République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BEN HAMED Redouane

Titre :

Espace de Sobolev en dimension un

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**SOUKEUR Abdesselam**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LAIADI Abdelkader**	UMKB	Président
Dr.	**SENOUCI Assia**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

À ma famille, à mes amis

À les enfants de Gaza

REMERCIEMENTS

"Celui qui ne remercie pas les gens.Ne remercie pas Allah."

Le Prophète MOHAMED

Je glorifie Allah le tout puissant de m'avoir donné la volonté, la force et la patience qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Je veux exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur **SOUKEUR Abdesselam** pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de m'encadrer et de me proposer un sujet extrêmement parfait. Je Le remercier profondément, pour ses conseils avisés, leur encouragements, sa patience, ses multiples relectures et le meilleur encadrement possible qu'il m'a offert.

Avec un grand honneur, j'aimerais présenter mes remerciements et ma gratitude aux membres du jury, Monsieur **LAIADI Abdelkader** et madame **SENOUCI Assia** d'avoir examiner et évaluer mon travail.

Je n'oublie pas de remercier mes enseignants, surtout Monsieur **Brahim REZKI**, Monsieur **Zouhir MOKHTARI,** et Monsieur **Nadjib HAFADI.**

Je tiens également à remercier chaleureusement mon frère **SMAIL**, mes amis **SOHEIB** et **MONTASSAR**, et ma petite nièce **SABRINA.**

Table des matières

Introduction

La définition d'un espace de *Sobolev* consiste à l'aide de la dérivée faible.

Ces espaces (de *Sobolev*) sont complets, ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux *dérivées partielles,* car la théorie de distribution n'affirme pas qu 'une fonction u et sa dérivée au sens de distribution sont dans le même espace, mais dans les espaces de *Sobolev* ; si une fonction u appartient à l'espace de *Lebesgue* $L^p(I)$ ou $L^p(\Omega)$ (I partie non vide de $\mathbb{R}$ et Ω partie non vide de $\mathbb{R}^n$), alors sa dérivée appartient à le même espace (u et $u' \in L^p(I)$ ou $L^p(\Omega)$ au même temps).

Ce travail est dévisé en deux chapitrtes ; dans le premier on étudie les espaces L^p avec $1 \leq p \leq \infty$ et leurs proprietés, on précise l'espace L^2 parce qu 'il est important pour définir l'espace de *Sobolev*, on présente aussi quelques théorèmes fondamentaux pour l'utiliser surtout dans les démonstrations .

Le deuxiéme chapitre est le principal dans ce travail ; on présente les principaux résultats concernant les espaces de *Sobolev*, on commence par définir formellement les espaces de *Sobolev*, on définit les espaces $W^{1,p}(I), W^{m,p}(I)$ et $W_0^{1,p}(I)$, et on donne les proprietiés de chaque espace avec bien sûr des théorèmes ,propositions et résultats liés à chacun.

Considérons le probleme suivant .Étant donné $f \in C\left([a,b]\right)$

Trouver une fonction $u(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Une solution classique (*fort*) du probleme (1) est une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ vérifiant (1) au *sens usuel.*

Bien entendu (1) peut être résolu explicitement par un calcul simple , mais nous ignorerons cet aspect des choses afin d'illustrer la méthode sur cet exemple élémentaire.

On multiplie (1) par $\varphi \in C^1([a,b])$ et on intègre par partie ; il vient :

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall\varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{2}$$

On notera que (2) a un sens dés que $u \in C^1([a,b])$ (par contre à (1) qui suppose u deux fois dérivable) ; en fait il suffirait même d'avoir $u, u' \in L^1(a,b)$, u' en un sens à préciser.

Disons (provisoirement) qu'une foncion u de classe C^1 qui vérifie (2) est une solution **faible** de (1) .

On précise la notion de solution faible ; celle-ci fait intervenir les espaces de *Sobolev* qui sont les outils de base .

Chapitre 1

Introduction sur les Espaces $\mathbf{L}^p$

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques rappels sur les espaces L^p ;les espaces réflexifs,les espaces séparables et les espaces de Hilbert, afin de faciliter l'étude de l'espace de *Soblov* .

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

I désigne un interval de $\mathbb{R}$.

1.1 Définition et proprietés élémentaires

Définition 1.1.1 *On définit l'espace $L^1(\Omega)$ par :*

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)| < \infty \right\}.$$

Posons : $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\,dx$ ou $\|.\|$ désigne une norme.

Définition 1.1.2 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$.*

On note et on définit un espace L^p comme suite :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note $\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$.

L'espace L^p satisfait les proprietées suivante :

$i)$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \in L^p(\Omega)$ alors $\alpha f \in L^p(\Omega)$.

$ii)$ Si $f, g \in L^p(\Omega)$ alors $|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ et de plus on a : $f+g \in L^p(\Omega)$.

