République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

KERMICHE Farida

Titre :

Théorème de vérification en contrôle optimal stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**KHELFALLAH Nabil**	UMKB	Président
Pr.	**CHIGHOUB Farid**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LAKHDARI Imad Eddine**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie cet humble travail à ma mère et mon père pour leur amour inestimable et leur confiance,

A mon grand-père *pour sa douceur, a mon frère* ***Farid*** *pour leur tendresse et à son fils* ***Iyed*** *et mes chères soeurs, a mon oncle* ***Brahim*** *et ma tante* ***Warda*** *pour leur précieux encouragements,*

A mes amis ma source de bonheur Meriem, Chaima, Houda, Sihem, Baya, Amel.

A tous les nombres de ma famille petits et grands.

A celui qui partage mes peines et mes joies Azzedine mon futur mari.

REMERCIEMENTS

*J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "**DIEU**" qui m'a donné la volonté et le courage pour continue ce travail.*

*Tout mon remerciement à mon encadreur **Pr.Chighoub Farid** d'avoir accepté de diriger ce travail, il m'a guidé et m'a aidé à trouver des solutions pour avancer.*

Un grand merci à tous les nombres du jury pour leur présentation et pour accepter d'évaluer et de juger ce mémoire.

Ensuite, Je tiens à remercier spécialement mes professeurs et mes enseignants du département de mathématiques pour la richesse et la qualité de leur enseignement.

Enfin, mes remerciements s'adressent également à mes parents et mes soeurs et mon frère.

Un remerciement particulier à celui qui a toujours répondu présent pour moi et qui a su apporter une touche de bonheur dans ma vie, Azzedine.

Table des matières

Introduction

Le théorème de vérification en contrôle optimal stochastique est basé de vérifier les conditions suffisantes coïncide avec la fonction de valeur, et de choisir une fonction de vérification (test) w puis on pose des conditions pour que le contrôle devient un contrôle optimal ou bien non, cette vérification permet de résoudre le problème original d'Hamilton Jacobi Bellman :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - G(t,x,u_t,D_x v(t,x),D_{xx}v(t,x)) = 0,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

et déterminer la fonction de valeur :

$$v(t,x) = \inf_{u \in U} J(t,x,u),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

avec une condition terminale :

$$v(T,x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

puis nous obtenons le contrôle optimal markovien $\hat{u}_s = \hat{u}(s, x_s^{t,x})$, $t \leq s \leq T$.

Mon travail se compose de deux chapitres :

Dans le premier chapitre on va faire une rappelle sur le calcul stochastique, et souligne sur des définitions qu'on l'utilise dans le chapitre suivant.

Dans le deuxième chapitre on va étudier le théorème de vérification au sens de la programmation dynamique, l'équation de programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (non linéaires) appelé équation d'Hamilton Jacobi Bellman de premier ordre dans le cas déterministe ou de deuxième ordre dans le cas stochastique, généralement l'équation aux dérivées partielles n'est pas facile à résoudre, il donne une solution régulière, on va donner un exemple de singularité dans le cas déterministe où la fonction de valeur n'est même pas dérivable, donc il suffit de supposer que la solution soit de classe $C^{1,2}$, alors dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité, dans ce sens l'existence et la continuité de la solution est garantie, le but de ce chapitre est de caractériser la fonction de valeur comme une solution de viscosité de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman et de déterminer sa condition terminale.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Le but de ce chapitre est de donner des définitions de base et des résultats principaux pour l'utiliser aux prochains chapitres.

Définition 1.1.1 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ pour $0 \leq t \leq s$.*

On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue à droite si : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$, $\forall t$ telle que : $\mathcal{F}_{t^+} = \underset{s>t}{\cap} \mathcal{F}_s$.

Et continue à gauche si : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$, $\forall t$ telle que : $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\underset{s<t}{\cup} \mathcal{F}_s\right)$.

On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$contient tous les ensembles P-négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, et $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable appelé l'espace des états, et T un ensemble des temps, on appelle processus stochastique indexé par T une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{F})$, généralement $(E, \mathcal{F}) = \left(\mathbb{R}^d \times \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = [0, a]$ pour les processus à* *temps continu.*

$$\begin{aligned} X : (\mathbb{R}^+ \times \Omega) &\to \mathbb{R}^d \\ (t, \omega) &\to X_t(\omega) \end{aligned},$$

La fonction $t \to X_t(\omega)$ pour t fixé $X_t(\omega)$ états de système v.a associée à t, et pour ω fixé appelé la trajectoire de $(X_t)_{t \in T}$ associée à ω.

Un processus est continu si les trajectoires $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Un processus est dit càdlàg (continue à droite, pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche ; Même définition pour càglàd.

Notation 1.1.1 *X un processus stochastique càdlàg (resp càglàd) pour $t \geq 0$, $X_t = X_{t^-}$, telle que : $X_{t^-} = \lim\limits_{s \to t} \underset{s<t}{X_s}$.*

$$(resp : \forall t : X_t = X_{t^+}, \text{ telle que : } X_{t^+} = \lim_{s \to t} \underset{s>t}{X_s}).$$

Remarque 1.1.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est-à-dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma \{X_s, s \leq t\}$.*

Définition 1.1.3 (mesurabilité) *Un processus stochastique X,*

$$\begin{aligned} X : (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \beta(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}) &\to \left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (t, \omega) &\to X_t(\omega) \end{aligned}, \text{ est mesurable,}$$

C'est-à-dire : si pour tout $A \in \beta\left(\mathbb{R}^d\right)$, l'ensemble $\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$,appartient à la tribu $\beta(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$.

