République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Zouai Fatma

Titre :

Dérivation fractionnaire de Caputo

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Soltani Sihame**	UMKB	Président
Dr.	**Senouci Assia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Kaboul Hanae**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,

Qui m'ont aide à affronter les difficultés,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

Merci à mon mari de rester avec moi.

A mes très chères soeurs.

A toute ma famille.

A tous les amis Roumaissa, Ladmia, Asma, Hanan, Fadhila, Manel...

A tous les étudiants d'université de Mohamed Khider - Biskra.

A tous.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

* Je tiens à remercier la professeur Assia Senouci de m'avoir fait l'honneur D'examiner ce mémoire et d'en être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail.*

* Je ne pourrais terminer sans remercier ma mère et ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail. *

* Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Liste des figures **v**

Introduction **1**

1 Outils de base **4**

1.1 Fonctions usuelles pour le calcul fractionnaire 4

1.1.1 Fonction Gamma 4

1.1.2 Fonction Bêta 5

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler 6

1.2 Dérivées et Intégrales fractionnaires 8

1.2.1 L'opérateur différentiel partiel fractionnaire de Riemann-Liouville . 9

1.2.2 L'opérateur fractionnaire de Caputo 11

2 Dérivation fractionnaire de Caputo **14**

2.1 Propriétés fondamentaux 14

2.2 Transformée de laplace 19

2.2.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires 22

2.3 Comparaison avec l'opérateur de Riemann-Liouville 24

2.4 Relation avec l'opérateur de Riemann-Liouville 26
2.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires 29
2.5.1 Linéarité 29
2.5.2 Règle de Leibniz 29

3 Exemples des dérivations fractionnaires 30
3.1 Fonction Constante 30
3.2 Fonction Puissance 31
3.3 Fonction exponentielle 37
3.4 Fonctions sinus et cosinus 40

Conclusion 42

Bibliographie 42

Table des figures

1.1 Courbe représentative de la fonction gamma 5

1.2 La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre 7

1.3 La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres 7

3.1 La dérivées fractionnaire de $f(t) = t^2$ 36

3.2 dérivés fractionnaires de $f(t) = t$ 37

Introduction

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent, conserve de nombreuses propriétés de base. La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matéraux qui conservent la mémoire des transformations passées . D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendent ces dernières décennies.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre phénomènes étudiés par les siences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que presente certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

Historique :

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du $17ème$ siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital :"... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquent utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990. où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, la biologie, la mécanique...

Ce travail étudie les deux définitions les plus utilisées pour la différenciation fractionnaire, à savoir les opérateurs fractionnaires Reimann-Liouville et Caputo. L'accent est mis sur l'opérateur de la Caputo. La définition de Riemann-Liouville joue un rôle important principalement dans le développement de la théorie des dérivés fractionnaires et intégrales et pour son application en mathématiques pures. Cependant, les problèmes applet nécessitent des définitions appropriées des dérivés fractionnaires qui peuvent fournir des conditions initiales avec une interprétation physique claire pour les équations différentielles de l'ordre fractionnaire. Ceci rend le dérivé fractionnaire de la Caputo plus approprié pour être applet.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Les fonctions spéciales comme les fonctions gamma et bêta, fonction Mittag-Leffler sont introduites dans chapitre 1. Ces fonctions sont le plus souvent utilisées dans le calcul fractionnaire. Les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo des dérivés fractionnaires sont également données dans le même chapitre.

Deuxième chapitre : La dérivée fractionnaire Caputo est discutée plus en détail dans le chapitre 2. Un comparaison et Relation avec Riemann-Liouville dérivée fractionnaire.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, nous étudions quelques exemples intéressants de Caputo fractionnaires dérivés de puissance constante, exponentielles, fonctions sinus et cosinus.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Fonctions usuelles pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1.1 *:La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes.*

Pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ *on définie* $\Gamma(z)$ *par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \tag{1.1}$$

La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ tout entier

On a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et pour n entier on a $n! = \Gamma(n+1)$, pour plus d'informations sur la fonction Γ voir [1] certaines des propriétés les plus importantes sont :

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \tag{1.2}$$
$$\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}(2n-1)!, n \in \mathbb{N}.$$

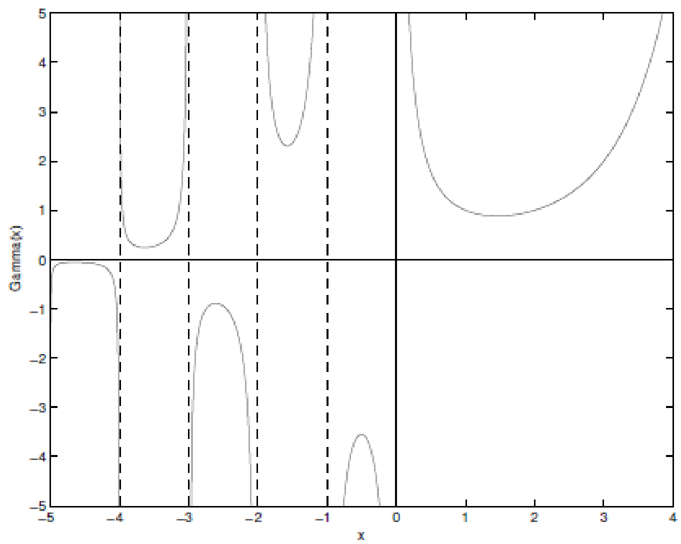


FIG. 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2 *:Comme la fonction gamma, la fonction bêta est définie par une intégrale finie. Sa définition est donnée par*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt,\ avec\,\mathrm{Re}(z) > 0 et\,\mathrm{Re}(\omega) > 0 \tag{1.3}$$

La fonction de Bêta peut également définie en termes de la fonction Gamma

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} avec\, \mathrm{Re}(z) > 0 et\, \mathrm{Re}(\omega) > 0 \tag{1.4}$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903 Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, $\exp(x)$,et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.1.3 *:Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ (notée par M-L)est définie comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},\ \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},\ \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples.

