République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

ACHIR Safa

Titre :

EDSR et le lien EDP

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**ZOUZOU Akila**	UMKB	Président
Dr.	**ABBA Abdelmadjid**	UMKB	Encadreur
Dr.	**AOUN Salima**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents, pour votre amour, votre compréhension, votre patience et votre tendresse sont toujours pour moi sans limite.

Mes frères : Yazid, Adnen, Khaled, Fouad,Tarek

La femme de mon frère : G.Amel

Mon petit neveu : Lokmene

A tous mes proches.

A tous mes amies.

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je remercie Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Je remercie profondément monsieur ABBA Abdelmadjid, pour avoir assuré l'encadrement de ce travail. Je le remercie pour sons soutien, son orientation et ses conseils.

Je remercie également tous les professeurs de la faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie, département de mathématiques, ainsi que tous mes collègues.

Je remercie mon père et ma mère, mes frères et mes amies, un grand merci du fond du coeur, grâce à leur soutien moral.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin pour la réalisation de travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastique rétrograde (EDSR) ont été introduites en 1973 par J.-M. BISMUT [Bis73] dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 et le travail de E. PARDOUX et S.PENG [PP90] pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

Du point de vue Mathématique, résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique rétrograde :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t) - Z_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition finale $Y_T = \xi$ où ξ est une variable aléatoire de carré intégrable.

En peut écrire cette équation d'une façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Le but de ce mémoire est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades EDSR, et d'en donner des applications dans les équations aux dérivées partielles EDP.

Notre mémoire est composé de trois chapitres.

•Le premier chapitre est consacré au rappel de calcul stochastique, en donnant les définitions et les généralités de processus stochastique et calcul d'Itô, etc.

•Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de l'EDSR.

•Dans le toisième chapitre on a étudié le lien entre les EDSR et les EDP et on a introduit la notion de solution de viscosité d'une EDP.

Chapitre 1

Rappels de calcul stochastiques

1.1 Définition et généralité

1.1.1 Processus stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.1 (La filtration) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration sur cet espace est une famille croissante $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ de sous tribu de $\mathcal{F}$. On a alors, pour tous $0 \leq s \leq t$,*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

On dit que $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.2 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ définies sur le même espace de probabilité.*

Définition 1.1.3 (La mesurabilité) *Un processus X est dit mesurable si l'application* *suivante :*

$$\begin{aligned} \left([0,+\infty[\times\Omega, B\left([0,+\infty[\right)\otimes\mathcal{F}\right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (t,\omega) &\longmapsto X_t(\omega) \ \ \textit{est mesurable} \end{aligned}$$

Définition 1.1.4 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$ mesurable.*

Définition 1.1.5 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $B([0,t])\otimes\mathcal{F}$ et $B\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Un progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Définition 1.1.6 *Soient X et Y deux processus, X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variable aléatoire X_t et Y_t sont égale $\mathbb{P}-p.s.$: $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*

Définition 1.1.7 *On dit que X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}-p.s$, les trajectoires de X et de Y sont les même c'est à dire $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$.*

Remarque 1.1.1 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.1.8 *On dit que le processus est à trajectoires continues si les applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.9 *Un processus est dit càdlag (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauches.*

1.1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.1.10 *Le processus* $(B_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien (standard) si :*

1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement brownien est issu de l'origine).
2. $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$.
3. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 .... \leq t_n$, les variables $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.
4. Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ admet des trajectoires continuées.

Remarque 1.1.2 *On dit que* B *est un* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ *−mouvement Brownien si* B *est un processus continu, adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, *vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}\ \forall 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}\left(e^{iu(B_t - B_s)}/\mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t-s)/2\right\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit* B *un MB standard.*

1. pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{B_u, u \leq s\}$;
2. $-B$ est aussi un MB ;
3. pour tout $c > 0$, $\left\{cB_{\frac{t}{c^2}}\right\}_{t\geq 0}$ est un MB ;
4. le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un MB.

Proposition 1.1.2 *Soit* B *un MB. La filtration* $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0}$ *vérifie les conditions habituelles et* B *un* $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0} - MB$.

1.1.3 Martingale

Définition 1.1.11 *Un processus stochastique* $\{X_t, t \in [0, +\infty[\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si :*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t -$ *mesurable pour tout* t.

2. X_t *est intégrable pour tout* t.

3. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$, $\forall s \leq t$.

Définition 1.1.12 *Un processus stochastique* $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une sur-martingale (resp sous-martingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t - mesurable$ *pour tout* t.