Définition 1.1.4 *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Définition 1.1.5 *Soient X et Y deux processus X est une modification (ou une version) de Y si, pour tout $t \geq 0$, les v.a X_t et Y_t sont égales P-p.s :*

$$\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1.$$

X et Y sont indistinguables si, P-p.s les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est-à-dire :

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification.*

Définition 1.1.6 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application* :

$$\begin{array}{c} X : ([0,t] \times \Omega, \beta\left([0,t]\right) \otimes \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (t,\omega) \to X_t(\omega) \end{array}, \text{ est mesurable.}$$

Proposition 1.1.1 *Si $(X_t)_{t\in T}$est un processus stochastique est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et si les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est progressivement mesurable.*

Proposition 1.1.2 *Si X un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Définition 1.1.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, T une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, T est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-temps d'arrêt si :*

$$\forall t \geq 0, \ \{T \leq t\} \in \mathcal{F}.$$

Proposition 1.1.3 *Soit X un processus progressivement mesurable et T un temps d'arrêt alors le processus X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable et le processus arrêté $\{X_{T\wedge t}, \ t \geq 0\}$ est progressivement mesurable.*

Définition 1.1.8 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* X *un processus à valeurs réelles* $\mathcal{F}_t$*-mesurable avec* $\forall t \geq 0$, $X_t \in L^1$ *on dit que :*

X_t *est une*$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-martingale si : pour* $0 \leq s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

X_t *est une*$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-sous-martingale si : pour* $0 \leq s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$.

X_t *est une*$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-sur-martingale si : pour* $0 \leq s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'arrêt) *Si* X *est une martingale et si* τ *et* σ *sont deux temps d'arrêt bornés telle que :* $\sigma \leq \tau$.
alors :

$$E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \ P\text{-p.s.}$$

Théorème 1.1.2 (Inégalités maximales) *Soit* X *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale et si les trajectoires de* $(M_T)_{T\geq 0}$ *sont continues à droite, alors pour tout* $c > 0$ *:*

$$P(\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \geq c) \leq \frac{1}{c} \sup_{s\in[0,t]} E[|X_s|].$$

Définition 1.1.9 *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles telle que :*

1. $W_0 = 0$ *P-p.s ;*
2. *pour* $0 < s < t$, $W_s - W_t$ *les accroissements sont des v.a indépendantes de la tribu* $\sigma\{W_u, u \leq t\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$ *;*
3. *le processus* $(W_t)_{t\geq 0}$ *admet des trajectoires continues ; pour tout* $t > 0$, *la variable aléatoire* W_t *suit la loi gaussienne centrée de variance* t *donc de densité :*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-x^2/(2t)\}.$$

Remarque 1.1.3 *Le mouvement brownien standard un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma\left(W_s,\ 0 \leq s \leq t\right)$.

Lemme 1.1.1 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien, les processus suivants sont des martingales par rapport à* $\mathcal{F}_t^W$:

1. $X_t = W_t^2 - t,$
2. $Y_t = \exp(W_t - \frac{t}{2}).$

Théorème 1.1.3 (théorème de représentation des martingales) *Soit* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *un M.B et sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*, soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*, alors il existe un processus adapté* H *telle que :* $E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$, *et,* $\forall t \in [0, T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^T H_s dW_s, \ \ P\text{-}p.s.$$

1.2 L'espérence conditionnelle

Définition 1.2.1 *Soient* H *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *et deux variables aléatoires* X, $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on a quelques propriétés de l'espérence conditionnelle :*

1. La linéarité : $\forall \alpha, \eta \in \mathbb{R}$ et si X, $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$E(\alpha X + \eta Y/H) = \alpha E(X/H) + \eta E(Y/H),$$

2. La monotonité : si X, $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$X \geq Y \Longrightarrow E(X/H) \geq E(Y/H),$$

3. Si X est H-mesurable alors :

$$E(X/H) = X,$$

4. Soit X, Y deux variables aléatoires, si Y est H -mesurable alors :

$$E\left(XY/H\right) = YE\left(X/H\right),$$

5. Si X est indépendant à la tribu H alors :

$$E\left(X/H\right) = E\left(X\right),$$

6. $H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{F}$ alors :

$$E\left(E\left(X/H_2\right)/H_1\right) = E\left(E\left(X/H_1\right)/H_2\right) = E\left(X/H_1\right).$$

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Soit X, Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{R}$ telle que :*
$E\left(|X|^p\right) < \infty$ et $E\left(|Y|^q\right) < \infty$ pour $p, q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :

$$E\left(|XY|\right) \leq E\left(|X|^p\right)^{\frac{1}{p}} E\left(|Y|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.2.2 (théorème de la convergence dominée de lebesgue) *Soit une suite de variables aléatoires $(X_t)_{t\geq 0}$ a valeur dans $\mathbb{R}$ telle que si on a :*

1. *$X_n \to X$, P.s,*
2. *$\exists$ une v.a Y tq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X| \leq |Y|$,*

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(X_n\right) = E\left(\lim_{n\to+\infty} X_n\right) = E\left(X\right).$$

1.3 Intégrale stochastique d'Itô

Définition 1.3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité, et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ on définit l'intégrale stochastique par la forme suivante :*

$$\int_0^t \theta_s dW_s,$$

avec : θ_s un processus stochastique.