Par exemple,

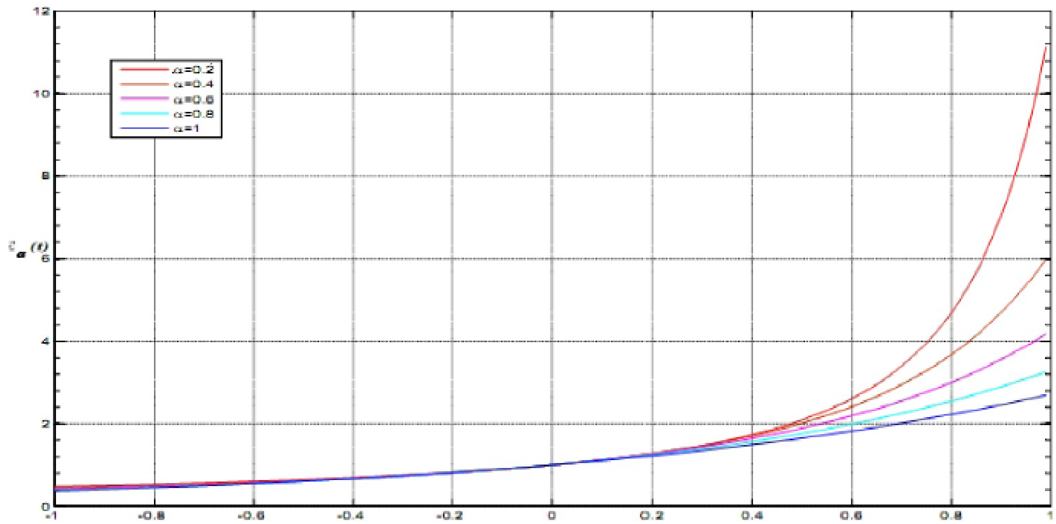


FIG. 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

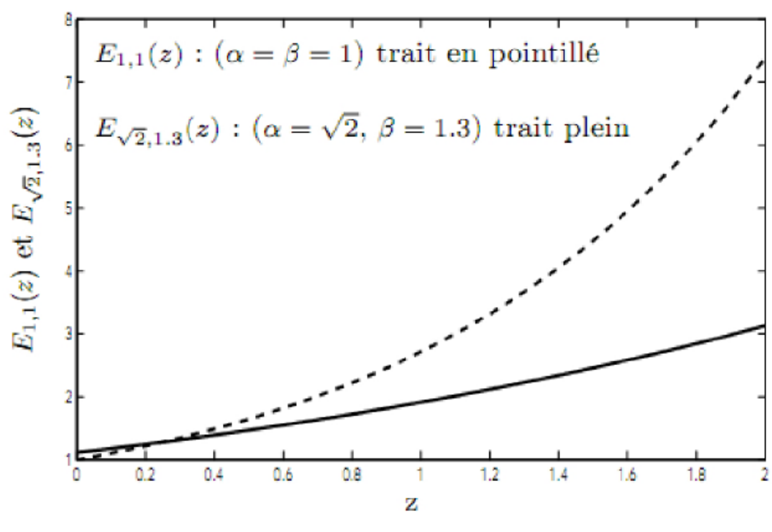


FIG. 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\exp(z)-1}{z}$$
$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z2^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

1.2 Dérivées et Intégrales fractionnaires

Dans cette section, nous présentons quelques approches de généralisation de la notion de dérivation et intégration.

Intégration fractionnaire :

Considérons une fonction f définie pour $t > \alpha$

on pose :

$$(If)(t) = \int_{\alpha}^{t} f(x)dx \ , \ (I^2 f)(t) = \int_{\alpha}^{t} (If)(u)du = \int_{\alpha}^{t} (\int_{\alpha}^{u} f(x)dx)du \qquad (1.7)$$

en répétant n fois on obtient d'après la formule de Cauchy

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^{t} (t-x)^{n-1} f(x)dx \qquad (1.8)$$

en utilisent la fonction Γ d'Euler (1.1) on aura la définition suivante :

Définition 1.2.1 *:Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$; l'opérateur I^α, définit sur $L_1[a,b]$ par :*

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx \tag{1.9}$$

pour $t \in [a,b]$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre α.

pour $\alpha = 0$, on a :

$$I^0 f(t) = f(t)$$

c-à-d, $I^0 = I$ est un l'opérateur identité.

Une autre propriété est la linéarité

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t),\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

1.2.1 L'opérateur différentiel partiel fractionnaire de Riemann-Liouville

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

Définition 1.2.2 *:si $\alpha > 0$, $t > a$, α,a,$t \in \mathbb{R}$.puis*

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dt^n} \displaystyle\int_a^t \dfrac{f(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \ , & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.10}$$

D'autre part, si $\alpha < 0$ on note par $D^{\alpha} f(t) = I^{-\alpha} f(t)$, la définition peut etre aussi appliquiée et $D^{\alpha} f(t)$ existe pour f une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut etre aussi définie par la formule suivante :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I^{(n-\alpha)} f(t) \right\}.$$

Exemple 1.2.1 *:La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante. En général la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante.ni nulle ni constante.*

On a :

$$D^{\alpha}(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f telle que : $f(t) = (t-a)^{\beta}$

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > -1$, alors on a :

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}(x-a)^{\beta} dx.$$

En faisant le changement de variable $x = a + s(t-a)$, on aura :

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds$$

d'aprés (1.3) *on a :*

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

et de (1.4) *on a :*

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ *et* $a = 0$, *on aura*

$$D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

1.2.2 L'opérateur fractionnaire de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967−1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.2.3 *: suppose que* $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$. *La dérivée fractionnaire de Caputo est définit par :*

$$D_*^{\alpha} f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx \ , & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.11}$$

Exemple 1.2.2 *:La dérivéée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle ;*

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{0}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx = 0 \end{aligned}$$

