République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

TOUBA Sara

Titre :

Probabilités et Variables Aleatoires

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chine Amel**	UMKB	Président
Dr.	**Benelmir Imane**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Berkane Hassiba**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail

La plus proche de mon cœur celle qui a fait l'impossible pour me donner le bonheur mon chère mére.

A mon père qui fait l'impossible pour me donner le bonheur et poursuivre mes études jusqu'à ce jour.

Je dédie aussi ce travail à mes frères et toute ma famille.

A tous mes amis et camarades de la promotion 2017/ 2018 de mathématique.

A toute personne qui prendra de son temps pour lire ce document à parfaire.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon encadreur madame **Benelmir imane** pour ses conseils bénéfiques tout au long de la réalisation de cette mémoire et pour la connaissance qu'il m'a accordé en acceptant de m'encadrer.

Je tiens à remercier madame **Touba sonia** pour continue avec moi cette mémoire**.**

Je remercie aux membres du Jury,.Madame **Chine Amel** et Madame **Berkane Hassiba**, pour participer à ma soutenance.

Je tiens à remercier mes enseignants.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La théorie des probabilités pour objet l'étude des phénomènes aléatoire, Cette dernière modalise par calcule de probabilité.

L'historique de calcule de probabilité commences avec l'étude des jeux au hasard.

Depuis lors, l'on introduire le calcule des probabilités sous sa forme axiomatique, Ce développement de l'axiomatique, qui constitue tout l'aspect moderne de la théorie, a permis d'établir les concepts fondamentales et exacts du calcul des probabilités.

De nos jous ces calcules utilisé dans presque toutes les domaines (physique, chimie, biologie,...) et de tous les domaines de la technique.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est notion de base de probabilité, probabilité conditionnelle, l'indépendance pour événements et variables aléatoires.

Seconde chapitre on donnes les lois des probabilités usuelles dans le cas discrète et continue avec propriétés et quelque exemple.

Le troisième chapitre est essaie que applique les lois usuelles des probabilités (trace les histogrammes pour les lois dans le cas discrètes et de l'autre cas trace la fonction de densité et fonction de répartition) sous logiciel R.

Chapitre 1

Probabilité et expérience aléatoire

Ce chapitre est consacré aux concepts généreux de calcul de la probabilité, cette dernière est l'étude des phénoménes aléatoires ou non déterministes.
Pour chaque phénoméne étudié, le calcul des probabilités définit un modéle mathématique, en attribunt des probabilités aux événements associés à une expérience.

1.1 Espace de probabilité

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard lorsqu'on rèpéte cette expérience dans les mêmes conditions[2]
On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble de tous les résultats possibles, où Ω est appelé l'ensemble fondamental.[2]

1.1.1 $\sigma-$Algébre (tribu)

Soit une classe $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, On dit $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω vérifiant les propriétés suivantes[2] :
- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- $\forall (A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{A}, \bigcup\limits_{i=1}^{i=n} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.1.1 *Soit Ω l'ensemble fondamental, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a :*

- $\mathcal{P}(\Omega)$ ensemble de parties de Ω.).
- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ la plus petite tribu sur Ω (tribu triviale).

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appeler espace probabilisable ou esp

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est la plus grande tribu sur Ω (tribu grossièreace mesurable.

1.1.2 Axiome de Kolmogorov

On appelle probabilité (loi de probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ tel que[2] :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Pour tout ensemble dénombrable d'événements A_1, $A_2, \ldots, A_n$ deux á deux disjoints tel que $\forall i \neq j$ avec $A_i \cap A_j = \varnothing$ ona $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.

1.1.3 Propriétés élémentaires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité alors[2] :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{A}$: si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. $\forall A_i \in \mathcal{A} : \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i} A_i\right) \leq \sum\limits_{i} \mathbb{P}(A_i)$.

Formule de Poincaré

Soient $A_1,\, A_2, \cdots,\, A_n$ n–événements de $\mathcal{A}$[2] :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

1.1.4 Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B noté $\mathbb{P}(A/B)$ par[2]

$$\mathbb{P}\left(A/B\right) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

où cette dernière vérifie les axiomes suivants :

1. $\mathbb{P}(\Omega/B) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$
2. Si $A_1,\, A_2, \cdots,\, A_n$ $n-$événements deux à deux disjoints : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i/B\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i/B).$

(Axiome 2). (voir [2] p 7)Soient $A_1,\, A_2, \cdots,\, A_n$ $n-$événements deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i/B\right) &= \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap B\right]/\mathbb{P}(B) \qquad \blacksquare\\
&= \mathbb{P}\left[(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap B\right]/\mathbb{P}(B)\\
&= \mathbb{P}\left[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cdots(A_n\cap B)\right]/\mathbb{P}(B)\\
&= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)\right]/\mathbb{P}(B)\\
&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i\cap B)/\mathbb{P}(B)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i/B).
\end{aligned}$$

1.1.5 Indépendance

Soient A et B deux événementes de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que A et B sont indépendants si et seulment si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$.[4]

Propriétiés

- A indépendant de B si $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$.
- A indépendant de B cela equivaut que B indépendant de A.
- $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A_1, A_2,. . . , A_n des n- événemtens de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$ et B événement quelconque[5] :

1. $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$.
2. $\mathbb{P}(A_k/B) = \dfrac{\mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Preuve. (voir.[5]. page56)**1.** Première condition. On a :

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ...(B \cap A_n) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i). \end{aligned}$$

Comme $(B \cap A_i)_{i \geq 1}$ sont deux à deux disjoints alors

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

D'autre part $\mathbb{P}(B/A_i) = \mathbb{P}(B \cap A_i)/\mathbb{P}(A_i)$.

Donc $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Alors $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$. ■

Preuve. (voir.[5]. page56)**2.** Deuxième condition.

On a : $\mathbb{P}(A_k/B) = \mathbb{P}(A_k \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

Et comme $\mathbb{P}(B/A_k) = \mathbb{P}(B \cap A_k)/\mathbb{P}(A_k)$.

Donc $\mathbb{P}(B \cap A_k) = \mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)$.

On a aussi $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Alors

$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

■

1.2 Variables Aléatoires

Le concept d'une variable aléatoire (v.a) formalise de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire [2] ll existe deux types de v.as : les v.as discrètes et les v.as continues, dont on va définir ci-dessus.

On dit que X défini sur Ω dans $\mathbb{R}$ est une v.a réelle (v.a.r)[5]si

$$\forall t \in \mathbb{R} : X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{A}.$$

1.2.1 Variable aléatoire discréte

On dit que X est une v.a.r discrète qui prend des valeurs discrètes $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$,[5] où

$$\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Exemple 1.2.1 *On lance un dé deux fois, on obtient les resultats suivants :*

$\Omega = \{(1,1), (1,2), ...\} = \{(i,j) \text{ avec } i = 1, ..., 6 \text{ et } j = 1, ..., 6\}$.

On définit la v.a $X = \min(i,j)$.

Donc $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$\begin{aligned}
\{X=1\} &= \{(i,j) \in \Omega : X(i,j) = \min(i,j) = 1\}. \\
&= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}. \\
\{X=2\} &= \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}. \\
\{X=3\} &= \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(5,3),(6,3)\}. \\
\{X=4\} &= \{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}. \\
\{X=5\} &= \{(5,5),(5,6),(6,5)\}. \\
\{X=6\} &= \{(6,6)\}.
\end{aligned}$$

Définition 1.2.1 *Soit X une v.a.r discrète. On définit la probabilité de x_i par.[5].*

$$\boxed{f_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i).}$$

Cette dernière vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x_i \in \mathbb{R} : 0 \leq f_X(x_i) \leq 1.$

- $\sum_i f_X(x_i) = 1.$

Exemple 1.2.2 *(Calculer la loi de probabilité de X)*

On a les mêmes données que l'exemple 1.2.1. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) \quad &= \mathbb{P}(\{(i, j) \in \Omega : X(i, j) = \min(i, j) = 1\}). \\
&= \mathbb{P}(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\} = 11/36. \\
\mathbb{P}(X = 2) \quad &= \mathbb{P}(\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\} = 9/36. \\
\mathbb{P}(X = 3) \quad &= \mathbb{P}(\{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}) = 7/36. \\
\mathbb{P}(X = 4) \quad &= \mathbb{P}(\{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4)\}) = 5/36. \\
\mathbb{P}(X = 5) \quad &= \mathbb{P}(\{(5, 5), (5, 6), (6, 5)\}) = 3/36. \\
\mathbb{P}(X = 6) \quad &= \mathbb{P}(\{(6, 6)\}) = 1/36.
\end{aligned}$$

Et donc $\forall x \in X(\Omega) : 0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq 1.$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{6} f_X(x) \quad &= \sum_{x=1}^{6} \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) \\
&= (11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1)\,/36 = 36/36 = 1.
\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{P}$ est loi de probabilité de X.