Il possède quelques propriétés, on note Λ l'ensemble des processus θ adapté càglàd telle que :

$$E\left[\int_0^t |\theta_s|^2 ds\right] < \infty, \ \forall t,$$

1. *La linéarité : $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, et $\theta^1, \theta^2 \in \Lambda$,*

$$\int_0^t a\theta_s^1 + b\theta_s^2 dW_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + b\int_0^t \theta_s^2 dW_s,$$

2. *Le processus $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$ est une martingale $\theta \in \Lambda$, et $E[M_t] = 0$,*

   on a aussi :

$$E\left[M_t^2\right] = E\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Définition 1.3.2 (Processus d'Itô) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $(W_t)_{t\geq 0}$ un M.B réel, un processus d'Itô réel est un processus stochastique x à valeurs dans $\mathbb{R}$, continu adapté de la forme :*

$$x_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où : x_0 est un v.a $\mathcal{F}_0-$mesurable coefficient, b et σ sont deux processus progressivement *mesurable réel et adapté vérifiant les conditions suivantes :*

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty, \ P\text{-p.s et} \int_0^t \|\sigma_s\|^2\, ds < \infty, \ P\text{-p.s.}$$

le coefficient b est le drift, σ est le coefficient de diffusion.

Définition 1.3.3 (formule d/Itô) *Soit : $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}\left([0,T] \times \mathbb{R}\right)$, à dérivées bornées, on a :*

$$f(t, x_t) = f(0, x_0) + \int_0^t f_x(s, x_s) dx_s + \int_0^t f_s(s, x_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, x_s) \sigma_s^2 ds.$$

Définition 1.3.4 (Formule d'intégration par parties) *Soit W un M.B réels standard, soient X et Y deux processus d'Itô :*

$$\begin{cases} dx\left(t\right) = b_t dt + \sigma_t dW_t, \ x\left(0\right) = x_0 \\ dy\left(t\right) = a_t dt + \gamma_t dW_t, \ y\left(0\right) = y_0 \end{cases},$$

alors :

$$d\left[xy\right]\left(t\right) = x\left(t\right) dy\left(t\right) + y\left(t\right) dx\left(t\right) + \sigma\left(t\right) \gamma\left(t\right) dt.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties, telle que la quantité $\sigma\left(t\right)\gamma\left(t\right)$ correspond au crochet de x, y on la note $\langle x, y\rangle$.

1.4 Equation différentielle stochastique(EDS)

Définition 1.4.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme intégrale :*

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dW_s, \tag{1.1}$$

ou sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)ds + \sigma(t, x_t)dW_t \\ x_0 = x \end{cases},$$

telle que : $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ *qui sont mesurables, et on cherche à résoudre cette équation.*

Théorème 1.4.1 (existence et unicité) *Soient b et σ deux fonctions boréliennes, on suppose qu'il existe une constante C telle que, pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

1. *Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|,$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|),$$

3. $E\left[|Z|^2\right] < \infty$.

Alors l'EDS 1.1 possède une unique solution $(x_t)_{t\in[0,T]}$, la solution vérifie :
$E\left[\sup\limits_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right] < \infty$, *et appartient à :*

$$S^2_{\mathcal{F}}(0,T) = \left\{ \begin{array}{c} \phi_t,\ 0 \leq t \leq T,\ \textit{processus stochastique réel mesurable, } \mathcal{F}_t\textit{-adapté tel que :} \\ E[\int\limits_0^T \phi_s^2 ds] < \infty, \end{array} \right\}$$

Proposition 1.4.1 *Sous le théorème d'existence et unicité, soit $(x_s^{t,x}, s \geq t)$ une solution de l'équation 1.1 de condition initiale x_0, alors $(x_s^{t,x},\ s \geq t)$ est un processus de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$:*

$$E(f(x_s)/\mathcal{F}_t) = E\left(f(x_s)/x_t\right) = \phi(s,t,x_t),$$

où :

$$\phi(s,t,x_t) = E\left(f(x_s^{t,x})\right),$$

telle que : $x_s^{0,x} = x_s^{t,x_t^{0,x}}$, $0 \leq t \leq s$.

Chapitre 2

Théorème de vérification au sens de la programmation dynamique

L'étape principale dans la programmation dynamique est de recherche une solution régulière (classique) de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman, cette recherche conduite de vérifier les conditions suffisantes coïncide avec la fonction valeur ce résultat appelé théorème de vérification, qui permet de résoudre le problème original d'HJB et déterminer la fonction valeur puis nous obtenons le contrôle optimal markovien associé à ce problème.

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité filtrée avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions usuelles, soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, on note $\mathcal{U}$ le sous-ensemble de tous les processus $\{u_t\}_{t\geq 0}$ progressivement mesurable à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^n$, les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés processus de contrôle admissible.

Nous considérons l'équation différentielle stochastique, pour chaque processus de contrôle u_t.

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dW_t, \ \forall t \in [0, T] \\ x_0 = x \end{cases}, \tag{2.1}$$

où : $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$, sont deux fonctions qui satisfont, pour une constante $M > 0$,

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| + |\sigma(t, x, u) - \sigma(t, y_t, u)| \leq M |x - y|, \tag{2.2}$$

$$|b(t, x, u)| + |\sigma(t, x, u)| \leq M(1 + |x|), \tag{2.3}$$

Sous les deux conditions 2.2 et 2.3 cette équation 2.1 admet une solution unique pour une condition initiale donnée x.

