

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Chemmar Besma

Titre :

L-moments bivariés

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Djaber Ibtissem	UMKB	Président
Dr. Chine Amel	UMKB	Encadreur
Dr. Ouanoughi Yasmina	UMKB	Examinateur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce humble travail à ma chère mère

À mon père

À mes soeurs

À Samira, Amina et Nawel

À mes frères

À Sami, Mohamed et Lazher

À mes camarades

À Sara, Wahiba et Nour

REMERCIEMENTS

Je prie Allah le tout puissant de m'avoir donné de courage et de la volonté qui m'ont permis de mener à bien et jusqu'au bout ce modeste travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes profondes gratitude et remerciements à mon l'encadreur de mémoire, le docteur Chine Amel, M.C.A de l'université de Biskra pour sa enthousiasme, sa rigueur scientifique et sa extrême patience.

Je tiens aussi à remercier le docteur Djaber Ibtissem de l'université de Biskra de me faire l'honneur de présider le Jury.

Je suis très honorée que le docteur Ouanoughi Yasmina que l'université de Biskra a accepté de participer au Jury de cette mémoire et d'examiner mon travail.

Mes plus vifs remerciements à ma mère et mes soeurs et mes frères pour leurs judicieux conseils, leurs générosités, leurs encouragements et pour leurs aides sans limites.

Mes sincères et honnêtes remerciements à mes camarades Wahiba, Sara et Nour.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 L-moments univariés	2
1.1 Statistique d'ordre	2
1.1.1 Distribution d'une seule ordre statistique	3
1.1.2 Distribution jointe de deux statistiques d'ordres	4
1.2 L-moments : définitions et propriétés	5
1.2.1 Propriétés de L-moments univariés	7
1.2.2 Représentations de L-moments	8
1.2.3 Estimation de L-moments	12
2 L-moments bivariés	16
2.1 L-comoments : définitions et propriétés	16
2.1.1 L-covariance, L-coskewness et L-cokurtosis	22
2.2 Représentations de $\lambda_{k[12]}$ en termes des concomitants	24
2.3 Estimation des L-comoments	24

3 L-comoments en termes des copules	27
3.1 Copules : définitions	27
3.1.1 Copules bivariées	28
3.2 Densité de copule	30
3.2.1 L-comoments en terme de copule bivariée :	31
3.3 Copules de Farlie-Gumbel-Morgenstern	35
3.3.1 Copules Archimédiennes	36
Conclusion	38
Bibliographie	39
Annexe B : Abréviations et Notations	41

Table des figures

1.1	Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, normale, uniforme, Gumbel, PE3, GOV, GLO et GPA.	15
1.2	Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, normale, uniforme, Gumbel, PE3, GOV, GLO et GPA avec les rapports des L-moments empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simulés selon la loi exponentielle	15

Introduction

En statistique, les L-moments et les L-comoments sont des mesures analogues aux moments classiques, ils sont utilisés pour caractériser les différentes distributions de probabilité et comme méthode d'estimation des paramètres dans le cas où les méthodes d'estimation classiques ne sont pas valables, telle que la méthode de moments. Ces mesures sont développées par **Hosking** en (1990) [8] qui a défini des quantités alternatives aux moments conventionnels basées sur des combinaisons linéaires des statistiques d'ordre, appelées "L-moments" représentant des mesures de position, d'échelle, d'asymétrie et de kurtosis. Le cas bivarié est développé par **Serfling** et **Xiao** en (2006) [11] qui a étendu la notion de L-moments univariés en dimension deux.

Le but de ce mémoire est de représenter les L-comoments en terme de copule, elle est bien organisé comme suit :

- **Chapitre 1. L-moments univariés.** Ce chapitre présente une introduction aux L-moments univariés, mais on va débiter par les statistiques d'ordres, les L-moments (définitions et propriétés, ses représentations et leur estimation) et on finit par un diagramme de rapports de L-moments.
- **Chapitre 2. L-moments bivariés.** Ce chapitre est consacré aux L-moments bivariés, ses inégalités principales et leur représentations en terme de L-comoments.
- **Chapitre 3. L-comoments en termes des copules.** Enfin dans le dernier chapitre, on présente une définition des copules bivariés, la représentation de L-comoments en fonction de copule et des exemples illustratifs avec la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern.

Chapitre 1

L-moments univariés

Dans ce chapitre, on va introduire la définition de L-moments univariés, ses propriétés, ses représentations en terme (de polynôme orthogonaux, des moments de probabilité pondérés, de covariance et L-statistique), leur estimation et on fournit des exemples, mais avant tout, on va donner la définition des statistiques d'ordre, ses distributions et s'intéresse aussi au forme des moments des statistiques d'ordre. On finit par un diagramme de rapports de L-moments (L-skewness et L-kurtosis) qui donne une représentation graphique de L-kurtosis τ_4 en fonction de L-skewness τ_3 .

1.1 Statistique d'ordre

Définition 1.1.1 Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires (v.a) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), on note la fonction de répartition de X par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

On appelle statistique d'ordre $S : (X_1, \dots, X_n) \rightarrow (X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ telque : $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, avec : $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$, $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Remarque 1.1.1 L'échantillon $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ est non i.i.d [1].

Preuve. On a d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{1:n} \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(X_{1:n} > x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) \\ &= 1 - [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x)]^n \\ &= 1 - [1 - F_X(x)]^n.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n:n} \leq x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ &= [F_X(x)]^n.\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}(X_{1:n} \leq x) \neq \mathbb{P}(X_{n:n} \leq x).$$

■

1.1.1 Distribution d'une seule ordre statistique

Supposons que X_1, \dots, X_n des n v.a de fonction de répartition $F_i(x)$, $\forall i = \overline{1, n}$, alors la fonction de répartition et la densité de statistique d'ordre, noté respectivement $F_{X_{i:n}}(x)$, $f_{X_{i:n}}(x)$ sont données par :

$$\begin{aligned}F_{X_{i:n}}(x) &= \sum_{r=i}^n C_n^r F^r(x) [1 - F(x)]^{n-r}, \\ f_{X_{i:n}}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} f(x) [1 - F(x)]^{n-i}.\end{aligned}$$

en particulier, pour $i = 1, i = n$, la fonction de répartition et la fonction de densité sont :

$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad F_{X_{n:n}}(x) = [F(x)]^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f_{X_{1:n}}(x) = n f(x) [1 - F(x)]^{n-1}, \quad f_{X_{n:n}}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.1.2 Distribution jointe de deux statistiques d'ordres

La loi jointe (fonction de répartition, fonction de densité) de deux statistiques d'ordres sont définis comme :

$$F_{(X_{i:n}, X_{j:n})}(x, y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{i:n} \leq x, X_{j:n} \leq y) = \mathbb{P}(X_{j:n} \leq y) = F_{X_{j:n}}(y), & x \geq y \\ \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^s \frac{n!}{r!(-)!(n-r)!} [F(x)]^r [F(y) - F(x)]^{s-r} [1 - F(y)]^{n-s}, & x < y \end{cases},$$

$$f_{(X_{i:n}, X_{j:n})}(x, y) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x)]^{i-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-j} \\ \text{pour } -\infty < x < y < +\infty \end{cases},$$

Cas particulier :

$$f_{(X_{1:n}, X_{n:n})}(x, y) = n(n-1) f(x) [F(y) - F(x)]^{n-2} f(y).$$

Densité conjointe de n statistiques d'ordres

La fonction de densité conjointe de n statistiques d'ordres, noté $f_{(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})}$ est défini par :

$$f_{(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, \dots, x_n) = n! f(x_1) \dots f(x_n) \mathbb{I}(x_1 < \dots < x_n).$$

Moments de statistique d'ordre

Définition 1.1.2 Soit $X_{j:n}$ la $j^{\text{ème}}$ statistique d'ordre associée à l'échantillon de taille n , on définit la $k^{\text{ème}}$ moments de la $j^{\text{ème}}$ statistique d'ordre par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [X_{j:n}^k] &= \mu_{j:n}^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{X_{j:n}}(x) \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j} f(x) dx,\end{aligned}$$

Et

$$\mathbb{E} [X_{j:n}^k] = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_0^1 Q(u)^k u^{j-1} (1-u)^{n-j} du.$$

1.2 L-moments : définitions et propriétés

Les L-moments, noté λ_k sont des mesures alternatives de position, d'échelle et de forme de la distribution de probabilité aux moments centraux classiques :

$$\mu_k = \mathbb{E} [(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k dF_X .$$

déterminé par la fonction de répartition F_X et ils sont défini par [14] comme une combinaison lineaire spécifique des espérances de la statistique d'ordre ou des fonctions lineaires de probabilité de moments pondérés.