2. X_t *est intégrable pour tout* t.

3. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$, $\forall s \leq t$ *(resp* $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$*).*

Remarque 1.1.3 *Si* B *est un MB, alors* $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ *est* $\{\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t\geq 0}$ *sont des martingales.*

Définition 1.1.13 (Temps d'arrêt) *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré, un temps d'arrêt est une variable aléatoire* T $\mathcal{F} - mesurable$ *à valeurs dans* $[0, \infty]$ *telle que :*

$$\forall t \geq 0, \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.14 (Martingale local) *Soit* X *un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* T_n *croissant vers l'infini telle que pour tout* n *le processus arrêté* $X^{T_n} 1_{\{T_n \succ 0\}}$ *soit une martingale.*

Théorème 1.1.1 (Représentation des martingales browniennes) *Soit* M *une martingale (cadlàg) de carré intégrable pour la filtration* $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\in[0,T]}$. *Alors il existe un unique processus* $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, *appartenant à* $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, *tel que*

$$\mathbb{P} - p.s. \quad \forall t \in [0, T], \qquad M_t = M_0 + \int_0^t Z_s . dB_s.$$

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale d'Itô

Définition 1.2.1 *L'intégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est une mouvement brownien et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critéres d'intégrabilité.

1.2.2 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (Première formule d'Itô) *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds, \forall t \leq T.$$

La notion infinitésimale de cette relation est :

$$df(B_s) = f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s)\, ds.$$

Théorème 1.2.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{x,x}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_S.$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.2 *Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s,$$

avec X_0 $\mathcal{F}_0 -$ mesurable, θ et φ deux processus $\mathcal{F} -$ adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \quad p.s. \quad \text{et} \quad \int_0^T |\varphi_S| ds < \infty \quad p.s.$$

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_t dt + \theta_t dB_t.$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus θ et φ. Afin de pouvoir présenter ici la démonstration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer les conditions d'intégrabilités suivantes :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_s|^2 ds\right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_s|^2 ds\right] < \infty.$$

1.3 Quelques inégalités classiques

1.3.1 Inégalité de Doob

Théorème 1.3.1 *Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable. On a*

$$\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_n^2\right].$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in N} M_n^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_n^2\right].$$

1.3.2 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Théorème 1.3.2 *Pour tout réel $p \geq 0$, il existe des constante c_p, C_p telles que pour toutes martingale local M continue issue de* 0,

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |M_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Remarque 1.3.1 *En particulier, si*

$$T > 0,\ c_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right].$$

1.3.3 Lemme de GRONWALL

Soit $g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\, ds, \qquad a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t, $g(t) \leq a \exp(bt)$.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

2.1 Problématique

On considère sur un espace probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, avec T le temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(Y_t)\,dt, & t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t, le processus Y_t soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ c'est-à-dire que le processus Y_t ne dépende pas du futur après t.

On prend l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le condidat naturel $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation (dans L^2) adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\xi\right) + \int_0^t Z_r dB_r,$$

d'autre part,

$$Y_T = \mathbb{E}\left(\xi\right) + \int_0^T Z_r dB_r,$$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^T Z_r dB_r \\ &= -\int_t^T Z_r dB_r, \end{aligned}$$

il vient alors,

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_r dB_r$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaít, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z,

l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dB_t, \quad t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et B un MB $d-$dimentionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB B. On travaillera avec deux espaces de processus :

$\cdot S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

$S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ le sous-espace formé par les processus continus.

$\cdot \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty.$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace\left(zz^*\right)$. $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons L^2 l'espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

En suite on définit une application aléatoire :

$$f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\left(f\left(t, y, z\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. Enfin, on considére une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Notre objectif est de trouver une solution de l'équation (2.1) c'est-à-dire les inconnues

Y et Z. La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale.

Définition 2.2.1 *Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;*
2. *$\mathbb{P} - p.s$ $\int_0^T \left\{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right\} dr < \infty$;*
3. *(Y, Z) vérifie* (2.1).

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et λ une constante positive tels que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \ \ |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda (|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.1) *telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.*

Preuve. La démonstration de cette proposition est bassé du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe,

En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dB_r,$$

et par suite, on utilise l'hypothèse sur f

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r, \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr,$$

posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_r, \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|.$$

On a par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable.

Comme Y est un processus continu remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\,\zeta e^{\lambda T}$ qui montre que Y appartient à S^2. ∎

Lemme 2.2.1 *Soient $Y \in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dB_s,\ t\in[0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. D'après l'inégalités de BDG :

On a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dB_r\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dB_r\right|\right] \leq C^{'}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right]\right).$$

Où cette dernière quantité est finie par hypothèse, d'où le résultat. ∎

2.3 Le cas Lipschitz

2.3.1 Le résultat de Pardoux-Peng

PARDOUX et S. PENG [PP90] : C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

(L) Il existe une constante K telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq K(|y-y'| + \|z-z'\|);$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$,
et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad , 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. *L'EDSR* (2.2) *possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr \right)$$

$$= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. ■

Théorème 2.3.1 (Pardoux-Peng 1990) *Sous l'hypothèse* **(L)**, *l'EDSR* (2.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Pour démontré cette théorème on utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach L^2 en construisant une application Ψ de L^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in L^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de L^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans L^2. En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + K|U_r| + K\|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliques le Lemme 2.1.1 pour obtenir une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$. (Y,Z) appartient à L^2 :

l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition 2.0.1, Y appartient à S_c^2.

