République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

BOUSSAHA Ahlam

Titre :

Contrôle optimal stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	CHALA Adel	UMKB	Président
Dr.	**ABBA Abdelmadjid**	UMKB	Encadreur
Dr.	BOUGHRARA Saliha	UMKB	Examinateur

Juin 2018

0.1 Dédicace

$\mathcal{A}$ mes parents

$\mathcal{A}$ mes frères

$\mathcal{A}$ mes soeurs

$\mathcal{A}$ mes amies

REMERCIEMENTS

Je tiens à exiprimer mes remerciement au "ALLAH" qui je aide et je donné
la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je remercie mon encadreur Dr "ABBA Abdelmadjid" qui a proposé le théme de

ce mémoire, pour ses conseils et ses diréctives du début jusqu'à
la fin de ce travail.

Mes remerciment vont également à monsieur "Chala Adel" et madame "Boughrara Saliha" d'avoir acceptés de faire partie de jury.
Enfin, je adresse mes plus sincères remerciments à tous mes proches et amis, qui nous

ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Notre objectif dans ce travail consiste à étudier les problémes de contrôle optimal stochastique dans le cas linéaire.

Le système est gouverné par une équation différentielle stochastique linéaire du type :

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + Bv_t + C_t)\,dt + (DX_t + Ev_t + F_t)\,dB_t, t \in [0,T] \\ X_0 = x \end{cases}$$

x est la condition initiale, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard d-dimensionnel définit sur un espace probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, p\right)$ satisfaisant les conditions habituelles.

Le fonctionnel coût à minimiser sur l'ensemble $\mathcal{U}$ est la forme :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, v_t)\,dt\right]$$

où g et h sont des fonctions données, et elles sont convexes dérivables.

Un contrôle optimal $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il vérifier :

$$J(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}} (v)$$

le principe outil minimiser une certaine fonction de coût $J(.)$.

le plan de travail est donc divisée en deux chapitre , organisé la manière suivante :

le premier chapitre est consacré aux notions génerales de calcul stochastique, on a présenté des définition de notion comme la martingale, mouvement Brownien et l'integrale stochastique comme l'integrale d'Itô. Le but de ce chapitre est présenter brièvement les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du ce travail.

Dans le deuxième chapitre, on acommencé par la présentation de la structure de bas d'un problème de contrôle, qui se fait selon les caractéristique suivante :

état du système, contrôle et le critère de coût. En suite on dennera les différentes classe de contrôles stochastique comme le contrôle admissible, le contrôle optimal, contrôle feed-back, ...etc.

Des conditions nécessaires et suffisantes sont établies, sous forme de principe du maximum.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Processus

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_{t,}t \in [0, +\infty[)$ définies sur le meme espace de probabilité.

1.1.2 Filtration

Une filtration est famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-a-dire telle que : $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_S$ pour tout $t \leq s$.

On appelle filtration naturelle du processus, la suite croissante de tribus complétes $\mathcal{F}_t = \delta\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est un espace probabilité filtré.

Processus mesurable

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P\right)$.

Le processus X est dit mesurable si l'applicaion

$$X : [0, \infty[\times \Omega \to (E, \xi)$$
$$(t, \omega) \to X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport à $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}$.

Processus adapté

Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_{t,}0 \leq t \leq +\infty\}$ si pour t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Processus à trajectoire continue

On dit que le processus est à trajectoires contunies (ou est continue) si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Processus càd-làg

Un processus est dit càd-làg (ou continu à droite, pourvu de limites à gouche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gouche.

Processus (Càg-làd)

Un processus est dit càdlàg (continu à gauche, limité à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues des limites à droite.

Définition 1.1.1 (Modification) *Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ deux processus aléatoire indexés par le meme ensemble T et à valeurs dans le meme espace E. On dit que Y est une modification de X si $\forall t \in T,\ P[Y_t = X_t] = 1$.*

Définition 1.1.2 (Indistingables) *Les deux processus X et Y sont dits indistinguables si*

$P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1.$

(on admet implicitement que l'évenment $\{\forall t \in T, X_t = Y_t\}$ est mesurable : une manière plus correcte de donner cette définition est de dire qu'il existe un ensemble négligeable N tel que $\forall \omega \in \Omega \backslash N, \forall t \in T, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$).

La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification.

Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

Définition 1.1.3 (Processus progressivement mesurable) *Le processus X est dit progressivement mesurable (ou progressif) si $\forall t \geq 0$ l'application*

$$X : [0,t] \times \Omega \to E$$
$$(s,\omega) \to X_s(\omega)$$

est muserable par rapport à la tribu $B \otimes \mathcal{F}_t$.

1.2 Quelques Inégalités

Proposition 1.2.1 (Inégalité de Jensen) *Soit $M \in L^1(\mathcal{F})$, φ une fonction convexe telle que $\varphi(M) \in L^1(\mathcal{F})$,*

alors

$$\varphi(E[M]) \leq E[\varphi(M)].$$

Propriété 1.2.1 (Convergence monotone) *Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite croissante de variables aléatoire réel intégrables, qui converge vers une variable X que l'on suppose intégrable, alors*

$$E[X_n] \to_{n\to\infty} E[X].$$

Propriété 1.2.2 (Fatou) *Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite croissante de variables aléatoire réel positiveset intégrables,telle que $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ est une variable intégrable, alors*

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[X_n\right].$$

Propriété 1.2.3 (Convergence dominée) *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoire réel intégrables qui converge en probabilité vers* X*, et on suppose qu'il existe* U *intégrable telle que* $\forall n \geq 0; |X_n| \leq U$*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[X_n\right] = E\left[X\right].$$

1.3 Martingales

Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}$ croissante(telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$.)

Définition 1.3.1 *Une famille de varibles aléatoires*$(X_{t,}t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration*$(\mathcal{F}_t)$ *si :*

1. X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
2. X_t intégrable pour tout t.
3. $E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) = X_S, \forall s \leq t$.

Si la dernière condition est remplacée par $E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \leq X_S, \forall s \leq t$. On dit (X_t) est une sur-martingale.

Si la dernière condition est remplacée par $E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \geq X_s, \forall s \leq t$. On dit (X_t) est une sous-martingale.

1.3.1 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$.

On note :

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right).$$

Un temps d'arret est une varaible aléatoire τ à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.3.2 Théorème d'arret

Si T est un temps d'arrêt et M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, le processus Z définit par $Z_t = M_{t\wedge T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale. En particulier, $E\left(M_{t\wedge T}\right) = E\left(M_0\right)$.

Théorème 1.3.1 ***(théorème d'arret pour les martingale)*** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale à trajectoires continues à droite et uniformément intégrable. Soient S et T deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Alors X_S et X_T sont dans L^1 et*

$$X_S = E\left[X_T | \mathcal{F}_S\right],$$

avec la convention $X_T = X_\infty$ sur $\{T = \infty\}$. En particulier, pour tout temps d'arret S, on a

$$X_S = E\left[X_\infty | \mathcal{F}_S\right],$$

et

$$E\left[X_S\right] = E\left[X_\infty\right] = E\left[X_0\right].$$

oú $\|.\|_p$ est la norme L^p.

1.3.3 Martingale locale

Définition 1.3.2 *Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté.*

On dit que une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $\{\tau_n, n \geq 0\}$ telle que :

$$P\left[\tau_n \to \infty\right] = 1.$$

Le processus $X^n : t \to X_{t \wedge \tau_n}$ est une martingale pour tout $n \geq 0$.

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Doob) *Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale (ou sousmartingale positive), $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Alors

$$\left\| \sup_{s\in[0,t]\cap D} |M_s| \right\|_p \leq q \sup_{s\in[0,t]} \|M_s\|_p .$$

Si de plus M a des trajectoires c-à-d,

$$\left\| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \right\|_p \leq q \sup_{s\in[0,t]} \|M_s\|_p .$$

Théorème 1.3.2 (Inégalité maximal) *Si $\{M_t\}$ est une sous-martingale positive et continue et $\lambda > 0$, alors $\forall p \geq 1$ on a :*

$$\lambda^p P\left(\sup_{t:0\leq t\leq T} M_t > \lambda\right) \leq E\left[M_T^p\right],$$

et , si $M_T \in L^p(dp)$ pour un $p > 1$, alors on a aussi :

$$\left\| \sup_{t:0\leq t\leq T} M_t \right\|_p \leq \tfrac{p}{p-1} \|M_T\|_p .$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB(s)\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X(s))\, dB(s)|^2\, ds\right]$$

1.3.4 Variation total et variation quadratique

Définition 1.3.3 *On définit la variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1, ..., t_n)$ de $[0, T]$, par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=0}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p .$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ a une limite dans un certain sens lorsque

$$\Pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| \to 0,$$

la limite ne dépand pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p de X sur $[0, T]$.