Définition 1.2.1 Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de taille n d'une distribution continue $F_X(x)$ avec fonction de quantile $Q(u) = F^{-1}(u)$, et soit $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre accociées à échantillon. Alors le $k^{\text{ème}}$ L-moments λ_k est donné par :

$$\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{k-1}{l} \mathbb{E} [X_{k-l:k}] = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l (k-1)!}{l! (k-1-l)!} \mathbb{E} [X_{k-l:k}]; \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

telle que $\mathbb{E} [X_{k-l:k}]$ présente l'espérance du $(k-l)$ de la statistique d'ordre .

Exemple 1.2.1 Les quatres premiers L-moments en termes des espérances de la statistique d'ordre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \mathbb{E}[X_{1:1}], \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_{2:2}] - \mathbb{E}[X_{1:2}]), \\ \lambda_3 = 1/3 (\mathbb{E}[X_{3:3}] - 2\mathbb{E}[X_{2:3}] + \mathbb{E}[X_{1:3}]), \\ \lambda_4 = 1/4 (\mathbb{E}[X_{4:4}] - 3\mathbb{E}[X_{3:4}] + 3\mathbb{E}[X_{2:4}] - \mathbb{E}[X_{1:4}]). \end{array} \right.$$

telque $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ présentent les mesures de position, d'échelle, de skewness et de kurtosis.

Définition 1.2.2 Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de taille n de fonction de répartition $F_X(\cdot)$ et de fonction de quantile $Q(u) = F^{-1}(u)$, et soit $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ statistiques d'ordre associées à échantillon. On définit l'espérance de statistique d'ordre en terme de fonction de quantile par :

$$\mathbb{E}[X_{i:k}] = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \int_0^1 Q(u) u^{i-1} (1-u)^{k-i} du, \quad (1.2)$$

en remplaçant l'équation (1.2) dans l'équation (1.1), on obtient aussi une autre écriture de L-moments λ_k en terme de fonction de quantile :

$$\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{k-1}{l} \frac{k!}{(k-l-1)!l!} \int_0^1 Q(u) u^{k-l-1} (1-u)^l du ; k = 1, 2, \dots$$

Ratios de L-moments :

Les ratios de L-moments mesurent la forme d'une distribution indépendamment de son échelle de mesure. Elles sont définies par :

$$\tau_k := \lambda_k / \lambda_2, \quad k \geq 3.$$

Théorème 1.2.1 *Les ratios de L-moments τ_k sont limités, ils prennent des valeurs entre -1 et $+1$ c-à-d :*

$$|\tau_k| < 1,$$

nous définissons aussi le L-CV (coefficient de L-variation) :

$$\tau = \lambda_2/\lambda_1,$$

la quantité τ sont significatifs pour des variables aléatoires positives ($X \geq 0$) et $0 < \tau < 1$. Les deux mesures L-skewness, L-kurtosis sont définis respectivement par :

$$\begin{cases} \tau_3 = \lambda_3/\lambda_2, \\ \tau_4 = \lambda_4/\lambda_2. \end{cases}$$

1.2.1 Propriétés de L-moments univariés

Les L-moments λ_1 et λ_2 , le L-CV τ et le L-skewness τ_3 et le L-kurtosis τ_4 sont les quantités les plus utiles pour récapituler des distributions de probabilité. Leurs propriétés [7] les plus importantes sont :

– **Existence** :

Proposition 1.2.1 (*L'existence de L-moments*)

1. Les L-moments λ_k ; $k = 1, 2, \dots$ d'une variable aléatoire X existe ssi son espérance est finie

$$(\mathbb{E}(X) < \infty),$$

2. Une distribution dont l'espérance existe et finie se caractérise par ses L-moments λ_k , $k = 1, 2, \dots$

– **L'unicité** : Si la moyenne μ de la distribution existe, donc les L-moments ne définissent uniquement la distribution, aucune deux distributions a les mêmes L-moments.

- **Transformation lineaire** : Soient X et Y deux variables aléatoires avec des L-moments λ_k et λ_k^* , respectivement et supposons que $Y = aX + b$. Alors

$$\begin{cases} \lambda_1^* = a\lambda_1 + b, \\ \lambda_2^* = |a| \lambda_2, \\ \tau_k^* = (\text{sign } a)^k \tau_k, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

- **Symétrie** : Soit X une variable aléatoire symétrique avec le moyen μ , avec

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + x) = \mathbb{P}(X \leq \mu - x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors tous les ratios d'ordre impaire de L-moments de X sont zéros,

$$\tau_k = 0, \quad k = 3, 5, \dots$$

1.2.2 Représentations de L-moments

En terme de polynome orthogonal

Les L-moments sont aussi généralement formulés [8] de polynômes de legendre déplacé.

Définition 1.2.3 *Les polynômes de legendre déplacé sont définis par :*

$$P_k^*(u) = \sum_{j=0}^k P_{k,j}^* u^j, \quad \text{avec } P_{k,j}^* = (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \binom{k+j}{j}, \quad \text{pour } 0 \leq u \leq 1 \text{ et } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Vérifient les trois conditions suivantes :

- (i) $P_k^*(u)$ est un polynôme de degré k dans u .
- (ii) $P_k^*(1) = 1$.
- (iii) $\int_0^1 P_k^*(u) P_r^*(u) du = 0$ si $k \neq r$.

Exemple 1.2.2 *Les premiers polymômes de legendre déplacé [2]. Pour $k = 0, 1, 2, 3$ sont*

données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(u) = 1, \\ P_1(u) = 2u - 1, \\ P_2(u) = 6u^2 - 6u + 1, \\ P_3(u) = 20u^3 - 30u^2 + 12u - 1, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

alors les L-moments sont définis par :

$$\lambda_k = \int_0^1 Q(u) P_{k-1}^*(u) du. \quad (1.5)$$

d'après(1.3), on obtient λ_{k+1} en terme de fonction quantile :

$$\lambda_{k+1} = \frac{1}{k!} \int_0^1 u^k (1-u)^k Q^{(K)}(u) du .$$

et les quatres premiers L-moments sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \int_0^1 Q(u) du , \\ \lambda_2 = \int_0^1 (2u - 1) Q(u) du, \\ \lambda_3 = \int_0^1 (6u^2 - 6u + 1) Q(u) du , \\ \lambda_4 = \int_0^1 (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1) Q(u) du . \end{array} \right.$$

En terme des moments de probabilité pondérés

Les L-moments de probabilité pondéré (Probability Weighted Moments ou PWM), noté $M_{p,k,s}$ ont été défini par [5].