Pour montrer cette proprietée on utilise la convexité.

Rappelons que si f est une fonction convexe alors :

$$\forall \alpha, \beta \in [0,1], \forall x, y \in \Omega, f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \alpha + \beta = 1$$

On sait que la fonction t^n est convexe sur $[0, +\infty[$.

Donc $|\alpha f + \beta g|^p \leq \alpha |f|^p + \beta |g|^p$.

On choisit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

On obtient :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p |f+g|^p \leq \frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p).$$

Multiplions par 2^p il vient :

$$|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p).$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire valide pour $p \geq 1$ $(i.e \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|)$.

Définition 1.1.3 *On pose :*

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f$ *mesurable et* $\exists$ *une constante* C *telle que* $|f(x)| \leq C$ *p.p.sur* $\Omega\}$.

Remarque 1.1.1 *Si* $f \in L^\infty$ *on a :*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \quad p.p. \ sur \ \Omega.$$

En effet :

Il existe une suite C_n *telle que* $C_n \longrightarrow \|f\|_{L^\infty}$, *et pour chaque* n, $|f(x)| \leq C_n$ *p.p. sur* Ω.

Donc $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E_n$, *avec* E_n *négligeable.*

On pose $E = \underset{n}{\cup} E_n$.

Alors E *est négligeable et on a* $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* n *et pour tout* $x \in \Omega \backslash E$.

Par coséquent $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E$.

Notation 1.1.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *.*

On désigne par q *l'exposant conjugué de* p *,* $(i.e.\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Théorème 1.1.1 *(Inégalité de Hölder)*

Soit $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.

Alors : $f.g \in L^1$ *et :*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.1}$$

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ et $p = \infty$.

Supposons donc que $1 < p < \infty$.

Rappelons l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \qquad \forall a \geq 0 \ \ \forall b \geq 0. \tag{1.2}$$

La démonstration de (1.2) :

La fonction log étant concave sur $]0, \infty[$ $(i.e.\ (\log)'' < 0)$.

On a :

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab.$$

Donc :

$$|f(x)|\, |g(x)| \leq \frac{1}{p} \, |f(x)|^p + \frac{1}{q} \, |g(x)|^q \quad p.p. \quad x \in \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q. \tag{1.3}$$

Remplaçant dans l'inégélité (1.3) la fonction f par $\lambda f \quad (\lambda > 0)$.

Il vient :

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q. \tag{1.4}$$

On choisit : $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{q/p}$

Remplaçant la valeure de λ dans (1.4) on obtient alors (1.1) ■

Théorème 1.1.2 *(Inégélité de Minkowski)*

Soit $f, g \in L^p$ *et soit* $1 \leq p \leq \infty$ *alors :*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Preuve. Si $f + g = 0$ le résultat est évident.

Si $f + g \neq 0$ alors :

On considère l'égalité :

$$|f + g|^p = |f + g|.|f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}.$$

et on integre sur Ω

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f + g|^p dx &\leq \int_\Omega [(|f| + |g|)\, |f + g|^{p-1}] dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|\, |f + g|^{p-1} \,\|_{L^q} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\| \mid f+g \mid^{p-1} \|_{L^q} = \left(\int_\Omega \mid f+g \mid^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

On obtint :

$$\left(\int_\Omega \mid f+g \mid^p dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

■

Théorème 1.1.3 *L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidente (d'après la **remarque 1.1.1**).

Supposont que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p$.

On a :

$$\mid f(x) + g(x) \mid^p \leq (\mid f(x) \mid + \mid g(x) \mid)^p \leq 2^p(\mid f(x) \mid^p + \mid g(x) \mid^p).$$

Par conséquent :

$$f + g \in L^p.$$

D'autre part on a :

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \leq \int |f+g|^{p-1} |f| + \int |f+g|^{p-1} |g|$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q$.

Et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p}$$

$$(i.e. \|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}).$$

■

Définition 1.1.4 *(Espace de Banach)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|.\|$.

On dit que E est un espace de Banach si E est complet.

Théorème 1.1.4 *(Théorème de la convergence monotone de Beppo Levi)*

Soit (f_n) une suite croissante positive de fonctions de L^1, (i.e. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$) telle que $\sup\limits_n \int f_n < \infty$.
Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$.

De plus on a : $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.1.5 *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve. 1)Sopposons d'abord que $p = \infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞.

Étant donné un entier $k \geq 1$, il existe N_k tel que :

$$\|f_m - f_n\|_{L\infty} \leq \frac{1}{k} \text{ pour } m, n \geq N_k.$$

Donc il existe E_k négligeable tel que

$$\mid f_m(x) - f_n(x) \mid \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \ \forall m, n \geq N_k. \tag{1.5}$$

Enfin, posons $E = \cup_k E_k$ (E est négligeable)

On voit que pour tout $x \in \Omega \setminus E$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

Soit $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour $x \in \Omega \setminus E$.