L'application Ψ de L^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U,V) et $\left(U',V'\right)$ deux éléments de L^2 et $(Y,Z) = \Psi\left(U,V\right), (Y',Z') = \Psi\left(U',V'\right)$. Notons $\overline{Y} = Y - Y'$ et $\overline{Z} = Z - Z'$. On a, $\overline{Y}_T = 0$ et

$$d\overline{Y}_t = -\left\{f\left(t,U_t,V_t\right) - f\left(t,U_t',V_t'\right)\right\}dt + \overline{Z}_t dB_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 dt - 2e^{\alpha t}\overline{Y}_t.\left\{f\left(t,U_t,V_t\right) - f\left(t,U_t',V_t'\right)\right\}dt + 2e^{\alpha t}\overline{Y}_t.\overline{Z}_t dB_t + e^{\alpha t}\left\|\overline{Z}_t\right\|^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|\overline{Z}_r\right\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|\overline{Y}_r\right|^2 + 2\overline{Y}_r.\left\{f\left(t,U_t,V_t\right) - f\left(t,U_t',V_t'\right)\right\}\right)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\overline{Y}_r.\overline{Z}_r dB_r,$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant $\overline{U}$ et $\overline{V}$ pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|\overline{Z}_r\right\|^2 dr \le \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|\overline{Y}_r\right|^2 + 2K\left|\overline{Y}_r\right|\left|\overline{U}_r\right| + 2K\left|\overline{Y}_r\right|\left\|\overline{V}_r\right\|\right)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\overline{Y}_r.\overline{Z}_r dB_r.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a $2ab \le a^2/\epsilon + \epsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|\overline{Z}_r\right\|^2 dr \le \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + 2K^2/\epsilon\right)\left|\overline{Y}_r\right|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\overline{Y}_r.\overline{Z}_r dB_r + \epsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\left|\overline{U}_r\right|^2 + \left\|\overline{V}_r\right\|^2\right)dr,$$

et prenant $\alpha = 2C^2/\epsilon$, on a, notant $R_\epsilon = \epsilon \int_t^T e^{\alpha r} \left(\left| \overline{U}_r \right|^2 + \left\| \overline{V}_r \right\|^2 \right) dr$,

$$\forall t \in [0, T], \qquad e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t \right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \left\| \overline{Z}_r \right\|^2 dr \leq R_\epsilon - 2 \int_t^T e^{\alpha r} \overline{Y}_r . \overline{Z}_r dB_r. \tag{2.3}$$

La martingale locale $\left\{ \int_0^t e^{\alpha r} \overline{Y}_r . \overline{Z}_r dB_r \right\}_{t \in [0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à S^2 et Z, Z' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \left\| \overline{Z}_r \right\|^2 dr \right] \leq \mathbb{E} \left[R_\epsilon \right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent -avec C universelle-,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t \right|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[R_\epsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r} \left| \overline{Y}_r \right|^2 \left\| \overline{Z}_r \right\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq \mathbb{E} \left[R_\epsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t/2} \left| \overline{Y}_r \right| \left(\int_0^T e^{\alpha r} \left\| \overline{Z}_r \right\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t \right|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[R_\epsilon \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t \right|^2 \right] + \frac{C^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \left\| \overline{Z}_r \right\|^2 dr \right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|\overline{Z}_r\right\|^2 dr\right]\leq\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[R_\epsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ϵ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\overline{Y}_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|\overline{Z}_r\right\|^2 dr\right]\leq\epsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\overline{U}_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|\overline{V}_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ϵ tel que $\epsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de L^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\|(U,V)\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans L^2. ■

2.4 Théorème de comparaison

2.4.1 Equation différentielle stochastique rétrograde linéaires

Le but de ce paragraphe est l'étude du cas particulier des EDSR linéaire pour lesquelles on donnent une formule plus ou moins explicité. On placent le cas $k=1$; donc Y est un réel et Z est une matrice de taille $1\times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.4.1 *Soit* $\{(a_t,b_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*, progressivement mesurable et borné. Soient* $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ *un élément de* $M^2(\mathbb{R})$ *et* ξ *une variable* *aléatoire,* $\mathcal{F}_T-$ *mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\} \, dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t \right), \qquad \forall t \in [0,T],$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp \left\{ \int_0^t b_r . dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |b_r|^2 \, dr + \int_0^t a_r dr \right\}.$$

2.4.2 théorème de comparaison

Théorème 2.4.1 *Supposons que* $k=1$ *et que* (ξ, f), (ξ', f') *vérifient l'hypothèse **(L)** On note* (Y,Z) *et* (Y',Z') *les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que* $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi \leq \xi'$ *et que* $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes P - p.p.$ $(m$ *mesure de Lebesgue*$)$. *Alors,*

$$\mathbb{P}-p.s., \qquad \forall t \in [0,T], \qquad Y_t \leq Y_t'.$$

Si de plus, $Y_0 = Y_0'$, *alors* $\mathbb{P}-p.s.$, $Y_t = Y_t'$, $0 \leq t \leq T$ *et* $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ *En particulier, dès que* $\mathbb{P}(\xi < \xi') > 0$ *ou* $f(t, Y_t, Z_t) < f'(t, Y_t, Z_t)$ *sur un ensemble de* $m \otimes \mathbb{P}-$ *mesure strictement positive alors* $Y_0 < Y_0'$.