1.2.2 Variable aléatoire continue

On dit que X est une v.a.r absolument continue, si elle admet une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes.[5]. :

1. $f_X(x) \geq 0.$

2. $\int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$

Sachant que la fonction f_X est appelé fonction de densité de X.

1.2.3 Fonction de répartition

Soit X une v.a.r (continue ou discrète). On définit la fonction de répartition (fd) notée F_X de X définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ par.[5].

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

– Si X est une v.a discrète, la fonction F_X est défini par une loi de probabilité de X : $F_X(x) = \sum\limits_{x \geq x_i} f_X(x_i) = \sum\limits_{x \geq x_i} \mathbb{P}(X = x_i).$

– Si X est v.a.r continue, la fonction F_X est défini par fonction de densité de X : $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

1. F est monotone croissante :$F(a) \leq F(b)$ lorsque $a \leq b$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b : \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_{a}^{b} f_X(t)dt.$

1.2.4 Moments d'un variable aléatoire

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques associées aux notions de valeur centrale, de dispersion et de la forme de distribution.[2]

Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique ou moyenne d'une v. a. r X la quantité notée $E(X)$ ou μ[2].

– Cas discret : $\mu = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$

– Cas continu : $\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$

Proposition 1.2.1 *Soient X, Y deux v.a.r (discrètes ou continues) et a une constante.[2] On a..*

1. $E(a) = a$.
2. $E(aX) = aE(X)$.
3. $E(X + a) = E(X) + a$.
4. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, car l'espérance est linéaire.

Variance et Écart type

On appelle variance de X notée $V(X)$ ou σ^2 la quantité défini par[2]

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2].$$

– Cas discret : $\sigma^2 = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x)$.
– Cas continu : $\sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$.
On appel $\sigma = \sqrt{V(X)}$ l'écart type.

Proposition 1.2.2 *Soient X, Y deux v. a. r (discrètes ou continues) et a une constante[2]. On a*

1. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$ avec $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

1.2.5 Autres Moments

On appelle moment d'ordre k, les moment centré noté $\mu_k = E(X^k)$ défini par.[2].

$$\mu_k = E\left[(X - E(X))^k\right].$$

On a par exemple :

◃ Le moment centré d'ordre 1 noté $\mu_1 = 0$.

◃ Le moment centré d'ordre 2 noté $\mu_2 = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sigma^2$.

1.2.6 Fonction caractéristique

Soit X une v.a.r. La fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ defini par $\varphi_X(t) = E\left[\exp(itX)\right]$ est appelée fonction caractéristique de la v.a X[2].

– Cas discret : $\varphi_X(t) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \exp(itx)\mathbb{P}(X = x)$.

– Cas continu : $\varphi_X(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(itx) f_X(x) dx$.

La fonction caractéristique d'une v.a.r X est la transformation de Fourier de la loi de probabilité.

Proposition 1.2.3 *Soient X v .a. r (continue ou discrète) et a, λ sont constants[2] :*

1. $\varphi_{\lambda X}(t) = \varphi_X(\lambda t)$.
2. $\varphi_{X+a}(t) = \exp(ita)\varphi_X(t)$.
3. Si les dérivées existent jusqu'à l'ordre k, ona $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.

1.2.7 Fonction génératrice des moments

On appelle fonction génératrice des moments de la v.a. X, si elle existe la fonction[2] :

$$M_X(t) = E\left[\exp(tX)\right].$$

Proposition 1.2.4 *Le moment d'ordre k de la v.a. X est donnée par[2] :*

$$M_X^{(k)}(t) = \mu_k$$

$M_X^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de M_X. En particulier l'espérance mathématique (μ_1) de X est la valeur de la dérivée première de M'_X pour $t = 0$.

Chapitre 2

Lois usuelles

Le but de ce chapitre est de voir si la v.a suit une certaine loi de probabilité. On commence par les v.as discrètes puis les v.as continues. Ensuite on détermine les caractéristiques de chacunes d'elles ie l'espérance, la variance, la fonction caractéristique et enfin la fonction génératrice.

Il est a noter que toutes les v.as de ce chapitre sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.1 Lois discrètes usuelles

Dans ce part il permet quelque lois des v.as discrètes par exemple loi Bernoulli et binomiale, poisson, géometrique et uniforme discrète

2.1.1 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Le résultat de l'épreuve de cette loi prend deux valeurs possibles vrai et faux, codée 1 et 0.

Définition 2.1.1 *Soient X une v.a et p un paramètre y compris sur l'intervalle $[0,1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli c'est-à-dire (i.e) $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ [2]si*

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p = q$	p

Tab. 2.1 – Probabilité de la loi de bernoulli

Avec

1. $E(X) = p.$

2.$V(X) = pq.$

3.$\varphi_X(t) = q + p\exp(it).$

4.$M_X(t) = q + p\exp(t).$

Preuve. ([2] p 41)On montre que $\sum\limits_{x=0}^{1}\mathbb{P}(X = x) = 1.$

$\sum\limits_{x=0}^{1}\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p + p = 1.$

1.
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{1} x\mathbb{P}(X = x) \\ &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 0 \times q + 1 \times p \\ &= p. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x^2\mathbb{P}(X = x) - p^2 \\ &= 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) - p^2 \\ &= 0 \times q + 1 \times p - p^2 \\ &= p(1 - p) \\ &= pq. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[\exp(itX)\right] \\ &= \sum_{x=0}^{1} \exp(itx)\mathbb{P}(X = x) \\ &= \exp(it0)\mathbb{P}(X = 0) + \exp(it1)\mathbb{P}(X = 1) \\ &= q + p\exp(it). \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[\exp(tX)\right] \\ &= \sum_{x=0}^{1} \exp(tx)\mathbb{P}(X=x) \\ &= \exp(t0)\mathbb{P}(X=0) + \exp(t1)\mathbb{P}(X=1) \\ &= q + p\exp(t). \end{aligned}$$

■

2.1.2 Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

On Considère les épreuves répétées n fois de façons indépendantes d'une même expérience n'ayant que deux résultats possibles succès ou échec, avec p la probabilité de succès et l'autre q de l'échec[5].

La probabilité pour qu'il y ait exactement k succès lors des n épreuves répétées est donnée par[5] :

$$\mathbb{P}(X=k) = \complement_n^k p^k q^{n-k},$$

où $\complement_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient du binôme.

1. La loi binomiale est l'expérience de Bernoulli répéteée n fois de manière indépendante i.e que X est la somme des n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
2. L'ensemble des valeurs possibles sont $X \in \{0,1,2,...,n\}$.
3. X est une v.a qui suit la loi binomiale de paramètres n et p notée $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition 2.1.1 *[2]*

1. $E(X) = np$.
2. $V(X) = npq$.
3. $\varphi_X(t) = (q + p\exp(it))^n$.
4. $M_X(t) = (q + p\exp(t))^n$.

Preuve. ([5]p114 et [4]p91)D'abord on montre que $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}\complement_n^k p^k q^{n-k}\\ &= (p+q)^n \text{ car d'après la formule de Newton on a } (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\complement_n^k x^k y^{n-k}\\ &= (p+1-p)^n\\ &= 1^n\\ &= 1.\end{aligned}$$

1. $$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}k\complement_n^k p^k q^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}kp^k q^{n-k}n!/k!(n-k)!\\ &= \sum_{k=0}^{n}kpp^{k-1}q^{n-k}n(n-1)!/k(k-1)!(n-k)!\\ &= np\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}q^{n-k}(n-1)!/(k-1)!(n-k)!.\end{aligned}$$

On pose $s=k-1$ et comme $1\le k\le n$ on en deduit que $0\le s\le n-1$.

On obtient :

$$\begin{aligned}E(X) &= np\sum_{s=0}^{n-1}p^s q^{n-s-1}(n-1)!/s!(n-s-1)!\\ &= np\sum_{s=0}^{n-1}\complement_{n-1}^s p^s q^{n-s-1} = np\times 1^s\\ &= np.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}V(X) &= \sum_{k=0}^{n}k^2\mathbb{P}(X=k)-(np)^2\\ &= \sum_{k=0}^{n}k^2\complement_n^k p^k q^{n-k}-(np)^2 = \left[\sum_{k=0}^{n}k^2p^kq^{n-k}n!/k!(n-k)!\right]-(np)^2\\ &= \left[\sum_{k=0}^{n}k^2pp^{k-1}q^{n-k}n(n-1)!/k(k-1)!(n-k)!\right]-(np)^2\\ &= \left[np\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}q^{n-k}(n-1)!/(k-1)!(n-k)!\right]-(np)^2.\end{aligned}$$

On pose $s=k-1$, donc $0\le s\le n-1$.

