi_2^*(t)\,g_{xx}(x(T)) \;/\; \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad + \Psi_2^*(t)\int_t^T \Phi_2^*(s)\,H_{xx}(s, x(s), u(s), p_1(s), q_1(s))\,ds. \end{aligned} \tag{3.42}$$

En appliquant la formule d'Itô pour les processus adjointes p_1 dans (3.25) et p_2 dans (3.37), on obtient alors le premièr et le second order de l'équations adjointe qui sont des équations déffirentielle stochastiques rétrograde, donnée par :

$$\begin{cases} -dp_1(t) = H_x(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_1(t), q_1(t))\,dt - q_1(t)\,dB_t, \\ p_1(T) = g_x(\widehat{x}(T)), \end{cases} \tag{3.43}$$

et

$$\begin{cases} -dp_2(t) = \left(b_x^*(t)\,p_2(t) + p_2(t)\,b_x(t) + \sigma_x^*(t)\,p_2(t)\,\sigma_x(t)\ \right)dt \\ \qquad\qquad + \left(\sigma_x^*(t)\,q_2(t) + q_2(t)\,\sigma_x(t)\ \right)dt \\ \qquad\qquad + H_{xx}(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_1(t), q_1(t))\,dt - q_2(t)\,dB_t, \\ p_2(T) = g_{xx}(\widehat{x}(T)), \end{cases} \tag{3.44}$$

où $q_1(t)$ est donnée par (3.29) et q_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \left(q_2^1(t), ..., q_2^d(t)\right) \quad ; \quad q_2 \in \left(\mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times n}\right)\right)^d, \\ q_2^i(t) &= \Psi_2^*(t)\,Q_2^i(t) + p_2(t)\,\sigma_x^i(t) + \sigma_x^{*i}(t)\,p_2(t) \quad ;i = 1, ..., d. \end{aligned}$$

On peut maintenant annoncer le résultat principal de ce chapitre qui est le théorème du maximum généralisé.

Théorème 38 *Soit* $\left(\widehat{u}, \widehat{\xi}\right)$ *est un contrôle optiimal minimisant la fonction de coût* J *dans* $\mathcal{U}$*, et soit* $\widehat{x}$ *notée la solution optimal. Alors il existe unique paire processsus adaptée :*

$$\begin{aligned} (p_1, q_1) &\in \mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times d}\right), \\ (p_2, q_2) &\in \mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times n}\right) \times \left(\mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times n}\right)\right)^d, \end{aligned}$$

solutions respectives des équations rétrogrades (3.43) *et* (3.44) *tels que l'inégalité variationnelle soit vérifiée*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[H\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v,p_1\left(\tau\right),q_1\left(\tau\right)\right)-p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\ \right] \\ & +\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Tr\left(\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v\right)\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v\right)\right)p_2\left(\tau\right)\ \right] \\ \leq\ & \mathbb{E}\left[H\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right),p_1\left(\tau\right),q_1\left(\tau\right)\right)-p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\ \right] \\ & \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Tr\left(\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right)p_2\left(\tau\right)\ \right], \\ \forall v \in \mathcal{U}\quad & ,\quad P\ \ p.s\quad ;\quad dt\ \ pp, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$I\!\!P\left\{\forall t\in[0,T],\forall i;\left(k_t^i+G_i^*\left(t\right)p_1\left(t\right)\right)\geq 0\right\}=1, \tag{3.46}$$

$$I\!\!P\left\{\sum_{i=1}^{d}\mathbf{1}_{\left(k_t^i+G_i^*(t)p_1(t)\right)\geq 0}d\widehat{\xi}=0\right\}=1. \tag{3.47}$$

Proof. A partir (3.6), (3.27) et (3.40), on a pour tout $\mathcal{F}_t-$mesurable v, et pour tout processus décroissant η avec $\eta_0=0$

$$\begin{aligned} 0\ \leq\ & \mathbb{E}\left[\ H\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v,p_1\left(\tau\right),q_1\left(\tau\right)\right)-p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right] \\ & +\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ Tr\left(\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v\right)\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),v\right)\right)p_2\left(\tau\right)\right] \\ & -\mathbb{E}\left[\ H\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right),p_1\left(\tau\right),q_1\left(\tau\right)\right)-p_2\left(\tau\right)\sigma^*\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right] \\ & -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\ Tr\left(\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\sigma\left(\tau,\widehat{x}\left(\tau\right),\widehat{u}\left(\tau\right)\right)\right)p_2\left(\tau\right)\right] \\ & \mathbb{E}\int_0^T\left[k\left(t\right)+G^*\left(t\right)p_1\left(t\right)d\left(\eta-\xi\right)_t\ \right], \\ \forall v \in \mathcal{U}\quad & ,\quad \mathbb{P}\ \ p.s\quad ;\quad dt\ \ pp. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Si on pose $\eta_t=\widehat{\xi}_t$ on obtient (3.45). D'autre part, si on choisit $v=\widehat{u}_t$ et en utilisant la même démenstration du théorème 4-2 [14], on en conclut (3.46) et (3.47). ■

Remarque 39 *Si on pose que $G=k=0$, alors on retoure au principe du maximum de Peng [36].*

Chapitre 4

Les conditions générales d'optimalitées pour un problème des contrôles stochastiques relaxé des diffusions de Poisson

Notre but dans ce chapitre est de dériver les conditions nécessaires ainsi que suffisantes d'optimalité pour les contrôles relaxés, où le système est gouverné par une équation déffirentielle stochastique non linéaire avec diffusion de Poisson dans la forme générale. Nous donnons les résultats, sous forme de principe maximale stochastique globale, en utilisant uniquement l'expréssion du premier order tout d'abord et l'équation adjointe associée.

Le problème du contrôle relaxé trouve son intérêt en trois points essentiels. Le premièr est que nous pouvons utiliser la propriété de convexité de l'ensemble des contrôles relaxés pour obtenir les conditions d'optimalité, sans l'aide de l'expansion du second ordre et avec des hypothèses minimales sur les coefficients. Le seconde, c'est que le problème des contrôles relaxé est une généralisation de la stricte. En effet, si $q_t\,(da) = \delta_{v_t}\,(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point $v_t \in U$, alors on obtient un problème de contrôle stricte comme un cas particulier de la contrôle relaxé. Le troisième intérêt concerne l'existence d'une solution optiimal. Nous pouvons avoir l'existence d'un contrôle optimal relaxé et de ne pas avoir existence d'une solution optiimal stricte (voir l'exemple ci-dessous sur les pages 76-78).

Pour atteindre l'objectif de ce chapitre et établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, nous procédons comme suit.