Définition 1.2.4 Soit X une variable aléatoire de la fonction de répartition $F_X(\cdot)$. Les L-moments de probabilité pondéré, données par :

$$M_{p,j,r} = \mathbb{E} \left[X^p \{F(X)\}^j \{1 - F(X)\}^r \right],$$

et particulièrement, les L -moments de probabilité pondérés sont :

$$\alpha_r = M_{1,0,r} , \beta_j = M_{1,j,0},$$

on peut aussi écrire les α_r et β_j en terme de fonction de quantile :

$$\alpha_r = \int_0^1 Q(u) (1-u)^r du ; \beta_j = \int_0^1 Q(u) u^j du,$$

ces équations peuvent être contrastées avec la définition des moments ordinaires, qui peuvent être écrits comme

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^1 \{Q(u)\}^k du.$$

Les L -moments de probabilité pondéré α_r et β_j ont été utilisé comme la base de méthodes pour évaluer les paramètres de distribution de probabilité par [6]. Cependant, ils sont difficiles d'interpréter directement comme les mesures de l'échelle et de la forme d'une distribution de probabilité. Alors L -moments sont données par :

$$\lambda_{k+1} = (-1)^k \sum_{r=0}^k P_{k,r}^* \alpha_r = \sum_{j=0}^k P_{k,j}^* \beta_j,$$

et pour les premiers L -moments de probabilité pondérés nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0, \\ \lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0, \\ \lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0, \\ \lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0. \end{array} \right.$$

En terme de covariance et L-statistique

Avec une transformation directe dans l'équation (1.5) et utilisation $P_0^*(u) \equiv 1$ et l'orthogonalité mène à une représentation en terme de covariance :

$$\lambda_k = \begin{cases} \mathbb{E}(X) & , k = 1 ; \\ Cov(X, P_{k-1}^*(F(X))) & , k \geq 2 . \end{cases} \quad (1.6)$$

particulièrement

$$\lambda_2 = 2Cov(X, F(X)) = Cov(X, 2F(X) - 1),$$

par [11], nous obtenons une comparaison du deuxième L- moment avec l'écart type σ ,

$$\lambda_2 \leq \sigma/\sqrt{3},$$

pour $k = 3$, nous avons :

$$\lambda_3 = -6Cov(X, F(X)(1 - F(X))),$$

pour F est symétrique

$$\lambda_3 = 0,$$

et en général le $k^{\text{ème}}$ L-moment a une représentation comme la valeur attendue d'une L-statistique :

$$\lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w_{r:n}^{(k)} \mathbb{E}(X_{r:n}), \quad (1.7)$$

où

$$w_{r:n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1, k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1+j}{j} \binom{n-1}{j} \binom{r-1}{j}.$$

1.2.3 Estimation de L-moments

Les L-moments ont été définis pour une distribution de probabilité mais en pratique doivent souvent être estimés d'un échantillon fini. L'évaluation est basée sur un échantillon X_1, \dots, X_n .

Définition 1.2.5 Soit $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées à un échantillon X_1, \dots, X_n . Alors les estimateurs de L-moments [7], noté l_k sont écrit comme :

$$l_k = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} (-1)^j \binom{k-1}{j} X_{i_{k-j:n}}, \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

Par conséquent les quatres premiers L-moments de l'échantillon sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 = \frac{1}{n} \sum_i X_{i:n}, \\ l_2 = \frac{1}{2} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i>j} (X_{i:n} - X_{j:n}), \\ l_3 = \frac{1}{3} \binom{n}{3}^{-1} \sum_{i>j>r} (X_{i:n} - 2X_{j:n} + X_{r:n}), \\ l_4 = \frac{1}{4} \binom{n}{4}^{-1} \sum_{i>j>r>l} (X_{i:n} - 3X_{j:n} + 3X_{r:n} - X_{l:n}). \end{array} \right.$$

Par définition l'*U*-statistique particulièrement dans la statistique nonparamétrique et aussi a des propriétés comme l'absence de biais, la normalité asymptotique et une résistance qui légère en raison des valeurs atypiques. On assume une évaluation de $\mathbb{E}(X_{r:n})$ obtenu avec l'utilisation d'*U*-statistique comme :

$$b_k = \frac{1}{n} \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{j=k+1}^n \binom{j-1}{k} X_{j:n},$$

notamment

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j:n}, \\ b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{n-1} X_{j:n}, \\ b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)(n-2)} X_{j:n}, \end{array} \right.$$

et en générale

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-k)}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)} X_{j:n}.$$

On obtient les premiers quatres L-moments de l'échantillon :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 = b_0, \\ l_2 = 2b_1 - b_0, \\ l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0, \\ l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0, \end{array} \right.$$

nous pouvons donc écrire généralement :

$$l_{k+1} = \sum_{r=0}^k P_{k,r}^* b_r, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

où

$$P_{k,r}^* = (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{k+r}{r} \frac{(-1)^{k-r} (k+r)!}{(r!)^2 (k-r)!}.$$

pour les estimateurs des rapports des L-moments τ_k sont définis par :

$$\tau_k = \frac{l_k}{l_2}, \quad k \geq 3.$$

- l_1 présente la moyenne de l'échantillon
- l_2 présente la différence moyenne de Gini
- τ_3 présente L-skewness
- τ_4 présente L-kurtosis

Exemple 1.2.3 (*Lois uniforme, normale et exponentielle*)

Remarque 1.2.1 *L'existence de L-moment dépend de l'estimation de moment. Alors pour la loi de cauchy, on ne peut pas estimer ces paramètres en utilisant la méthode de moment car l'espérance n'est pas défini. [7]*

Distribution	Uniforme	Normale	Exponentielle
Quantile $Q(u)$	$a + (b - a)u$.	$\mu + \sigma\phi^{-1}(u)$.	$\xi - \lambda \log(1 - u)$.
L-moments	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $\lambda_2 = \frac{1}{6}(b - a)$.	$\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \pi^{-1/2}\sigma$.	$\lambda_1 = \xi + \lambda$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda$.
Rapports des L-moments	$\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$.	$\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0.1226$.	$\tau_3 = \frac{1}{3}$, $\tau_4 = \frac{1}{6}$.
Estimateurs des paramètres		$\hat{\mu} = \hat{\lambda}_1$, $\hat{\sigma} = \pi^{1/2}\hat{\lambda}_2$.	$\begin{cases} \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 - \hat{\xi}, & \text{si } \xi \text{ est connu.} \\ \hat{\lambda} = 2\hat{\lambda}_2, \hat{\xi} = \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}, & \text{si } \xi \text{ est inconnu.} \end{cases}$

TAB. 1.1 – L moments, ses rapports et estimateurs des paramètres pour les distributions de probabilité uniforme, normale et exponentielle.

Diagramme de rapports L-moments

Le diagramme de L-moments est une représentation graphique de L-kurtosis τ_4 en fonction de L-skewness τ_3 pour savoir quelle distribution est adéquate pour un échantillon donné [14]. La figure (1.1) présente le diagramme de rapport de L-moment théorique τ_3 et τ_4 pour quelques distributions de probabilités, pour savoir quelle distribution est adéquate à un échantillon de données, on ajoute les L-moments calculé de cet échantillon l_3 et l_4 dans le même graphe. La figure (1.2) indique un exemple des échantillons simulé de loi exponentielle de paramètre 2.

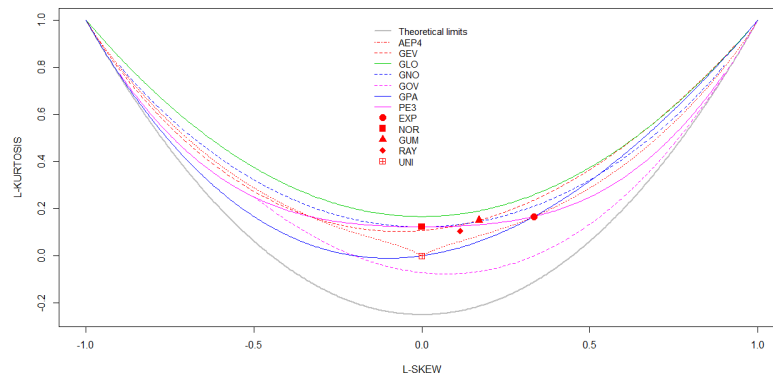


FIG. 1.1 – Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, normale, uniforme, Gumbel, PE3, GOV, GLO et GPA.