En particulier

• Si $p = 1$, la limite s'appellera variation totale de X sur $[0, T]$.

• Si $p = 2$, la limite s'appellera variation quadratique de X sur $[0, T]$.

1.4 Le mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.4.1 *Le processus $(B_{t,} t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standartd) si*

1. $P(B_0 = 0) = 1$
2. $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centée de variance $(t - s)$.
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n$,les variable $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

Lemme 1.4.1 (Gronwall) *Soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t,

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB((s)) \right|^2 \right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X(s))\, dB((s))|^2\, ds\right] \text{stique}$$

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace.

1.5 Intégrale stochastique

1.5.1 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'**I**tô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

ou b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe(au sens Lebesgue) p.s. pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ \qquad X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique(sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signfie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t$$

alors $b = \tilde{b}, \sigma = \tilde{\sigma}$.

En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'**I**to pour des coefficient de diffusion tels que

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \ P.p.s.$$

mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie est une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0, A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $E\left(A_t^2\right) = 0$.

Première forme

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Intégralation par parties

La formule d'**I**tô montre que $d[X_1 X_2](t) = X_1(t)\, dX_2(t) + X_2(t)\, dX_1(t) + \sigma_1(t)\, \sigma_2(t)\, dt$. Cette formule est connue sous le nom d'intération par parties. La quantité $\sigma_1(t)\, \sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2, noté $\langle X_1, X_2 \rangle$ et défini comme le processus à variation finie $\langle X_1, X_2 \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\, \sigma_2(s)\, ds$.

1.6 Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle est une equation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t = b(s, X_s)\, ds + \sigma(s, X_s)\, dB_s \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficient, l'équation différentielle a une unique solution.

Il est utile de préciser les données.

Existence et unicité de solutions

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les les coefficients b et σ.

Supposons que les fonctions f et g satisfont les deux conditions suivantes :

1. Condition de Lipschitz globale : Il existe une constante K telle que

$$|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x-y|$$

   pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$.

2. condition de croissance : Il existe une constante L telle que

$$|b(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq L(1+|x|)$$

pour tous les $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$.

Chapitre 2

Principe du maximum pour les problèmes de contrôle stochastique optimal

2.1 Classe des contrôles

2.1.1 Contrôle stochastique

Le contrôle stochastique caractérisé par :

2.1.2 Etat du systéme

Un système dynamique se caractérise par son état à tout instant qui peut être discret ou continu. Tout en considérant sa variation continue. L'horizon(l'intervalle de variation du temps)peut être fini ou infini.

Les variables quantitatives se représentent par l'état du système et elles sont en nombre fini à valeurs réelles.

Au moment t, l'état du sysème sera noté l'application $t \to X_t(\omega)$ décrit l'évolution du sysèteme. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

2.1.3 Contôle :

La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modèlisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponible à ce instant. Un contrôle est un processus u_t adapté par rapport à une filtration et prend ses valeurs dans un espace de contrôle $A \subset \mathbb{R}^n$.

2.1.4 Critère de coût :

L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur l'ensemble des contrôles admissible une fonctionnelle J. Pour décrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant.

2.2 Type des contrôle stochastique

2.2.1 contrôle admmissible

Définition 2.2.1 *On appelle contrôle admissible tout processus* $u_t\,(t \in [0,T])$*, mesurable et* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté à valeur dans un borélien* A *de* $\mathbb{R}^d$.

Notons par $\{U_{ad} = u : [0,T] \times \Omega \to A,$ tel que u, est mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté$\}$.

2.2.2 Contrôle optimal

Définition 2.2.2 *Le probléme de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût* J *sur l'ensemble des contrôle admissible* U_{ad}*. Un contrôle admissible* u *est dite optimal si :*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v).$$

2.2.3 Contrôle presque optimal

Définition 2.2.3 *Soit $\xi > 0$, le contrôle u^{ξ} est dit presque optimal (ou ξ-optimal) si :*

$$J\left(u^{\xi}\right) \leq J(u) + \xi, \forall U_{ad}.$$

2.2.4 Contrôle feed-back

Définition 2.2.4 *Soit un contrôle $\mathcal{F}_t$-adapté, et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X. On dit que u_t est feed-back contrôle si : u_t est aussi adapté par rapport la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si dépend de X.*

2.2.5 Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T] \times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de le convergence stable des mesure. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \to \int f(s,a)\, q(ds,da)$ soit mesurable, bornée et continues en a.