La dérivéée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$

Soit α *non entier et* $0 \leq n-1 < \alpha < n$ *avec* $\beta > n-1$*, alors on a :*

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-n}$$

d'ou

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_{a}^{t} (t-x)^{n-\alpha-1} dx.$$

En faisant le changement de variable $x = a + s(t-a)$*, on aura :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ . &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

La dérivéée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t) = t^{\beta}$

$$D^{\alpha} t^{\beta} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \ \beta > \alpha - 1 \\ 0, \ \beta \leq \alpha - 1 \end{cases}$$

Exemple 1.2.3 *:On prendre que $a = 0$, $\alpha = 1/2$, $(n = 1)$, $f(t) = t$. puis nous appliquons la formule on a donc*

$$D_*^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} dx.$$

d'aprés (1.2) *est on a*

$$D_*^{1/2} t = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d(t-x).$$

On pose que

$u = (t-x)^{1/2}$

donc

$$\begin{aligned} D_*^{1/2} t &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{u} du^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0). \end{aligned}$$

ainsi, il détient

$$D_*^{1/2} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \tag{1.12}$$

Remarque 1.2.1 *Parfois, les symboles ${}_aD_t^\alpha f(t)$ et ${}_a^CD_t^\alpha f(t)$ sont utilisés respectivement pour le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo. a et t sont appelés terminaux (inférieurs et supérieurs correspondants), les symboles $D^\alpha f(t)$ et $D_*^\alpha f(t)$ sont adoptés.*

Chapitre 2

Dérivation fractionnaire de Caputo

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, les quelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$,etc.... Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent etre résolus mathématiquement. La solution de ces problèmes a été proposée par M.Caputo(dans les années soixante) dans sa définition, qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de visco-elastiques. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

2.1 Propriétés fondamentaux

Remarque 2.1.1 *L'opérateur D^n, $n \in \mathbb{N}$ utilisé dans les sections suivantes est l'opérateur de différenciation d'ordre entier standard, c-à-d, $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$.*

a.Représentation

Lemme 2.1.1 *Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que $D_*^\alpha f(t)$ existe, alors :*

$$D_*^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t). \tag{2.1}$$

Cela signifie que l'opérateur fractionnaire de Caputo équivaut à l'intégration $(n-\alpha)$ après une différentiation d'ordre n. L'équation (2.1) découle de l'équation (1.11).

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est equivalente à la composition des mêmes opérateurs(intégration $(n-\alpha)$ et différentiation d'ordre n) mais en inversant l'ordre, c-à-d,

$$D^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} f(t). \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), et comme $I^{n-\alpha} D^n \neq D^n I^{n-\alpha}$ on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.1 *Les deux opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ne coinsident pas, c-à-d,*

$$D^\alpha f(t) \neq D_*^\alpha f(t)$$

On verra dans la suite que pour une classe de fonction bien definie les deux opérateurs sont identiques.

b.Interpolation

Lemme 2.1.2 *Soit $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que $D_*^\alpha f(t)$ existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo*

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n} D_*^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \tag{2.3}$$

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n-1} D_*^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

Preuve. La preuve utilise l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-f^{(n)}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\mid_{x=0}^t - \int_0^t - f^{(n+1)}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dx\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f^{(n)}(0)t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha}dx\right). \end{aligned}$$

Maintenant, en prenant la limite pour $\alpha\longrightarrow n$ et $\alpha\longrightarrow n-1$, Respectivement, il s'ensuit

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n} D_*^\alpha f(t) = (f^{(n)}(0) + f^{(n)}(x))\mid_{x=0}^t = f^{(n)}(t)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\longrightarrow n-1} D_*^\alpha f(t) &= (f^{(n)}(0)t + f^{(n)}(x)(t-x))\mid_{x=0}^t - \int_0^t - f^{(n)}(x)dx \\ &= f^{(n-1)}(x)\mid_{x=0}^t \\ &= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.2 *Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, la propriété d'interpolation correspondante lit*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n} D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t), \tag{2.4}$$

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n-1} D^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

c.Linéarité

Lemme 2.1.3 *Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que $D_*^{\alpha} f(t)$ et $D_*^{\alpha} g(t)$ existent. La dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur lineaire , c-à-d,*

$$D_*^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D_*^{\alpha} f(t) + D_*^{\alpha} g(t). \tag{2.5}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha} f(t) &= I^{n-\alpha} D^n f(t). \\ D_*^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n [\lambda f(t) + g(t)] \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n [(f+g)(t)] \end{aligned}$$

Comme la dérivée $n - \grave{e}me$ et l'intégrale sont linéaires alors,

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda D_*^{n} f(t) + D_*^{n} g(t). \end{aligned}$$

■

d.Non-commutation

Lemme 2.1.4 *On suppose que* $n-1<\alpha<n$, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *et soit la fonction* $f(t)$ *telle que* $D_*^\alpha f(t)$ *existe, alors :*

$$D_*^\alpha D^m f(t) = D_*^{\alpha+m} f(t) \neq D^m D_*^\alpha f(t). \tag{2.6}$$

Corollaire 2.1.1 *Supposons que* $n-1<\alpha<n$, $\beta=\alpha-(n-1)$, $(0<\beta<1)$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
et soit la fonction $f(t)$ *telle que* $D_*^\alpha f(t)$ *existe, alors*

$$D_*^\alpha f(t) = D_*^\beta D^{n-1} f(t).$$

Preuve. On remplace β par α et $n-1$ pour m dans (2.5), alors

$$D_*^\beta D^{n-1} f(t) = D_*^{\beta+n-1} f(t) = D^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t) = D_*^\alpha f(t).$$

■

Remarque 2.1.3 *Pour trouver la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre arbitraire* α, $(n-1<\alpha<n)$ *d'une fonction* $f(t)$*, il suffit à trouver la dérivée de Caputo d'ordre* $\beta=\alpha-(n-1)$ *où* $\alpha-(n-1)$ *est un nombre réel compris entre* 0 *et* 1.*Par conséquent l'etude de dérivée de Caputo d'ordre* $\beta\in(0,1)$ *est suffisante pour trouver la dérivée de Caputo l'ordre arbitraire. De même l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative, i.e :*

$$D^m D^\alpha f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^\alpha D^m f(t),\ n-1<\alpha<n, m,n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}.$$

2.2 Transformée de laplace

Dans cette section on discutera la transformée de Laplace, Une définition générale est donnée, puis la transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler. Ainsi, que les derivées de Riemann-Liouville et de Caputo sont étudiés. Ces résultats sont utilisés pour résoudre les équations différentielles.