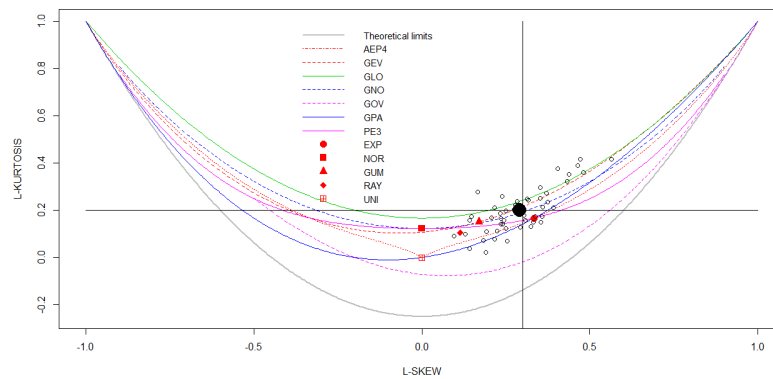


FIG. 1.2 – Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, normale, uniforme, Gumbel, PE3, GOV, GLO et GPA avec les rapports des L-moments empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simulés selon la loi exponentielle

Chapitre 2

L-moments bivariés

On va présenter dans ce chapitre, les L-moments bivariés ou (L-comoments), ses inégalités principales, ainsi que leur représentations en termes des concomitants. On va introduire la matrice des proportions L-comoments et on finit par l'estimation des L-comoments.

2.1 L-comoments : définitions et propriétés

Définition 2.1.1 Soit X un vecteur aléatoire de dimension 2, $X = (X^{(1)}, X^{(2)})'$ ayant une fonction de répartition jointe F avec une moyenne finie, des distributions marginales F_1, F_2 et des séquences L-moments $\{\lambda_k^{(1)}\}, \{\lambda_k^{(2)}\}$. Par analogie avec la représentation de L-moments en fonction de covariance (1.6), nous définissons le $k^{\text{ème}}$ L-comoments $\lambda_{k[12]}$ de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$, ensuite le $k^{\text{ème}}$ L-comoments $\lambda_{k[21]}$ de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$ comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_{k[12]} := \text{Cov} (X^{(1)}, P_{k-1}^* (F_2 (X^{(2)}))) . \\ \lambda_{k[21]} := \text{Cov} (X^{(2)}, P_{k-1}^* (F_1 (X^{(1)}))) . \end{cases}$$

où P_k^* est le polynôme de Legendre déplacé d'après l'équation (1.3).

Exemple 2.1.1 Pour $k = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda_{1[12]} = \text{Cov} (X^{(1)}, F_2 (X^{(2)})) \\ \lambda_{1[21]} = \text{Cov} (X^{(2)}, F_1 (X^{(1)})) \end{cases},$$

pour $k = 2$, on a :

$$\begin{cases} \lambda_{2[12]} = 2Cov(X^{(1)}, F_2(X^{(2)})) \\ \lambda_{2[21]} = 2Cov(X^{(2)}, F_1(X^{(1)})) \end{cases}.$$

Matrice des L-comoments

La matrice des L-comoments est donnée par :

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= (\lambda_{k[ij]})_{1 \leq i, j \leq 2} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{k[11]} & \lambda_{k[12]} \\ \lambda_{k[21]} & \lambda_{k[22]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_k^{(1)} & \lambda_{k[12]} \\ \lambda_{k[21]} & \lambda_k^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= (\lambda_{2[ij]})_{1 \leq i, j \leq 2} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{2[11]} & \lambda_{2[12]} \\ \lambda_{2[21]} & \lambda_{2[22]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & \lambda_{2[12]} \\ \lambda_{2[21]} & \lambda_2^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 (loi normale)

Soit X un vecteur aléatoire de dimension 2, $X = (X_1, X_2)$, qui suit la loi normale, la fonction de densité défini par :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \\ &+ \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \end{aligned} \right] \right\},$$

$$x_1, x_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in [-1, 1]$$

La matrice des premiers L-comoments de loi normale sont données par [13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = (\mu_1, \mu_2), \\ \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_1 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_4 = 0.0742. \end{array} \right.$$

Loi de Pareto (type I, type II) La loi de Pareto est un type particulier de loi de puissance qui a des applications en sciences physiques et sociales. Elle permet notamment de donner une base théorique au <<principe des 80-20>>, aussi appelé principe de pareto¹.

Exemple 2.1.3 (*loi pareto typeI*)

Soit Y un vecteur aléatoire de dimension 2, $Y = (Y_1, Y_2)$, qui suit la loi pareto type I, la fonction de densité défini par :

$$f(y_1, y_2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\sigma_1\sigma_2} \left(\frac{y_1}{\sigma_1} + \frac{y_2}{\sigma_2} - 1 \right)^{-\alpha-2}, \quad y_1 \geq \sigma_1 > 0, y_2 \geq \sigma_2 > 0, \alpha > 0$$

¹Le principe de pareto consiste à dire que dans de nombreux domaines (dans le monde de l'entreprise ou même ailleurs), 80% des effets sont produits 20% par des causes.

La matrice des premiers L-comoments de loi pareto type I sont données par [13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = \left(\frac{\alpha\sigma_1}{\alpha-1}, \frac{\alpha\sigma_2}{\alpha-1} \right), \\ \Lambda_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \begin{pmatrix} \alpha\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \alpha\sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3 = \frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)} \begin{pmatrix} \alpha\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \alpha\sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_4 = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)(4\alpha-1)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \alpha\sigma_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Exemple 2.1.4 (*loi pareto typeII*)

Soit Z un vecteur aléatoire de dimension 2, $Z = (Z_1, Z_2)$, qui suit la loi pareto type II, la fonction de densité défini par :

$$f(z_1, z_2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\sigma_1\sigma_2} \left(\frac{z_1 - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{z_2 - \mu_2}{\sigma_2} + 1 \right)^{-\alpha-2}, \quad z_1 > \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \\ z_2 > \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_2 > 0, \alpha > 0$$

La matrice des premiers L-comoments de loi pareto type II sont données par [13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = \left(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\alpha-1}, \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\alpha-1} \right), \\ \Lambda_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \begin{pmatrix} \alpha\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \alpha\sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3 = \frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)} \\ \Lambda_4 = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)(4\alpha-1)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \alpha\sigma_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

proportions L-comoments

Les proportions L-comoments sont alors :

$$\tau_{k[ij]} = \frac{\lambda_{k[ij]}}{\lambda_2^{(i)}}; \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad k \geq 3.$$

Et les versions de mesures appropriées sont données alors par :

$$\begin{cases} \tau_{k[12]} = \frac{\lambda_{k[12]}}{\lambda_2^{(1)}} \\ \tau_{k[21]} = \frac{\lambda_{k[21]}}{\lambda_2^{(2)}} \end{cases}, \quad k \geq 3.$$

Notation 2.1.1 – $\tau_{k[12]}$ présente L-corrélation de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$.

– $\tau_{k[21]}$ présente L-corrélation de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$.

– pour $k = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_{2[12]} = \lambda_{2[21]}, \\ \tau_{2[12]} = \tau_{2[21]}. \end{cases}$$

– $\tau_{2[12]}$ et $\tau_{2[21]}$, dénotés aussi respectivement $\rho_{[12]}$, $\rho_{[21]}$.