On définit la fonction de coût : $J : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$J(t, x, u) = E^{t,x} \left[\int_t^T f(s, x_s, u_s)dr + g(x_T) \right], \tag{2.4}$$

où :

$E^{t,x}$ est l'opérateur d'espérance conditionnelle sachant $x_t = x$, et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables.

On suppose que :

$$|f(t, x, u)| + |g(x)| \leq M(1 + |x|^2), \tag{2.5}$$

pour une constant M, la condition de croissance quadratique 2.5, implique que J est bien définie.

Le but de cette section est d'étudier la minimisation (ou bien maximiser) de la fonction de coût par rapport aux contrôle, on introduit la fonction valeur $v(t, x)$ du problème 2.1 et 2.4 (calculer $v(t, x)$),

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} J(t, x, u), \ \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

avec :

$$v(T, x) = g(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

où : f, b, σ et g sont des fonctions uniformément continues,

On dit que $\hat{u} \in U$ est un contrôle optimal si :

$$v(t, x) = J(t, x, \hat{u}) = E\left[\int_t^T f(s, x_s, \hat{u}_s)ds + g(x_T)\right].$$

Si le processus $\hat{u}$ peut s'exprimer comme fonction mesurable du temps et l'état du système, $\hat{u}_s = \hat{u}(s, x_s^{t,x}), t \leq s \leq T$, on dit que $\hat{u}_s$ est un contrôle optimal feedback markovien pour 2.6.

2.2 Principe de la programmation dynamique

La programmation dynamique appelée aussi principe de Bellman est un principe fondamentale dans la théorie du contrôle stochastique, nous donnons une version de principe du Bellman stochastique d'optimalité, l'idée est de montrer que la fonction valeur est une solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, ensuite trouver le contrôle optimal, cette méthode n'est pas valable si le système non markovien.

Théorème 2.2.1 *Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ donné, et pour tout $h \in [0, T - t]$, on a :*

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} E^{t,x}\left[\int_t^{t+h} f(s, x_s^{t,x}, u_s)ds + v\left(t + h, x_{t+h}^{t,x}\right)\right], \tag{2.7}$$

on peut l'écrire :

$$v(t, x) \leq E\left[\int_t^{t+h} f(s, x_s^{t,x}, u_s)ds + v\left(t + h, x_{t+h}^{t,x}\right)\right], \tag{2.8}$$

Et l'égalité tient si le contrôle est optimal $u_s = \hat{u}_s$.

$$v(t,x) = E\left[\int_t^{t+h} f(s, x_s^{t,x}, \hat{u}_s)ds + v\left(t+h, x_{t+h}^{t,x}\right)\right],$$

Preuve. Voir [5] page 43. ■

2.3 L'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

L'équation d'Hamilton Jacobi Bellman est la version infinitésimale du principe de programmation dynamique, le principe connecte au problème du contrôle avec une EDP appelé équation d'HJB, on peut l'utiliser pour prouver le théorème de vérification, on obtient les conditions d'optimalité, construite feedback d'optimalité, nous dérivons l'équation d'HJB en suppose que la fonction valeur v suffisamment est régulière.
Cela permet d'écrire pour tout $u \in U$:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u\in U}\left[\pounds^{u_t} v(t,x) + f(t,x,u_t)\right] \leq 0,$$

et quand le contrôle $\hat{u}$ est optimal on a :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \pounds^{\hat{u}_t} v(t,x) - f(t,x,\hat{u}_t) = 0,$$

donc on peut l'écrire :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u\in U}\left[\pounds^{u_t} v(t,x) + f(t,x,u_t)\right] = 0,\ \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

où : $\pounds^{u}$ est l'opérateur linéaire de deuxième ordre associé au processus contrôlé x_t, $t \geq 0$, et définie comme suit :

$$\pounds^{u_t}\varphi(t,x) = b^T(t,x_t,u_t)D_x\varphi(t,x) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma(t,x_t,u_t)\sigma^T(t,x_t,u_t)D_{xx}\varphi(t,x)\right],$$

où : D_x, D_x^2 sont le gradiant et et l'opérateur de hesienne par rapport à la variable x,

Il nous donne une équation aux dérivées partielles (EDP) sous la forme :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - G(t,x,u_t,D_x v(t,x), D_{xx}v(t,x)) = 0,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

où : $G : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$, appelé l'Hamiltonien du problème de contrôle considéré (S_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques), et $f(.,.,u)$ une fonction continue au (t,x) pour tous les $u \in \mathbb{R}^n$ fixes, définie par :

$$G(t,x,u_t,q,Q) = b^T(t,x_t,u_t)q + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma(t,x_t,u_t)\sigma^T(t,x_t,u_t)Q\right] + f(t,x,u_t),$$

L'équation 2.10 est appelé équation de la programmation dynamique ou l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman est une équation aux dérivées partielles avec une condition terminale :

$$v(T,x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

qui résulte immédiatement de la définition 2.6.