Chapitre 3

Lien entre l'EDSR et l'EDP

3.1 Equations aux Dérivées Partielles

Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y, $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une EDP est une relation de la forme :

$$\mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{pour} \ (x, y) \in \Omega \tag{3.1}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation (3.1) est donc d'ordre 1.

La dimention d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. L'équation (3.1) est donc de dimension 2.

Résoudre l'EDP consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (3.1).

En général, une EDP est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$G\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{3.2}$$

3.2 Équations différentielles stochastiques

Définition 3.2.1 *Soient $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ deux fonction mesurable, où T un réel strictement positif, Z est une variable aléatoire, de carré intégrable, et indépendante du MB B.*

Une solution de l'EDS :

$$E_Z(b,\sigma) = \begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = Z \end{cases}$$

est consistée par :

(a) Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$.

(b) Un $(\mathcal{F}_t)$ −mouvement brownien $B = (B_1, ..., B_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

(c) Un processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ continu $(\mathcal{F}_t)$ − adapté tel que les intégrales

$$\int_0^t b(r, X_r)\,dr \ \text{ et } \int_0^t \sigma(r, X_r)\,dB_r$$

aient un sens et tel que l'egalité

$$X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)\,dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)\,dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

soit satisfaite pour tout t $\mathbb{P} - p.s.$

Définition 3.2.2 (La solution fort de l'EDS) *Soit X est un processus continu tel que :*

1. *X est progressivement mesurable ;*
2. *$\mathbb{P} - p.s.$ $\int_0^T \left\{|b(r, X_r)| + \|\sigma(r, X_r)\|^2\right\} dr < \infty$, où $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$;*

3. *$\mathbb{P}-p.s.$, on a* $X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)\, dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)\, dB_r$.

Théorème 3.2.1 (Existence et unicité) *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

1. *Condition de lipschitz , uniforme en temps :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| < K|x-y|;$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|);$$

3. $\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] < \infty$.

Alors l'EDS (3.3) *posséde une unique solution.*

Propriété 3.2.1 *Dans cette proprietés on a travailler avec des conditions initiales déterministes ce qui permet de prendre la filtration naturelle du mouvement brownien $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0}$. On suppose que les fonctions b et σ vérifie les hypothèses du théorème 3.1.1 Lipschitz et croissance linéaire. D'après le résultat précédent, on peut construire pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, la solution de l'EDS*

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(r, X_r^{s,x})\, dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{s,x})\, dB_r, s \leq t \leq T, \tag{3.4}$$

et l'on conviendra que $X_t^{s,x} = x$ si $0 \leq t \leq s$.

Définition 3.2.3 (Propriété de Markov) *Soit X un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour toute fonction borélienne bornée f, et pour tout $s \leq t$, on a*

$$\mathbb{E}\left(f(X_t)/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X_t)/X_s\right), \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

Montrons la propriété de Markov pour les solutions de l'EDS (3.4) *par rapport à la tribu du mouvement brownien B.*

3.3 Le cadre markovien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, B un mouvement brownien $d-$dimensionnel. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est un filtration naturelle de B augmentée de sorte que les conditions habituelles sont satisfaites.

Définition 3.3.1 *b et σ deux fonction continues telle que :*
$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$.
On suppose qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que, pour tout t, pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$,

1. $|b(t,x) - b(t,x')| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')\| < K|x - x'|$;
2. $|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + |x|)$.

Sous ces hypothèses, on peut construire, étant donnée un réel $t \in [0,T]$ et une variable aléatoire $\theta \in L^2(\mathcal{F}_t)$, $\left\{X_u^{t,\theta}\right\}_{t\leq u\leq T}$ la solution de l'EDS

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b\left(r, X_r^{t,\theta}\right) dr + \int_t^u \sigma\left(r, X_r^{t,\theta}\right) dB_r, \qquad t \leq u \leq T; \tag{3.5}$$

on convient, que si $0 \leq u \leq t$, $X_u^{t,\theta} = \mathbb{E}(\theta/\mathcal{F}_u)$.

D'autre part on considère deux fonctions continue $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$.
Supposons que f et g vérifient les hypothèses suivantes : il existe deux réels μ et $p \geq 1$ tels que, pour tout (t, x, y, y', z, z'),

1. $(y - y').(f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z)) \leq \mu|y - y'|^2$;
2. $|f(t,x,y,z) - f(t,x,y,z')| \leq K\|z - z'\|$;
3. $|g(x)| + |f(t,x,y,z)| \leq K(1 + |x|^p + |y| + \|z\|)$.