Passant à la limite dans (1.5) quand $m \longrightarrow \infty$ on obtient :

$$\mid f(x) - f_n(x) \mid \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \ \forall n \geq N_k,$$

Donc :

$$f \in L^\infty,$$

Et :

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k,$$

Par conséquent :

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \longrightarrow 0.$$

2)Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p.

Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p.

On extrait une sous-suite (f_{n_k}) tel que :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

[On procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ pour $m, n \geq n_1$,

On prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$ pour $m, n \geq n_2$, etc].

On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p.

Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a :

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1. \tag{1.6}$$

Posant $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mid f_{k+1} - f_k \mid$,

Il vient :

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1.$$

On déduit du théorème de convergence monotone que $p.p.$ sur Ω, g_n converge vers une limite finie noteé $g(x)$ avec $g \in L^p$.

D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$\mid f_m(x) - f_n(x) \mid \leq \mid f_m(x) - f_{m-1}(x) \mid +... \mid f_{n+1}(x) - f_n(x) \mid \leq g(x) - g_{n-1}(x),$$

Il en résult que $p.p.$ sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite noteé $f(x)$.
On a aussi $p.p.$sur Ω :

$$\mid f(x) - f_n(x) \mid \leq g(x) \quad \text{pour} \quad \text{n} \geq 2. \tag{1.7}$$

Il en résult que $f \in L^p$.

Enfin :

$$\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0,$$

En effet :

On a

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid^p \longrightarrow 0 \quad p.p,$$

et$\mid f_n(x) - f(x) \mid^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable.

On conclut grâce au théorème de Lebesgue. ■

1.2 Espaces réflexifs

Définition 1.2.1 *On a une injection canonique* $J : E \longrightarrow E''$ *définie comeme suit :*
Soit $x \in E$ *fixé.*
L'application $f \longmapsto (f, x)$ *de* E' *dans* $\mathbb{R}$ *constitue une forme linéaire continue sur* E'*, i.e. un élément de* E'' *noté* Jx*.*
On a donc $(Jx, f)_{E'',E'} = (f, x)_{E',E} \quad \forall x \in E \ , \forall f \in E'$

Définition 1.2.2 *Soit E un espace de Banach, E'son dual (topologique) et E'' son bidual (c'est-à-dire le dual topologique de E').*

Soit J l'injection canonique de E dans E''.

On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.

Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E'' à l'aide de l'isomorphisme J.

Remarque 1.2.1 *Il est essentiel d'utiliser J dans la définition précédente .*

Proposition 1.2.1 *Soit E un espace de Banach, et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé ;*

M muni de la norme induit par E,

Alors M est réflexif.

La démonstration de proposition basée sur la topologie faible.

Voir[1].

Corollaire 1.2.1 *Soit E un espace de Banach.*

Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.

Théorème 1.2.1 *L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

La démonstration de ce théorème est décomposée en trois étapes :

Voir[1].

1.3 Espaces séparables

Définition 1.3.1 *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Autrement dit,

Il existe une suite (x_n) dans l'espace(D, d) telle que :

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in N, d(x, x_n) \leq \varepsilon.$$

1) Tout espace vectoriel de dimension finie est séparable,

Il suffit de choisir des coordonnées rationnelles.

2) Tout espace métrique compact est séparable.

3) On en déduit qu'un espace qui est réunion dénombrable de compact est séparable (on dit $\sigma-$compact).

Définition 1.3.2 *Une partie D d'un espace vectoriel normé E est dite totale, si elle engendre une partie dense de E.*

Proposition 1.3.1 *Un espace vectoriel normé E est séparable si et seulement s'il contient une famille totale dénombrable.*

Proposition 1.3.2 *Soit E un espace métrique séparable, et soit F un sous-ensemble de E.*

Alors :

F est séparable

Preuve. Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E.

Soit (r_m) une suite de réels positifs avec $r_m \longrightarrow 0$.

On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in B(u_{n,}r_m) \cap F$,

Lorsque cet ensemble est non vide,

Il est claire que la suite ($a_{m,n}$) constitue un ensemble dénombrable dense dans F. ■

Théorème 1.3.1 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable.*

Alors E est séparable.

Par contre, il existe des espaces de Banach E séparables tels que E' ne soit pas séparable. On prend par exemple l'espace $L^1(\Omega)$ qui est séparable, mais l'espace $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Corollaire 1.3.1 *Soit E un espace de Banach.*
Alors :(E réflexif et séparable) $\Longleftrightarrow$ (E' réflexif et séparable).