Tout d'abord, nous donnons les conditions d'optimalité pour les contrôles relaxés. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe. Ensuite, nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant la voie classique de la méthode de perturbation convexe. Plus précisément, si l'on désigne μ par un contrôle optimal relaxé et q est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, puis avec $\theta > 0$ et suffisamment petite pour chaque $t \in [0, T]$, on peut définir une perturbation de contrôle comme suit

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta \left(q_t - \mu_t \right).$$

Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation d'état, et l'inégalité variationnelle suivante

$$0 \leq \mathcal{J}\left(\mu^\theta\right) - \mathcal{J}\left(\mu\right).$$

En utilisant le fait que les coefficients b, f et h sont linéaires par rapport à la variable de contrôle relaxée, les conditions nécessaires d'optimalité sont obtenues directement dans la forme globale. Pour clôturer cette partie du chapitre, nous montrons sous hypothèses supplémentares minimes, que ces conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés sont aussi suffisantes.

4.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit T un nombre réel positif, U un ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$ et $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_t, \mathbb{P}\right)$, un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles pour laquelle d-demensionelle mouvement brownien $W = \left(W_t\right)_{\in[0,T]}$ est définie. Soit η un fixe $\left(\mathcal{F}_t\right)$ $-$processus de Poisson sur un sous-ensemble Θ non vide fixe de $\mathbb{R}^m$. On désigne par $m\left(d\right)$ la mesure caractéristique de η et par $\widetilde{N}\left(d\theta, dt\right)$ la mesure de comptage induite par η. On définit alors $N\left(d\theta, dt\right) =: \widetilde{N}\left(d\theta, dt\right) - m\left(d\theta\right) dt$. Nous notons que N est une mesure de martingale de Poisson avec caractéristique $m\left(d\theta\right) dt$, Nous supposons que$\left(\mathcal{F}_t\right)$ est la $\mathbb{P}-$d'augmentation de la filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_t^{(W,N)}\right)$ définie par $\forall t \geq 0$

$$\left(\mathcal{F}_t^{(W,N)}\right) = \sigma\left(W_s,\, 0 \leq s \leq t\right) \vee \sigma\left[\int_0^s \int_A N\left(d\theta, dr\right),\; 0 \leq s \leq t,\;\; A \in \mathcal{B}\left(\Theta\right)\right] \vee \mathcal{N},$$

4.1.1 Problème des contrôles strictes et des contrôles relaxés

Définition 40 *(Admissibilté) On appelle un contrôle admissible est un processus $\mathcal{F}_t-$adaptées $v, = (v_t) \in U$ telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid v_t|^2\right] < \infty.$$

Et on note de plus par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tout les contrôles strictes admissible.

Pour toute $v_t \in \mathcal{U}$, on considére maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée avec un terme de saute suivante :

$$\begin{cases} dx_t^v & = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dW_t + \displaystyle\int_\Theta f\left(t, x_{t^-}^v, \theta, v_t\right) N\left(d\theta, dt\right), \\ x^v\left(0\right) & = \xi, \end{cases} \tag{4.1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de B telle que :

$$\mathbb{E}\left[\;|\xi|^2\right] < \infty,$$

avec

$$\begin{aligned} b &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathcal{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right), \\ f &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \Theta \times U \to \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

On considère maintenant la fonction coût à minimiser qui definit de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J\left(v\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^v\right) + \int_0^T h\left(t, x_t^v, v_t\right) dt\right], \tag{4.2}$$

où :

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n.$$

Le contrôle stricte est dite optiimal s'il verifie

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{4.3}$$

Hypothèse H 4 :

On suppose que :

1) b, σ, f, g et h sont continuments dérivables et leurs dérivées sont continues en x .

2) b_x, σ_x et *f_x sont bornées par $C(1+|x|+|u|)$.*

3) f est bornée par $C(1+|x|+|u|+|\theta|)$.

4) g_x et h_x sont bornées par $C(1+|x|)$, avec C est une constante positive.

A partir des hypothèses ci-après, pour tout $v \in \mathcal{U}$, l'équation (4.1) à unique solution forte et de plus la fonctionnelle J est bien definit de $\mathcal{U}$ a valeur dans $\mathbb{R}$.

L'idée pour se relaxer le problème du contrôle strict défini ci-dessus est d'intégrer l'ensemble U des contrôles stricts dans une catégorie plus large qui donne une structure plus adaptée topologiquement. Dans le modèle relaxé, le processus v valeur dans$U$ est remplacé par un processus q valeur dans $\mathbb{P}(U)$, où $\mathbb{P}(U)$ désigne l'éspace de mesure de probabilité sur U muni de la topologie de la convergence stable.

Définition 41 *Un contrôle admissible relaxé est un processus à valeur dans $\mathbb{P}(U)$, progressivement mesurables par rapport à $(\mathcal{F}_t)_t$ de telle sorte que pour chaque t, $\mathbf{1}_{]0,t]}.q$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable, et tel que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \int_U |a|^2 \, q_t(da)\right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble des contrôles relaxés.

Chaque contrôle relaxé peut être desintegré que $q\,(dt, da) = q_t\,(da)\,dt$, où $q_t\,(da)$ est un processus progressivement mesurable à valeur dans un ensemble des mesures de probabilité $\mathbb{P}(U)$. L'ensemble $\mathcal{U}$ est injectée dans $\mathcal{R}$ des processus relaxés par l'application $F : v \in \mathcal{U} \longmapsto F_v\,(dt, da) = \delta_{v_t}(da)dt \in \mathcal{R}$, avec δ_v est la mesure atomique concentrée au point unique ν. Pour plus détails voir [22] et [23].

Pour tout $q \in \mathcal{R}$, on considère l'équation déffirentielle stochastique relaxée pour des diffusions de Poisson suivante :

$$\begin{cases} dx_t^q = & \displaystyle\int_U b\,(t, x_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dt + \int_U \sigma\,(t, x_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dW_t \\ & \displaystyle + \int_\Theta \int_U f\left(t, x_{t^-}^q, \theta, a\right) q_t\,(da)\, N\,(d\theta, dt)\,, \\ x_0^q = & \xi. \end{cases} \tag{4.4}$$

La fonction de coût dans le cas relaxé sera donnée par :

$$\mathcal{J}\,(q) = \mathbb{E}\left[g\,(x_T^q) + \int_0^T \int_U h\,(t, x_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dt\right]. \tag{4.5}$$

Le contrôle relaxé μ est appelé optiimal s'il vérifie

$$\mathcal{J}\,(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}\,(q)\,. \tag{4.6}$$

Par l'introduction des contrôles relaxés, on remplace l'éspace U par un éspace plus large $\mathbb{P}(U)$. On a gagner l'avantage que l'éspace $\mathbb{P}(U)$ est convexe. En outre, les nouveaux coefficients de l'équation $(4-4)$ et la fonctionelle de coût $(4-5)$ sont linéaires par rapport aux variables de contrôle relaxés.