Sous ces hypothèses, si θ *appartient à* $L^{2p}(\mathcal{F}_t)$, *on peut résoudre l'EDSR*

$$Y_u^{t,\theta} = g\left(X_T^{t,\theta}\right) + \int_u^T f\left(r, X_r^{t,\theta}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\right) dr - \int_u^T Z_r^{t,\theta} dB_r, \quad 0 \leq u \leq T. \tag{3.6}$$

3.3.1 La propriété de Markov

Proposition 3.3.1 *Soit* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. $\{(X_n^{t,x}, Y_u^{t,x})\}_{t \leq u \leq T}$ *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t \leq u \leq T}$. *En particulier,* $Y_t^{t,x}$ *est déterministe.*
On peut choisir une version de $\{Z_u^{t,x}\}_{t \leq u \leq T}$ *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t \leq u \leq T}$.

Preuve. Considérons le processus $\{W_u\}_{u \geq 0}$ définie par $W_u = B_{t+u} - B_t$ et notons $\{\mathcal{G}_u\}_u$ sa filtration naturelle augmentée.
Soit $\{X_u\}_{0 \leq u \leq T-t}$ la solution $\{\mathcal{G}_u\}_u$ $-$adapté de l'EDS

$$X_u = x + \int_0^u b(t+r, X_r)\, dr + \int_0^u \sigma(t+r, X_r)\, dW_r, \quad 0 \leq u \leq T-t.$$

En particulier, pour tout $v \in [0,T]$, on a

$$X_{v-t} = x + \int_0^{v-t} b(t+r, X_r)\, dr + \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)\, dW_r.$$

On obtient par un chengement de variable $s = r + t$:

$$\int_0^{v-t} b(t+r, X_r)\, dr = \int_t^v b(s, X_{s-t})\, ds, \quad \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)\, dW_r = \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})\, dB_s,$$

et par suite,

$$X_{v-t} = x + \int_t^v b(s, X_{s-t})\, ds + \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})\, dB_s, \quad t \leq v \leq T;$$

par définition du processus $X^{t,x}$,

$$X_v^{t,x} = x + \int_t^v b\left(s, X_s^{t,x}\right) ds + \int_t^v \sigma\left(s, X_s^{t,x}\right) dB_s, \quad t \leq v \leq T.$$

Par unicité des solutions d'EDS à coefficients Lipschitz, ces deux processus sont indistinguables : $\mathbb{P} - p.s.$, $\forall v \in [t,T]$, $X_{v-t} = X_r^{t,x}$. En particulier, $X_v^{t,x}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{G}_{v-t}$ puisqu'il en est ainsi pour X_{v-t}. Or $\mathcal{G}_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$.
Le résultat pour les EDSR se déduit de celui que nous venons d'établir pour les EDS. En effet, on considère la solution $\{(Y_u, Z_u)\}_{0 \leq u \leq T-t}$, $\mathcal{G}_u-$adaptée de l'EDSR

$$Y_u = g\left(X_{T-t}\right) + \int_u^{T-t} f\left(t+r, X_r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_u^{T-t} Z_r dW_r, \quad 0 \leq u \leq T-t,$$

soit encore

$$Y_{v-t} = g\left(X_{T-t}\right) + \int_{v-t}^{T-t} f\left(t+r, X_r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_{v-t}^{T-t} Z_r dW_r, \quad t \leq v \leq T.$$

On effectue le changement de variables $s = t + r$ dans les deux intégrales, pour obtenir

$$Y_{v-t} = g\left(X_{T-t}\right) + \int_v^T f\left(s, X_{s-t}, Y_{s-t}, Z_{s-t}\right) sd - \int_v^T Z_{s-t} dB_r, \quad t \leq v \leq T.$$

Il s'en suit que $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v \in [t,T]}$ est solution sur $[t,T]$ de l'EDSR (3.4) pour $\theta = x$ puisque nous savons déjà que $X_{v-t} = X_v^{t,x}$. L'unicité des solutions des EDSR donne, dans $S_c^2 \times M^2$, $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v \in [t,T]} = \{Y_v^{t,x}, Z_v^{t,x}\}_{v \in [t,T]}$ et la mesurabilité recherchée puisque $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v \in [t,T]}$ est adapté par rapport à $\mathcal{G}_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$.
Puisque nous savons que $Y_t^{t,x}$ est une quantité déterministe, on peut définir une fonction en posant,

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \quad u(t,x) = Y_t^{t,x}$$

Commençons par étudier la croissance et la continuité de cette fonction. ■

Proposition 3.3.2 *La fonction u est continue et à croissance polynomiale. On a*

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \qquad |u(t,x)| \leq C(1+|x|^p).$$

Sous l'hypothèse (Lip), la fonction u vérifie de plus, pour tout (t,x), (t',x'),

$$|u(t,x) - u(t',x')| \leq C\Big(|x-x'| + |t-t'|^{1/2}(1+|x|)\Big).$$

Théorème 3.3.1 *Soient $t \in [0,T]$ et $\theta \in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$. On a :*

$$\mathbb{P}-p.s. \qquad Y_t^{t,\theta} = u(t,\theta) = Y_t^{t,\cdot} \circ \theta.$$