1. Si la fonction f est d'ordre exponentiel α (c'est à dire qu' il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_{0}^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt \tag{2.7}$$

   est appelée la transformée de Laplace de la fonction f.

2. La transformation de Laplace est la plus applicable aux problèmes de valeur initiale sur les domaines semi-infinis.

3. On peut reconstituer$f$ à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) F(s) ds \quad c = \mathrm{Re}(s) > c_0 \tag{2.8}$$

   Où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue des intégrales de Laplace (2.7). L'intégrale in (2.8) est également appelée Bromwich integral.

4. La Transformée de Laplace du produit de deux fonctions f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leur transformées de Laplace.

5. La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :

$$L\{f^{(n)}(t);s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \tag{2.9}$$
$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k} f^{(n-k-1)}(0)$$

6. On prend $a = 0$, pour une fonction f qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ nous avons :

$$L\{I^{\alpha} f;s\} = s^{-\alpha} F(s) \tag{2.10}$$

Exemple 2.2.1 *1. Soit la fonction constante :*

$$f(t) = \begin{cases} a & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

$$L(f)(p) = \int_0^{\infty} a\exp(-tp)dt = a\int_0^{\infty} \exp(-tp)dt = -\frac{a}{p}[\exp(-tp) \mid_0^{\infty}] = -\frac{a}{p}[e^{-tx}e^{-ity} \mid_0^{\infty}] = \frac{a}{p}$$

si $\mathrm{Re}(p) > 0$; *car* $\mid e^{-ity} \mid = 1$ *(bornée) et* e^{-tx} *ne converge à plus l'infini que si :* $x = \mathrm{Re}(p) > 0$.

2. $L[1](s) = \dfrac{1}{s}$

3. $L(\cos t)(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ *(pour la démonstration, on applique l'intégration par partie)*

4. $L(t)(s) = \dfrac{1}{s^2}$*(on applique intégration par partie :*

$$\int_0^{+\infty} \exp(-st)tdt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} \exp(-st)dt = \frac{1}{s^2})$$

5. $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & pour\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0, \alpha = a + ib \in \mathbb{C} \end{cases}$

$$L(f)(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-tp} dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)} dt = -\frac{1}{p-\alpha}[e^{-t(p-\alpha)} \mid_0^\infty]$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha}[e^{-t(x-a)} e^{-it(y-b)} \mid_0^\infty] = \frac{1}{p-\alpha}$$

si $\mathrm{Re}(p) = x > \mathrm{Re}(\alpha) = a.$

Proposition 2.2.1 *La transformée de Laplace est linéaire on suppose que* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$L\{\lambda f(t) + g(t); s\} = \lambda L\{f(t); s\} + L\{g(t); s\} = \lambda F(s) + G(s) \tag{2.11}$$

Définition 2.2.1 *Lorsque le produit* $f(x-t)g(t)$ *est intégrable sur tout intérvalle* $[0, x]$ *de* $\mathbb{R}^+$*, le produit de convolution de* f *et* g *est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x g(t)f(x-t)dt \tag{2.12}$$

Proposition 2.2.2 *Si les transformées de Laplace de* f *et* g *existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$L\{f(t) * g(t); s\} = L\{f(t); s\}L\{g(t); s\} = F(s)G(s)$$

Proposition 2.2.3 *-Linéarité de la transformée inverse de Laplace*

$$L^{-1}\{\lambda f(s) + g(s); t\} = \lambda L^{-1}\{f(s); t\} + L^{-1}\{g(s); t\} = \lambda f(t) + g(t). \tag{2.13}$$

Proposition 2.2.4 *L'originale de $L(f)(p-a)$ est $L^{-1}[L(f)(p-a)](t) = e^{ta}f(t)$.*

-Transfomée inverse de Laplace d'une dérivée

$$L^{-1}\{(L(f))^{(n)};t\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Lemme 2.2.1 *-Soitent $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, $p \in \mathbb{N}$. Ensuite, la transformation de Laplace de la fonction à deux paramètres de Mittag-Leffer type* (1.6) *est donnée par*

$$L\{t^{\alpha p+\beta-1}E^{(p)}_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha});s\} = \frac{p!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}\pm\lambda)^{p+1}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha}. \tag{2.14}$$

D'un grand intérêt dans cette thèse est la transformation de Laplace de la dérivée de la fractionnaire de Caputo de $f(t)$. La déclaration suivante est prouvée.

2.2.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

En utiliant la propriété de la transformée de Laplace (Dérivation), on arrive à la formule suivante :

$$\begin{aligned} L\{D^{\alpha}f(t);s\} &= s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}[D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0} \qquad (2.15)\\ &= s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}[D^{k}I^{n-\alpha}f(t)]_{t=0}, \qquad n-1<\alpha<n. \end{aligned}$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Avec les memes propriétés précédentes, on arrive à la formule suivante :

$$L\{D^{\alpha}_{*}f(t);s\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\ (n-1<\alpha<n) \tag{2.16}$$

Preuve. On sait que pour $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x>0$ alors :

$$D_*^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x)$$

On pose $g(x) = D^n f(x)$ donc

$$D_*^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n g(x) \tag{2.17}$$

d'aprés (2.1)

$$L\{D_*^\alpha f(t); s\} = L\{I^{n-\alpha} g(t); s\} = s^{-(n-\alpha)} G(s)\} \tag{2.18}$$

et $G(s) = L\{g(t); s\}$ d'aprés (2.9) on a :