Remarque 2.3.1 *Lorsque l'ensemble des contrôles est un singleton* $\{u_0\}$, *c'est-à-dire les coefficients du problème ne dépend pas d'un contrôle l'EDP du principe devient un problème d'EDP de Cauchy.*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \pounds^{u_0}v(t,x) = f(t,x,u_0),\ \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$
$$v(T,x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Proposition 2.3.1 *On suppose que la fonction valeur* $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *alors* v *satisfait l'équation d'HJB :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - G(t,x,u_t,D_x v(t,x), D_{xx}v(t,x)) = 0,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},$$

Preuve.

1. On applique la formule d'Itô à $v(t,x)$ entre t et s, pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

   où : $x_t^{t,x} = x$,

$$v(s, x_s^{t,x}) = v(t,x) + \int_t^s (\frac{\partial v}{\partial r} + \pounds^{u_r} v)(r, x_r^{t,x}) dr + \int_t^s D_x v(r, x_r^{t,x}) \sigma^T(r, x_r^{t,x}, u_r) dW_r,$$

   en prenant l'espérance :

$$E\left[v(s, x_s^{t,x}) - v(t,x)\right] = E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + \pounds^{u_r} v(r, x_r^{t,x}) + f(r, x_r^{t,x}, u_r) - f(r, x_r^{t,x}, u_r) dr\right],$$

$$= E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + G(r, x_r^{t,x}, u_r, D_x v(r, x_r^{t,x}), D_{xx} v(r, x_r^{t,x})) - f(r, x_r^{t,x}, u_r) dr\right],$$

   et par 2.8 $\forall t \leq s$:

$$E\left[v(s, x_s^{t,x}) - v(t,x) + \int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r) dr\right] \geq 0,$$

   donc :

$$E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + G(r, x_r^{t,x}, u_r, D_x v(r, x_r^{t,x}), D_{xx} v(r, x_r^{t,x})) dr\right] \geq 0,$$

   on divise par $s - t$ et quand $s - t \to 0$ on trouve :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - G(t, x, u_t, D_x v(t,x), D_{xx} v(t,x)) \leq 0.$$

2. Pour montrer l'inverse on suppose qu'il existe $\epsilon > 0$, et pour $t \leq r \leq s$, $h = s - t > 0$

telle que d'après 2.8 :

$$v(t,x) + \epsilon(s-t) \geq E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + v(s, x_s^{t,x})\right],$$

$$\epsilon(s-t) \geq E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + v(s, x_s^{t,x}) - v(t,x)\right],$$

par la formule d'Itô sur $v(s, x_s^{t,x})$:

$$\epsilon(s-t) \geq E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + \int_t^s \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \pounds^{u_r}\right)(r, x_r^{t,x})dr\right],$$

$$\epsilon(s-t) \geq E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + G(r, x_r^{t,x}, u_r, D_x v(r, x_r^{t,x}), D_{xx} v(r, x_r^{t,x}))dr\right],$$

où :

$$E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + \int_t^s \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \pounds^{u_r} v\right)(r, x_r^{t,x})dr\right]$$
$$= E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + G(r, x_r^{t,x}, u_r, D_x v(r, x_r^{t,x}), D_{xx} v(r, x_r^{t,x}))dr\right],$$

divisé par $-h$:

$$-\epsilon \leq -\frac{1}{h} E\left[\int_t^s \frac{\partial v}{\partial r}(r, x_r^{t,x}) + G(r, x_r^{t,x}, u_r, D_x v(r, x_r^{t,x}), D_{xx} v(r, x_r^{t,x}))dr\right],$$

quand $h \to 0$ on obtient :

$$0 \leq -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - G(t, x, u_t, D_x v(t,x), D_{xx} v(t,x)).$$

Donc, la fonction valeur $v(t,x)$ résout l'équation d'HJB, nous donnons des conditions suffisantes qui permettent de conclure que la solution lisse de l'équation de HJB coïncide avec la fonction de valeur, c'est ce qu'on appelle le résultat de la vérification. ■

2.4 Théorème de vérification au sens classique

2.4.1 L'existence et l'unicité de la fonction valeur

Théorème 2.4.1 *Soit $w \in C^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n) \cap C([0,T],\mathbb{R}^n)$ une fonction, la condition de croissance quadratique, c'est-à-dire pour une constant M :*

$$|w(t,x)| \leq M(1+|x|^2),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

1. *On suppose que w satisfait :*

$$\begin{gathered} -\tfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) - G(t,x,u_t,D_x w(t,x), D_{xx} w(t,x)) \leq 0, \\ w(T,x) = g(x), \end{gathered} \tag{2.12}$$

   et que $w(T,.) \leq g$ dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, alors $w(t,x) \leq v(t,x)$ dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

2. *Supposons en autre que $w(T,.) = g$, et il existe un minimum $\hat{u}_t = \hat{u}(t,x)$, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \pounds^{\hat{u}_t} w(t,x) + f(t,x,\hat{u}_t) = 0,$$

   l'équation différentielle stochastique :

$$dx_t = b(t,x_t,\hat{u}(t,x))dt + \sigma(t,x_t,\hat{u}(t,x))dW_t,$$

   définit une solution unique $\tilde{x}_s^{t,x}$ pour l'équation différentielle pour chaque donnée initiale $x_0 = x$, et le processus $\hat{u}_s$ est un processus de contrôle optimal Markovien bien défini dans $\mathbb{R}^n$, alors on trouve que $w = v$, (l'unicité de v).

Preuve.