Corollaire 3.3.1 *Soient $t \in [0,T]$ et $\theta \in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$. Alors, on a, $\mathbb{P}-p.s.$,*

$$\forall s \in [t,T], \qquad Y_s^{t,\theta} = u\left(s, X_s^{t,\theta}\right).$$

Preuve. Fixons $(t,\theta) \in [0,T] \times L^{2p}(\mathcal{F}_t)$ et prenons $s \in [t,T]$. On a d'après le théorème précédent,

$$\mathbb{P}-p.s., \qquad Y_s^{s,X_s^{t,\theta}} = u\left(s, X_s^{t,\theta}\right).$$

Où $\left\{\left(Y_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Z_r^{s,X_s^{t,\theta}}\right)\right\}_r$ est solution sur $[0,T]$ de l'EDSR

$$Y_u = g\left(X_T^{s,X_s^{t,\theta}}\right) + \int_u^T f\left(r, X_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Y_r, Z_r\right) dr - \int_u^T Z_r dB_r, \qquad s \leq u \leq T.$$

Où, par unicité des solutions sur $[s,T]$ de l'EDS,

$$X_r = X_s^{t,\theta} + \int_s^r b(u,X_u)\, du + \int_s^r \sigma(u,X_u)\, dB_u$$

on obtient facilement

$$\mathbb{P}-p.s., \quad \forall r \in [s,T], \quad X_r^{s,X_s^{t,\theta}} = X_r^{t,\theta}.$$

Par conséquent, $\left\{\left(Y_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Z_r^{s,X_s^{t,\theta}}\right)\right\}_r$ et $\left\{\left(Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\right)\right\}_r$ sont deux solutions sur $[0,T]$ de l'EDSR

$$Y_u = g\left(X_T^{t,\theta}\right) + \int_u^T f\left(r, X_r^{t,\theta}, Y_r, Z_r\right) dr - \int_u^T Z_r dB_r, \quad s \leq u \leq T.$$

L'unicité des solutions de cette EDSR donne en particulier

$$\mathbb{P}-p.s., \quad Y_s^{t,\theta} = Y_s^{s,X_s^{t,\theta}} = u\left(s, X_s^{t,\theta}\right).$$

Ceci est valable pour tout $s \in [t,T]$; comme les deux processus $\left\{Y_s^{t,\theta}\right\}_s$ et $\left\{u\left(s, X_s^{t,\theta}\right)\right\}_s$ sont continus via la continuité de u, on obtient le résultat ■

Remarque 3.3.1 *On utilise souvent ce résultat avec θ constante égale à x. Cette propriété de Markov, $Y_s^{t,x} = u\left(s, X_s^{t,x}\right)$, joue un rôle important lorsque l'on tente de construire la solution d'une EDP à l'aide d'une EDSR : nous le verrons plus loin.*

3.4 Lien entre les EDSR et les EDP

3.4.1 Formule de Feynman-Kac

Dans cette partie en faisant un lien entre les EDSR et les EDP. On a vu que $Y_r^{t,x} = u\left(r, X_r^{t,x}\right)$ au paragraphe précédent, où u est une fonction déterministe ;

Notations :

$\mathcal{L}$: l'opérateur différentiel du second ordre,

si h est une fonction de t et x nous notons $\partial_t h$ ou h' la dérivée partielle en temps,

∇h : le gradient en espace (vecteur colonne) et $Dh = (\nabla h)^*$,

D^2h : la matrice des dérivées secondes.

Nous allons voir que u est solution d'une équation aux dérivées partielles - EDP. $\mathcal{L}$ l'opérateur différenteil du second ordre suivant : pour h régulière

$$\mathcal{L}(t,x) = \frac{1}{2} trace\left(\sigma\sigma^*(t,x)\, D^2h(t,x)\right) + b(t,x).\nabla h(t,x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x)\,\partial_{x_i,x_j}h(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\,\partial_{x_i}h(t,x).$$

L'objectif de ces section est d'établir des relations entre $\{Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\}_{0\le t\le T}$ solution de l'EDSR.

$$Y_r^{t,x} = g\left(X_T^{t,x}\right) + \int_t^T f\left(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}\right) du - \int_t^T Z_u^{t,x} dB_u, \qquad t \le r \le T, \tag{3.7}$$

où $\{X_r^x\}_{0\le r\le T}$ est la solution de l'EDS avec la convention $X_r^{t,x} = x$ si $0 \le r \le T$,

$$X_r^{t,x} = x + \int_t^r b\left(u, X_u^{t,x}\right) du + \int_t^r \sigma\left(u, X_u^{t,x}\right) dB_u, \qquad t \le r \le T, \tag{3.8}$$

d'une part de la solution $v(t,x)$ l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \mathcal{L}(t,x) + f(t,x,v(t,x),\ Dv(t,x)\,\sigma(t,x)) = 0, \ \ (t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{3.9}$$

Proposition 3.4.1 *Supposons que l'EDP* (3.9) *possède une solution* v, *de classe* $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, *telle que pour tout* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $|\nabla v(t,x)| \le C(1+|x|^q)$.