Remarque 2.1.1 1. Pour $X^{(1)} = X^{(2)}$, L-comoments réduit aux L-moments :

$$\lambda_{k[12]} = \lambda_{k[21]} = \lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)}.$$

2. Pour $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ indépendants, $\lambda_{k[12]} = \lambda_{k[21]} = 0, \forall k \geq 2$.

Matrice des proportions des L-comoments

La matrice des proportions L-comoments est donnée par :

$$\Lambda_k^* = (\tau_{k[ij]})_{i,j=1,2} := \begin{pmatrix} \tau_{k[11]} & \tau_{k[12]} \\ \tau_{k[21]} & \tau_{k[22]} \end{pmatrix},$$

Exemple 2.1.5 Pour $k = 2$, on a :

$$\Lambda_2^* := \begin{pmatrix} \tau_{2[11]} & \tau_{2[12]} \\ \tau_{2[21]} & \tau_{2[22]} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1.2 Λ_2^* présente la matrice des proportions des L-covariances.

Exemple 2.1.6 pour $k = 1$, le L-comoment d'ordre 1 est correspond la moyenne de vecteur $\lambda_1 = \mathbb{E} (X^{(1)}, X^{(2)})^t$.

Proposition 2.1.1 ($2^{\text{ème}}$ L-comoment de la somme des variables aléatoires (v.a))

Soit X_1, \dots, X_n des n v.a telque $S = X_1 + \dots + X_n$. Le $2^{\text{ème}}$ L-comoment, noté $\lambda_2(S)$ de la somme des v.a X_1, \dots, X_n est la somme des L-comoments d'ordres 2 et des L-corrélations d'ordres 2.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_2(S) &= 2 \text{Cov}(S, F_S(S)) = 2 \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, F_S(S)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{2[12]}(X_i, S) = \sum_{i=1}^n \rho_{[X_i, S]} \lambda_2(X_i) \end{aligned}$$

Où

$$\rho_{[X_i, S]} = \tau_{2[X_i, S]} = \lambda_{2[X_i, S]} / \lambda_2(X_i)$$

Alors

$$\lambda_2(S) = \sum_{i=1}^n \rho_{[X_i, S]} \lambda_2(X_i).$$

■

Proposition 2.1.2 Soit $(X^{(1)}, X^{(2)})$ couple aléatoire de fonction de répartition jointe F de moyenne finie. Alors, pour $k \geq 2$:

$$\lambda_{k[12]} = \text{Cov}(\mathbb{E}(X^{(1)} \setminus X^{(2)}), F_{k-1}^*(F_2(X^{(2)}))).$$

Corollaire 2.1.1 Soit $(X^{(1)}, X^{(2)})$ couple aléatoire de fonction de répartition jointe F

de moyenne finie. On définit la régression linéaire de $X^{(1)}$ sur $X^{(2)}$ par :

$$\mathbb{E} (X^{(1)} \setminus X^{(2)}) = a + bX^{(2)},$$

telque a et b sont des constantes.

alors

$$\lambda_{k[12]} = b\lambda_k^{(2)}, \quad \forall k \geq 2.$$

Inégalités principales des L-comoments

Ces inégalités sont plus importants pour faciliter de comprendre la notion des L-comoments.

Proposition 2.1.3 On a en général :

$$|\lambda_{2[12]}| = 2 |Cov (X^{(1)}, F_2 (X^{(2)}))| \leq 2Cov (X^{(1)}, F_1 (X^{(1)})) = \lambda_2^{(1)}$$

et

$$-1 \leq \rho_{[12]} \leq +1$$

Remarque 2.1.3 $\rho_{[12]}$ présente L-corrélation de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$.

Corollaire 2.1.2 Pour $k \geq 2$, nous avons :

$$|\tau_{k[12]}| \leq \left| \tau_k^{(1)} \right| \leq 1.$$

2.1.1 L-covariance, L-coskewness et L-cokurtosis

Le 2^{ème} L-comoment et les L-corrélations ont été étudiés par [10], comme Gini covariances et des corrélations Gini. Alors, on définit L-correlation, L-coskewness et L-cokurtosis de la façon suivante :

L-covariance : Une extension de la notion de variance qui mesure la relation linéaire entre deux variables donnée par :

$$\lambda_{2[12]} := 2Cov(X^{(1)}, (F_2(X^{(2)}))),$$

L-coskewness : Une mesure de statistique qui calcule la symétrie de la distribution de probabilité d'une variable par rapport à la symétrie de distribution de probabilité d'une autre variable donnée par :

$$\begin{aligned}\lambda_{3[12]} &= Cov(X^{(1)}, P_2^*(F_2(X^{(2)}))) \\ &= 6Cov\left(X^{(1)}, \left(F_2(X^{(2)}) - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= -6Cov(X^{(1)}, F_2(X^{(2)})(1 - F_2(X^{(2)}))),\end{aligned}$$

L-cokurtosis : Une mesure de statistique qui calcule le degré de sommet de la distribution de probabilité d'une variable par rapport à une autre variable pointue donnée par :

$$\begin{aligned}\lambda_{4[12]} &= Cov(X^{(1)}, P_3^*(F_2(X^{(2)}))) \\ &= Cov\left(X^{(1)}, 20\left(F_2(X^{(2)}) - \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(F_2(X^{(2)}) - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\ &= Cov\left(X^{(1)}, 20F_2^3(X^{(2)}) - 30F_2^2(X^{(2)}) + 12F_2(X^{(2)}) - 1\right).\end{aligned}$$

Cas particulier : $\tau_{3[12]}$ et $\tau_{4[12]}$ sont alors les proportions du coskewness et du cokurtosis de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ respectivement.

2.2 Représentations de $\lambda_{k[12]}$ en termes des concomitants

Soit $\{(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}), 1 \leq i \leq n\}$ un échantillon bivarié de $(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})$ de fonction de répartition jointe F_{12} et des marginales F_1, F_2 . Soit $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, nous appelons l'élément de $\{X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}\}$ qui liée à $X_{r:n}^{(2)}$ le concomitant $X_{[r:n]}^{(12)}$ de $X_{r:n}^{(2)}$ [3]. Il est clair que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_{[r:n]}^{(12)} \right) &= n \mathbb{E} \left(X_1^{(1)} \setminus X_1^{(2)} = X_{r:n}^{(2)} \right) \\ &= n \binom{n-1}{r-1} \mathbb{E} \left(X^{(1)} [F_2(X^{(2)})]^{r-1} [1 - F_2(X^{(2)})]^{n-r} \right); r \leq n. \end{aligned}$$

cela conduit une nouvelle représentation de L-comoments.

Proposition 2.2.1 *Le $k^{\text{ème}}$ L-comoment de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ peuvent être représenter comme :*

$$\lambda_{k[12]} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \mathbb{E} \left(X_{[k-j:k]}^{(12)} \right).$$

d'après l'équation (1.7), on obtient la formule suivante :

$$\lambda_{k[12]} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \omega_{r:n}^{(k)} \mathbb{E} \left(X_{[r:n]}^{(12)} \right), \quad \forall k \geq 2.$$

2.3 Estimation des L-comoments

Avant estimer des L-comoments, on va donner quelques définitions pour U-statistique, L-statistique et de moyenne de Gini de la façons suivante :

U-statistique

Définition 2.3.1 *Soit une fonction $\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que T une fonctionnelle de moment*

donnée par :

$$T(F) = \mathbb{E}_F(\Phi(X_1, \dots, X_k)) = \int \Phi(x_1, \dots, x_k) dF(x_1) \dots dF(x_k)$$

On peut supposer Φ symétrique en les coordonnées. La U^2 -statistique est un estimateur sans biais de T donnée par :

$$U = \binom{n}{k}^{-1} \sum \dots \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}).$$