1. Quand $w \in C^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $u \in U$ et $s \in [t,T]$, par la formule d'Itô :

$$w(s, x_s^{t,x}) = w(t,x) + \int_t^s (\frac{\partial w}{\partial r} + \pounds^{u_r} w)(r, x_r^{t,x}) dr + \int_t^s D_x w(r, x_r^{t,x})^T \sigma(r, x_r^{t,x}, u_r) dW_r,$$

puis par l'espérance :

$$E\left[w(s, x_s^{t,x})\right] = w(t,x) + E\left[\int_t^s (\frac{\partial w}{\partial r} + \pounds^{u_r} w)(r, x_r^{t,x}) dr\right],$$

$\int_t^s D_x w(r, x_r^{t,x})^T \sigma(r, x_r^{t,x}, u_r) dW_r$, est une martingale donc :

$$E\left[\int_t^s D_x w(r, x_r^{t,x})^T \sigma(r, x_r^{t,x}, u_r) dW_r\right] = 0,$$

et quand w satisfait 2.12 donc :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \pounds^{u_t} w(t,x) + f(t,x,u_t) \geq 0,$$

la fonction $w \in C^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n) \cap C\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$, pour tout $0 \leq t \leq r \leq s \leq T$, et on a par 2.8, $\forall t \leq r \leq s$,

$$E\left[w\left(s, x_s^{t,x}\right)\right] - w(t,x) \geq -E\left[\int_t^s f\left(r, x_r^{t,x}, u_r\right) dr\right], \ \forall u \in U,$$

nous prenons maintenant la limite comme $s \to T$, et quand $w(T,.) \leq g$ nous obtenons :

$$E\left[g\left(x_T^{t,x}\right)\right] \geq w(t,x) - E\left[\int_t^T f\left(r, x_r^{t,x}, u_r\right) dr\right],$$

$$w(t,x) \leq E\left[\int_t^T f\left(r, x_r^{t,x}, u_r\right) dr + E\left[g\left(x_T^{t,x}\right)\right]\right], \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

et donc on peut écrire :

$$w(t,x) \leq \inf_{u \in U} E\left[\int_t^T f\left(r, x_r^{t,x}, u_r\right) dr + E\left[g\left(x_T^{t,x}\right)\right]\right], \ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

donc :

$$w(t,x) \leq v(t,x).$$

2. On a $\tilde{x}_s^{t,x}$ est une solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, \hat{u}(t,x))dt + \sigma(t, x_t, \hat{u}(t,x))dW_t \\ x_0 = x \end{cases},$$

on applique la formule d'Itô sur la fonction $w(s, \tilde{x}_s^{t,x})$ entre t et s, puis en prenant l'espérance :

$$E\left[w\left(s, \tilde{x}_s^{t,x}\right)\right] = w\left(t,x\right) + E\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial r}\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}\right) + \pounds^{\hat{u}_r}\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}\right) dr\right],$$

où : $\int_t^s D_x w\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}\right) \sigma^T\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}, u_r\right) dW_r$, est une martingale,

et par la définition du $\hat{u}$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \pounds^{\hat{u}_t} w(t,x) + f(t,x,\hat{u}_t) = 0,$$

alors on trouve :

$$E\left[w\left(s, \tilde{x}_s^{t,x}\right)\right] - w(t,x) = -E\left[\int_t^s f\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}, \hat{u}_r\right) dr\right],$$

et on a : $w(T,x) = g(x)$,

alors :

$$w(t,x) = E\left[\int_t^s f\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}, \hat{u}_r\right) dr\right] + E\left[g\left(\tilde{x}_T^{t,x}\right)\right],$$

$$w(t,x) = J\left(t,x,\hat{u}_t\right),$$

qui nous donne :

$$w\left(t,x\right) \geq v(t,x),$$

en même temps que la condition terminale $w(T,x) = g(x)$.

Donc on trouve que $w = v$, alors la fonction valeur $v(t,x)$ est unique, avec $\hat{u}_s$ un contrôle optimal Markovien $\hat{u}_s = \hat{u}(s, \tilde{x}_r^{t,x})$ avec l'état correspondant $\tilde{x}$.
En sait que dans la vérification des conditions (2) dans le théorème 2.4.1, il n'est pas toujours facile d'obtenir l'existence d'une solution pour l'EDS associée au candidat pour le contrôle optimal. ■

Proposition 2.4.1 *Si l'équation d'HJB avec une condition terminale admet une solution lisse w, alors w est la fonction de valeur pour le problème du contrôle stochastique, avec $\hat{u}$ est un contrôle optimal Markovien, cette approche est valide une fois pour l'équation d'HJB et que l'équation 2.9 admet une solution dans $C^{1,2}$ satisfaisant les conditions pour appliquer le théorème de vérification.*

Remarque 2.4.1 *Dans le cas particulier où l'ensemble des contrôles est un singleton $\{x_0\}$, ce théorème de vérification est une version de la formule de* ***Feynman-KAC*** *:*
il indique que si $w \in C^{1,2}\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right) \cap C^0\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right)$ avec une condition de croissance quadratique est la solution de problème Cauchy 2.11, alors w admet la représentation :

$$w(t,x) = E\left[\int_t^T f\left(s, x_s^{t,x}, u_0\right) ds + g\left(x_T^{t,x}\right)\right].$$

Théorème 2.4.2 *Supposer que :*

il existe $C > 0/\xi^T \sigma\sigma^T(t,x,u)\xi \geq C\,|\xi|^2$, *pour tout* $(t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U$,

U *est compact,*

b, σ *et* f *sont dans* $C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$,

$g \in C_b^3(\mathbb{R}^n)$.