On a :

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \left[np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)p^s q^{n-s-1}(n-1)!/s!(n-s-1)!\right] - (np)^2 \\
&= \left[np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\mathsf{C}_{n-1}^{s}p^s q^{n-s-1}\right] - (np)^2 \\
&= np\left(\sum_{s=0}^{n-1}s\mathsf{C}_{n-1}^{s}p^s q^{n-s-1} + \sum_{s=0}^{n-1}\mathsf{C}_{n-1}^{s}p^s q^{n-s-1}\right) - (np)^2 \\
&= np((n-1)p + 1^s) - (np)^2 \\
&= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq.
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \exp(itk)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \exp(itk)\mathsf{C}_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\exp(it))^k\mathsf{C}_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k (p\exp(it))^k q^{n-k} \\
&= (p\exp(it)+q)^n.
\end{aligned}
$$

4.
$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \exp(tk)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \exp(tk)\mathsf{C}_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\exp(t))^k\mathsf{C}_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k (p\exp(t))^k q^{n-k} \\
&= (p\exp(t)+q)^n.
\end{aligned}
$$

■

Exemple 2.1.1 *On lance une pièce de monnaie, bien équilibre* 10 *fois. X est la v.a definie par le nombre de face obtenues.*

Donc $X \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$ et $p = \dfrac{1}{2}$ (bien équilibré).

Alors $\mathbb{P}(X=k) = \mathsf{C}_n^k p^k q^{n-k} = \mathsf{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-k} = \mathsf{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}.$

$E(X) = np = 10/2 = 5.$

$V(X) = npq = 10(1/2)(1/2) = 10/4 = 2.5.$
$\varphi_X(t) = (p\exp(it) + q)^n = \left(\frac{\exp(it)}{2} + \frac{1}{2}\right)^{10}.$
$M_X(t) = (p\exp(t) + q)^n = \left(\frac{\exp(t)}{2} + \frac{1}{2}\right)^{10}.$

2.1.3 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

On dit que la v.a X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$. Sa loi de probabilité est donnée par.[1] :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On peut vérifier tout d'abord que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}, \text{ car } \forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}, \\
&= \exp(-\lambda)\exp(\lambda) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

La loi poisson est une approximation de la loi bimomiale $\mathcal{B}(n,p) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(\lambda)$ avec $p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $np \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$.

Proposition 2.1.2 *[2]*

1. $E(X) = \lambda$.
2. $V(X) = \lambda$.
3. $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(\exp(it) + 1))$.
4. $M_X(t) = \exp(\lambda(\exp(t) + 1))$.*[3]*

Preuve. (Voir[2] p120,p58 et [4]p101)

$$
\begin{aligned}
\textbf{1. } E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}\exp(-\lambda)}{(k-1)!}\\
&= \lambda\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{s}\exp(-\lambda)}{s!}, \text{ en posant } s=k-1\\
&= \lambda \text{ car } \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{s}\exp(-\lambda)}{s!} = 1 \text{ puisque } \sum_{s=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=s)=1.
\end{aligned}
$$

2. Afin de calculer la $V(X)$, on calcule d'abord $E(X^2)$ sachant que

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \lambda\sum_{s=0}^{+\infty}(s+1)\frac{\lambda^{s}\exp(-\lambda)}{s!}, \text{on pose } s=k-1, \text{ donc } 0\le s\le n-1.\\
&= \lambda\left[\sum_{s=0}^{+\infty}s\frac{\lambda^{s}\exp(-\lambda)}{s!}+\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{s}\exp(-\lambda)}{s!}\right]\\
&= \lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda.
\end{aligned}
$$

Enfin

$V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

$$
\begin{aligned}
\textbf{3. } \varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\exp(itk)\frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\exp(it))^k\exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\exp(it))^k)}{k!}\\
&= \exp(-\lambda)\exp(\lambda\exp(it)) = \exp(\lambda(\exp(it)-1)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{4. } M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\exp(tk)\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\exp(tk)\frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\exp(t))^k\exp(-\lambda)}{k!}\\
&= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\exp(t))^k)}{k!}\\
&= \exp(-\lambda)\exp(\lambda\exp(t)) = \exp(\lambda(\exp(t)-1)).
\end{aligned}
$$

■

Exemple 2.1.2 *On suppose* 2% *des être humains en moyenne sont gauchers. Calculer la probabilitié pour que parmi* 200 *prsonnes,* 4 *ou plus soient des gouchers.*

$E(X) = 0.02 \times 200 = 4 = \lambda.$

$\mathbb{P}(X = k) = \exp(-4)\dfrac{4^k}{k!}.$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathbb{P}(X < 4) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)] \\
&= 1 - [\exp(-4)(1 + 4 + 8 + 10.67)] \\
&= 0.567.
\end{aligned}$$

2.1.4 Loi Géometrique $\mathcal{G}(p)$

On dit que la v.a X suit une loi géometrique de paramètre p qu'on note $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, Si sa la loi de probabilité est définie par[1]

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}.$$

Avec

1. $E(X) = \dfrac{1}{p}.$
2. $V(X) = \dfrac{q}{p^2}.$
3. $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_X(t) = \dfrac{p\exp(it)}{1 - q\exp(it)}.$
4. $\forall t \in \left]-\infty, -\ln(q)\right] : M_X(t) = \dfrac{p\exp(t)}{1 - q\exp(t)}.$

Preuve. ([6]p63)D'abord on montre que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) = 1.$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= p\sum_{s=0}^{+\infty} q^s \text{ avec } s = k - 1 \text{ et donc } 0 \leq s \leq +\infty \\
&= p/1 - q, \text{ car } \sum_{s=0}^{+\infty} x^s = 1/1 - x \text{ est une série entière avec } |x| < 1, \\
&= p/p \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1. $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}.$

On dérive $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ par rapport à q on trouve : $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Donc

$E(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = 1/p.$

2. $V(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 pq^{k-1} - (1/p)^2 = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} - (1/p)^2.$

Comme $E(X^2) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ pour $|q| < 1$ alors

On dérive deux fois par rapport à q on trouve : $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} (k^2-k)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-2} - \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-2} = \frac{2q}{(1-q)^3}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}$

Donc $E(X^2) = \frac{2pq}{p^3} + \frac{p}{p^2}$.

$V(X) = \frac{2pq}{p^3} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1-q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$

$$
\begin{aligned}
\textbf{3. } \varphi_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(ikt)pq^{k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(ikt)q^k \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} (\exp(it)q)^k \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{q\exp(it)}{1-q\exp(it)}\right), \text{ car } \sum_{k=p}^{+\infty} x^k = \frac{x^p}{1-x} \ |x| < 1 \\
&= \frac{p\exp(t)}{1-q\exp(it)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{4. } M_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(kt)pq^{k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(kt)q^k \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} (\exp(t)q)^k \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{q\exp(t)}{1-q\exp(t)}\right), \text{ car } \sum_{k=p}^{+\infty} x^k = \frac{x^p}{1-x} \ |x| < 1 \\
&= \frac{p\exp(t)}{1-q\exp(t)}, \text{ est définie si } q\exp(t) < 1 \text{ ou } t < -\ln(q).
\end{aligned}
$$

■

2.2 Lois continues usuelles

Cette partie est consacrée aux lois usuelles continues ou on va citer quelques une d'entres elles (uniforme, exponentielle, normale, khi-deux, ...ect) et décrire leurs divers caractèristiques.

2.2.1 Loi uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$

On dit que la v.a X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ qu'on note par $X \rightsquigarrow \mathcal{U}[a,b]$, si sa densité est donnée par[6]

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b]; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Sa fd est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Propriété 2.2.1 *1.* $E(X) = (a+b)/2$.

2. $V(X) = (b-a)^2/12$.

3. $\varphi_X(t) = \dfrac{\exp(itb) - \exp(ita)}{(b-a)it}$ *avec* $t \neq 0$.*[2]*

4. $M_X(t) = \dfrac{\exp(tb) - \exp(ta)}{(b-a)t}$ *avec* $t \neq 0$.

Preuve. ([6]p144, 155)

$$\textbf{1}.\ E(X) = \int_a^b x f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\left[x^2/2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = (a+b)/2.$$

2. $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2).$$

$$V(X) = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 = (b-a)^2/12.$$

$$\textbf{3.}\ \varphi_X(t) = \int_a^b \exp(itx) f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp(itx)dx = \frac{1}{b-a}\left[\exp(itx)/it\right]_a^b = (\exp(itb)-\exp(ita))/(b-a)it.$$

$$\textbf{4.}\ M_X(t) = \int_a^b \exp(tx) f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp(tx)dx = \frac{1}{b-a}\left[\exp(tx)/t\right]_a^b = (\exp(tb)+\exp(ta))/(b-a)t.$$

■

2.2.2 Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$, On dit que la v.a X Suit la loi exponentielle de paramètre λ [1]si la fd donnée par..

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), x \geq 0.$$

et par la dérivation, La densité est.[3].

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x \geq 0.$$

avec :

1. $E(X) = 1/\lambda$.
2. $V(X) = 1/\lambda^2$.
3. $\varphi_X(t) = \lambda/(\lambda - it)$.
4. $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$.