Remarque 42 *Si $q_t = \delta_{v_t}$ est une mesure atomique concentrée au point unique $v_t \in U$, donc pour toute $t \in [0, T]$ on a $x^q = x^v$ et $\mathcal{J}\,(q) = J\,(v)$.*

On obtient en suite le problème des contrôles ordinaires. Alors on conclut que le problème des contrôles ordinaires est une cas particulière de problème des contrôles relaxés.

Donnons maintenant un exemple qui montre que l'existence d'un contrôle optimal stricte n'est pas assuré et nous avons l'existence d'un optimal relaxé.

Example 43 *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble des processus $(\mathcal{F}_t)_t$ −adaptées $\upsilon = (\upsilon_t)_t$ à valeurs dans $U = \{-1, +1\}$. Pour chaque $\upsilon \in \mathcal{U}$, on considère EDS a un dimension*

$$\begin{cases} dx_t^v = (x_t^v + \upsilon_t)\, dW_t + \int_\Theta \upsilon_t N(d\theta, dt), \\ x_0^v = 0. \end{cases}$$

Le problème est de minimiser, dans l'ensemble $\mathcal{U}$ des contrôles ordinaires, la fonctionelle suivante

$$J(v) = \mathbb{E}\left[(x_T^v)^2 - \int_0^T \left(2(x_t^v)^2 + 4x_t^v \upsilon_t + (2m(\Theta) + 1)\, \upsilon_t^2 \right) dt \right].$$

On note que $m(\Theta)$ est une constante qui ne dépend pas de la variable θ.

On considère une suite des contrôles ordinaires suivantes

$$\upsilon_t^n = (-1)^k \ \ si \ \ \frac{k}{n} T \leq t \leq \frac{k+1}{n} T \quad , \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Alors, par les calcules standards, on a

$$|J(\upsilon^n)| \leq \frac{T}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui implique que

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} J(v) = 0.$$

Il n'existe cependant pas de contrôle $u \in \mathcal{U}$ de telle sorte que $J(v) = 0$. Si tout cela n'aurait été le cas, alors pour tout t ; $u_t = 0 \in U$. Par conséquent, une solution optiimal n'existe pas dans la classe $\mathcal{U}$ de contrôles stricts. Le problème est que la suite $(\upsilon_t^n)_n$ n'a pas de limite dans l'éspace de contrôles stricts. Par conséquent, il n'y a pas de contrôle strict optiimal pour cet exemple.

Montrons maintenant que la version relaxée de cet exemple admet une solution optiimal. Le système dans le cas relaxé est gouvernée par l' EDS suivante

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U (x_t^q + q)\, q_t(da)\, dW_t + \int_\Theta \int_U a q_t(da)\, N(d\theta, dt), \\ x_0^v = 0, \end{cases}$$

avec une fonctionelle de coût relaxé donnée par

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E}\left[(x_T^q)^2 - \int_0^T \int_U \left[2(x_t^q)^2 + 4x_t^q a + (2m(\Theta) + 1)\, a^2 \right] q_t(da)\, dt \right].$$

Si nous identifions contrôle strict v_t^n *(défini ci-dessus) avec la mesure de Dirac* $\delta_{v_t^n}(da)$ *et soit* $q_n(da)\,dt = \delta_{v_t^n}(da)\,dt$*, on obtient une mesure dans* $U\times\,[0,T]$. *Alors, la suite* $(q_n(da)\,dt)_n$ *converge stablement vers* $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})(da)\,dt$*, de plus, la solution relaxée optiimal est donnée par* $\mu=\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$. *En effet, nous avons*

$$|\mathcal{J}(q^n)| \le \mathbb{E}\int_0^T\int_U a^2 q_t^n(da)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\int_0^T\int_U a^2\mu_t(da)\,dt,$$

cequi implique que

$$\inf_{q\in\mathcal{R}}\mathcal{J}(q) = \mathbb{E}\int_0^T\int_U a^2\mu_t(da)\,dt = T.$$

De plus, on a

$$\mathcal{J}(\mu) = \mathbb{E}\int_0^T\int_U a^2\mu(da)\,dt = T.$$

Ce qui montre que

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q\in\mathcal{R}}\mathcal{J}(q).$$

Alors, le contrôle relaxé optiimal de notre exemple c'est $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$. *Mais* $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$ *est un mesure de probabilité dans* U*, alors* $\mu\in\mathcal{R}$ *et on a l'éxistence de solution optimal dans l'éspace* $\mathcal{R}$ *des contrôles relaxés.*

4.2 Conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalité pour les contrôles relaxés

Dans ce paragraphe, on étudie le problème $\{(4.4),(4.5),(4.6)\}$ et on derive les conditions nésessaires et suffisantes d'optimalité pour les contrôles relaxé. et comme l'ensemble $\mathcal{R}$ est convexe, alors les méthodes classiques pour établir les conditions nésessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés est d'utiliser une méthode de perturbation variationelle convexe. Plus précisement, soit μ est un contrôle optimal relaxé et x^μ solution de (4.1) controlée par μ. alors, pour tout $t\in[0,T]$, on definit la perturbation de contrôle relaxé comme

$$\mu_t^\varepsilon = \mu_t + \varepsilon(q_t-\mu_t),$$

où $\varepsilon > 0$ assez petit et q est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$.

On note par x_t^ε est la solution de (4.4) associer avec μ^ε. Par l'optimalité de μ, inégalité variationelle sera donnée par la formule suivante

$$0 \leq \mathcal{J}\left(\mu^\varepsilon\right) - \mathcal{J}\left(\mu\right). \tag{4.7}$$

Lemme 44 *Sous l'hypothèse* $H\,4$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\varepsilon - x_t^\mu\right|^2\right] = 0. \tag{4.8}$$

Proof. Soient x^ε et x^μ les trajéctoires associées réspectivement aux contrôles u^ε et μ^ε alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\, x_t^\varepsilon - x_t^\mu\right|^2\right] \quad \leq \quad & 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U b\left(t, x_s^\varepsilon, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right) - \int_0^t \int_U b\left(t, x_s, a\right)\mu_s\left(da\right)\right|^2 ds\right] \\
& + 3\mathbb{E}\left|\int_0^t \left[\int_U \sigma\left(t, x_s^\varepsilon, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right) - \int_U \sigma\left(t, x_s, a\right)\mu_s\left(da\right)\right] dB_s\right|^2 \\
& + 3\mathbb{E}\left|\int_0^t \int_\Theta \left[\int_U f\left(s, x_{s^-}^\varepsilon, \theta, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right) - \int_U f\left(s, x_s, \theta, a\right)\mu_s\left(da\right)\right] N\left(d\theta, ds\right)\right|^2.
\end{aligned}$$