Preuve. On sait déjà (**corollaire1.2.1** et **théorème1.3.1**) que (E' réflexif et séparable) $\Longrightarrow$ (E réflexif et séparable).
Inversement,si E est réflexif et séparable alors : $E'' = J(E)$ est réflexif et séparable.
Donc : E' est réflexif et séparable (**définition1.2.2**). ∎

Remarque 1.3.1 *En générale les proprietés de séparabilité sont étroitement liées à la métrisabilité des topologies faibles.*

1.4 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel.réel.
Un produit scalaire (u, v)est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$,symétrique,définie positive [i.e.$(u, v) \geq 0 \;\; \forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].
Rappelons que le produit scalaire vérifie l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* :

$$\mid (u, v) \mid \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

[Remarquons que pour établir l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on n'utilise pas l'hypothèse $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].

Rappelons aussi que $\mid u \mid = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur H.
[En effet $\mid u + v \mid^2 = \mid u \mid^2 + \mid v \mid^2 + 2(u, v) \leq \mid u \mid^2 + \mid v \mid^2 + 2 \mid u \mid\mid v \mid$].
Rappelons enfin l'identité de parallélogramme :

$$\mid \frac{a+b}{2} \mid^2 + \mid \frac{a-b}{2} \mid^2 = \frac{1}{2}(\mid a \mid^2 + \mid b \mid^2) \quad \forall a, b \in H.$$

Et aussi la relation de Pythagore $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, si u, v sont orthogonaux.

Définition 1.4.1 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Si (.,.) est un produit scalaire sur H ; l'application

$$\begin{array}{rcl} \|.\| \quad : \quad H & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto (u,u)^{\frac{1}{2}} \,. & & \end{array}$$

est une norme sur H (norme induite par produit scalaire)..

Définition 1.4.2 *Chaque espace préhilbertien est aussi espace normé avec la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.4.3 *L'espace préhilbertien H est appelé espace de Hilbert lorsqu'il est complet, c'est-à-dire, lorsque toute suite de Cauchy dans H converge dans H.*

Un exemple fondamentale est l'espace :$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

est un espace de Hilbert.

L'espace de sobolev H^1 que nous rencontrerons aux chapitre prochain est un espace de Hilbert modelé sur L^2.

Théorème 1.4.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermée et non vide de H. Pour tout $u \in H$ il existe un unique point de C, appelée projection de u sur C dont la distance à f soit minimum.*

$\left(i.e. \;\; \forall u \in H, \;\; \exists v \in C \;\; tel\ que : \; \|u-v\| = \inf_{w \in C} \|u-w\| = \min_{w \in C} \|u-w\| \right).$

Cette projection se caractérise comme l'unique point v de C tel que :

$$\forall w \in C, Re(u-v, w-v) \leq 0.$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermée de H, la projection de f est l'unique point $v \in C$ tel que $u-v$ soit orthogonal à tous les éléments de C.

Définition 1.4.4 *(Espace uniformément convexe*

Soit E un espace de Bnach

On dit que E est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$(x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \; et \; \|x-y\| > \varepsilon) \implies \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right)$$

Proposition 1.4.1 *Si H est uniformément convexe alors :*

H est réflexif

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, $u, v \in H$ tels que $|u| \leq 1, |v| \leq 1 \quad |u-v| > \varepsilon.$

Grâce à l'identité de parallélogramme on a :

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

et donc :

$$\left| \frac{u+v}{2} \right| < 1 - \delta \text{ avec } \delta = 1 - (1 - \frac{\varepsilon^2}{4})^2 > 0.$$

■

Chapitre 2

Espace de Sobolev en dimension un

L'objectif de ce chapitre est de définir les espases de *Sobolev* et de donner quelques propietés sur ces espaces

2.1 Rappels

Définition 2.1.1 *(Support compact)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est à support compact (dans Ω), s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$ sur $\Omega \backslash K$.

Et on écrit :

$$Supp(f) = \overline{\{x \in \Omega \quad | \quad f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 2.1.2 *(Fonction test)*

Une fonction test φ est une fonction indéfiniment dérivable , nulle hors d'un intervalle borné, (on dit aussi que φ est de classe C^∞ et à support compact).

L'ensemble des fonctions test est noté $D(\Omega)$.

Notation 2.1.1 *On note par $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur Ω, c'est-à-dire :*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega)\ ; \exists K \subset \Omega\ , K \text{ compact}\ ; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Remarque 2.1.1 *Si $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact.*
En effet :
Il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ tel que f soit nulle en dehors de ce compact.
Par contre,
Si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$, et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0, \varepsilon[$ et pour $x \in]1-\varepsilon, 1[$,
Alors $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

Définition 2.1.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$.*
On dit qu'une fonction $f : \Omega \to R$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si :
$f\chi_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Définition 2.1.4 *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

On dit que la fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée faible d'ordre α de la fonction u si :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \varphi dx.$$

Remarque 2.1.2 *1) Si g existe alors elle est unique dans L^1_{loc} par la formule précédent.*
2) Si la fonction u est de classe $C^{|\alpha|}$ dans Ω, on a immédiatement $g = \partial^\alpha u$ presque partout dans Ω.
Dans le cas général, on écrira :

$g = \partial^\alpha u$ au sens faible, ou bien $g \overset{w}{=} \partial^\alpha u$.