Preuve. ([3]p22;[6]p152)

$$\begin{aligned} M_X(t) = \quad &= \int\limits_0^{+\infty} \exp(tx)\lambda \exp(-\lambda x)dx \\ &= \lambda \int\limits_0^{+\infty} \exp[(t-\lambda)x]dx, \text{ posant } u = (t-\lambda)x \text{ et en supposant } t < \lambda \text{ pour la convergence.} \\ &= -\frac{\lambda}{(t-\lambda)} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(u)du \\ &= -\frac{\lambda}{(t-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)}, ([\exp(u)]_{-\infty}^{0} = 1 - 0 = 1) \end{aligned}$$

- On dérivée $M_X(t)$ deux fois, on donnée :

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, M''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}.$$

$$\begin{aligned} E(X) \quad &= M'_X(0) \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) \quad &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= M''_X(0) - (M'_X(0))^2 \\ &= \frac{2\lambda}{(\lambda)^3} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 \\ &= 1/\lambda^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(itx)\lambda\exp(-x)dx = \\
&\lambda\int_0^{+\infty} \exp[-(\lambda - it)x]dx \\
&= \frac{\lambda}{(\lambda - it)}\int_0^{+\infty} (\lambda - it)\exp[-(\lambda - it)x]dx \\
&= \frac{\lambda}{(\lambda - it)}, \int_0^{+\infty} (\lambda - it)\exp[-(\lambda - it)x]dx = 1 \text{ car } X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda - it).
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Loi gamma $\Gamma(\lambda; r)$

Soient $r > 0, \lambda > 0$. On definit la fonction gamma Γ par :

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}\exp(-x)dx.$$

On dit que la v.a X suit la loi gamma des paramètre λ, r ($X \rightsquigarrow \Gamma(\lambda; r)$) si sa fonction de densité f_X est donnée par.[1].

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1}\exp(-\lambda x), x \in \left]0, +\infty\right[.$$

La v.a X suit la loi gamma est somme des v.as suit la loi exponentielle et sont independants.

1. $E(X) = r/\lambda$.
2. $V(X) = r/\lambda^2$.
3. $\varphi_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r$.
4. $M_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$.

Preuve. ([6]p144, 155;[3]p56)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\exp(-\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^r\exp(-\lambda x)dx, \text{on pose } u=\lambda x \Longrightarrow dx=\frac{1}{\lambda}du. \\
&= \frac{1}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}u^r\exp(-u)dx \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)} \\
&= \frac{r\Gamma(r)}{\lambda\Gamma(r)}, \Gamma(r+1)=r\Gamma(r) \\
&\frac{r}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Afin de calculer la $V(X)$, on calcule d'abord $E(X^2)$ sachant que

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\exp(-\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{r+1}\exp(-\lambda x)dx, \text{ on pose } u=\lambda x \Longrightarrow dx=\frac{1}{\lambda}du \\
&= \frac{1}{\lambda^2\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}u^{r+1}\exp(-u)dx \\
&= \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^2\Gamma(r)} \\
&= \frac{(r+1)\Gamma(r+1)}{\lambda^2\Gamma(r)} \\
&= \frac{r(r+1)}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \dfrac{r(r+1)}{\lambda^2} - \dfrac{r^2}{\lambda^2} = \dfrac{r^2+r-r^2}{\lambda^2} = r/\lambda^2.$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_0^{+\infty}\exp(itx)f_X(x)dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}x^{r-1}\exp[-(\lambda-it)x]dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda-it)^{r-1}}\int_0^{+\infty}[(\lambda-it)x]^{r-1}\exp[-(\lambda-it)x]dx, \text{ car multiplié par } \left(\frac{\lambda-it}{\lambda-it}\right)^{r-1} \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda-it)^r}\int_0^{+\infty}u^{r-1}\exp(-u)dx, (u=(\lambda-it)x \Longrightarrow dx=(1/\lambda-it)du) \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda-it)^r}\Gamma(r) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^r.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(tx) f_X(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(tx) \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp(-\lambda x)dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} x^{r-1} \exp[-(\lambda - t)x]dx, \text{ multiplié par } \left(\frac{\lambda - t}{\lambda - t}\right)^{r-1} \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda - t)^{r-1}} \int_0^{+\infty} [(\lambda - t)x]^{r-1} \exp[-(\lambda - t)x]dx, \text{ on pose } u = (\lambda - t)x \Longrightarrow dx = (1/\lambda - t)d \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda - t)^r} \int_0^{+\infty} u^{r-1} \exp(-u)dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(\lambda - t)^r} \Gamma(r) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r.
\end{aligned}$$

■

2.2.4 Loi Normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, On dit que la v.a X suit la loi normale (ou gaussienne) si sa fonction de densité f est[1] :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2), x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

Pour $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ on a $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$ loi normale centreé réduite

Donc la fd :

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp(-x^2/2)dx.$$

$X = \mu + \sigma Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \Longleftrightarrow Z = (X - \mu)/\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

Preuve. ([3]p57)

– Soient F_Z et F_X les fd respectives de Z et X

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\
&= \mathbb{P}((X - \mu)/\sigma \leq z) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma z) \\
&= F_X(\mu + \sigma z).
\end{aligned}$$

et en dérivant F_Z et F_X par rapport à z,on a :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sigma f_X(\mu+\sigma z) \\ &= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-(\mu+\sigma z-\mu)^2/2\sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2). \end{aligned}$$

■

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

– $E(X)=\mu, V(X)=\sigma^2$.

– $\varphi_X(t)=\exp(i\mu t+t^2/2\sigma^2), M_X(t)=\exp(\mu t+t^2/2\sigma^2)$.

Preuve. ([3]p58,[2]p59)

- On calcul $M_X(t)$ de $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tz)\exp(-z^2/2)dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tz-z^2/2)dz, (tz-\tfrac{1}{2}z^2=-\tfrac{1}{2}(z-t)^2+\tfrac{1}{2}t^2) \\ &= \exp(t^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(z-t)^2/2)dz, \text{on pose } u=z-t\Longrightarrow du=dz \\ &= \exp(t^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2/2)du, (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2/2)du=1) \\ &= \exp(t^2/2). \end{aligned}$$

$M_Z'(t)=t\exp(t^2/2), E(Z)=M_Z'(0)=0.$

$M_Z''(t)=(1+t^2)\exp(t^2/2), V(Z)=M_Z''(0)=1.$

Pour $X=\mu+\sigma Z$ on a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= E(\mu+\sigma Z) \\ &= \mu+\sigma E(Z) \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(\mu+\sigma Z) \\ &= \sigma^2 V(Z) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(\exp(tX)) \\
&= E(\exp(t\mu + t\sigma Z)) \\
&= \exp(t\mu)E(\exp((t\sigma)Z)) \\
&= \exp(t\mu)\exp(t^2/2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itz)\exp(-z^2/2)dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itz - z^2/2)dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}(z^2 - 2itz + (it)^2 - (it)^2))dz, \text{on pose } u = z - it \Longrightarrow du = dz \\
&= \exp(-t^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(z-it)^2/2)dz \\
&= \exp(-t^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2/2)du, \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2/2)du = 1\right) \\
&= \exp(-t^2/2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E(\exp(itX)) \\
&= E(\exp(it(\mu + \sigma Z))) \\
&= \exp(itu)E(\exp((it\sigma)Z)) \\
&= \exp(itu)\exp(-(\sigma t)^2/2).
\end{aligned}
$$

■

2.2.5 Loi Khi-deux χ^2_ν

Soient $Z_1, Z_2, ..., Z_\nu$ une suite des v.as indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Alors la v.a $Z = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ suit la loi du loi Khi-deux à ν degrés liberté, notée χ^2_ν. et la densité sa loi es[2]t :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} \exp(-x/2), x \in]0, +\infty[..$$

On peut remarque que la loi χ^2_ν est la loi $\Gamma(1/2;\nu/2)$, alors

– $E(Z) = \nu, V(Z) = 2\nu$.

– $M_Z(t) = (1-2t)^{-\nu/2}, \varphi_Z(t) = (1-2it)^{-\nu/2}$

Preuve. ([2] p107)

soit $Z \rightsquigarrow \Gamma(1/2;\nu/2)$ et d'aprés la remarque ona

$E(Z) = \dfrac{\nu/2}{1/2} = 2\nu/2 = \nu.$

$V(Z) = \dfrac{\nu/2}{(1/2)^2} = 4\nu/2 = 2\nu.$

$M_Z(t) = \left(\dfrac{1/2}{(1/2)-t}\right)^{\nu/2} = \left(\dfrac{2/2}{1-2t}\right)^{\nu/2} = (1-2t)^{-\nu/2}.$

$\varphi_Z(t) = \left(\dfrac{1/2}{(1/2)-it}\right)^{\nu/2} = \left(\dfrac{2/2}{1-2it}\right)^{\nu/2} = (1-2it)^{-\nu/2}$ ■

2.2.6 Loi Student $\mathcal{S}t(\nu)$

La loi student est le quotient entre une v.a suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$ et la racine carrée d'une v.a suit la loi χ^2_ν.