Définition 2.2.5 *Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(\omega, dt, da)$ à valeur dans V telle que pour chaque t, $\varkappa_{[0,t]q}$ est une $\mathcal{F}_t$-mesurable. $(\mathcal{F}_t = \sigma(B(s)\, 0 \leq s \leq t))$ .Tout contrôle relaxé peut être intégré en*

$$q(\omega, dt, da) = dtq(\omega, t, da).$$

Où $q(t, da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

2.2.6 Contrôle singulier

Soit A_1 un sous-ensemble fermé convexes de $\mathbb{R}$ et $A_2 = [0, \infty]$ .Soient U_{ad1}et U_{ad2} deux classes des mesurable définie comme suit :

$$U_{ad1} = \{u(.) : [s,t] \times \Omega \to A_1; \mathcal{F}_t\text{-adapté}\},$$
$$U_{ad2} = \{\eta(.) : [s,t] \times \Omega \to A_2; \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}.$$

Un contrôle admissible est paire(u, η) de $A_1 \times A_2$ à valeur mesurable, $\mathcal{F}_t$-adapté, telque :

1. η est à variation bornée non décroissante contnue à gauche, limite à droite et $\eta_0 = 0$.
2. $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |u_t|^2 + |\eta_T|^2\right] < \infty$.

On note $U_{ad1} \times U_{ad2}$ l'ensemble de tous les contrôle admissibles. Notons que depuis $d\eta_t$ peut être singulier par rapport à la mesure de Lebesgue dt, nous appellons η la partie singulier de la contrôle et le processus u sa partie absolument continue.

2.3 Formulation du problème

Soit T un nombre réel strictement positif, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t; t \in [0,T])$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et U un sous en ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3.1 *On appelle contrôle admissible tout processus $\upsilon = (\upsilon_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeur dans U tel que :*

$$\sup_{0\le t\le T} E|\upsilon_t|^2 < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$\mathcal{U} = \{\upsilon : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{A}/\upsilon$ est mesurable et $(\mathcal{F}_t)$-adapté $\}$

L'équation différentielle stochastique linéaire, de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \upsilon_t)\,dt + \sigma(t, X_t, \upsilon_t)\,dB_t, t \in [0,T] \\ X_0 = x, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \\ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

et x est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable, telle que :

$$\mathbb{E}\left|x\right|^2 < \infty.$$

Soit la fonctionnelle suivante(appelée coût) :

$$J\left(v\right) = \mathbb{E}\left[g\left(X_T\right) + \int\limits_0^T h\left(t, X_t, v_t\right) dt\right],$$

où :

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}.$$

L'objectif du contrôle optimal est de minimiser le coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il vérifie :

$$J\left(u\right) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J\left(v\right).$$

il existe deux axes principaux pou traiter ce genre de problème

1. Le principe du maximum de Pontriagin (les conditions nécessaires d'optimalités).
2. Le principe de la programmation dynamiqe (l'équationde Hamilton-Jacobi-Bellman).

Dans ce mimoire, on s'intéresse au premier cas. Si un contrôle optimal existe, on établira des condition nécessaires et aussi suffisantes d'optimalité sous forme de principe du maximum de Pontryagin.

On distingue 3 cas dans ce genre de problème

$1er$ cas : L'enssemble des contrôles $\mathcal{U}$ est convexe et le système est linéaire.

$2éme$ cas : L'enssemble des contrôles $\mathcal{U}$ est convexe et le système non linéaire.

$3éme$ cas : L'enssemble des contrôles $\mathcal{U}$ est non convexe et le système non linéaire.

Dans le $3éme$ cas, il y'a deux autres cas selon que le cofficient σ dépend de la variable contrôle où non.

Dans ce travail, on étudiera le premier cas, c'est à dire établir des conditions nécessaires et aussi suffisantes d'optimalité dans le cas où le système est linéaire et l'ensemble des contrôle est convexe.