3) On dit qu' une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est faiblement différentiable, si elle admet des dérivées premiéres $\partial_j u$, $1 \leq j \leq n$ au sens faible.

On dit qu'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$est $k-$fois faiblement différentiable, $k \geq 1$, si elle admet des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k au sens faible.

4) Si u est suffisamment lisse, pour avoir une dérivée partielle $D^\alpha u$ au sens usuel, celle-ci correspond également à la dérivée partielle au sens des distributions.

2.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.2.1 *On dit que $W^{1,p}(I)$ est un espace de Sobolev si :*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \;\; telque \;\; \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \;\forall \varphi \in C^1_c(I) \right\}.$$

Posons $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$.

Remarque 2.2.1 *Si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ et si $u' \in L^p(I)$ alors :*
$u \in W^{1,p}(I)$ ou u' est la dérivée usuelle de u.

De plus la dérivée usuelle de u coïncide avec la dérivée de u au sens $W^{1,p}$.

Exemple 2.2.1 *Soit $I =]-1, 1[$ alors :*

i) La fonction $u(x) = \frac{1}{2}(\mid x \mid + x)$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $u' = H$ où :

$$H(x) = \begin{cases} +1 \;\; si \;\; 0 < x < 1 \\ 0 \quad si \;\; -1 < x < 0 \end{cases}$$

En effet :

On sait que

$$u \in W^{1,p}(I) \iff \begin{cases} u \in L^p \\ \exists g \in L^p, \int u\varphi' = -\int g\varphi \end{cases}$$

Où φ est une fonction test.

On a :

1) $\int_{-1}^{1} \mid u(x) \mid^p dx = \int_0^1 \mid x \mid^p = 1 < \infty$.

2) $\int_{-1}^{1} u\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} u\varphi'(x)dx + \int_0^1 u\varphi'(x)dx$

$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\left(-x+x\right)\varphi'(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x+x\right)\varphi'(x)dx$

$= \int_0^1 x\varphi'(x)dx$.

Par intégration par partie on obtient :

$$\int_0^1 x\varphi'(x)dx = x\varphi(x) \mid_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Puisque $\varphi(1) = 0$ alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\varphi'(x)dx &= -\int_0^1 1.\varphi(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{0} 0.\varphi(x)dx - \int_0^1 1.\varphi(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

On déduit que : $u' = H$.

C'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} (u')^p \, dx = \int_{-1}^{1} H^p dx = \int_{-1}^{0} 0^p dx + \int_0^1 1^p dx = 1 < \infty$$

$$\Longrightarrow u' \in L^p(-1, 1).$$

Donc : $u \in W^{1,p}(I)$.

$ii)$ Plus généralement une fonction f continue sur $\bar{I}$ et continûment dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ alors :

$$f \in W^{1,p}(I) \text{ pour tout } 1 \leq p \leq \infty.$$

En effet :

Soit f une fonction continue sur $\bar{I}$, et par consequent f^p est continue aussi sur $\bar{I}$

Alors : f^p est intégrable sur $\bar{I}$ et $f \in L^p(I)$.

Soit $I = [a, b]$ tel que : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_{a_0=a}^{a_1} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\varphi'(x)dx + ... + \int_{a_{n-1}}^{a_n=b} f(x)\varphi'(x)dx$.

On intégre par partie :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx &= f\varphi \mid_a^{a_1} + f\varphi \mid_{a_1}^{a_2} + ... + f\varphi \mid_{a_{n-1}}^{a} - \int_a^{a_1} f'\varphi - ... - \int_{a_{n-1}}^{a} f'\varphi \\ &= -\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

De la forme : $\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b f'\varphi$,

Donc : $f \in W^{1,p}(I)$.

$iii)$ La fonction H n'appartient pas à $W^{1,p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

En effet :

On a : $H \in L^p(-1, 1)$ car $\int_{-1}^1 \mid H(x) \mid^p dx = \int_0^1 1dx = 1 < \infty$,

Mais :$\int_{-1}^1 \varphi'(x)H(x) = \int_0^1 \varphi'(x).1dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0)$.

Donc : n'existe pas $g = H'$ tel que $\int_{-1}^1 \varphi'(x)H(x)dx = -\int_{-1}^1 \varphi(x)H'(x)dx$,

En déduit que :$H \notin W^{1,p}(I)$.

Remarque 2.2.2 *Dans l'exemple précédent la fonction H est appelée fonction de Heaviside.*

Remarque 2.2.3 *On peut aussi utiliser le language de la théorie des distributions pour définir* $W^{1,p}$.