Par définition de μ^{ε}, l'inégalité précédente sera donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left| x_t^{\varepsilon}-x_t^{\mu}\right|^2\right] \leq\ & 6\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\int_U b\left(t,x_s,a\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)\right|^2 ds\right] \\
&+6\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\int_U b\left(t,x_s^{\varepsilon},a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int_U b\left(t,x_s,a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)\right|^2 ds\right] \\
&+6\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\int_U \sigma\left(t,x_s,a\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)\right|^2 ds\right] \\
&+6\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\int_U \sigma\left(t,x_s^{\varepsilon},a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int_U \sigma\left(t,x_s,a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)\right|^2 ds\right] \\
&+6\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_\Theta\left|\int_U f\left(s,x_{s^-}^{\varepsilon},\theta,a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int_U f\left(s,x_s,\theta,a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)\right|^2 m\left(d\theta\right)ds\right] \\
&+6\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\int_\Theta\int_U f\left(s,x_{s^-},\theta,a\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)\right|^2 m\left(d\theta\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Mais b, σ et f sont uniformement Lipschitisiennes par rapport a x, alors :

$$\mathbb{E}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^{\mu}\right|^2\leq C\mathbb{E}\int_0^t\left|x_s^{\varepsilon}-x_s^{\mu}\right|^2 ds+C\varepsilon^2.$$

En appliquant l'inégalité de Bukholde-Davis-Gundy et lemme de Gronwall, on obtien le résultat. ■

Lemme 45 *Soit $\widetilde{x}$ solution de l'équation linéaire (s'appelle équation variationelle)*

$$\begin{cases}
d\widetilde{x}_t = & \left[\int_U b_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t+\int_U b\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t\left(da\right)-\mu_t\left(da\right)\right)\right]dt \\
& +\left[\int_U \sigma_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t+\int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t\left(da\right)-\mu_t\left(da\right)\right)\right]dW_t \\
& +\int_\Theta\int_U f_x\left(t,x_{t^-}^{\mu},\theta,a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t N\left(d\theta,dt\right) \\
& +\int_\Theta\int_U f\left(t,x_{t^-}^{\mu},\theta,a\right)\left(q_t\left(da\right)-\mu_t\left(da\right)\right)N\left(d\theta,dt\right), \\
\widetilde{x}_0 = & 0.
\end{cases}$$

Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{x_t^{\varepsilon}-x_t^{\mu}}{\varepsilon}-\widetilde{x}_t\right|^2=0. \tag{4.9}$$

Proof. Pour la simplification, on pose

$$X_t^{\varepsilon}:=\frac{x_t^{\varepsilon}-x_t^{\mu}}{\varepsilon}-\widetilde{x}_t. \tag{4.10}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
X_t^{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\int\limits_U b\left(s,x_s^{\varepsilon},a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int\limits_U b\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\right]ds\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\int\limits_U \sigma\left(s,x_s^{\varepsilon},a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int\limits_U \sigma\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dW_s\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_{\Theta}\left[\int\limits_U f\left(s,x_s^{\varepsilon},\theta,a\right)\mu_s^{\varepsilon}\left(da\right)-\int\limits_U f\left(s,x_s^{\mu},\theta,a\right)\mu_s\left(da\right)\right]N\left(ds,d\theta\right)\\
&-\int_0^t\int\limits_U b_x\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\widetilde{x}_s ds-\int_0^t\int\limits_U \sigma_x\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\widetilde{x}_s dW_s\\
&-\int_0^t\int\limits_A\int\limits_U f_x\left(s,x_s^{\mu},\theta,a\right)\mu_s\left(da\right)\widetilde{x}_s N\left(ds,d\theta\right)\\
&-\int_0^t\left[\int\limits_U b\left(s,x_s^{\mu},a\right)q_s\left(da\right)-\int\limits_U b\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\right]ds\\
&-\int_0^t\left[\int\limits_U b\left(s,x_s^{\mu},a\right)q_s\left(da\right)-\int\limits_U b\left(s,x_s^{\mu},a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dW_s\\
&-\int_0^t\int\limits_{\Theta}\left[\int\limits_U f\left(s,x_s^{\mu},\theta,a\right)q_s\left(da\right)-\int\limits_U f\left(s,x_s^{\mu},\theta,a\right)\mu_s\left(da\right)\right]N\left(ds,d\theta\right).
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant definition de μ^ε et on prend l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon\right|^2 \leq\ & C\mathbb{E}\int_0^1\int_0^t\int_U \left|b_x\left(s,x^\mu+\alpha\lambda\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)X_s\right|^2\mu_s\left(da\right)dsd\alpha\\ &+C\mathbb{E}\int_0^1\int_0^t\int_U \left|\sigma_x\left(s,x^\mu+\alpha\lambda\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)X_s\right|^2\mu_s\left(da\right)dsd\alpha\\ &+C\mathbb{E}\int_A\int_0^1\int_0^t\int_U \left|f_x\left(s,x^\mu+\alpha\lambda\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)X_s\right|^2\mu_s\left(da\right)dsd\alpha dm\left(\lambda\right)\\ &+C\mathbb{E}\left(\alpha_t^\varepsilon\right)\end{aligned}$$

Comme les dérivées $b_x,\ \sigma_x$ et f_x sont bornées, on a

$$\mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon\right|^2 \leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|X_s^\varepsilon\right|^2 ds + C\mathbb{E}\left|\alpha_t^\varepsilon\right|^2, \tag{4.11}$$

avec α_t^ε est donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_t^\varepsilon :=& \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)\left(x_s^\varepsilon-x_s^\mu\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)d\lambda ds\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)\left(x_s^\varepsilon-x_s^\mu\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)d\lambda ds\\ &+\int_0^t\int_\Theta\int_0^1\int_U f_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)\left(x_s^\varepsilon-x_s^\mu\right)\left(q_s\left(da\right)-\mu_s\left(da\right)\right)d\lambda N\left(d\theta,ds\right)\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_U \left[b_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)-b_x\left(s,x_s^\mu,a\right)\right]\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda ds\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_U \left[\sigma_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)-\sigma_x\left(s,x_s^\mu,a\right)\right]\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda ds\\ &+\int_0^t\int_\Theta\int_0^1\int_U \left[f_x\left(s,x_s^\mu+\lambda\varepsilon\left(X_s^\varepsilon+\widetilde{x}_s\right),a\right)-f_x\left(s,x_s^\mu,\theta,a\right)\right]\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda N\left(d\theta,ds\right).\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, (4.8), et comme le coéfficients b_x, σ_x and f_x sont bornées et continues et par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left|\alpha_t^\varepsilon\right|^2 = 0.$$