Définition 2.2.1 *Soient Z une v.a suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et Q v.a suit la loi χ^2 à ν degrés de liberté, telle que Q v.a indépendante de v.a Z*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Q/\nu}}$$

Suit la loi Student à ν degrés de liberté, notée $\mathcal{S}t(\nu)$.

la fonction de densité sa loi est donnée par.[3].

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(v/2)} (1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$$

avec

- $E(T) = 0$ *si* $\nu > 1$.

- $V(T) = v/(v-1)$ *si* $\nu > 2$.

2.2.7 Loi Fisher -Snedecor $\mathcal{F}(m; n)$

La loi de Fisher -Snedecor de paramètre m et n est la loi du quotient de deux v.as qui suit la loi Khi-deux à respectivelent m et n degrés de liberté.

Définition 2.2.2 *Soient Q_1 et Q_2 deux v.as indépendantes telles que $Q_1 \rightsquigarrow \chi^2_m$ et $Q_2 \rightsquigarrow \chi^2_n$ alors la v.a*

$$F = \frac{Q_1/m}{Q_2/n}$$

la densité de la loi $\mathcal{F}(m; n)$ est.[3].

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{m/2-1}}{(1-(m/n)x)^{\frac{m+n}{2}}} \quad si\ x > 0..$$

avec

- $E(F) = n/(n-2)$ *si* $n > 2$.
- $V(F) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ *si* $n > 4$.

Chapitre 3

Application sous R

La simulation est une partie pratique dans certain logiciel, dans ce dernier chapitre nous allons présente quelque propriétés théorique de certain loi usuelle de probabilité (fonction de densité et fonction de répartition) de deuxième chapitre à l'aide du logiciel d'analyse statistique **R 3.0.2.**

3.1 lois discrètes

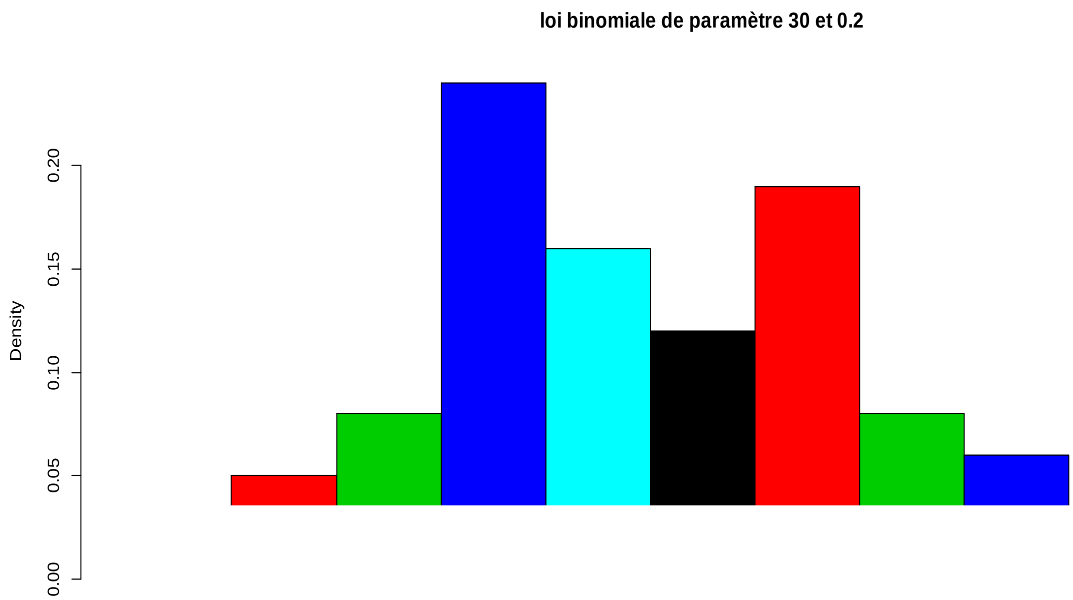
On simule des observations selon une loi de probabilité.

Loi binomiale

On prende $n = 30, p = 0.2$

Programme en code R

```
> X<-rbinom(100,30,0.2)
> Y<-dbinom(X,30,0.2)
> hist(X,proba=Y,breaks=10,col=1 :5,main="loi binomiale de paramètre 30 et 0.2")
```



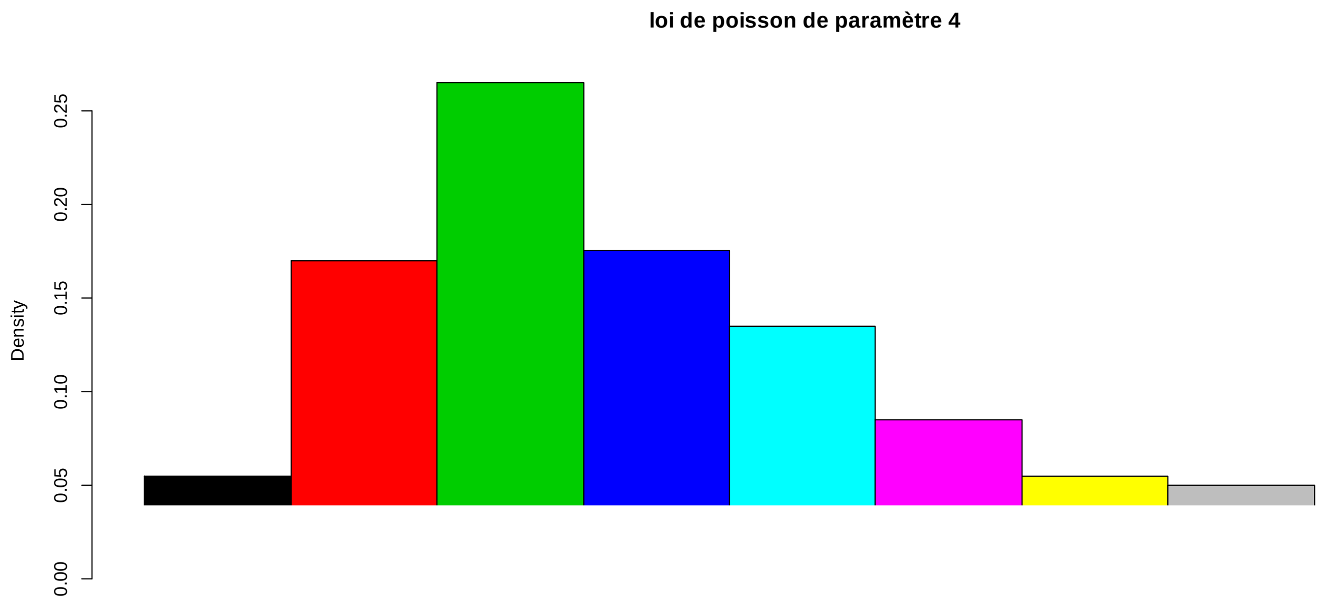
Loi binomiale $\mathcal{B}(30, 0.2)$

Loi poisson

On prend l'exemple (2.1.2)

Programme en code R

```
> X<-rpois(200,4)
> Y<-dpois(X,4)
> hist(X,proba=Y,col=1 :10,main=" loi de poisson de paramètre 4")
```