Alors, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, *la solution de l'EDSR* (3.7), $\{Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\}_{t\le r\le T}$, *est donnée par le couple de processus* $\{v(r,X_r^{t,x}), Dv\sigma(r,X_r^{t,x})\}_{t\le r\le T}$ *.En particulier, on* *obtient la formule,*

$$u(t,x) = Y_t^{t,x} = v(t,x).$$

Preuve. Pour démontré cette proposition on utilisant la condition de croissance sur le gradient de v assure que $\left(Dv\sigma\left(r, X_r^{t,x}\right)\right)_r$ est un processus de carré intégrable. De plus, comme v est régulière, en appliquant la formule d'Itô, on obtient,

$$dv\left(s, X_s^{t,x}\right) = v'\left(s, X_s^{t,x}\right) ds + \nabla v\left(s, X_s^{t,x}\right).dX_s^{t,x} + \frac{1}{2} trace\left\{\sigma\sigma^*\left(s, X_s^{t,x}\right) D^2 v\left(s, X_r^{t,x}\right)\right\} ds;$$

soit encore, utilisant $dX_s^{t,x}$ pour $s \geq t$, et la définition de $\mathcal{L}$,

$$dv\left(s, X_s^{t,x}\right) = \left\{v'\left(s, X_s^{t,x}\right) + \mathcal{L}\left(s, X_s^{t,x}\right)\right\} ds + Dv\sigma\left(s, X_s^{t,x}\right) dB_s.$$

Où v est solution de l'EDP (3.9), donc $v' + \mathcal{L}\ v = -f$; il vient alors

$$dv\left(s, X_s^{t,x}\right) = -f\left(s, X_s^{t,x}, v\left(s, X_s^{t,x}\right), Dv\sigma\left(s, X_s^{t,x}\right)\right) ds + Dv\sigma\left(s, X_s^{t,x}\right) dB_s.$$

On conclut en intégrant de r à T notant que $v\left(T, X_T^{t,x}\right) = g\left(X_T^{t,x}\right)$. ■

Corollaire 3.4.1 *Prenons $f(t,x,y,z) = c(t,x)\,y + h(t,x)$, où c et h sont deux fonctions continues bornées. Sous les hypothèses précédentes, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,*

$$v(t,x) = E\left[g\left(X_T^{t,x}\right)\exp\left(\int_t^T c\left(r, X_r^{t,x}\right) dr\right) + \int_t^T h\left(r, X_r^{t,x}\right)\exp\left(\int_t^r c\left(s, X_s^{t,x}\right) ds\right) dr\right].$$

Preuve. On a vu que $v(t,x) = Y_t^{t,x}$. Mais lorsque la fonction f prend la forme :

$$f(t,x,y,z) = c(t,x)\,y + h(t,x),$$

l'EDSR que l'on doit résoudre est une EDSR linéaire. ■

Remarque 3.4.1 *Dans les deux derniers énoncés, nous avons supposé l'existence d'une* *solution classique* v *et nous en avons déduit la solution de l'EDSR et la formule* $v(t,x) = Y_t^{t,x}$. *Si tous les coefficients sont réguliers, on peut montrer que* u *qui est définie par* $u(t,x) = Y_t^{t,x}$ *est une fonction régulière qui est solution de l'EDP* (3.9).

Définition 3.4.1 *Soit* u *une fonction continue sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *vérifiant la condition* $u(T,x) = g(x)$.
u *est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de l'EDP* (3.9) *si, pour toute fonction* φ, *de classe* $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *on a, en tout point* $(t_0, x_0) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ *de maximum (resp. minimum) local de* $u - \varphi$:

$$\partial_t \varphi(t_0,x_0) + \mathcal{L}\varphi(t_0,x_0) + f(t_0,x_0,u(t_0,x_0), D\varphi\sigma(t_0,x_0)) \geq 0, \qquad (resp. \quad \leq 0).$$

u est solution de viscosité si elle est à la fois sous-solution et sur-solution de viscosité.

Théorème 3.4.1 *La fonction* $u(t,x) = Y_t^{t,x}$ *est solution de viscosité de l'EDP* (3.9).

Preuve. Remarquons que u est une fonction continue et vérifie $u(T,.) = g$. Nous montrons seulement que u est sous-solution (la démonstration de u sur-solution est identique).
Soit φ une fonction de classe $C^{1,2}$ telle que $u - \varphi$ possède en (t_0,x_0) un maximum local $(0 < t_0 < T)$. On remplace φ par $\varphi - \varphi(t_0,x_0) + u(t_0,x_0)$ on suppose que $\varphi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$. Nous devons montrer que

$$\varphi'(t_0,x_0) + \mathcal{L}\varphi(t_0,x_0) + f(t_0,x_0,u(t_0,x_0), D\varphi\sigma(t_0,x_0)) > 0.$$

Supposons le contraire i.e. il existe $\delta > 0$ tel que

$$\varphi'(t_0,x_0) + \mathcal{L}\varphi(t_0,x_0) + f(t_0,x_0,u(t_0,x_0), D\varphi\sigma(t_0,x_0)) = -\delta < 0.$$