On suppose b et σ sont linéaires en leurs variable et sont données par :

$$b(t, X, \upsilon) = AX_t + B\upsilon_t + C_t,$$
$$\sigma(t, X, \upsilon) = DX_t + E\upsilon_t + F_t$$

Avec :

$$A : [0, T] \times \rightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),$$
$$B : [0, T] \times \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$
$$C : [0, T] \times \rightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$D : [0, T] \times \rightarrow M^n_{d\times n}(\mathbb{R})$$
$$E : [0, T] \times \rightarrow \mathcal{M}^m_{d\times n}(\mathbb{R})$$
$$F : [0, T] \times \rightarrow \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{R})$$

On suppose que A, B, C, D, E, F sont progressivement mesurable par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ uniformément bornées en $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Le système est gouverné dans ce par l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + B\upsilon_t + C_t)\, dt + (DX_t + E\upsilon_t + F_t)\, dB_t, 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Pour que cette équation, on suppose que :

$$P\left\{ \int_0^T |B_t\upsilon_t|\, dt < \infty, \int_0^T |E_t\upsilon_t|\, dt < \infty = 1. \right.$$

L'équation d'état étant linéaire à coefficients bornés, donc Lipchitziennes, alors elle admet une solution forte unique donnée par :

$$X = x + \int_0^t (A_sX_s + B_s\upsilon_s + C_s)\, ds + \int_0^t (DX_t + E\upsilon_t + F_t)\, dB_t, 0 \leq t \leq T,$$

De plus cette solution est continue ; et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right] < \infty.$$

Les hypothèses sur les coefficients du coût J sont les suivant :
g et h sont convexes dérivables en leurs variables et à dérivées continues et bornées. sous ces hypothèses, le coût J est bien défini de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

2.4 Résultats préliminaires

Le but du principe du maximum est d'établir des conditions nécessaires d'optimalités vérifiées par un contrôle optimal donné. Pour cela, on se donne un contrôle optimal u minimisant le coût J sur $\mathcal{U}$ et on désigne par X la trajectoire optimale associée à u, c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à u.

Théorème 2.4.1 (Principe de l'optimisation convexe) *: Soit G un espace de réflexif et H un convexe fermé non vide de G. Soit f une fonction de H dans $\mathbb{R}$ convexe et semi continue inférieurement (SCI), Gâteaux-différentiable de différentielle f' continue. Alors , on a :*

$$f(u) = \inf_{v\in H}(v) \Longleftrightarrow \left\langle f'(u), v-u\right\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in H$$

Preuve. Notre but est d'appliquer ce théorème pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour notre problème de contrôle.
On a $\mathcal{U}$ convexe et $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ qui est convexe, continue. Alors pour appliquer le principe de l'optimisation convexe, il nous reste à démonter que J est Gâteaux différentiable et de dérivée continue. ∎

Lemme 2.4.1 • *Pour tout processus u, v et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :*

$$X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = \lambda X_t^u + (1-\lambda)X_t^v; P-ps.$$

Preuve. Avant tout, puis $\mathcal{U}$ que est convexe $\lambda u + (1-\lambda) v$ est un élément de $\mathcal{U}$.

La solution associée à $\lambda u + (1-\lambda) v$ est donnée par :

$X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = X_0 + \int\limits_0^t \left(A_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + B_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + C_s \right) ds$

$+ \int\limits_0^t \left(D_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + E_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + F_s \right) dB_s.$

D'une autre part

$\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v$

$= \lambda X_0 + \int\limits_0^t (\lambda A_s X_s^u + \lambda B_s u_s + \lambda C_s) ds$

$+ \int\limits_0^t (\lambda D_s X_s^u + \lambda E_s u_s + \lambda F_s) dB_s$

$+ (1-\lambda) X_0 + \int\limits_0^t ((1-\lambda) A_s X_s^v + (1-\lambda) B_s v_s + (1-\lambda) C_s) ds$

$+ \int\limits_0^t ((1-\lambda) D_s X_s^v + (1-\lambda) E_s v_s + (1-\lambda) F_s) dB_s.$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} - [\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v]$

$= \int\limits_0^t (\lambda A_s X_s^u + \lambda B_s u_s + \lambda C_s) ds + \int\limits_0^t (\lambda D_s X_s^u + \lambda E_s u_s + \lambda F_s) dB_s$

$+ (1-\lambda) X_0 + \int\limits_0^t ((1-\lambda) A_s X_s^v + (1-\lambda) B_s v_s + (1-\lambda) C_s) ds$