Loi poisson $\mathcal{P}(4)$

Loi géometrique

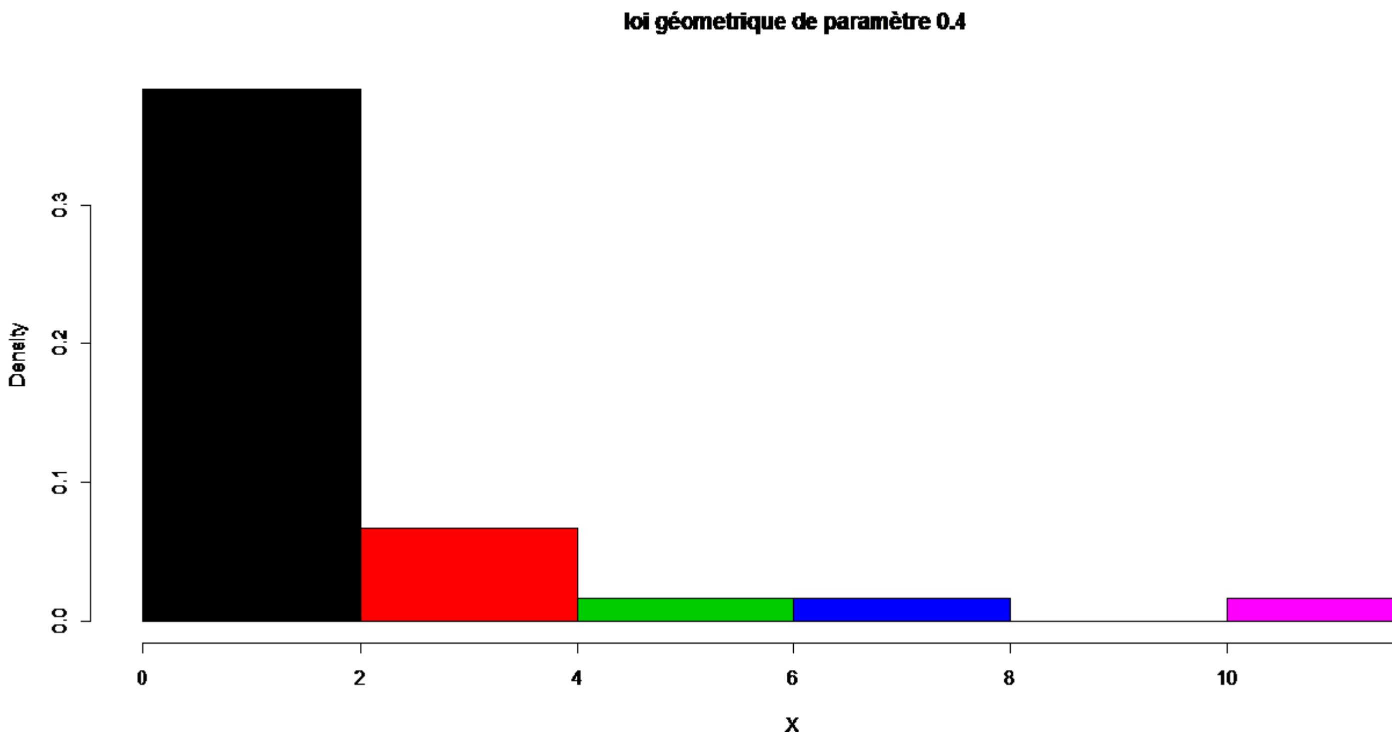
On prend $p = 0.4$

Programme en code R

> X<-rgeom(50,0.4)

> Y<-dgeom(X,0.4)

> hist(X,proba=Y,col=1 :10,main=" loi géometrique de paramètre 0.4")



Loi géometrique $\mathcal{G}(0.4)$

3.2 lois continues

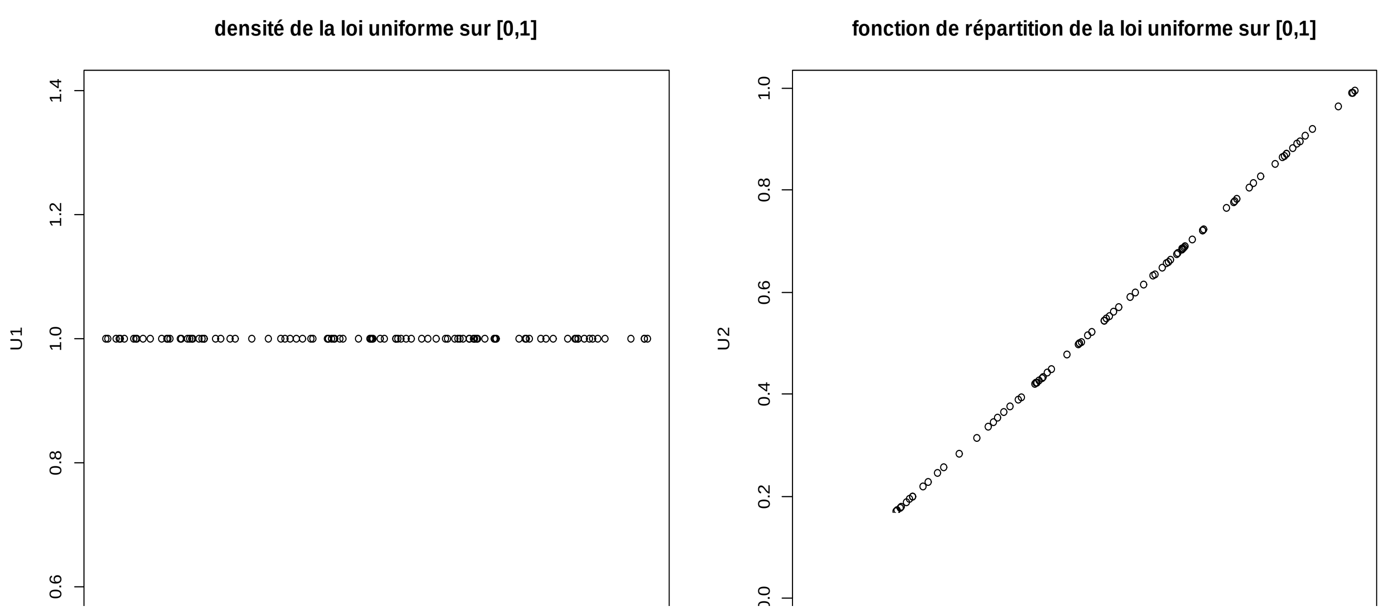
On représente la fonction de densité et fonction de répartition des lois continues.

Loi uniforme

en prend l'intervale $[0, 2]$.

Programme en code R

```
> U<-runif(100,0,1)
> U1<-dunif(U)
> U2<-punif(U)
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(U,U1,main="densité de la loi uniforme sur [0,1]")
> plot(U,U2,main="fonction de répartition de la loi uniforme sur [0,1]")
```



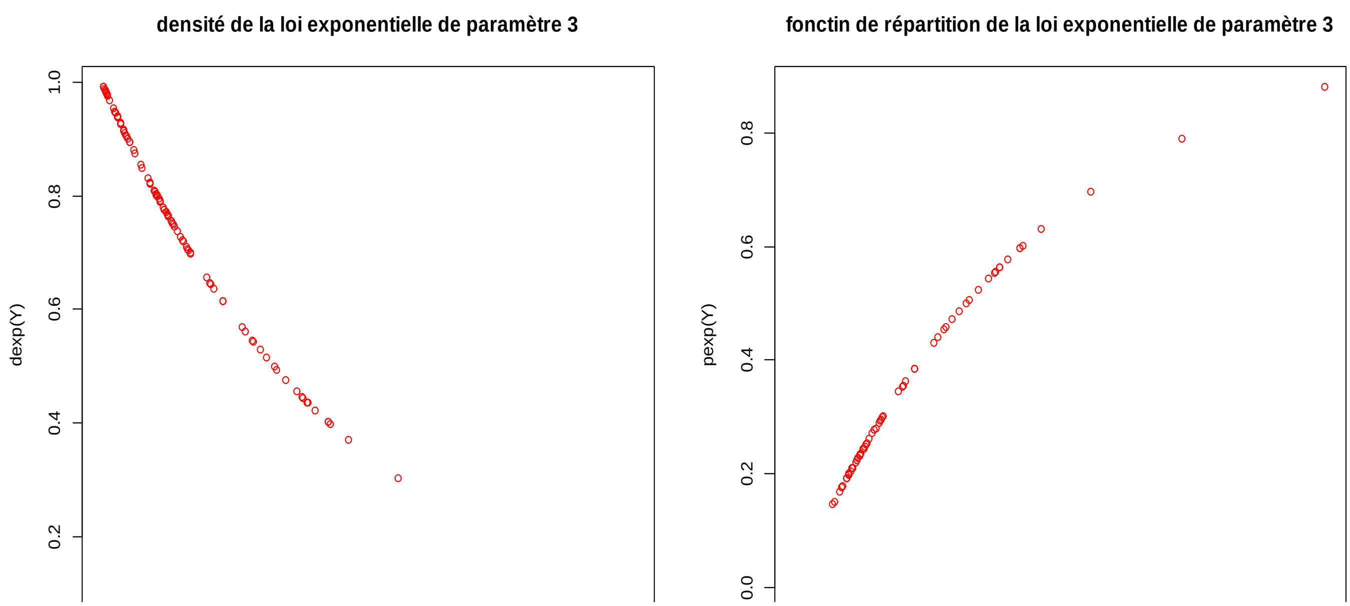
Loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$

Loi exponentielle

on prend $\lambda = 3$

Programme en code R

```
Y<-rexp(100,3)

> Y1<-dexp(Y)

> Y2<-pexp(Y)

> par(mfrow=c(1,2))

> plot(Y,dexp(Y),main="densité de la loi exponentielle de paramètre 3",col="2")

> plot(Y,pexp(Y),main="fonctin dr répartition de la loi exponentielle de paramètre 3",col="2")
```