Ensuite, l'équation HJB avec les données terminales $v(T,x) = g(x)$, *a une solution classique unique* $v \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [2] page 65. ■

Nous illustrons l'utilisation du théorème de vérification 2.4.1 dans un exemple du problème de gestion optimale du célèbre Merton.

2.4.2 Le problème gestion optimale de portefeuille

Exemple 2.4.1 *Nous considérons un marché avec deux titres, un actif sans risque représenté dans une banque :*

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt, \\ S_0^0 = 0, \end{cases}$$

où r *représente le taux d'intérêt et un stock risqué dont le processus de prix satisfait à l'équation différentielle stochastique :*

$$dS_t^1 = bS_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t,$$

les paramètres du marché b *et* σ *sont respectivement, le taux rendement moyen et la volatilité, supposons que* $b > r > 0$, *et* $\sigma > 0$.*le processus* W_t *est un mouvement brownien.*

Un agent investit à tout moment t *une proportion* u_t *de sa richesse dans un stock de prix* S_t^1 *et* $(1 - u_t)$ *dans une banque de prix* S_0 *avec taux d'intérêt* r, *L'investisseur fait face à la contrainte de portefeuille à tout moment* t, u_t *est appel un portefeuille de l'investisseur à valeurs dans* U *l'ensemble de tout processus progressivement mesurable.*

On considère la fortune totale $x_t = \eta_t^0 S_t^0 + \eta_t^1 S_t^1$*, avec* η_s^0 *et* η_s^1 *représentent les avoirs actuels dans la banque et un stock, l'équation de la richesse est donnée par :*

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{x_t u_t}{S_t^1} dS_t^1 + \frac{x_t(1-u_t)}{S_t^0} dS_t^0, \\ &= x_t \left(u_t b + r(1-u_t)\right) dt + x_t u_t \sigma dW_t, \end{aligned}$$

l'équation devient :

$$\begin{cases} dx_t = x_t \left(r + u_t(b-r)\right) dt + x_t u_t \sigma dW_t \\ x_0 = x \end{cases},$$

telle que : $\int_0^T |u_s|^2 \, ds < \infty$ *p.s, cette condition intégrabilité assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDS.*

le processus de richesse doit satisfaire :

$$x_s \geq 0, \;\; P\text{-}p.s \; \forall t \leq s \leq T.$$

L'agent souhaite maximiser l'utilité attendue de la richesse terminale, la fonction de valeur du problème de maximisation de l'utilité est alors définie par :

$$v(t,x) = \sup_{u \in U} E[g\left(x_T^{t,x}\right)/x_t = x], \;\; \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \tag{2.13}$$

on va prendre :

$$g\left(x\right) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \;\; x \geq 0, \;\; \gamma \neq 0, \;\; \gamma < 1.$$

Dans ce cas l'équation d'HJB du problème, 2.13 est :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{u \in U}\left[\pounds^{u_t} w(t,x)\right] = 0, \tag{2.14}$$

$$w(T,x) = g\left(x\right), \tag{2.15}$$

telle que :

$$\pounds^{u_t} w(t,x) = x_t(u_t b + (1-u_t)r)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}x_t^2 u_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

En utilisant l'analyse stochastique et dans des conditions de régularité et de croissance quadratique sur la fonction de valeur, nous obtenons que v résout l'équation d'HJB qui associée, pour $x \geq 0$ et $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} w_t + \sup\limits_u [\frac{1}{2}x_t^2\sigma^2 u_t^2 w_{xx} + x_t(b-r)u_t w_x] + r x_t w_x = 0 \\ w(T,x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma \\ w(t,0) = 0, \ \forall t \in [0,T] \end{cases}.$$

On cherche à une solution lisse pour 2.14 de la forme :

$$w(t,x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} f(t), \ \textit{avec } f(T) = 1,$$

où : $f(t)$ est fonction positive.

En utilisant la forme ci-dessus dans 2.14, et après quelques opérations, on obtient que f satisfaire l'équation du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} f'(t) + \lambda f(t) = 0 \\ f(T) = 1 \end{cases}, \tag{2.16}$$

où :

$$\lambda = \sup_u \left(\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 u_t^2(\gamma - 1) + \gamma(b-r)u_t + \gamma r\right).$$

Par résoudre l'équation de premier ordre 2.16 on obtient :

$$f(t) = \exp\left(\lambda(T-t)\right).$$

Donc la solution de l'équation 2.14 est donné par :

$$w(t,x) = \frac{x^{\gamma}}{\gamma}\exp\left(\lambda(T-t)\right). \tag{2.17}$$

c'est la solution classique et d'aprés le théorème de vérification qui prouve que la fonction valeur v *du problème de maximisation 2.14 est la fonction 2.17.*