On obtient le résultat en appliquant lemme de Gronwall dans (4.11). ■

Lemme 46 *Soit μ est un contrôle optiimal relaxé minimisant la fonction de coùt $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{R}$ et x_t^μ est une trajectoire optimal. Alors, pour tout $q \in \mathcal{R}$, on peut ecrire*

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T^\mu\right)\widetilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_U h_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\widetilde{x}_t \mu_t\left(da\right)dt + \mathbb{E}\int_0^T \int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(\mu_t\left(da\right) - q_t\left(da\right)\right)dt. \tag{4.12}$$

Proof. Par utilisation du formule (4.10), on peut écrire

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\varepsilon\right) - g\left(x_T^\mu\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h\left(s, x_s^\varepsilon, a\right)\mu\varepsilon\left(da\right) - \int_U h\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dt, \\ &= \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\varepsilon\right) - g\left(x_T^\mu\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h\left(s, x_s^\varepsilon, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right) - \int_U h\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right)\right]dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\varepsilon\left(da\right) - \int_U h\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dt. \end{aligned}$$

Définition de μ^ε, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right) - g\left(x_T^\mu\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h\left(t, x_s^\varepsilon, a\right)\mu_t\left(da\right) - \int_U h\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h\left(s, x_s^\varepsilon, a\right)q_t\left(da\right) - \int_U h\left(s, x_s^\varepsilon, a\right)\mu_s\left(da\right)\right]dt. \end{aligned}$$

Alors

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T^\mu\right)\widetilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\int_0^T h_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\widetilde{x}_t dt + \mathbb{E}\int_0^T \int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t\left(da\right) - \mu_t\left(da\right)\right)dt + \rho^\varepsilon,$$

avec ρ^{ε} est donnée par

$$\begin{aligned}
\rho^{\varepsilon} &= \mathbb{E}\int_0^1 g_x\left(x_T^{\mu}+\lambda\varepsilon\left(X_T^{\varepsilon}+\widetilde{x}_T\right)\right)X_T^{\varepsilon}d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\int_U h_x\left(t,x_t^{\mu}+\lambda\varepsilon\left(X_t^{\varepsilon}+\widetilde{x}_t\right),a\right)X_t^{\varepsilon}\mu_t\left(da\right)d\lambda dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^1\left[g_x\left(x_T^{\mu}+\lambda\varepsilon\left(X_T^{\varepsilon}+\widetilde{x}_T\right)\right)-g_x\left(x_T^{\mu}\right)\right]\widetilde{x}_T d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\int_U\left[h_x\left(t,x_t^{\mu}+\lambda\varepsilon\left(X_t^{\varepsilon}+\widetilde{x}_t\right),a\right)-h_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\right]\widetilde{x}_t\mu_t\left(da\right)d\lambda dt.
\end{aligned}$$

Appliquant inégalité de Cauchy-Schwartz, (4.8), et comme le coéfficients b_x, σ_x and f_x sont bornées et continues

et par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\mathbb{E}\left|\rho^{\varepsilon}\right|^2=0.$$

D'où la démonstration. ■

4.2.1 Inégalité variationelle et équation adjoint

Dans ce sous-paragraphe, nous introduisons le processus adjoint qui nous permet d'otenir l'inégalité variationnelle de (4.12) : Les termes linéaires en (4.12) peuvent être traités de la façon suivante. Soit Φ la solution fondamentale de l'équation linéaire

$$\begin{cases}
d\Phi_t = & \int_U b_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\Phi_t\mu_t\left(da\right)dt+\int_U\sigma_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\Phi_t\mu_t\left(da\right)dW_t \\
& +\int_{\Theta}\int_U f_x\left(t,x_{t^-}^{\mu},\theta,a\right)\Phi_t\mu_t\left(da\right)N\left(d\theta,dt\right), \\
\Phi_0 = & I_d.
\end{cases}$$

Cette équation étant linéaire à coéfficients bornés, alors elle admet une solution unique et forte. De plus la solution Φ est inversible et son inverse Ψ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi_t = & \displaystyle\int_U \sigma_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \Psi_t \sigma_x^*\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t\left(da\right) dt \\ & \displaystyle -\int_U b_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \Psi_t \mu_t\left(da\right) dt - \int_U \sigma_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \Psi_t \mu_t\left(da\right) dW_t \\ & \displaystyle +\int_\Theta \int_U f_x\left(t, x_{t^-}^\mu, \theta, a\right) \Psi_t f_x^*\left(t, x_t^\mu, \theta, a\right) \mu_t\left(da\right) N\left(d\theta, dt\right) \\ & \displaystyle +\int_\Theta \int_U f_x\left(t, x_{t^-}^\mu, \theta, a\right) \Psi_t \mu_t\left(da\right) N\left(d\theta, dt\right), \\ \Psi_0 = & I_d. \end{cases}$$

En outre, Φ et Ψ vérifies

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\Phi_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\Psi_t\right|^2\right] < \infty. \tag{4.13}$$

On introduisons les trois processus

$$\beta_t := \Psi_t \widetilde{x}_t, \tag{4.14}$$

$$X := \Phi_T^* g_x\left(x_T^\mu\right) + \int_0^T \int_U \Phi_t^* h_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t\left(da\right) dt, \tag{4.15}$$

$$Y_t := \mathbb{E}\left[X \ / \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \int_U \Phi_s^* h_x\left(t, x_s^\mu, a\right) \mu_s\left(da\right) ds. \tag{4.16}$$

On utilise (4.14), (4.15), et (4.16), pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[\ \beta_T Y_T\right] = \mathbb{E}\left[\ g_x\left(x_T^\mu\right) \widetilde{x}_T\right]. \tag{4.17}$$

Depuis g_x et h_x sont bornées, alors par (4.13), X est de carré intégrable. Par conséquent, le processus $\left(\mathbb{E}\left[X \ / \ \mathcal{F}_t\right]\right)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration naturel du mouvement brownien W. Puis, par la théorème de représentation de Itô, nous avons

$$Y_t = \mathbb{E}\left[X\ \right] + \int_0^t Q_s dW_s - \int_0^t \int_U \left[\Phi_s^* h_x\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s\left(da\right)\right] ds,$$

avec Q est un processus adaptet tel que $\mathbb{E}\displaystyle\int_0^T \left|Q_t\right|^2 dt < \infty$.