L-statistique

Définition 2.3.2 Soient X_1, \dots, X_n un échantillon d'une loi F et $X(\cdot)$ le vecteur des statistiques d'ordre associé. Soient a_1, \dots, a_n n réels. On appelle L^3 -statistique définie par les poids a_1, \dots, a_n la statistique T_n donnée par :

$$T_n = \sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}.$$

Moyenne de Gini

Définition 2.3.3 La moyenne de Gini est l'indicateur le plus simple pour résumer l'information fournie par un ensemble de données statistiques, elle est égale à la somme de ces données divisée par leur nombre càd :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 2.$$

Remarque 2.3.1 On peut donc être calculée en ne connaissant que ces deux éléments, sans connaître toute la distribution. En utilisant la **proposition (2.2.1)**, on obtient un

²U est un abréviation de terme «Unbiased»

³L est un abréviation de terme «Linear»

estimateur sans biais du $k^{\text{ème}}$ L-comoment :

$$\hat{\lambda}_{k[12]} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \omega_{r:n}^{(k)} X_{[r:n]}^{(12)}; \quad k \geq 2 \quad (2.1)$$

qui est une L-statistique des concomitants. En outre, chaque $\hat{\lambda}_{k[12]}$ est une U-statistique, telle que

$$\lambda_{k[12]} = \mathbb{E} \left(h^{(k)} \left(\left(X_1^{(1)}, X_1^{(2)} \right), \dots, \left(X_K^{(1)}, X_K^{(2)} \right) \right) \right),$$

Où

$$h^{(k)} \left(\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)} \right), \dots, \left(x_K^{(1)}, x_K^{(2)} \right) \right) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} x_{[k-j:k]}^{(12)}. \quad (2.2)$$

Pour un noyau h^4 avec des arguments bivariés qui est une combinaison linéaire des concomitants, les U-statistiques correspondantes basée sur un échantillon de taille n peuvent-être exprimés comme une combinaison linéaire des concomitants. Ainsi la U-statistique basée sur le noyau (2.1) s'avère conforme à la représentation de la L-statistique donnée par (2.2).

Exemple 2.3.1 Pour $k = 2$, on a

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{2[12]} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{2r - n - 1}{n - 1} X_{[r:n]}^{(12)} \\ &= \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(X_{[j:n]}^{(12)} - X_{[i:n]}^{(12)} \right) / 2. \end{aligned}$$

La représentation de la U-statistique ne peut-être exprimé en tant que moitié de la différence moyenne de Gini des concomitants, car le noyau des concomitants $\left(x_{[2,2]}^{(12)} - x_{[1,2]}^{(12)} \right) / 2$ n'est pas le même que le noyau $\left| x_{[2,2]}^{(12)} - x_{[1,2]}^{(12)} \right| / 2$ de la différence moyenne de Gini.

Remarque 2.3.2 Une caractéristique importante de L-comoments est qu'ils n'ont pas besoin d'être symétriques, càd, $\hat{\lambda}_{k[12]} \neq \hat{\lambda}_{k[21]}$.

⁴Un noyau h est une fonction de pondération

Chapitre 3

L-comoments en termes des copules

Dans ce dernier chapitre, on va travailler sur les L-comoments en termes des copules. D'abord, on va introduire la notion des copules particulièrement les copules bivariées. Ensuite, on s'intéresse aussi aux L-comoments en terme de copule bivariée. Finalement, on fournit quelques exemples sur la Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern.

3.1 Copules : définitions

Les copules (copulas) sont des fonctions qui couplent les fonctions de répartition multivariées avec les fonctions de répartition univariées (lois marginales). Copula qui signifie la fonction de dépendance. Il a utilisé en mathématique par **Sklar** (1959) [12] dans le théorème qui porte son nom.

Définition 3.1.1 Soit $(X^{(1)}, X^{(2)})$ un couple de variables aléatoires ayant une loi jointe $F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}$, défini par :

$$F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X^{(1)} \leq x_1, X^{(2)} \leq x_2).$$

avec les lois marginales

$$\begin{cases} F_{X^{(1)}}(x_1) = F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}(x_1, \infty). \\ F_{X^{(2)}}(x_2) = F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}(\infty, x_2). \end{cases}$$

Remarque 3.1.1 Si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont indépendants alors :

$$\begin{aligned} F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X^{(1)} \leq x_1) \mathbb{P}(X^{(2)} \leq x_2) \\ &= F_{X^{(1)}}(x_1) F_{X^{(2)}}(x_2). \end{aligned}$$

3.1.1 Copules bivariées

Définition 3.1.2 On appelle copule bivariée toute fonction C définie de $\mathbb{I}^2 = [0, 1]^2$ dans \mathbb{I} vérifiant les propriétés suivantes :

i) La copule C est attachée, c'est à dire

$$C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{I}. \quad (3.1)$$

ii) Les marges sont uniformes, c'est à dire

$$C(u_1, 1) = u_1 \text{ et } C(1, u_2) = u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{I}. \quad (3.2)$$

iii) La copule C est 2-croissantes : $\forall u'_1, u'_2, u''_1, u''_2 \in \mathbb{I}$, telle que $u'_1 \leq u''_1$ et $u'_2 \leq u''_2$

$$C(u''_1, u''_2) - C(u''_1, u'_2) - C(u'_1, u''_2) + C(u'_1, u'_2) \geq 0. \quad (3.3)$$

Définition 3.1.3 Une copule C bivariée définie sur \mathbb{I}^2 est une fonction de répartition jointe et dont les marginales $F_{X^{(1)}}$ et $F_{X^{(2)}}$ sont uniformes sur \mathbb{I} .

Exemple 3.1.1 On a la copule produit et la copule min :

– **Copule produit** : La copule produit, noté Π est définie par :

$$C(u_1, u_2) = \Pi(u_1, u_2) = u_1 u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{I}. \quad (3.4)$$

– **Copule min** : la copule min, noté M , est définie par :

$$M(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{I}. \quad (3.5)$$

Théorème de Sklar

Ce théorème a été développé par Sklar (1959) [12] et porte son nom, défini par le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Soient $X^{(1)}, X^{(2)}$ deux v.a de fonction de répartition jointe F , et des marginales $F_{X^{(1)}}$ et $F_{X^{(2)}}$, supposons que $F_{X^{(1)}}$ et $F_{X^{(2)}}$ sont continues, alors il existe une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ appelle fonction copule (copula), telle que*

$$F(x_1, x_2)_{(X^{(1)}, X^{(2)})} = C(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2)), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

et cette représentation est unique

$$\begin{cases} u_1 = F_{X^{(1)}}(x_1); & u_2 = F_{X^{(2)}}(x_2) \\ x_1 = F_{X^{(1)}}^{-1}(u_1); & x_2 = F_{X^{(2)}}^{-1}(u_2) \end{cases}$$

$$C(u_1, u_2) = F(F_{X^{(1)}}^{-1}(u_1), F_{X^{(2)}}^{-1}(u_2))_{(X^{(1)}, X^{(2)})}, \quad \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2. \quad (3.6)$$

qui appelle "fonction de dépendance"

Remarque 3.1.2 *Si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont indépendants :*

$$C(u_1, u_2) = F_{X^{(1)}}(F_{X^{(1)}}^{-1}(u_1)).F_{X^{(2)}}(F_{X^{(2)}}^{-1}(u_2)) = u_1.u_2$$

qui appelle <<'copule de dépendance', 'copule produite' ou 'product copula'>>.

Exemple 3.1.2 Soit $(X^{(1)}, X^{(2)})$ un couple de variables aléatoires ayant une loi jointe

$F_{(X^{(1)}, X^{(2)})}$ défini par :

$$F(x_1, x_2)_{(X^{(1)}, X^{(2)})} = \exp \left\{ - \left[(x_1 + x_2) - (x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \right] \right\}, \forall (x_1, x_2) \in [0, \infty[\times [0, \infty[, \theta > 0.$$

et admet pour marginales

$$F(x_1) = \exp(-x_1), \quad F(x_2) = \exp(-x_2),$$

nous avons

$$F^{-1}(u_1) = -\ln(u_1), \quad F^{-1}(u_2) = -\ln(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

d'après l'équation (3.6) la copule associée est exprimée comme suit :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ - \left[-\ln(u_1^{-\theta}) + \left(-\ln(u_2)^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right] \right\}, \forall \theta \geq 1.$$

C'est la copule de Galambos [4].