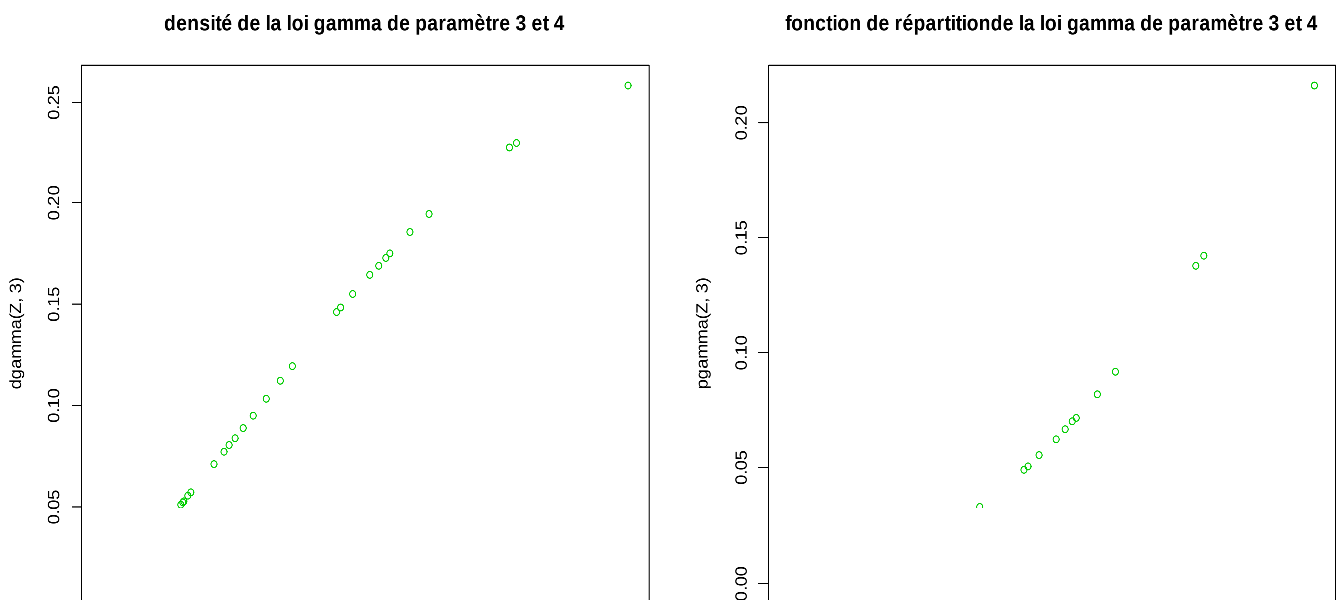
Loi exponentielle $\mathcal{E}(3)$

Loi gamma

on prend $\lambda = 3, r = 4$

Programme en code R

```
> Z<-rgamma(30,3,4)
> Z1<-dgamma(Z,3)
> Z2<-pgamma(Z,3)
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(Z,dgamma(Z,3),main="densité de la loi gamma de paramètre 3 et 4",col="3")
> plot(Z,pgamma(Z,3),main="fonction de répartitionde la loi gamma de paramètre 3 et 4",col="3")
```



Loi gamma $\mathcal{G}(3,4)$

Loi normale

On prend $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

Programme en code R

> X<-rnorm(1000,0,1)

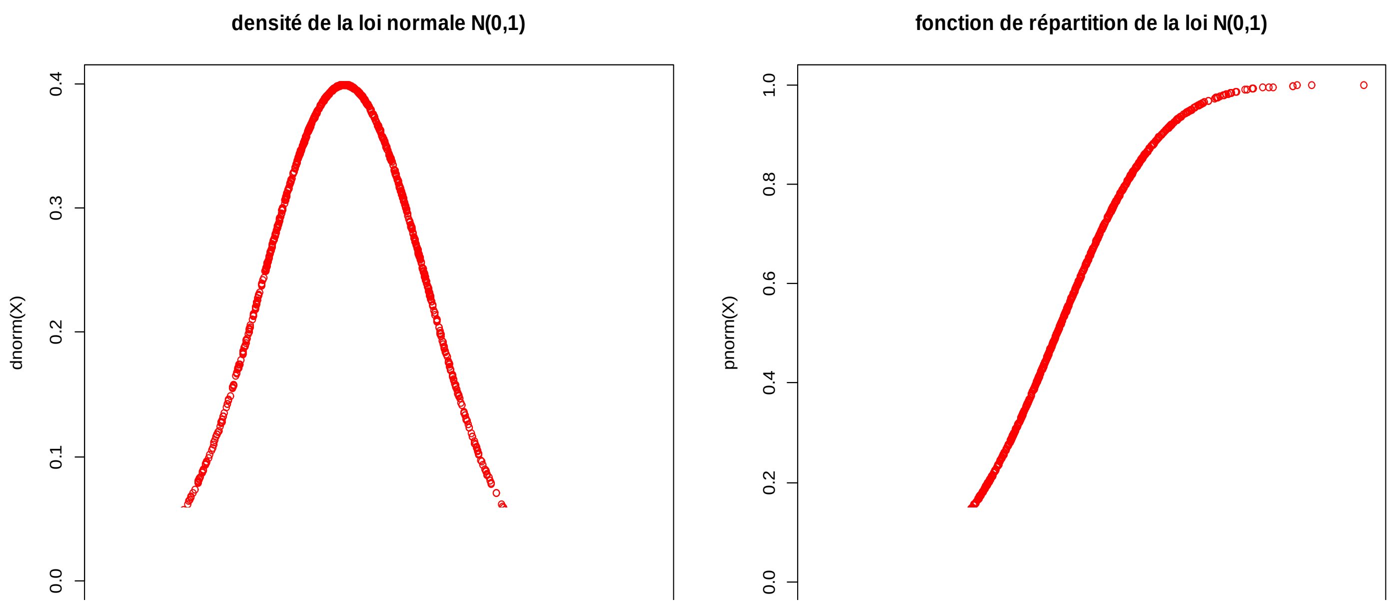
> X1<-dnorm(X)

> X2<-pnorm(X)

> par(mfrow=c(1,2))

> plot(X,dnorm(X),type="p",main="densité de la loi normale N(0,1)",col="red")

> plot(X,pnorm(X),type="p",main="fonction de répartition de la loi N(0,1)",col="red")



Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Loi Khi-deux

On prend degrés de libereté $\nu = 4$.

Programme en code R

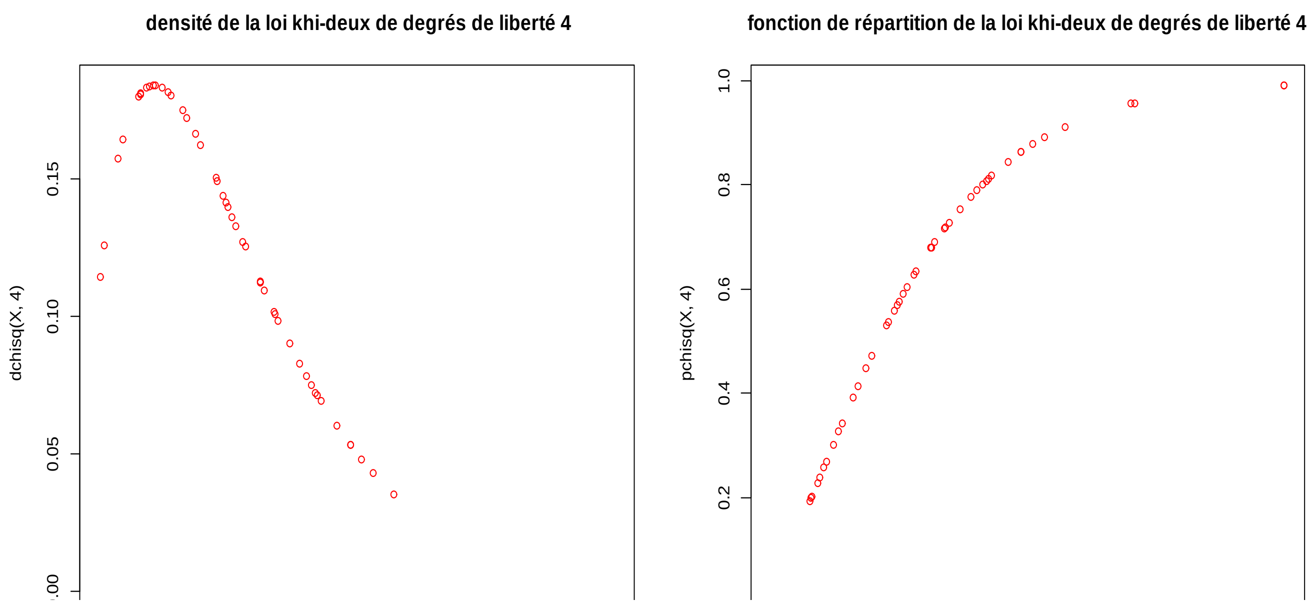
> X1<-dchisq(X,4)

> X2<

> par(mfrow=c(1,2))

> plot(X,dchisq(X,4),type="p",main=" densité de la loi khi-deux de degrés de liberté 4",col="red")

> plot(X,pchisq(X,4),type="p",main="fonction de répartition de la loi khi-deux de degrés de liberté 4",col="red")



Loi khi-deux $\chi^2(4)$

Loi student

On prend degrés de liberté $\nu = 5$.