En appliquant la formule d'Itô sur β_t et en suit sur $\beta_t Y_t$ et utilisant (4.17), on peut réecrire l'inégalité (4.12) comme

$$0 \leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu\left(\theta\right)\right) - \mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu\left(\theta\right)\right)\right] dt,$$

où le Hamiltonien $\mathcal{H}$ est définit de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right) \times \mathbb{R}^n$ à valeur dand $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(t, x_t, q_t, p_t, P_t, Q_t\left(\theta\right)\right) := &\int_U h\left(t, x_t, a\right) q_t\left(da\right) + \int_U p_t b\left(t, x_t, a\right) q_t\left(da\right)\\ &+ \int_U P_t \sigma\left(t, x_t, a\right) q_t\left(da\right)\\ &+ \int_\Theta \int_U f\left(t, x_{t^-}, \theta, a\right) Q_t\left(\theta\right) q_t\left(da\right) m\left(d\theta\right),\end{aligned}$$

et $\left(p^\mu, P^\mu, Q^\mu\left(\theta\right)\right)$ est un triplet de processus adapté donnée par

$$\begin{aligned}p_t^\mu &= \Psi_t^* Y_t,\ p^\mu \in \mathcal{L}^2\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^n\right),\\ P_t^\mu &= \Psi_t^* Q_t - \int_U p_t^\mu \sigma_x^*\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t\left(da\right),\ P^\mu \in \mathcal{L}^2\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^{n\times d}\right),\\ Q_t^\mu\left(\theta\right) &= \int_\Theta \int_U p_t^\mu f_x\left(t, x_{t^-}^\mu, \theta, a\right) \mu_t\left(da\right),\ Q^\mu\left(\theta\right) \in \mathcal{L}^2\left(\left[0,T\right]\times\Theta;\mathbb{R}^n\right),\end{aligned} \qquad \mathbf{(4.18)}$$

et le processus Q satisfie

$$\begin{aligned}\int_0^t Q_s dW_s = &\ \mathbb{E}\left[\Phi_T^* g_x\left(x_T^\mu\right) + \int_0^T \int_U \Phi_t^* h_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t\left(da\right) dt \ /\mathcal{F}_t\right]\\ &- \mathbb{E}\left[\Phi_T^* g_x\left(x_T^\mu\right) + \int_0^T \int_U \Phi_t^* h_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t\left(da\right) dt\right].\end{aligned}$$

Le processus p^μ est appelé le processus adjoint et les formules (4.15), (4.16) et (4.18) sont données éxplicitement par

$$p_t^\mu = \mathbb{E}\left[\Psi_t \Phi_T^* g_x\left(x_T^\mu\right) + \int_t^T \int_U \Psi_t \Phi_s^* h_x\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s\left(da\right) ds \ /\mathcal{F}_t\right].$$

En appliquant la formule d'Itô sur le processus adjointe p^μ dans (4.18), on obtient l'équation adjoint, qui est EDS rétrograde linéaire, proposée par

$$\left\{\begin{array}{rl} -dp_t^\mu = & \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu\left(\theta\right)\right) dt - P_t^\mu dW_t \\ & + \int_\Theta Q_t^\mu\left(\theta\right) N\left(d\theta, dt\right), \\ p_T^\mu = & g_x\left(x_T^\mu\right). \end{array}\right. \qquad \mathbf{(4.19)}$$

4.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés

A partir de l'inégalité variationnelle, nous pouvons maintenant énoncer les conditions nécessaires d'optimalité, pour le problème de contrôle relaxé $\{(4.4), (4.5), (4.6)\}$.

Théorème 47 *(Conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés). Soient μ un contrôle optiimal relaxé minimisant la fonctioinelle $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{R}$ et x_t^μ notée trajéctoire optiimal correspondante. Alors, il éxiste un triple de processus adapté*

$$(p^\mu, P^\mu, Q^\mu(\theta)) \in \mathcal{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times d}\right) \times \mathcal{L}^2([0,T]\times\Theta; \mathbb{R}^n),$$

solution de EDS rétrograde (4.19) *tel que*

$$\mathcal{H}(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) = \inf_{q_t\in\mathbb{P}(U)} \mathcal{H}(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)), \ pp. \tag{4.20}$$

Proof. A partir de l'inégalité varianionnelle, on a

$$0 \le \mathbb{E}\int_0^T [\mathcal{H}(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta))]\, dt.$$

Soit $t \in [0,T]$. Pour $\varepsilon > 0$, on défini le contrôle relaxé

$$q_s^\varepsilon = \begin{cases} q_s & \text{on} \quad [t, t+\varepsilon], \\ \mu_s & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Etant évidente que q^ε est un élément de $\mathcal{R}$. Donc, par apllication d'inégalité précédente avec q_s^ε et en dirivant par ε, on obtient

$$0 \le \mathbb{E}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} \{\mathcal{H}(s, x_s^\mu, q_s, p_s^\mu, P_s^\mu, Q_s^\mu(\theta)) - \mathcal{H}(s, x_s^\mu, \mu_s, p_s^\mu, P_s^\mu, Q_s^\mu(\theta))\}\, ds\right].$$

En plus, Soit ε tend vers 0, on trouve

$$0 \le \mathbb{E}[\mathcal{H}(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta))].$$

Soit A un élément arbitraire de $\sigma-$algebre $\mathcal{F}_t$, et

$$\pi_t := q_t \mathbf{1}_A + \mu_t \mathbf{1}_{\Omega - A}.$$

C'est claire que $\pi \in \mathcal{R}$. En appliquant l'inégalité précédent sur π, on trouve

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \{\mathcal{H}(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta))\}], \ \forall A \in \mathcal{F}_t,$$

ce qui implique que

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathcal{H}(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)) \ / \ \mathcal{F}_t].$$

La quatité a l'interieure d'ésperance conditionelle est $\mathcal{F}_t-$mesurable, et qui nous termine la démonstration. ■

4.2.3 Condition suffisante d'optimalité pour les contrôles relaxés

Dans ce paragraphe, on va étudier lorsque la condition nésessaire (4.20) devient suffisante.

Théorème 48 *(Condition suffisante d'optimalité pour les contrôles relaxés). On suppose que les fonctions $g(.)$ et $\mathcal{H}(t, ., q_t, p_t, P_t, Q_t(\theta))$ sont convexes. Alors μ est une solution optimal du problème $\{(4.4), (4.5), (4.6)\}$ s'il vérifie (4.20).*

Proof. Soient μ un élément de $\mathcal{R}$ (candidat pour être optimal) et q un élément quelconque de $\mathcal{R}$.