Toute fonction $u \in L^p(I)$ *admet un dérivée au sens des distributions qui est un élément de l'espace* $D'(I)$.

On dit que $u \in W^{1,p}$ *si cette dérivée-distribution coïncide avec une fonction de* L^p *dans l'espace* $D'(I)$.

Remarque 2.2.4 *Si* $p = 2$ *et* $I = \mathbb{R}$ *on peut aussi définitr les espace de Sobolev par tronsformée de Fourier.*

Notation 2.2.1 *L'espace* $W^{1,p}$ *est muni de la norme* $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$, *qui est équivalent à la norme* $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$.

L'espace H^1 *est munit de produit scalaire* $(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$, *et la norme associée* $\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$, *est équivalent à la norme de* $W^{1,2}$.

Proposition 2.2.1 *a)-L'espace* $W^{1,p}$ *est un espace de Banach si* $1 \leq p \leq \infty$.

b)-L'espace $W^{1,p}$ *est réflexif si* $1 < p < \infty$.

c)-L'espace $W^{1,p}$ *est séparable si* $1 \leq p < \infty$.

Preuve. $a)$ Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$; danc (u_n) et (u'_n) sont des suite de Cauchy dans L^p.

Par conséquent $u_n \longrightarrow u$ dans L^p et $u'_n \longrightarrow g$ dans L^p.

On a :

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

On passe à la limite :

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

Donc $u \in W^{1,p}$, $u' = g$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.

$b)$ On a : l'espace produit $E = L^p(I) \times L^p(I)$ est réflexif.

L'opérateur $T : W^{1,p} \longrightarrow E$ définie par $Tu = [u, u']$ est un isométrie de $W^{1,p}$ dans E;

Alors $T(W^{1,p})$ est un sous-espace fermé de E.

(D'après la **proposition1.2.1**) on déduit que $T(W^{1,p})$ est réflexif.

Donc $W^{1,p}$ est réflexif aussi.

c) On a : l'espace produit $E = L^p(I) \times L^p(I)$ est séparable donc $T(W^{1,p})$ est aussi séparable.

Par cosnéquent $W^{1,p}$ est séparable (d'après la **proposition 1.3.2**). ■

Théorème 2.2.1 *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$.

Alors $\exists \tilde{u} \in C(\bar{I})$ *telle que* $u = \tilde{u}$ *p.p. sur* I *et :*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est basée sur les deux Lemmes suivants :

Lemme1

Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ tel que

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Alors :

Il existe une constente C telle que $f = C$ *p.p.*

Lemme2

Soit $g \in L^1_{loc}(I)$.

Pour y_0 fixé dans I on pose :

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \qquad x \in I.$$

Alors $v \in C(I)$ et :

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Maintenant on fait la démonstration du théorème précédente ;

On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt$,

D'aprés le **lemme2,** on a :

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

Donc :

$$\int (u - \bar{u})\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

.

On résulte du **lemme1** que $u - \bar{u} = C \;\; p.p.$

La fonction $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ satisfait les propriétés du théorème. ■

Remarque 2.2.5 *Le **lemme2** montre que la primitive v d'une fonction g de L^p appartient à $W^{1,p}$ dès que $v \in L^p$.*

Ce qui est toujours le cas lorsque I est borné.

Proposition 2.2.2 *Soit $u \in L^p$ avec $1 < p \leq \infty$ alors :*

Il y a une équivalance entre les propriétés suivantes :

i) $u \in W^{1,p}$.

ii) $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)}, \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Preuve. $(i) \implies (ii)$:

Supposons que $u \in W^{1,p}(I)$, *alors :*

$$\begin{aligned} \int_I u\varphi' &= -\int_I g\varphi \\ &\Longrightarrow \left|\int_I u\varphi'\right| = \left|\int_I g\varphi\right| \overset{H\ddot{o}lder}{\leq} \|g\|_{L^p}\,\|\varphi\|_{L^q} \\ &\Longrightarrow \left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(I)} \text{ avec } C = \|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

La démonstration du deuxième implication $((ii) \Longrightarrow (i))$ *est basée sur les trois théorèmes suivants :*

Théorème1(*théorème de Hahn-Banach)*

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application linéaire vérifiant :*

$$h(\alpha x + y) \leq \alpha h(x) + h(y), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E.$$

Soit $G \subset E$ *un soue-espace vectoriel.*

Soit $g : G \longmapsto \mathbb{R}$ *une autre application linéaire telle que*

$$g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in G.$$

Alors $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme linéaire qui prolonge* g.

C'est-à-dire : $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$

Et telle que :

$$f(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in E.$$

Théorème2(*théorème de représentation de Riesz)*

Soit $1 < p < \infty$ *,et soit* $\varphi \in (L^p)'$.