$+ \int\limits_0^t ((1-\lambda) D_s X_s^v + (1-\lambda) E_s v_s + (1-\lambda) F_s) dB_s.$

$- \int\limits_0^t \left(A_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + B_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + C_s \right) ds$

$- \int\limits_0^t \left(D_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + E_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + F_s \right) dB_s.$

Par élimination, on aura :

$[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v] - X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v}$

$= \int\limits_0^t A_s \left\{ [\lambda X_s^u + (1-\lambda) X_s^v] - X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} \right\} ds + \int\limits_0^t D_s \left\{ [\lambda X_s^u + (1-\lambda) X_s^v] - X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} \right\} dB_s.$

Qui est équation différentielle stochastique linéaire à coefficient bornés. Donc, elle admet une solution forte unique. Puis que 0 est une solution de cette équation, alors 0 est l'unique et on obtient :

$[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v] - X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = 0.$

$[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v] = X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v}.$ ■

Lemme 2.4.2 *Le coût J est convexe.*

Preuve. • Pour tout u, $\upsilon \in U, \lambda \in [0,1]$ on a :

$J(\lambda u + (1-\lambda)\upsilon)$

$= E\left[g\left(X_T^{(\lambda u+(1-\lambda)\upsilon)}\right)\right]$

$+E\left[\int\limits_0^T h\left(t, X_t^{(\lambda u+(1-\lambda)\upsilon)}, (\lambda u + (1-\lambda)\upsilon)\right)dt\right].$

h et g sont convexe et X linéaires alors, on aura :

$J(\lambda u + (1-\lambda)\upsilon)$

$\leq E\left[\lambda g(X_T^u) + (1-\lambda) g(X_T^\upsilon)\right]$

$+E\left[\int\limits_0^T \lambda h(t, X_t^u, u_t)\,dt + (1-\lambda) h(t, X_t^\upsilon, \upsilon_t)\,dt\right].$

Ce qui nous donnons :

$J(\lambda u + (1-\lambda)\upsilon) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda) J(\upsilon)$. ■

Lemme 2.4.3 *Le coût J est Gâteaux-différentiable et on a :*

$$\left\langle J'(u); \upsilon - u\right\rangle$$
$$= E\left[g_x(X_T)(X_T^\upsilon - X_T)\right]$$
$$+E\int\limits_0^T \left[(X_t^\upsilon - X_t).h_x(t, X_t, u_t) + (\upsilon_t - u_t).h_u(t, X_t, u_t)\right]dt.$$

Preuve. • On calcule la dérivée de Gâteaux de J au point u et de direction $(\upsilon - u,)$,c'est à dire :

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[J(u + \lambda(\upsilon - u)) - J(u)\right].$

On a :

$J(u) = E\left[g(X_T) + \int\limits_0^T h(t, X_t, \upsilon_t)\,dt\right],$

$J(u + \lambda(\upsilon - u)) - J(u)$

$= \mathbb{E}\left[g\left(X_T^{u+\lambda(\upsilon-u)}\right) - g(X_T^u)\right]$

$+\mathbb{E}\int\limits_0^T \left[h\left(t, X_t^{u+\lambda(\upsilon-u)}, u_t + \lambda(\upsilon_t - u_t)\right) - h(t, X_t^u, u_t)\right]dt.$

Puis que,

$X_t^{u+\lambda(\upsilon-u)} = X_t^u + \lambda(X_t^\upsilon - X_t^u),$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
& J\left(u+\lambda\left(\upsilon-u\right)\right)-J\left(u\right) \\
& =\mathbb{E}\left[g\left(X_T^u+\lambda\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right)-g\left(X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,X_t^u+\lambda\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right),u_t+\lambda\left(\upsilon_t-u_t\right)\right)-h\left(t,X_t^u,u_t\right)\right]dt
\end{aligned}
$$

En utilisant le développement avec reste intégrale et d'ordre 1, on aura :

$J\left(u+\lambda\left(\upsilon-u\right)\right)-J\left(u\right)$
$=\lambda\int_0^1\mathbb{E}\left[\left(g_x X_T^u+\alpha\lambda\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]d\alpha.$
$+\lambda\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(\upsilon_t-u_t\right)\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)d\alpha dt$
$+\lambda\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(\upsilon_t-u_t\right)\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)d\alpha dt.$