3.2 Densité de copule

Définition 3.2.1 Soient $X^{(1)}, X^{(2)}$ deux variables aléatoires continues. Soit f la fonction de densité jointe de F , $f_{X^{(1)}}$ et $f_{X^{(2)}}$ sont les fonctions de densités marginales de $X^{(1)}, X^{(2)}$ respectivement. La densité $c(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2))$ associée à la copule $C(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2))$

est définie par :

$$\begin{aligned} c(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2)) &= \frac{\partial^2 C(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2))}{\partial F_{X^{(1)}}(x_1) \partial F_{X^{(2)}}(x_2)} \\ &= \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1) f(x_2)}. \end{aligned}$$

D'après le **Théorème de Sklar (3.1.1)**, on donne la représentation canonique suivante :

$$f(x_1, x_2) = c(F_{X^{(1)}}(x_1), F_{X^{(2)}}(x_2)) f(x_1) f(x_2)$$

3.2.1 L-comoments en terme de copule bivariée :

Rho de Spearman

Définition 3.2.2 Rho de spearman est une mesure d'association, notée ρ qui vérifie :

$$\rho = 12 \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3$$

Remarque 3.2.1 La valeur de ρ compris entre $[-1, 1]$

Définition 3.2.3 Le $k^{\text{ème}}$ L-moments de copule bivariée est défini par :

$$\delta_{k[12]} = \text{cov}(F_1(X^{(1)}), P_k(F_2(X^{(2)}))), k \geq 1,$$

telque $P_k(u)$ est le polynôme de legendre déplacé.

Exemple 3.2.1 *Les trois premiers L-moments de copule bivariée sont :*

$$\begin{aligned}\delta_{1[12]} &= 2cov (F_1 (X^{(1)}), F_2 (X^{(2)})), \\ \delta_{2[12]} &= -6cov (F_1 (X^{(1)}), F_2 (X^{(2)} (1 - F_2 (X^{(2)}))), \\ \delta_{3[12]} &= cov \left(\begin{array}{c} F_1 (X^{(1)}), 20F_2^3 (X^{(2)}) - 30F_2^2 (X^{(2)}) \\ +12F_2 (X^{(2)}) - 1 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Théorème 3.2.1 *Le $k^{\text{ème}}$ L-moments de copule bivariée de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ est défini par :*

$$\delta_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_k(u_2), \forall k \geq 1$$

ou

$$\delta_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} u_1 P_k(u_2) dC(u_1, u_2), \forall k \geq 1.$$

pour $k = 1$

$$\delta_{1[12]} = \delta_{1[21]} = \rho/6$$

D'après le système des équations (1.4), on obtient les trois premiers L-moments de copule

bivariée de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1[12]} &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_1(u_2), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 d(2u_2 - 1), \\
 &= 2 \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 2 \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 du_1 du_2, \\
 &= 2 \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2}. \\
 \delta_{2[12]} &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_2(u_2), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 d(6u_2^2 - 6u_2 + 1), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 d(6u_2^2 - 6u_2 + 1) - \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 du_1 d(6u_2^2 - 6u_2 + 1), \\
 &= 6 \left[\int_{\mathbb{I}^2} 2u_2 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 \right] \\
 &\quad - 6 \left[2 \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2^2 du_1 du_2 - \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 du_1 du_2 \right], \\
 &= 6 \int_{\mathbb{I}^2} (2u_2 - 1) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right), \\
 &= 6 \int_{\mathbb{I}^2} (2u_2 - 1) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \delta_{3[12]} &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_3(u_2), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 d(20u_2^3 - 30u_2^2 + 12u_2 - 1), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 d(20u_2^3 - 30u_2^2 + 12u_2 - 1) - \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 du_1 d(20u_2^3 - 30u_2^2 + 12u_2 - 1), \\
 &= \left[\begin{aligned} &60 \left(\int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) u_2^2 du_1 du_2 \right) - 60 \left(\int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) u_2 du_1 du_2 \right) \\ &+ 12 \left(\int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 \right) \end{aligned} \right] \\
 &- \left[\begin{aligned} &60 \left(\int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2^3 du_1 du_2 \right) - 60 \left(\int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2^2 du_1 du_2 \right) \\ &+ 12 \left(\int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 du_1 du_2 \right) \end{aligned} \right], \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (60u_2^2 - 60u_2 + 12) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \left[\frac{60}{8} - 10 + 3 \right], \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (60u_2^2 - 60u_2 + 12) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le théorème de sklar(3.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta_{k[12]} &= \text{cov} (F_1 (X^{(1)}), P_k (F_2 (X^{(2)}))), \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} F_{12} (F_1 (x^{(1)}), F_2 (x^{(2)})) - F_1 (x^{(1)}) F_2 (X^{(2)}) dF_1 (x^{(1)}) dP_k (F_2 (X^{(2)})) \\
 &= \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_k(u_2)
 \end{aligned}$$

Alors

$$\delta_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_k(u_2).$$

■

3.3 Copules de Farlie-Gumbel-Morgenstern

La Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern (F-G-M) est définie pour $|\alpha| \leq 1$ par :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2, \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1.$$

avec $\bar{u}_j := 1 - u_j, j = 1, 2$. Dont la densité est :

$$c_\alpha(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1 - 2u_2 + 4u_1 u_2),$$

Johnson et Kotz [9] ont présenté la famille de copule F-G-M multi-paramétrique, pour

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ comme suit :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \sum_{j=1}^r \alpha_j (u_1 u_2)^{[j/2]+1} (\bar{u}_1 \bar{u}_2)^{[j/2+\frac{1}{2}]},$$

où $[z]$ est la partie entière de z . Pour $r = 2$, on obtient la copule avec deux paramètres :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \alpha_1 \bar{u}_1 \bar{u}_2 + \alpha_2 u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2).$$

telle que les paramètres (α_1, α_2) sont définie dans la région :

$$\mathcal{R} := \left\{ (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha| \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1, \alpha_2 \leq 1/2 \left[3 - \alpha_1 + (9 - 6\alpha_1 - 3\alpha_1^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

La corrélation maximale ρ_{FGM}^{\max} et la corrélation minimale ρ_{FGM}^{\min} pour cette famille sont :

$$\rho_{FGM}^{\max} = 0.42721, \text{ pour } (\alpha_1, \alpha_2) = \left(-1 + \frac{7}{\sqrt{13}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\rho_{FGM}^{\min} = -1/3, \text{ pour } (\alpha_1, \alpha_2) = (-1, 0).$$

pour $r = 3$, la copule avec trois paramètres est donnée par :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(u_1, u_2) = u_1 u_2 \left(1 + \alpha_1 \bar{u}_1 \bar{u}_2 + \alpha_2 u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2 + \alpha_3 u_1 u_2 (\bar{u}_1 \bar{u}_2)^2 \right).$$

– le premier L-moment de copule FGM C_α est $\delta_{1[12]} = \alpha/18$.