Alors : $\exists u \in L^q$ *unique tel que*

$$(\varphi, f) = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a :

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Théorème3 : *Soit* $\varphi \in (L^1)'$.

Alors :$\exists u \in L^\infty$ *unique tel que :*

$$(\varphi, f) = \int uf \qquad \forall f \in L^1.$$

On a de plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}.$$

Maintenant on termine la démonstration du proposition ;

Soit $\varphi \in C_c^1(I) \longmapsto \int u\varphi'$, *une forme linéaire définie sur un sous-espace dense de* L^q.

φ *est continue pour la norme de* L^q.

Donc elle se prolonge en une forme linéaire et continue F *sur* L^q*(d'aprés le théorème de Hahn-Banch),*

Et d'aprés les théorèmes(2et3) il existe $g \in L^p$ *tel que :*

$$(F, \varphi) = \int g\varphi \quad \forall \varphi \in L^q.$$

D'où en particulier :

$$\int u\varphi' = \int g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

Donc $u \in W^{1,p}$. ∎

Corollaire 2.2.1 *Une fonction* u *de* $L^{\infty}(I)$ *appartient à* $W^{1,\infty}(I)$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que*

$$| u(x) - u(y) | \leq C \mid x - y \mid \quad p.p. \qquad x, y \in I.$$

Théorème 2.2.2 *(Opérateur de prolongement)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$.

Il existe un opérateur de prolongement, $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ *linéaire et continue tel que :*

$(i) Pu_{|I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

$(ii) \|Pu\|_{L^p(R)} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

$(iii) \|Pu\|_{W^{1,p}(R)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

(où C *dépend seulement de* $\mid I \mid \leq \infty$*).*

Théorème 2.2.3 *(Densité)*

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p < \infty$.

Alors il existe une suite (u_n) *dans* $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ *telle que* $u_{n|I} \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(I)$.

Remarque 2.2.6 $C_c^{\infty}(I)$ *n'est pas dense dans* $W^{1,p}(I)$ *sauf si* $I = \mathbb{R}$.

Théorème 2.2.4 *Il existe une constante* C *(dépendant seulement de* $\mid I \mid \leq \infty$*) telle que :*

$$\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^{\infty}$ avec l'injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque I est borné, on a :

1–L'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$.

2–L'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$.

3–L'injection $W^{1,1}(I) \subset C(\bar{I})$ est continue mais n'est pas compact même I est borné.

4–Si (u_n) une suite bornée dans $W^{1,1}(I)$, alors :

Il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k}(x)$ converge pour tout $x \in I$.

5–Si I n'est pas borné, et si $1 < p \leq \infty$, alors : l'injection $W^{1,p}(I) \subset L^{\infty}$ est continue,mais n'est pas compact.

Corollaire 2.2.2 *(Dérivation d'un produit)*

Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.

Alors : $uv \in W^{1,p}(I)$ *et :*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Corollaire 2.2.3 *(Dérivation d'un produit de composition)*

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tel que* $G(0) = 0$, *et soit* $u \in W^{1,p}(I)$.

Alors :

$G \circ u \in W^{1,p}(I)$, *et :*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

2.3 Les espaces de Soboleve $W^{m,p}(I)$

Définition 2.3.1 *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $m \geq 2$ *et soit* $1 \leq p \leq \infty$.

On définit par récurrence l'espace :

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

On pose :

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie facilement que $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'il existe m fonctions $g_1, g_2, ...g_m \in L^p(I)$, telles que :

$$\int uD^j\varphi = (-1)^j \int g_j\varphi \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(I),\ \forall j = 1, 2, ...m.$$

où $D^j\varphi$ désigne la $j^{éme}$ dérivée de φ.

Lorsque $u \in W^{m,p}(I)$ on peut donc considérer les dérivées successives : $u' = g_1, (u')' = g_2$......... jusqu'à l'ordre m.

On les note $Du, D^2u.......D^mu$.

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Et l'espace H^m est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Remarque 2.3.1 *La norme* $\|.\|_{W^{m,p}}$ *est équivalente à la norme* $\|u\| = \|u\|_{L^p} + \|D^\alpha u\|_{L^p}$.

2.4 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 2.4.1 *Soit* $1 \le p < \infty$.

On désigne par $W_0^{1,p}(I)$ *la fermeture de* $C_0^1(I)$ *dans* $W^{1,p}(I)$.

On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$.

L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est aussi réflexif pour $1 < p < \infty$.

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 2.4.1 *Si* $I = \mathbb{R}$

On sait que $C_c^1(\mathbb{R})$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R})$, *(D'après* ***théorème de la densité****)* *et par conséquent :*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Remarque 2.4.2 *En utilisant une suite régularisante* (ρ_n) *on vérifie facilement que :*

i) $C_c^\infty(I)$ *est dense dans* $W_0^{1,p}(I)$.

ii) si $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$ *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Théorème 2.4.1 *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$, *alors :*

$$u \in W_0^{1,p}(I) \text{ si et seulement si } u = 0 \text{ sur } \partial I.$$

Preuve. Soit $u \in W_0^{1,p}$.