En divisans par λ, on obtient :

$$
\frac{1}{\lambda}J\left(u+\lambda\left(\upsilon-u\right)\right)-J\left(u\right)
$$

$$
=\int_0^1\mathbb{E}\left[\left(g_x X_T^u+\alpha\lambda\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]d\alpha.
$$

$$
\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(\upsilon_t-u_t\right)\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)d\alpha dt
$$

$$
+E\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(\upsilon_t-u_t\right)\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)d\alpha dt.
$$

Puisque g_x, h_x et h_υ sont continues, alors en passant à limite, on aura :

$$
\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}J\left(u+\lambda\left(\upsilon-u\right)\right)-J\left(u\right)
$$

$$
=\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]
$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T h_x\left(t,X^u,u\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)dt+\mathbb{E}\int_0^T h_\upsilon\left(t,X^u,u_t\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)dt.$$

Ce qui donne :

$$\left\langle J'\left(u\right),\upsilon-u\right\rangle$$

$$=\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]+\mathbb{E}\int_0^T\left[h_x\left(t,X_t,u_t\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)+h_u\left(t,X_t,u_t\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)\right]dt.$$

■

Lemme 2.4.4 *le contrôle optimale u minimise le coût J sur U si et seulement si pour tout $\upsilon\in U$, on a :*

$$0\leq\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]$$
$$+\mathbb{E}\int_0^T\left[h_x\left(t,X_t,u_t\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)+h_u\left(t,X_t,u_t\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)\right]dt.$$

Preuve. •On a $\mathcal{U}$ convexe et $J:\to\mathbb{R}$ qui est convexe, continue, Gâteaux différentiable et dérivée continue, alors par le principe de l'optimisation convexe, on a u minimise J sur $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$\left\langle J'\left(u\right),\upsilon-u\right\rangle\geq0.$

Puisque :

$$\left\langle J'\left(u\right),\upsilon-u\right\rangle$$

$$=\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^\upsilon-X_T^u\right)\right]$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T\left[h_x\left(t,X_t,u_t\right)\left(X_t^\upsilon-X_t^u\right)+h_u\left(t,X_t,u_t\right)\left(\upsilon_t-u_t\right)\right]dt.$$

Alors u minimise J sur $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^v - X_T^u\right)\right]$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, X_t, u_t\right)\left(X_t^v - X_t^u\right) + h_u\left(t, X_t, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dt.$$

■

2.4.1 Equation adjointe

Partant du lemme, on va établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Considérons l'équation linéaire matricielle suivante associée à l'équation d'état :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A_t \Phi_t dt + D_t dB_t, \\ \Phi_0 = I_d. \end{cases}$$

Cette équation est linéaire à coefficients bornés. Donc, elle admet une solution forte unique. De plus, cette solution est inversible, et son inverse Ψ_t vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi_t = \left[D_t \Psi_t D_t^* - A_t \Psi_t\right] dt - D_t \Psi_t dB_t, \\ \Psi_0 = I_d \end{cases}$$

Φ_t et Ψ_t sont continues et vérifient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\Phi_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\Psi_t\right|\right] < \infty.$$

$$\alpha_t = \Psi_t(X_t^v - X_t^u).$$

$$X = \Phi_T^* g_x(X_T^u) + \int_0^T \Phi_s^* h_x(s, X_s, u_s)ds,$$

$$Y_t = \mathbb{E}[X/\mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_s^* h_x(s, X_s, u_s)ds.$$

$$\mathbb{E}[g_x(X_T^u)(X_T^v - X_T^u)] = \mathbb{E}[\alpha_T Y_T].$$

Puisque g_x et h_x sont bornés, alors X est de carré intégrable, Donc, $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}_t]$ est une martingale de carré intégrable. Puisque $(\mathcal{F}_t)_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien B, alors par le théorème de représentation d'Itô, on a :

$$Y_t = E[X] + \int_0^t Q_s dB_s - \int_0^t \Phi_s^* h_x(s, X_s, u_s)ds.$$

Où Q_s est un processus adapté, tel que :

$$E\int_0^T |Q_s|^2 ds < \infty.$$

la formule d'Itô à α_t, puis à $\alpha_t Y_t$.