$u - \varphi$ possède un maximum local en (t_0,x_0) qui est nul donc par continuité, il existe

$0 < \alpha < T - t_0$ tel que, si $t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$ et $|x - x_0| \leq \alpha$,

$$u(t,x) \leq \varphi(t,x) \qquad et \qquad \varphi(t,x) + \mathcal{L}\varphi(t,x) + f(t,x,u(t,x), D\varphi\sigma(t,x)) \leq -\delta/2.$$

Considérons le temps d'arrêt $\tau = \inf\{u \geq t_0;\ |X_u^{t_0,x_0} - x_0| > \alpha\} \wedge t_0 + \alpha$. Comme X^{t_0,x_0} est un processus continu on a $|X_\tau^{t_0,x_0} - x_0| \leq \alpha$.

La formule d'Itô appliquée à $\varphi(r, X_r^{t_0,x_0})$ donne

$$d\varphi\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) = \left\{\varphi'\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) + \mathcal{L}\varphi\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)\right\} dr + D\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dB_r.$$

et, en intégrant de $u \wedge \tau$ à $(t_0 + \alpha) \wedge \tau = \tau$ pour $t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$, on obtient

$$\varphi\left(u \wedge \tau, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right) = \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) - \int_{u\wedge\tau}^{\tau} \{\varphi' + \mathcal{L}\varphi\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dr - \int_{u\wedge\tau}^{\tau} D\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dB_r;$$

notant, pour $t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$, $Y_u' = \varphi\left(u \wedge \tau, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)$ et $Z_u' = 1_{u\leq\tau} D\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)$, l'égalité précédente prend la forme

$$Y_u' = \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) + \int_u^{t_0+\alpha} -1_{r\leq\tau}\{\varphi' + \mathcal{L}\varphi\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r' dB_r, \quad t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha.$$

De la même façon, si on pose, pour $t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$, , $Y_u = Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}$ et $Z_u = 1_{u\leq\tau} Z_u^{t_0,x_0}$, on a

$$Y_u = Y_{t_0+\alpha} + \int_u^{t_0+\alpha} 1_{r\leq\tau} f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r, Z_r\right) dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r dB_r, \qquad t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha.$$

Où la propriété de Markov - Corollaire 3.1.1 et la remarque qui le suit - implique que, $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t_0 \leq r \leq t_0 + \alpha$, $Y_r^{t_0,x_0} = u(r, X_r^{t_0,x_0})$ d'où j'on déduit que $Y_{t_0+\alpha} = Y_\tau^{t_0,x_0} = u(\tau, X_\tau^{t_0,x_0})$.

L'égalité précédente devient alors

$$Y_u = u\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) + \int_u^{t_0+\alpha} 1_{r\leq\tau} f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), Z_r\right) dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r dB_r, \quad t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha.$$

Nous allons appliquer le théorème de comparaison à $(Y'_u, Z'_u)_u$ et $(Y_u, Z_u)_u$ qui sont solutions d'EDSR. Par définition de τ, on a $u\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) \leq \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right)$ et

$$1_{r\leq\tau} f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), Z'_r\right) = 1_{r\leq\tau} f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), D\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)\right)$$

$$\leq -1_{r\leq\tau}\left\{\varphi' + \mathcal{L}\varphi\right\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right).$$

De plus, on a, toujours par définition de τ,

$$E\left[\int_{t_0}^{t_0+\alpha} -1_{r\leq\tau}\left(\varphi' + \mathcal{L}\varphi + f\right)\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), D\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)\right) dr\right] \geq E\left[\tau - t_0\right]\delta/2.$$

Cette quantité est strictement positive : en effet, $\delta > 0$ et $\tau > t_0$ car $\left|X_{t_0}^{t_0,x_0} - x_0\right| = 0 < \alpha$. On peut donc appliquer la version stricte du théorème de comparaison, voir la remarque à la suite du Théorème 2.4.1, pour obtenir $u\left(t_0, x_0\right) = Y_{t_0} < Y'_{t_0} = \varphi\left(t_0, x_0\right)$. Ceci est impossible puisque $u\left(t_0, x_0\right) = \varphi\left(t_0, x_0\right)$. u est donc bien une sous-solution. ■

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] David, C., & Gosselet, P. (2015). Equations aux dérivées partielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés. Dunod.

[3] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[4] Barles, G. (1994). Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi, volume 17 of Mathématiques & Applications (Berlin)[Mathematics & Applications].

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$B\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{P} - p.s.$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
MB	Mouvement Brownien.
EDS	Équations Différentielles Stochastiques.
$EDSR$	Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.
EDP	Équations aux Dérivées Partielles.
z^*	Transposée de la matrice z.
$X^{t,x}$	Processus de Markov.
L^1	Espace des processus intégrables.
L^2	Espace des processus de carré intégrables.
C^1	Ensemble des fonctions une fois dérivables et dont la premiére dérivée est continue.
C^2	Ensemble des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.