Alors il existe une suite (u_n) de $C_c^1(I)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Donc $u_n \longrightarrow u$ uniformément sur $\bar{I}$ et par conséquent $u = 0$ sur ∂I.

Réciproquement,

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ telle que $u = 0$ sur ∂I.

On fixe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ tellle que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq 1 \\ t & \text{si} \quad |t| \geq 2 \end{cases},$$

et :

$$|G(t)| \leq |t| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ de sort que $u_n \in W^{1,p}(I)$ (d'aprés corollaire2.2.3).

D'autre part :

$$Supp\ u_n \subset \left\{ x \in I; \quad |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Donc $Supp\ u_n$ est un compact inclus dans I,(on utilisons le fait que $u = 0$ sur ∂I et $u(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty, x \in I$).

Par conséquent $u_n \in W_0^{1,p}$.

Enfin d'aprés le théorème de la convergence dominée on déduit que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}$.

■

Remarque 2.4.3 *Le théorème précédent explique le rôle important joué par l'espace* $W_0^{1,p}$, *En effet les équations différentilles sont couplées avec des condition aux limite , c'est-a-dire que la valeur de* u *est prescrite sur* ∂I.

Proposition 2.4.1 *(Inégalité de Poincaré)*

Si I *est borné alors il existe une constante* C *(dépendant de* $\mid I \mid$*) telle que :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit :

Sur $W_0^{1,p}(I)$ *la quantité* $\|u'\|_{L^p}$ *est une norme équivalente à la norme de* $W^{1,p}$.

Preuve. Pour $u \in W_0^{1,p}(I)$ on a :

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Donc :

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}.$$

D'aprés l'inégalité d'Hölder on déduit :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

■

Remarque 2.4.4 *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *ou* $m \geq 2$ *et soit* $1 \leq p < \infty$.

On définit l'espace $W_0^{m,p}(I)$ *comme étant la fermeture de* $C_c^m(I)$.

On montre que $W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I); u = Du = ... = D^{m-1} = 0 \text{ sur } \partial I\}$.

Il convient de bien distinguer

$$W_0^{2,p}(I) = \left\{u \in W_0^{2,p}; u = Du = 0 \text{ sur } \partial I\right\}.$$

et :

$$W_0^{2,p} \cap W_0^{1,p}(I) = u \in W^{2,p}; u = 0 \text{ sur } \partial I.$$

Notation 2.4.1 *On désigne par* $W^{-1,p'}(I)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(I)$ *(avec* $1 \leq p < \infty$*) et par* $H^{-1}(I)$ *l'espace dual de* $H_0^1(I)$.

Remarque 2.4.5 *On a les inclusions suivantes :*

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}.$$

avec injections continues et denses.

Si I *est borné,on a :*

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'}.$$

avec injections continues et denses.

Si I *n'est pas borné,on a seulement :*

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \textit{ pour } 1 \leq p \leq 2.$$

avec injections continues et denses.

Les éléments de $W^{-1,p'}$ *peuvent être représentés à l'aide de fonction de* $L^{p'}$.

Conclusion

Dans ce travail nous présentons les principaux résultats concernant les espaces de Sobolev Les espaces de Sobolev sont important pour résoudre les équations aux dérivées partielles Nous avons présentés quelques résultats sur les espace L^p ensuit nous avons étudiés les espaces de Sobolev en dimention un

Cette étude permettera de donner un aperçu de ces espaces

Bibliographie

[1] Haïm Brézis. (1983).Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson,Paris.

[2] Thierry Gallouët., Raphaèle Herbin. (2013).Mesure, Intégration, Probabilités.

[3] Robert, Adams. (1975).Sobolev Spaces, Academic Press.

[4] Luc Tartar. (2007).An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\|.\|$	:	norme
$(.,.)$	:	produit scalaire
q	:	exposant conjugué de p,c'est-à-dire $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
K^c	:	complémentaire de K
J	:	injection canonique de E dans E''
$Supp\ f$	:	support de la fonction f
E'	:	espace dual de E
E''	:	bidual de E (dual de E')
$p.p.$	:	presque partout
$\log$	:	fonction logarithme
$\partial^\alpha u$	:	dérivée de u d'ordre α
T	:	opérateur de $W^{1,p}$ dans E
C^∞	:	espace des fonctions infiniment dérivable
C_c^m	:	espace des fonctions m fois continûment dérivable à support comp
L^1_{loc}	:	espace des fonctions localement intégrable
$W^{1,p}, W_0^{1,p}, W^{1,m}, H^1, H_0^1, H^m$	:	espaces de Sobolev