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{2.19}$$

Finalement, en remplaçant(2.19) dans (2.18), on obtient :

$$L\{D_*^\alpha f(t); s\} = s^{-(n-\alpha)}(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

est prouvé ■

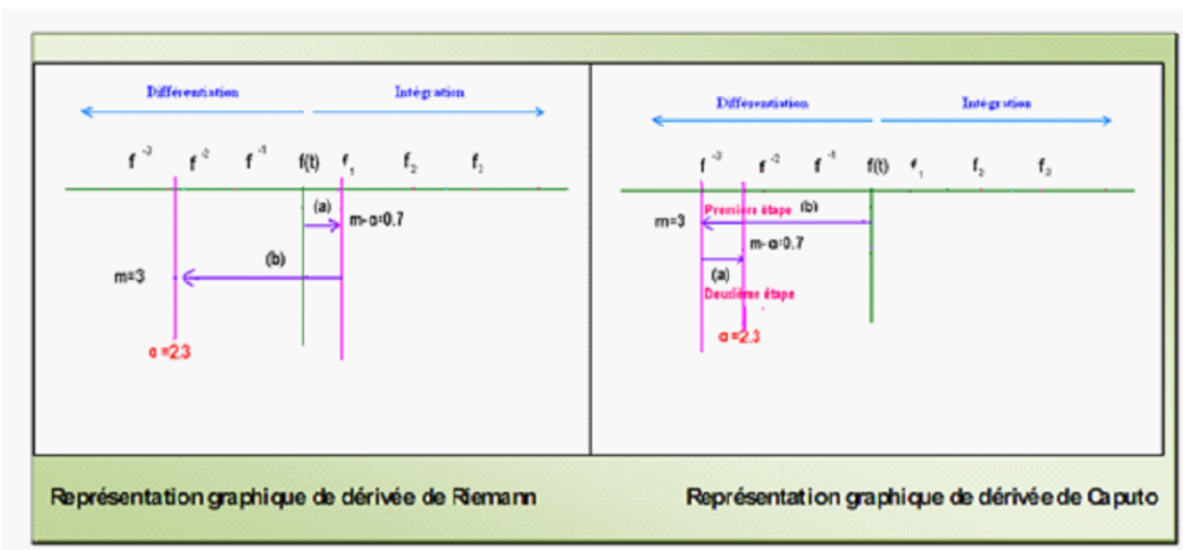
Remarque 2.2.1 *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est une généralisation de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier, où est remplacé par α. Il n'en va pas de même pour la dérivée de Riemann-Liouville. Cette propriété est un avantage important de l'opérateur Caputo sur l'opérateur Riemann-Liouville.*

2.3 Comparaison avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, on donne une comparaison entre les dérivés fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville.

1. L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

2. Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Lioville elle est $\dfrac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.



3. Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville) comme le montre la figure, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n-1 \leq \alpha \leq n$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier n, mais pour trouver la dérivée fractionnaire

d'ordre α où $n-1 \leq \alpha \leq n$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.

Propriété	Riemann-Liouville	Caputo
Répresentation	$D^{\alpha}f(t) = D^{n}I^{n-\alpha}f(t)$	$D_{*}^{\alpha}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$
Interpolation	$\lim\limits_{\alpha\longrightarrow n} D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow n-1} D^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t)$	$\lim\limits_{\alpha\longrightarrow n} D_{*}^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow n-1} D_{*}^{\alpha}f(t) =$ $f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$
Linearité	$D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) =$ $\lambda D^{\alpha}f(t) + D^{\alpha}g(t)$	$D_{*}^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) =$ $\lambda D_{*}^{\alpha}f(t) + D_{*}^{\alpha}g(t)$
Non-commutation	$D^{m}D^{\alpha}f(t) =$ $D^{\alpha+m}f(t) \neq D^{\alpha}D^{m}f(t)$	$D_{*}^{\alpha}D^{m}f(t) =$ $D_{*}^{\alpha+m}f(t) \neq D^{m}D_{*}^{\alpha}f(t)$
T-Laplace	$L\{D^{\alpha}f(t);s\} =$ $s^{\alpha}F(s) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s^{k}[D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0}$	$L\{D_{*}^{\alpha}f(t);s\} =$ $s^{\alpha}F(s) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)$
Règle Leibniz	$D^{\alpha}(f(t)g(t)) =$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t)$	$D_{*}^{\alpha}(f(t)g(t)) =$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t)$ $-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right)$
$f(t) = c = const$	$D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \neq 0,\ c = const$	$D_{*}^{\alpha}c = 0,\ c = const$

Tableau 1 :Comparaison entre Riemann-liouville et Caputo

2.4 Relation avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Théorème 2.4.1 *Soitent $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$. supposons que f est une fonction telle que*

$$D_*^{\alpha} f(t) = D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0). \tag{2.20}$$

Preuve. On considère le D.L en série de Taylor de la fonction f au point $t = 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!} f"(0) + \frac{t^3}{3!} f^{(3)}(0) + ... + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}, \end{aligned}$$

Où, compte tenu aussi (1.8)

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1} dx = I^n f^{(n)}(t).$$

Maintenant, en utilisant la propriété de linéarité du dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville, le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction de puissance, les propriétés de l'intégrale fractionnaire et de la formule de représentation (2.1)

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} f(t) &= D^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha} t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^{\alpha} R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^{\alpha} I^{n} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + D_{*}^{\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$D_{*}^{\alpha} f(t) = D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0).$$

■

Corollaire 2.4.1 *La relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville définie par la formule suivante :*

$$D_{*}^{\alpha} f(t) = D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)\right).$$

Preuve. Pour démontrer la formule, on utilise la relation de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la la propriété de linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville i.e :

$$\begin{aligned}
D_{*}^{\alpha} f(t) &= D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0) \\
&= D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha} t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) \\
&= D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)\right).
\end{aligned}$$

■

La formule de Leibniz pour la derivée de Caputo est peu discutée dans la littérature, le corollaire
suivant découle du théorème 2.4.1