$$0 \leq E\int_0^T H_u(t, X_t, u_t, p_t, q_t)(v_t - u_t)dt.$$

Où p et q sont des processus adaptés données par :

$$p_t = \Psi_t^* Y_t; p \in \mathcal{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^n),$$

$$q_t = \sigma_x^* p_t - \Psi_t^* Q_t; q \in \mathcal{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^{n\times d}).$$

et le Hamiltonien H est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times A_1 \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(t, x, u, p, q) = h(t, x, u) + b^*(t, x, u)p - \sigma(t, x, u)q_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à p, on obtient l'équation adjointe qui est une équation différentielle stochastique rétrograde donnée par :

$$\begin{cases} -dp_t = H(t, X_t, u_t, p_t, q_t)dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x(X_T). \end{cases}$$

De plus, le processus adjoint est donné explicitement par :$p_t = E[\Psi_t^* \Phi_T^* g_x(X_T)/\mathcal{F}_t] + \Psi_t^* \int_t^T \Phi_s^* h_x(s, X_s, u_s)ds$.

2.5 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous forme forte

Théorème 2.5.1 *u minimise le coût J sur U si et seulement si il existe une unique paire de processus adaptés :*

$(p, q) \in L^2\left([0,T]; \mathbb{R}^d\right) \times \left(L^2[0,T]; \mathbb{R}^d\right)^d$,

solution de l'équation adjointe, tels que pour tout $\upsilon \in U$, on a :

$H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = \inf_{\upsilon \in U} H(t, X_t, \upsilon, p_t, q_t)$.

Preuve. On a $\mathcal{U}$ convexe et $H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est convexe, continue, Gâteaux différentiable et de dérivée continue, alors par le principe de l'optimisation convexe, on a u minimise $H(t, X_t, u_t, p_t, q_t)$ sur U si et seulement si :

$$H_u(t, X_t, u_t, p_t, q_t)(\upsilon - u_t) \geq 0; \forall \upsilon \in U.$$

On a u minimise le coût J sur $\mathcal{U}$, si et seulement si

$$H_u(t, X_t, u_t, p_t, q_t)(\upsilon - u_t) \geq 0; \forall \upsilon \in U$$

Donc, u minimise le coût J sur $\mathcal{U}$, si et seulement si :

$$H\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right) = \inf_{\upsilon \in U} H\left(t, X_t, \upsilon, p_t, q_t\right).$$

Conclusion

Dans ce travail, nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en contrôle stochastique des sysème gouvernés par des équation différentielles stochastique et leurs applications en finance.

Le problème étude concerne en premier lieu l'etablissement des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cas deffusion linéaires.

Ce mimoire est constitué de deux chapitre.

Le premier est consacré aux notions générales de calcul stochastique .

Le deuxième chapitre est consacré au contrôle optimal des équations différentielles stochastiques linéaires.

Des conditions nécessaires et suffisantes sont établies, sous forme de principe du maximum.

Bibliographie

[1] R. Elliott. Stochastic Calculus and Applications. Springer, Berlin, 1982.

[2] R.S.R. Liptser and A.N. Shiryaev. Theory of Martingales. Kluver, 1996.

[3] N. U. Ahmed, Dynamic systems and control with applications, World

[4] Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[5] S. Bahlali and B. Labed, Necessary and su¢ cient conditions of optimality for optimal control problem with initial and terminal costs, Rand.
Operat. and Stoch. Equ, 2006, Vol 14, No3, pp 291-301.

[6] A. Bensoussan (1982), Non linear . . . ltering and stochastic control. Proc.
Cortona 1981, Lect. notes in Math. 972, Springer Verlag.

[7] A. Cadenillas, I. Karatzas (1995), The stochastic maximum principle for
linear convex optimal control with random coe¢ cients, SIAM J. Cont.
Optim., Vol. 33, No 2, pp.590-624.

[8] U.G Haussmann (1986), A Stochastic maximum principle for optimal
control of dicusions. Pitman Research Notes in Math. Series 151.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
τ	Temps d'arrêt.
$(M_t)_{t\geq 0}$	Martingale.
$(X_t)_{t\geq 0}$	Processus.
A	Un borelien de $\mathbb{R}^d$.
B_t	Mouvement Brownien.
EDS	Èquation différentielle stochastique.
J	Fonction de coût.
$\mathcal{U}$	Contrôle admissible.
u	contrôle optimal.
$p\left(t\right)$	processus adjoint.
$H\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right)$	Hamiltonien.
v	Contrôle admissible.