– Les deux premiers L-moments de la copule FGM C_{α_1, α_2} sont :

$$\begin{cases} \delta_{1[12]} = \frac{\alpha_1}{18} + \frac{\alpha_2}{72}, \\ \delta_{2[12]} = \frac{\alpha_2}{120}, \end{cases}$$

– Les trois premiers L-moments de la copule FGM $C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ sont :

$$\begin{cases} \delta_{1[12]} = \frac{\alpha_1}{18} + \frac{\alpha_2}{72} + \frac{\alpha_3}{450}, \\ \delta_{2[12]} = \frac{\alpha_2}{120}, \\ \delta_{3[12]} = \frac{-\alpha_3}{1050}. \end{cases}$$

Remarque 3.3.1 *Le système des équations correspondants aux nombres des paramètres k , pourrait être estimé en conséquence à $\delta_{k[12]}$, $k = 1, 2, 3, \dots$*

3.3.1 Copules Archimédiennes

La famille de copule archimédienne est une copule de la classe importante des modèles de copule qui contient Gumbel, Clayton, Frank. Dans le cas bivarié, la copule archimédienne est définie par :

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$$

où $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable appelée générateur vérifiant :

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(x) < 0, \quad \varphi''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Exemple 3.3.1 *La Copule de Gumbel (1960) : C'est une copule asymétrique. Elle est définie par :*

$$C_{\beta}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^{\beta} + (-\ln u_2)^{\beta}\right]^{1/\beta}\right), \beta \geq 1$$

et dont le générateur

$$\varphi_{\beta}(t) = (-\ln t)^{\beta}.$$

– si $\beta \rightarrow 1$ alors $C_{\beta}(u_1, u_2) \rightarrow \Pi(u_1, u_2)$ (3.4).

– si $\beta \rightarrow \infty$ alors $C_{\beta}(u_1, u_2) \rightarrow M(u_1, u_2)$ (3.5).

La copule de Gumbel à deux paramètres est définie par :

$$C_{\beta_1, \beta_2}(u_1, u_2) := \left(\left(\left(u_1^{-\beta_2} \right)^{\beta_1} + \left(u_2^{-\beta_2} \right)^{\beta_1} \right)^{1/\beta_1} + 1 \right)^{-1/\beta_2}, \beta_1 \geq 1; \beta_2 \geq 0.$$

avec le générateur

$$\varphi_{\beta_1, \beta_2}(t) := (t^{-\beta_2} - 1)^{\beta_1}.$$

d'après le théorème (3.2.1), on obtient les deux premiers L-moments de copule bivarié correspondent à C_{β_1, β_2}

$$\begin{aligned} \delta_{1[12]} &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (C_{\beta_1, \beta_2}(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2, \\ \delta_{2[12]} &= 6 \int_0^1 \int_0^1 (2u_2 - 1) (C_{\beta_1, \beta_2}(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.2 *Dans ce cas, on ne peut pas donner des formules explicites en termes de $\{\delta_{1[12]}, \delta_{2[12]}\}$ pour les paramètres $\{\beta_1, \beta_2\}$, Alors on résolve le système précédent par des méthodes numériques.*

Remarque 3.3.3 *Il existe des autres copules usuelles tels copule d'indépendance, copule gaussienne et la copule de student.*

Conclusion

Plusieurs applications de la théorie des L-moments ont été faites, tant pour l'estimation des paramètres, le choix de la meilleure distribution que dans les études de régionalisation. De nombreuses études rappellent un des avantages théoriques des L-moments suivants :

- Pour que les distributions de probabilité des L-moments soient significatives, nous exigeons seulement que la distributions à un moyenne finie. Aucun moment d'ordre élevé ne doit être fini[8].
- Pour que les erreurs standards des L-moments soient finies, nous exigeons seulement que la distributions ait une variance finie.

De plus le diagramme des L-moments peut éliminer l'information issue d'une observation extrême qui est considérée comme étant aberrante, alors qu'il s'agit d'une information très précieuse si elle est réelle.

Les L-comoments ou L-moments bivariés est une extension de L-moments univariés qui maintient les mêmes caractéristiques des L-moments et inclut des notions analogues aux moments centraux classiques de la covariance, du coskewness et du cokurtosis.

Les L-comoments sont développés par **Serfling** et **Xiao** (2006) [11] est une généralisation du cas univarié pour étendre les mêmes propriétés et application dans l'analyse statistique bivarié. Parmi les inconvénients de L-moments est l'absence de cette mesure pour quelques distributions comme la loi de cauchy.

Bibliographie

- [1] Arnold C. Barry et al. (1992). A First Course in Order Statistics.
- [2] Brahim, B. et al. (2014). Copula représentation of bivariate L-moments : a new estimation method for multiparametr two-dimensional copula models.
- [3] David, H. A. et Nagaraja, H. N. (2003). Order Statistics.
- [4] Galambos, J. (1975). Order Statistics from sample from multivariate distribution.
- [5] Greenwood et al. (1979). Probability weighted moments : definitions and relation to parameters of several distributions expressable in inverse form.
- [6] Greis, N. P. et Wood, E. F. (1981). Regional flood frequency estimation and network design.
- [7] Hosking, J. R. M. et Wallis, J. R. (1955). Regional Frequency Analysis : An Approach Based on L- Moment.
- [8] Hosking, J. R. M. et Wallis. J .R. (1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using lineair combinations of statistics, Royal Statistical Society.
- [9] Johnson, NL. , Kotz, S. (1977). On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution-II : regression, correlation and further generalization.
- [10] Olkin, I. et Yitzhaki, S. (1992). Gini regression analysis.
- [11] Robert, S. et Peng, X. (2006). A Contribution to Multivariate L-Moments : L-Comoment Matrices.
- [12] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges.

- [13] Tereza, S, (2017). Statistical Inference Based on L-Moments.
- [14] William, H. Asquith. (2011). Distributional Analysis with L-moment statistics Using R Environment for Statistical Computing.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

(X_1, \dots, X_n)	échantillon de taille n de v.a's.
$(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$	Statistique d'ordre associé à un échantillon (X_1, \dots, X_n) .
ρ	Rho de Spearman.
ρ^{\max}	La corrélation maximale.
ρ^{\min}	La corrélation minimale.
$v.a$	variable aléatoire.
$i.i.d$	independantes identiquement distribuées.
\mathbb{I}	$[0, 1]$
$\mathbb{E}(X)$	Espérance de X .
$Cov(X, Y)$	Covariance de X et Y .
ssi	si seulement si
al	autre.
μ	la moyenne théorique.
σ	l'écart type.

c-à-d	c'est à dire.
ϕ	Fonction de loi normale standard.
φ, φ^{-1}	Le générateur et la fonction inverse de φ .
<i>PE3</i>	Loi de Pearson Type III.
<i>EXP, NOR, UNI et GUM</i>	Lois exponentielle, normale, uniforme et gumbel.
$\lambda_{k[12]}$	Le $k^{\text{ème}}$ L-comoment.
$\hat{\lambda}_{k[12]}$	L'estimateur sans biais du $k^{\text{ème}}$ L-comoment.
$\delta_{k[12]}$	Le $k^{\text{ème}}$ L-moments de copule bivariée.
α, β et θ	Paramètres de dépendance de la copule.
<i>C, c</i>	Copule et densité de copule.
λ_k	$k^{\text{ème}}$ L-moments.
τ_k	$k^{\text{ème}}$ rapports de L-moments.
Λ_k, Λ_k^*	Matrice des L-comoments et des proportions.
<i>GOV</i>	Loi de Govindarajulu.
<i>AEP1</i>	Loi d'exponentielle asymétrique de puissance 1.
<i>GNO</i>	Loi de Normale généralisé.
<i>RAY</i>	Loi de Rayleigh.
<i>L - CV</i>	L-variation.
<i>PWM</i>	Moments de probabilité pondérés.
P_k^*	Le polynôme de legendre déplacé.
Π, M	Copules produit et min.
<i>F-G-M</i>	Farlie-Gumbel-Morgenstern.
<i>GLO</i>	Loi logistique généralisée.
<i>GEV</i>	Loi de valeurs extrême généralisé.
<i>GPA</i>	Loi de pareto généralisé.