Corollaire 2.4.2 ***(La règle de Leibniz)*** *Soit $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$. Si $f(\tau)$ et $g(\tau)$ et tous ses dérivés sont continus dans $[0,t]$ puis les cales suivantes*

$$D_*^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(f(t)g(t)^{(k)}(0)). \tag{2.21}$$

Preuve. On applique consécutivement la relation (2.20)et la Règle de Leibniz pour la dérivée de Riemann-Liouville

$$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t),$$

Après, la règle de Leibniz pour la dérivée de Caputo est obtenue :

$$\begin{aligned}
D_*^{\alpha}(f(t)g(t)) &= D^{\alpha}(f(t)g(t)) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(f(t)g(t)^{(k)}(0)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-a}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(f(t)g(t)^{(k)}(0)).
\end{aligned}$$

■

2.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

2.5.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D^{\alpha}f(t)+\mu D^{\alpha}g(t).$$

où D^{α} désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

2.5.2 Règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^{\alpha}(f(t).g(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t)$$

D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 3

Exemples des dérivations fractionnaires

Dans ce chapitre quelques exemples de dérivées fractionnaires sont discutés, comme la fonction constante, puissance et la fonction exponentielle tout comme les fonctions sinus et cosinus. Les dérivéees fractionnaires de Caputo de ces fonctions sont étudiées, quelques preuves qui ne se trouvent pas dans la littérature sont proposées et comparées avec la derivée de Riemann-Liouville.

3.1 Fonction Constante

Du point de vue physique, il est resonable d'avoir la derivée fractionnaire d'une constante égale à zéro. Or comme, on l'a vu plus haut, pour l'opérateur de Riemann-Liouville on a :

$$D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \neq 0, \quad c = const.$$

Ainsi, la propriété suivante est un des avantage de la dérivée de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville

Lemme 3.1.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction constante est égale à zéro i.e :*

$$D_*^\alpha c = 0, \quad c = const.$$

Preuve. Soit $0 < n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, i.e $n \geq 1$. on applique la définition de la dérivée de Caputo (1.11) et puisque la $n-ième$ dérivée $c^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ est égale à 0, il suit

$$D_*^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{c^{(n)}}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx = 0.$$

■

3.2 Fonction Puissance

Comme la fonction puissance est d'une grande importance alors, on examinera de plus près sa dérivée fractionnaire. Rappelons le développement de Taylor

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!} f"(0) + \frac{t^3}{3!} f^{(3)}(0) + ...$$

On sait que la dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire. Alors si $D_*^\alpha t^p$ est definie, alors la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction arbitraire peut être représentée de la manière
suivante :

$$D_*^\alpha f(t) = D_*^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D_*^\alpha t^k. \tag{3.1}$$

Enonçons d'abord la dérivée de Riemann-Liouville d'une fonction puissance, soit le théorème suivant

Théorème 3.2.1 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$ d'une fonction puissance $f(t) = t^p$ pour $p \geq 0$ est donnée par :*

$$D^\alpha t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, \; n-1 < \alpha < n, \; p > n-1, \; p \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Preuve.

$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} x^p dx.$$

En faisant le changement de variable $x = \lambda t$,

on aura :

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t(1-\lambda))^{n-\alpha-1} (\lambda t)^p t d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+p} \int_0^t (1-\lambda)^{n-\alpha-1} \lambda^p d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} t^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+p+1)} t^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.2 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$ d'une fonction puissance $f(t) = t^p$ pour $p \geq 0$ est déféinie par :*

$$D_*^\alpha t^p = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p, & n-1 < \alpha < n, \; p > n-1, \; p \in \mathbb{R}. \\ 0, & n-1 < \alpha < n, \; p \leq n-1, \; p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve. La preuve si le second cas ($D_*^\alpha t^p = 0$, $n-1 < \alpha < n$, $p \leq n-1$, $p \in \mathbb{N}$) suit le modèle de la preuve de la différenciation de la fonction constante, puisque $(t^p)^{(n)} = 0$ pour $p \leq n-1$, p, $n \in \mathbb{N}$.Le cas le plus intéressant est le premier. Il peut se démontrer dans les deux manières suivantes directement, en utilisant la définition du dérivé fractionnaire de la Caputo (1.11) et les propriétés des fonctions gamma et bêta, et indirectement, en utilisant la relation entre les dérivés de Caputo et de Riemann-Liouville (2.21) ainsi que le dérivé fractinal de Riemann-Liouville de la fonction de puissance (3.2). Soit $n-1 < \alpha < n$, $p > n-1$, $p \in \mathbb{R}$.

a) **La méthode directe**

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(x^p)^{(n)}}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (x^{p-n})(t-x)^{n-\alpha-1} dx,
\end{aligned}$$

et en utilisant la substitution $x = \lambda t$, $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-n}((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1} t d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 \lambda^{p-n}(1-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} B(p-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

b) **La méthode indirecte :**

$$D_*^\alpha t^p = D^\alpha t^p - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t^\alpha)^{(k)} \mid_{t=0},$$

En prenant en compte $(t^p)^{(k)} \mid_{t=0} = 0$, pour $k \leq n-1 < p$

$$\begin{aligned} D_*^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} .0 \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.1 *Pour $p > n-1$ la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction puissance* (3.3) *est une généralisation de la dérivée d'ordre entier de la fonction puissance. Rappelons que :*

$$\begin{aligned} (t^p)^{(n)} &= (pt^{p-1})^{(n-1)} = (p(p-1)t^{p-2})^{(n-2)} = ... = p(p-1)...(p-n+1)t^{p-n} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-n}, \ n \in \mathbb{N}, \ p \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2 *pour $n = 1$, c-à-d, $0 < \alpha < 1$. Alors, la derivée de Caputo et de Riemann-Liouville coincide i.e :*

$$D_*^\alpha t^p = D^\alpha t^p, p > 0, p \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.1 *Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}$ mais $\alpha \notin \mathbb{N}$ (α est l'ordre de différentiation). Deux exemples sont considérés à savoir les dérivées fractionnaires des fonctions t^2 et t, c-à-d, $p = 2$ et $p = 1$ respectivement.*

premier cas : $p = 2$

On considère la fonction $f(t) = t^2$. Supposons que $0 < \alpha < 1$. et on utilise la formule (3.3) *la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction puissance* $f(t) = t^2$ *est*

$$D_*^{\alpha} t^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\alpha+1)} t^{2-\alpha} = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha},\ n-1 < \alpha < n < 3.$$