Pour tout $q \in \mathcal{R}$, on a

$$\begin{aligned} J(\mu) - J(q) &= \mathbb{E}\left[g(x_T^\mu) - g(x_T^q)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h(t, x_t^\mu, a)\,\mu(da) - \int_U h(t, x_t^q, a)\,q(da)\right] dt. \end{aligned}$$

Comme g est convexe, on a

$$g(x_T^\mu) - g(x_T^q) \leq g_x(x_T^\mu)(x_T^\mu - x_T^q).$$

En remarque que $p_T^\mu = g_x(x_T^\mu)$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\mu) - J(q) &\leq \mathbb{E}\left[p_T^\mu(x_T^\mu - x_T^q)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_U h(t, x_t^\mu, a)\,\mu(da) - \int_U h(t, x_t^q, a)\,q(da)\right] dt. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô à $p_t^\mu\left(x_t^\mu - x_t^q\right)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\mu) - \mathcal{J}(q) \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)\right) - \mathcal{H}\left(t, x_t^q, q_t, p_t^q, P_t^q, Q_t^q(\theta)\right)\right] dt \\
&- \mathbb{E}\int_0^T \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)\right)\left(x_t^\mu - x_t^q\right) dt.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathcal{H}$ est convexe sur x et linéaire sur μ, donc par utilisant Le Gradient généralisée de Clarke pour $\mathcal{H}$ éventuelement à (x_t, μ_t) et condition nésessaire d'optimalité (4.20), est suivre

$$
\begin{aligned}
0 \geq\; &\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)\right) - \mathcal{H}\left(t, x_t^q, q_t, p_t^q, P_t^q, Q_t^q(\theta)\right) \\
&- \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu, Q_t^\mu(\theta)\right)\left(x_t^\mu - x_t^q\right).
\end{aligned}
$$

En combinaisant les deux inégalités précédentes, on obtiendra

$$\mathcal{J}(\mu) - \mathcal{J}(q) \leq 0.$$

La démonstration est terminée. ■

Remarque 49 *Si $dt\mu_t(da) = dt\delta_{u(t)}(da)$ alors on retrouve les résultats du principe du maximum ordinaire obtenue par.*

Remarque 50 *Si $Q \equiv f \equiv 0$, alors on obtient les résultats obtenus par S.Bahlali [2].*

Remarque 51 *1/ L'optimalité suffisante pour des contrôles stricts sont prouvés sans assumer soit la convexité de U ou de celle de $\mathcal{H}$ dans v.*

2/ Les théorèmes limites pour les contrôles relaxés rèstent des points ouvertes.

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intérésés aux conditions necessaires d'optimalités vérifieés par des contrôles optimaux. Nous avons établis trois résultats nouveaux concernant ce genre de problèmes dans le cas des coefficients non linéaires pour des diffusions singulières et des diffusions de Poisson et finalement pour des équations défferentielles stochastiques doublement progréssive-rétrograde avec ensemble des contrôles admissibles convexes.

Pour conclure ce travail, nous allons présenter quelques problèmes ouverts dont les solutions constituent des extenssions naturelles de nos travaux.

Problem 52 *Le problème des contrôles singulièr trouve directement des applications en économie, gestion et surtout en mathématique financière, il serait très interessant de voir l'application directe des trois pirincipes du maximum établis dans ce travail dans ces domaines. De plus, on peut voir une autre forme de généralisation du principe du maximum relaxé singulier dans le cas où le coefficient de diffusion* σ *dépend explicitement du terme contrôle relaxé ainsi on essaie de généralise le résultat obtenu dans [4] pour passage à la limite.*

Problem 53 *De plus une autre branche rèste ouverte concernant l'application des nouveaux méthode de Bahlali [8] sur le problème des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques doublement progréssive-rétrograde pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalités pour des contrôles relaxés et du passage à la limite pour le cas stricte et trouver une généralisation des résutlats obtenus par [8] avec des conditions faibles.*

Problem 54 *Comme il est intéressant d'étudier les problèmes des contrôles avec contrainte, ce genre de problème trouve des applications en finance, quand on impose une condition de non banqueroute où de non faillite pour une entreprise.*

Problem 55 *Lien entre le principe du maximum et l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi, en contrôle stochastique on sait que si les donnés sont assez régulières alors le processus adjoint peut être défini comme la dérivée de fonction de valeurs qui est une solution de l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi. Il serait interessant de voir* *quel genre de résultat peut-on obtenir si ces hypothèses ne sont plus satisfaites(Voir X.Zhou [41] pour plus de détails.*

Remarque 56 *Dans cette thèse l'aspect numérique pour la résolution des problèmes de contrôle stochastique n'a pas été abordé. Il existe d'excellentes références traitant cet aspect dont le plus récent est l'ouvrage de Kushner-Dupuis. [34].*

Bibliographie

[1] V. Arkin and M. Saksonov. : *Necessary optimality conditions for stochastic differential equations*, Soviet Math. Dokl., 20 (1979), pp. 1-5.

[2] S. Bahlali. : *Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems*, SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol. 47, No. 4, pp. 2078–2095.

[3] S. Bahlali, A. Chala, *The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients*, Rand. Operat. and Stoch. Equ., Vol. 13, N°1 (2005), pp. 1-10.

[4] S.Bahlali, A. Chala, *A general optimality conditions for stochastic control problems of jump diffusions* Appl. Math Optim. Vol. 65, N°1 (2012), pp. 15-29. (2005).

[5] S. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi, *A general stochastic maxixum principle for singular control problems*. EJP Vol. 10 (2005), Paper no. 30, pages 988-1004

[6] V.E Benes, L.A Shepp and H.S Witsenhausen, *Some solvable stochastic control problems*, Stochastics, 4 (1980), pp. 39-83.

[7] A. Bensoussan : *Non linear filtering and stochastic control. Proc.* Cortona 1981, Lect. notes in Math. 1982, 972, Springer Verlag.

[8] J.M. Bismut : *Conjugate convex functions in optimal stochastic control*, J. Math. Anal. Appl.44 (1973), pp. 384-404.

[9] J.M. Bismut : *Linear quadratic optimal control with random coefficients*, SIAM J. Control Optim., 14 (1976), pp. 419-444.

[10] J.M. Bismut : *An introductory approach to duality in stochastic control*, SIAM Rev, 20 (1978), 62-78.

[11] R. K. Boel. : *Optimal control of jump processes*, Electronics Research Lab. Memo M448, University of California, Berkeley, CA, July 1974.

[12] R. K. Boel and P. Varaiya : *Optimal control of jump processes*, SIAM J. Control Optim., 15(1977), pp. 92-119.

[13] A. Cadenillas : *A stochastic maximum principle for systems with jumps, with application to finance*, Systems and Control Letters, 47, 2002, pp 433-444.