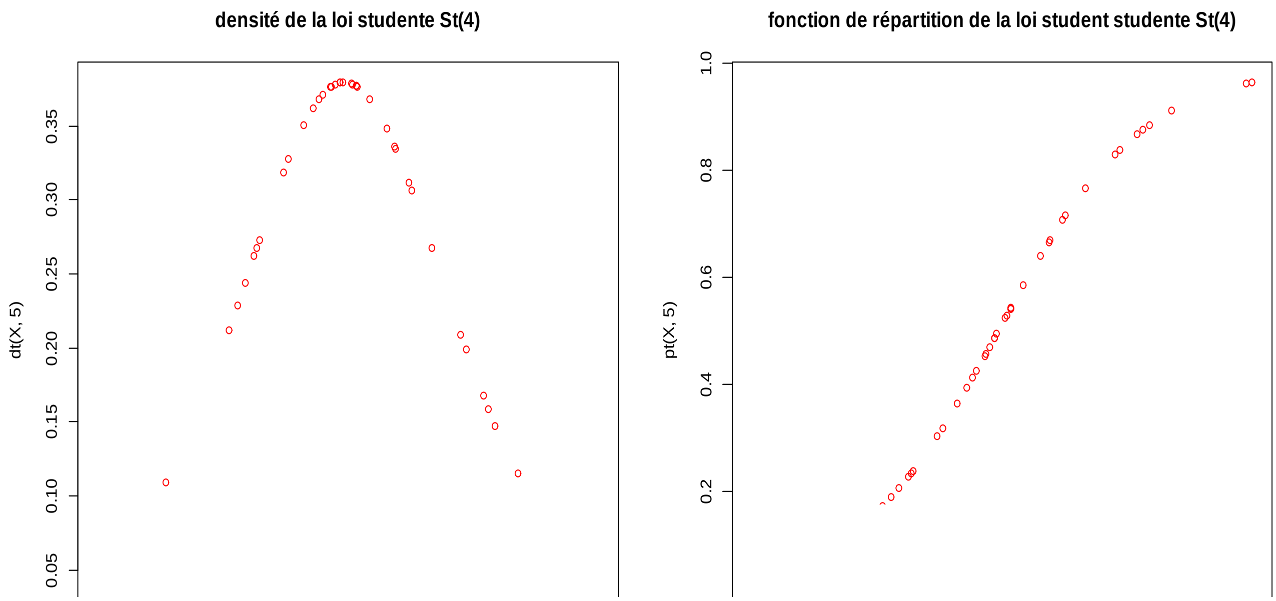
Programme en code R

> X<-rt(40,5)

> X1<-dt(X,5)

> X2<-pt(X,5)

```
> par(mfrow=c(1,2))

> plot(X,dt(X,5),type="p",main="densité de la loi studente St(5)",col="red")

> plot(X,pt(X,5),type="p",main="fonction de répartition de la loi student studente St(5)",col="red")
```



Loi student $\mathcal{S}t(5)$

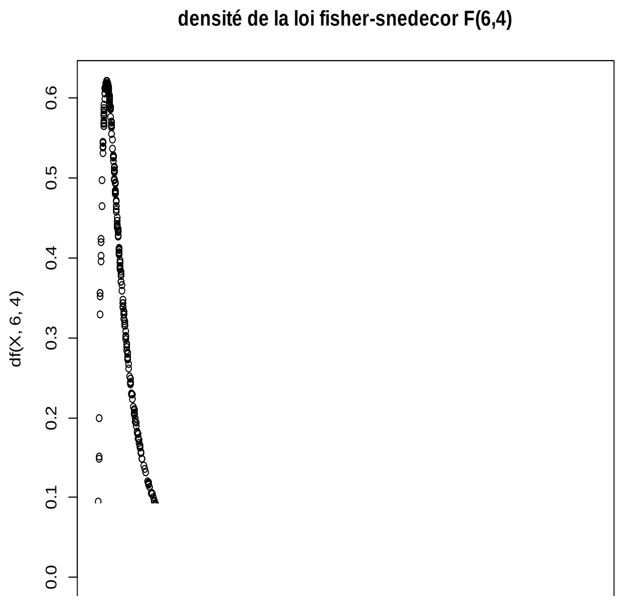
Loi fisher-snedecor

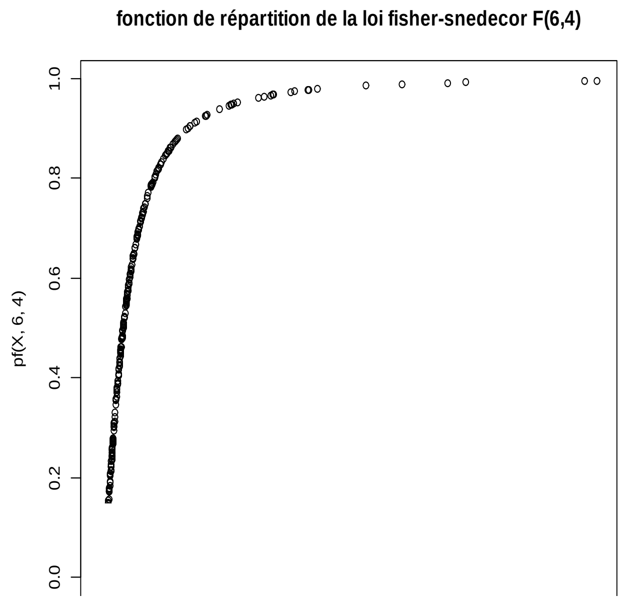
on prend $m = 6, n = 4,$

Programme en code R

```
> X<-rf(300,6,4)

> X1<-df(X,6,4)

> X2<-pf(X,6,4)

> par(mfrow=c(1,2))

> plot(X,df(X,6,4),type="p",main="densité de la loi fisher-snedecor F(6,4)")
```

```
> plot(X,pf(X,6,4),type="p",main="fonction de répartition de la loi fisher-snedecor F(6,4)")
```





Loi de fisher $\mathcal{F}(6,4)$

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudie les variables aléatoires dans les deux cas continue et discontinue d'où ona présentés les lois des probabilités les plus connues avec une étude de simulation de ces dernières pour les fonctions de densites et les fonctions de répartitions.

Bibliographie

[1] F, Boukhari. (2017). Probabilité. Université Abou Bekr Belkaid.

[2] G, Saporta. (2011). Probabilités, Analyse des Données et Statistique $3^{éme}$ edition. Edition Technip.

[3] M, Lejeune. (2010). Satatistique la Théorie et ses Applications. deuxiéme edition. Springe.

[4] R.V, Hogg. A.T, Craig. (1978). Introduction to mathematical statictics. Fourth edition. Macmillam.

[5] S, Lipshutz. (1973). Probabilités-cours et problémes. Serie Schaum. Université de Temple. McGraw-Hill. Inc. Paris.

[6] Y, Suhov. M, kelbert. (2005). Probability and Statistics by Example Volume 1. Basic Probability and Statistics. Cambridge University Press..

Annexe A : Logiciel *R*

R est systéme, communément appelé langage et logiciel qui permet de réaliser des analyses statistique, plus particuliérement , il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données , les calculs et les représentations graphiques, R a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets, Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi vararies que les modéles linéaires(simples et généralisés), la régression(linéairel et non linéaire), les séries chronologique, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des donnés,...plusieurs paquets, tels *ade4, FactoMineR, MASS, multiVarariate, scatterplot3d et rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des donnés statistique multidimensionnelles.

Il a été initialement créé, en 1996 par Robert Gentleman et Ross Ihaka du département de statistique de l'Université d'Auckland en NouVarelle Zélande. Depuis 1997 il s'est forme une équipe "*R Core Team*" que dévareloppe *R*.Il est conçu pour pouvarior étre utilisé a Varec les systémes d'expoloitation *Unix, Lunix, Windows et MacOS.*

Un élément clé dans la missionde dévareloppement de *R* est le *ComprehensiVare R ArchiVare Network* (CORAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CORAN est situé Autriche à Varinne, on peut y accéder par l'URL :"*http ://cran.r-project.org/".* Les autres site de CORAN, appelés site miroirs, sont répandus partout dans le monde.

R est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence" Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à liadresse "*http ://www.R-project.org".* Il est souvarent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niVareau, dévareloppé par les *ATUT Bell Laboratories* et plus particuliérement par *Rick Becker, John Chambers* et *Allan Wilks. S* est utilisable à traVarers le logiciel *S-plus* qui est commercialisé par la société Insightful (*http ://www.splus.com/*).

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Ω	ensemble fondamentale.
ω	élément de Ω.
$\mathcal{P}(\Omega)$	l'ensemble de parties de Ω.
$\varnothing$	l'ensemble vide
$\mathcal{A}$	tribu sur Ω .
$\mathbb{P}$	loi du probabilitié.
$A_1, A_2, \cdots, A_n$	n-èvénements de$A$.
$\mathbb{P}_B$	loi de probabilité conditionnelle.
$\overline{A}$	complémentaire de A.
$(\Omega, \mathcal{A})$	espace probabilisable.
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	espace de probabilité.
X	variable aléatoire.
f_X	fonction de densité de X.
F_X	fonction de répartition de X.
$E(X)$	espérance mathématique de X.
$V(X)$	variance mathématique de X.
v.a	variable aléatoire.
i.e	c'est à dire.
fd	fonction de répartition.