Des cas plus particuliers peuvent être pris en compte pour des valeurs fixes du paramètre α, *par exemple,*

$\alpha = 1/3,\ \alpha = 1/2,$ *et* $\alpha = 3/4.$

Pour $\alpha = 1/3$

$$D_*^{1/3} t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-1/3)} t^{2-1/3} = \frac{2}{\Gamma(8/3)} t^{5/3} \approx 1.33 t^{5/3},$$

Pour $\alpha = 1/2$

$$D_*^{1/2} t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-1/2)} t^{2-1/2} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{t^3} \approx 1.5\sqrt{t^3},$$

Pour $\alpha = 3/4$

$$D_*^{3/4} t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-3/4)} t^{2-3/4} = \frac{2}{\Gamma(9/4)} t^{5/4} \approx 1.77 t^{5/4}.$$

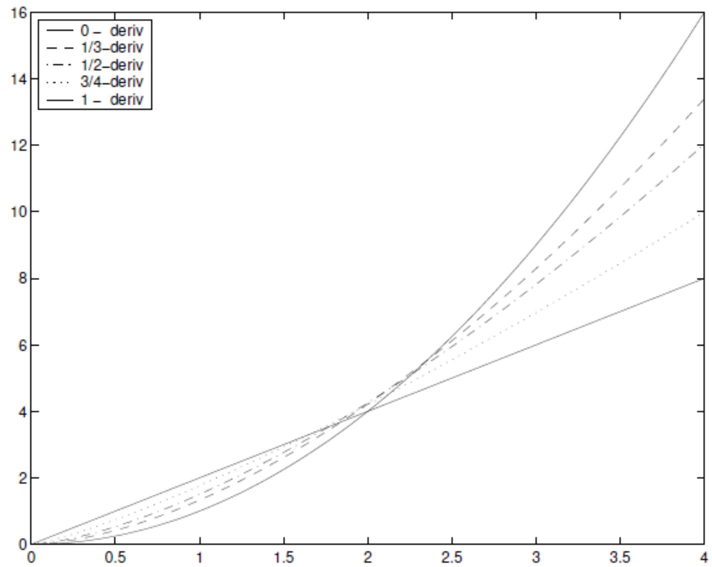


FIG. 3.1 – La dérivées fractionnaire de $f(t) = t^2$

Deuxième cas : $p = 1$

maintenant, considérons $f(t) = t$*. Pour ce cas l'équation* (3.3) *entraîne que*

$$D_*^{\alpha} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha+1)} t^{1-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}.$$

Donc pour $\alpha = 1/2$

$$D_*^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(2-1/2)} t^{1-1/2} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.12 t^{1/2}$$

pour $\alpha = 1/3$

$$D_*^{1/3} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/3+1)} t^{1-1/3} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/3)} t^{2/3} \simeq 1.10 t^{2/3}$$

pour $\alpha = 3/4$

$$D_*^{3/4} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-3/4+1)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/4)} t^{2/3} \simeq 1.10 t^{1/4}$$

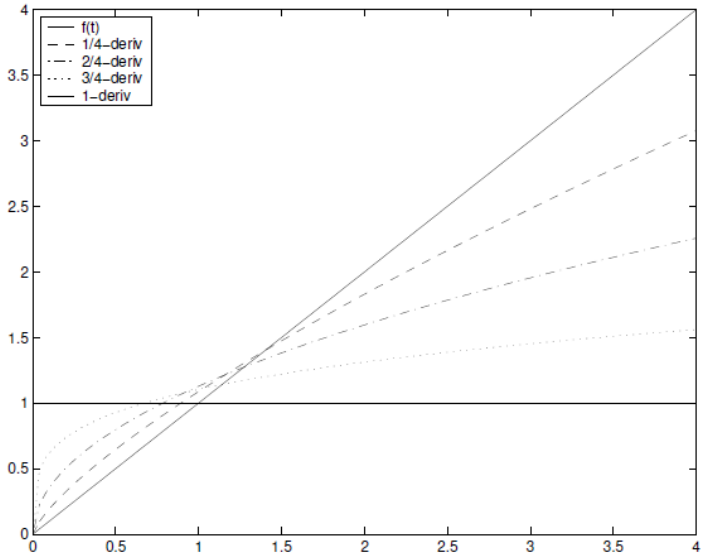


FIG. 3.2 – dérivés fractionnaires de $f(t) = t$

3.3 Fonction exponentielle

Après avoir discuter les dérivées fractionnaires de la fonction puissance, considérons la fonction exponentielle $e^{\lambda t}$. l'application de l'opérateur de Caputo donne le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *lors la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction exponentielle est de la forme*

$$D_*^{\alpha} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t), \tag{3.4}$$

où $E_{\alpha,\beta}(z)$ *est la fonction à deux paramètres du type Mittag-Leffler.*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, on utilise la relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville (2.21), et aussi il faut calculer la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction exponentielle $e^{\lambda t}$

$$D^{\alpha} e^{\lambda t} = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$$

Alors, pour la dérivée fractionnaire de Caputo, on a :

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha e^{\lambda t} &= D^\alpha e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (e^{\lambda t})^{(k)}(0) \\
&= t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \lambda^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} \\
&= \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t).
\end{aligned}$$

■

Cas particulier

Pour $\lambda = 1$ quelques graphes des dérivées fractionnaires de la fonction e^t sont représentés. On remarque que ces dérivées fractionnaires sont comprises entre les fonctions e^t et $e^t - 1$. En général, la fonction exponentielle et ses dérivées ont la même forme. Pour $\lambda = 1$, le côté droit de l'équation (3.4) ne dépend pas de n mais juste de $n - \alpha$. On peut en tirer la conclusion suivante.