[14] A. Cadenillas, U.G. Haussmann, *The stochastic maximum principle fora singular control problem.* Stochastics and Stoch. Reports., Vol. 49 (1994), pp. 211-237.

[15] A. Cadenillas and I. Karatzas : *The stochastic maximum principle for linear convex optimal control with random coefficients*, SIAM J. Cont. Optim., 1995, Vol. 33, No 2, pp.590-624.

[16] P.L. Chow, J.L. Menaldi and M. Robin, *Additive control of stochastic linear system with finite time horizon*, SIAM J. Control and Optim., 23 (1985), pp. 858-899.

[17] M. Davis and R. Elliot. : *Optimal control of a jump process,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 40 (1977), pp. 183-202.

[18] M.H.A. Davis, A. Norman, *Portfolio selection with transaction costs*, Math. Oper. Research, 15 (1990), pp. 676 - 713.

[19] R.J. Elliott. : *The optimal control of diffusions*, Appl. Math. Optim., 1990, 22, pp.229-240.

[20] R.J. Elliott and M. Kohlmann. : *The second order minimum principle and adjoint process.* Stochastics and Stoch. Rep., 1994, Vol. 46, pp.25-39.

[21] I. Ekeland-R. Temmam. *Analyse convexe et problème variationnel.* Dunod (1974).

[22] N. El Karoui, N. Huu Nguyen and M. Jeanblanc Piqué. : *Compactification methods in the control of degenerate diffusions.* Stochastics, Vol. 20, 1987, pp 169-219.

[23] W.H. Fleming. : *Generalized solutions in optimal stochastic control, Differential games and control theory 2*, (Kingston conference 1976), Lect. Notes in Pure and Appl. Math.30, 1978.

[24] N.C. Framstad. : B. Øksendal and A. Sulem, *Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance*, J. Optim. Theory and Appl. 121 (2004), 77-98 and Vol. 124, No. 2 (2005).

[25] U.G. Haussmann. : *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, Math. Programming Studies 6, 1976, pp 30-48.

[26] U.G. Haussmann. : *A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions*, Pitman Research Notes in Math, 1986, Series 151.

[27] U.G. Haussmann, W. Suo, *Existence of singular optimal control lawsfor stochastic differential equations*, Stochastics and Stoch. Reports, 48 (1994), pp. 249 - 272.

[28] U.G. Haussmann, W. Suo, *Singular optimal stochastic controls I : Existence*, SIAM J. Control and Optim., Vol. 33 (1995), pp. 916-936.

[29] U.G. Haussmann, W. Suo, *Singular optimal stochastic controls II : Dynamic programming*, SIAM J. Control and Optim., Vol. 33 (1995), 937-959.

[30] Y. M. Kabanov. : *On the Pontryagin maximum principle for SDEs with a Poisson type driving noise, In Statistics and control of stochastic processes* (Moscow, 1995/1996), Y. M. Kabanov, B. L. Rozovskii, and A. N. Shiryaev, eds., World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 173–190.

[31] M. Kohlmann. : *Optimality conditions in optimal control of jump processes extended abstract*, Proceedings in Operations Research, 7 (Sixth Annual Meeting, Deutsch. Gesellsch. Operations Res., Christian-Albrechts-Univ., Kiel, 1977), pp.48–57, Physica, Wrzburg, 1978.

[32] I. Karatzas, S. Shreve, *Connections between optimal stopping andstochastic control I : Monotone follower problem*, SIAM J. Control Optim., 22 (1984), pp. 856 - 877.

[33] H.J. Kushner. : *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems*, SIAM J. Control Optim, Vol. 10, 1973, pp 550-565.

[34] H.J. Kushner, P.G.Dupuis. *Nemurical methods for stochastic control problème in continuous time*. (1992). Springer Verlag.

[35] B. Øksendal and A. Sulem. : *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Second Edition, Springer 2007.

[36] S. Peng : *A general stochastic maximum principle for optimal control problems.* SIAM J. Control and Optim. 1990, 28, N° 4, pp 966-979.

[37] S. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations.* Stoch. Stoch. Rep. 37, (1991), pp 61-74.

[38] R. Rishel. : *A minimum principle for controlled jump processes,* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 107, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975, pp. 493-508.

[39] R. Situ. : *A maximum principle for optimal controls of stochastic systems with random jumps, in Proc.* National Conference on Control Theory and Its Applications, Qingdao, Shandong, People's Republic of China, October 1991.

[40] S. J. Tang and X. J. Li. : *Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), pp. 1447–1475.

[41] X.Zhou. A *unified treatment of maximum principle and dynamic programming.* Stochastics & Stoch Reports, (1990), vol.31, 137-161.

Résumé:

Dans ce travail, nous nous intéressons aux conditions nécessaire d'optimalité en contrôle optimal stochastique dont le système est gouverné par des un EDS. Ces conditions nécessaires seront établies sous forme de principe du maximum et on démontre deux nouveaux résultats:

Le premier résultat concerne le principe du maximum pour des diffusions singulières dont les coefficients non linéaires, de plus, on ne suppose pas que les coefficients de la fonction coût sont convexes. Le résultat sera obtenu en utilisant la perturbation faible sur les contrôles et une méthode variationnelle simple. Ceci constitue une généralisation du résultat obtenu par Cadellinas-Haussmann et aussi celui obtenu par Benoussan.

Dans le deuxième résultat, nous considérons un problème de contrôle stochastique où le système est gouverné par une équation différentiel stochastique non linéaire avec sauts. Le contrôle est relaxé à entrer dans les deux termes de diffusion et de saut. En utilisant seulement l'expansion du premier ordre et l'équation adjointe associée, nous établissons conditions nécessaires d'optimalité des contrôles, ainsi que les conditions suffisants pour les contrôles relaxé, qui sont des mesure-évaluées processus, Ceci constitue une généralisation du résultat obtenu Bahlali.

Mots clés: équations différentielle stochastique, diffusion singulière, contrôle stochastique, contrôle relaxé, principe de maximum, principe variationelle, équations différentielle stochastique rétrograde, processus adjoint.

Abstract:

In this work, we focus on the necessary conditions of optimality in stochastic optimal control the system is governed by an EDS. These necessary conditions are established in the form of maximum principle and demonstrated two new results:

The first result concerns the maximum principle for singular diffusions which are non-linear coefficient; again, we do not assume that the coefficients of the cost function are convex. The result will be obtained using the weak perturbation of controls and a simple variational method. This is a generalization of the result obtained by Cadellinas-Haussmann and as that obtained by Benoussan.

Keywords: Stochastic differential equations, singular diffusion, stochastic control, relaxed control, maximum principle, variational principle, backward stochastic differential equations, adjoint process.