Proposition 3.3.1 *Soit $n - 1 < \alpha < n$ et $s \in \mathbb{Z}$, $s > -n$. Alors*

$$D_*^\alpha e^t = D_*^{\alpha+s} e^t$$

Cela signifie en fait que pour calculer la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction exponentielle, seule la valeur après le point décimal de l'ordre de différenciation est important.

Par exemple, pour $\alpha = 0.8, \alpha = 1.8$ et $\alpha = 7.8$ on obtient le même résultat, à savoir

$$D_*^{0.8}e^t = D_*^{1.8}e^t = D_*^{7.8}e^t = \sqrt[5]{t}E_{1,1.2}(t).$$

On outre, les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha, n-1 < \alpha < n$ de la fonction exponentielle sont "en mouvement" de $e^t - 1$ à e^t, En utilisant (3.4), les limites $\lim_{\alpha \to n} D_*^{\alpha} e^t$ et $\lim_{\alpha \to n-1} D_*^{\alpha} e^t$ peut être evaluées exactement.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n} D_*^{\alpha} e^t &= \lim_{\alpha \to n} t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(t) \\
&= E_{1,1} = e^t \\
&= D^n e^t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n-1} D_*^{\alpha} e^t &= \lim_{\alpha \to n-1} t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(t) = tE_{1,2}(t) \\
&= t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \\
&= e^t - 1 = D^n e^t - D^n e^t \mid_{t=0} .
\end{aligned}$$

3.4 Fonctions sinus et cosinus

Deux autres fonctions qui apparaissent très souvent sont les fonctions sinus et cosinus. Le comportement des dérivées fractionnaires de Caputo appliquées à chacune d'elles est discuté dans cette section.

Théorème 3.4.1 *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n-1<\alpha<n$. *Alors*

$$D_*^\alpha \sin \lambda t = \frac{1}{2} i(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)). \tag{3.5}$$

Preuve. On utilise la représentation suivante du fonction sinus

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, en utilisant la propriété de linéairité de dérivée fractionnaire de Caputo et la formule (3.4) pour la fonction exponentielle, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} D_*^\alpha \sin \lambda t &= D_*^\alpha \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}(D_*^\alpha e^{i\lambda t} - D_*^\alpha e^{-i\lambda t}) \\ &= \frac{1}{2i}((i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-i\lambda)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)) \\ &= -\frac{1}{2} i(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)). \end{aligned}$$

■

De la même manière, on reçoit une formule pour le dérivé de la fonction cosinus de Caputo. La représentation correspondante est

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Le résultat correspondant pour la fonction cosinus est formulé dans l'instruction suivante.

Théorème 3.4.2 *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n-1<\alpha<n$. *Alors*

$$D_*^\alpha \cos \lambda t = \frac{1}{2}(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)). \tag{3.6}$$

Tous les principaux résultats du chapitre 3 sont résumés dans le tableau 2. Les conditions pour lesquelles ces formules sont détenues ne sont pas fournies dans le tableau pour simplifier mais peuvent être trouvées avec cahpitre 3.

Fonction $f(t)$	Dérivé de caputo $D_*^\alpha f(t)$
Fonction constante $f(t)=c=const$	$D_*^\alpha c = 0$
Fonction de puissance $f(t)=t^p$	$D_*^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p, & n-1<\alpha<n,\ p>n-1,\ p\in\mathbb{R}. \\ 0, & n-1<\alpha<n,\ p\le n-1,\ p\in\mathbb{R}. \end{cases}$
Fonction exponentielle $f(t)=e^{\lambda t}$	$D_*^\alpha e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$
fonction sinus $f(t)=\sin\lambda t$	$D_*^\alpha \sin\lambda t = \frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t))$
fonction cosinus $f(t)=\cos\lambda t$	$D_*^\alpha \cos\lambda t = \frac{1}{2}(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t))$

Dérivés de Caputo des fonctions utilisées

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons donnée un a perçu de calcul fractionnaire à partir de quelque fonctions Gamma, Bêta et Mittag leffler.

Et puis on étudions la dérivée de Reimann-Liouville et Caputo (Définition,Propriétes) et on comparons entre les deux.

Enfin, On applique la dérivée de Caputo sur les fonctions usuelles.

Bibliographie

[1] Artin, E. (1964). Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, Leipzig, 1931. English translation by M. Butler, The Gamma Function, Holt, Rinehart, and Winston, San Francisco.

[2] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. Geophysical Journal International, $13(5), 529 - 539$.

[3] Debnath, L. (2003). FRACTIONAL INTEGRAL AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FLUID MECHANICS......... 119.

[4] Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., & Luchko, Y. (2005). Algorithms for the fractional calculus : a selection of numerical methods. Computer methods in applied mechanics and engineering, $194(6 - 8), 743 - 773$.

[5] Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., and Luchko Yu., Algorithms for the fractional calculus : a selection of numerical methods, Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17 March, 2003.

[6] Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1980). Tables of Integrals, Series, and Products Academic. New York, $1962, 951$.

[7] Greenberg, M. D. (1978). Foundations of Applied Mathematics Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] Gorenflo R. and Mainardi F., Essentials of fractional calculs, Preprint subrbitted to MaPhySto Center, January 28, 2000.

[9] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, vol. 198. Mathematics in Science and Engineering.

[10] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993, 44.

[11] Yang, X. J. (2012). Advanced local fractional calculus and its applications.

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Γ	La fonction Gamma
β	La fonction Bêta
erf	La fonction d'erreur
E_α	La fonction Mittag-Leffeler.
D^α	L'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville.
D_*^α	L'opérateur fractionnaire de Caputo
$L\{f(t);s\}$	Transformé de Laplace