On résoudre $\sup\limits_{u\in U}[\pounds^{u_t}w(t,x)]$ *comme un problème maximum dans un* $\hat{u}_t \in U$ *noter par* $\hat{u}(t,x)$,

$$\hat{u}(t,x) = -\frac{2(b-r)v_x(t,x)}{x_t\sigma^2 v_{xx}(t,x)},$$

ou autrement :

$$\hat{u}(t,x) = -2\frac{(b-r)}{\sigma^2(1-\gamma)},$$

où nous avons utilisé 2.17 ensuite, nous rappelons les résultats de la vérification classique, qui donnent que la solution donnée dans 2.17 est en effet la fonction de valeur $v(t,x)$ *et que de plus la stratégie :*

$$\hat{u}(t,x) = -2\frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)},$$

est la stratégie d'investissement optimal, en d'autres termes :

$$v(t,x) = \sup_U E[\frac{1}{\gamma}\tilde{x}_T^{\gamma} \;/\; \tilde{x}_t = x],$$

où : $\tilde{x}_s$ *résout l'EDS suivante :*

$$d\tilde{x}_s = \left(r + \frac{(b-r)^2}{(1-\gamma)\sigma^2}\right)\tilde{x}_s d_s + \frac{(b-r)}{\sigma(1-\gamma)}\tilde{x}_s dW_s.$$

La solution de l'équation de richesse d'état optimal, pour $x_t = x$ est :

$$\tilde{x}_s = x \exp\left[\left(r + \frac{(b-r)}{(1-\gamma)\sigma^2} - \frac{(b-r)^2}{2(1-\gamma)^2\sigma^2}\right)(s-t) - \frac{(b-r)}{\sigma(1-\gamma)} W_{s-t}\right].$$

La fonction de valeur v n'a souvent pas les propriétés de régularité nécessaire pour l'interpréter comme une solution à l'équation différentielle partielle de la programmation dynamique dans le sens classique.

2.4.3 Exemple de singularité

Exemple 2.4.2 *Le théorème de la section précédente indiquent que la fonction valeur v du problème du contrôle soit une solution régulière, mais en général on trouve que dans le cas déterministe où la fonction valeur n'est même pas dérivable ($v \notin C^1$) on va poser un problème du contrôle dans le cas déterministe ($\sigma \equiv 0$) à horizon fini.*
On considère le système du problème suivant :

$$\begin{cases} dx_t = u_t x_t dt, \ t \in [s, T] \\ x(s) = x_s = y \end{cases},$$

où : u_t est un contrôle prenant des valeurs dans $[-1, 1]$ et la fonction de coût de ce problème :

$$J(u(.)) = x_T = g(x_T).$$

On sait facilement que la solution de l'EDS :

$$\tilde{x}_t = x_s \exp\left(\int_s^t u_r dr\right) = y \exp\left(\int_s^t u_r dr\right).$$

La fonction valeur du problème :

$$v(s,y)=\begin{cases} y\exp(T-s)\,, & y\leq 0 \\ y\exp(s-T)\,, & y\geq 0 \end{cases},$$

qui est seulement Lipschitz et non $C^1([0,T]\times\mathbb{R})$, puisque $v_x(s,y)$ n'est pas continu au $(s,0)$ (a un saut au $(s,0)$) pour tous $s\leq t<T$,
nous avons l'Hamiltonien du problème :

$$\sup_{u\in U} G(s,y,u_s,p)=\sup_{|u|\leq 1}\{u_s x_s p\}=|yp|\,.$$

Ainsi, l'équation d'HJB associée à ce problème est :

$$\begin{cases} -v_t+|x_s v_x|=0,\ (t,x)\in[s,T]\times\mathbb{R} \\ v(T,x)=x,\ x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

On trouve que cette équation n'admet aucune solution régulière dans $C^1([0,T]\times\mathbb{R})$, car $v\notin C^1$.

D'où ce dernier exemple, nous devons admettre que les suppositions du théorème 2.4.1 sont trés restrictives, pour iviter la restrictiviter nous avons besoin de la notion suivante.

2.5 Théorème de vérification au sens de viscosité

2.5.1 Solution de viscosité

Il est bien connu que l'équation d'HJB 2.10 n'admet pas nécessairement une solution lisse en général, qui rend l'applicabilité des théorèmes de vérification classique très restrictive, ces dernières années, la notion des solutions de viscosité a été introduite par Crandall et Lions [34] pour les équations de premier ordre, et par Lions [87] pour les équations de second ordre, ce théorème est montré pour avoir une applicabilité plus larges que le théorème de vérification classique, tous les dérivés impliqués sont remplacés par la soi-disant sur-différentielle et sous-différentielle, et les solutions dans le sens de la viscosité peuvent être simplement des fonctions continues, l'existence et l'unicité des solutions de viscosité de l'équation d'HJB peuvent être garanties sous des hypothèses très légères et raisonnables, qui sont satisfaites dans la grande majorité des cas survenant dans des problèmes de contrôle optimaux, par exemple la fonction de valeur s'avère être la solution de viscosité unique de l'équation de HJB 2.10.

Définition 2.5.1 *Soit $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ une fonction,*

1. *On dit que v est une sous-solution de viscosité de 2.10, si $v(T,x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, quand $v - \varphi$ atteint un maximum local à $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, nous avons :*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u \in U} G(t,x,u_t,-D_x\varphi(t,x),-D_{xx}\varphi(t,x)) \leq 0.$$

2. *v est une sur-solution de viscosité de 2.10, si $v(T,x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, quand $v - \varphi$ atteint un minimum local à $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, nous avons :*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u \in U} G(t,x,u_t,-D_x\varphi(t,x),-D_{xx}\varphi(t,x)) \geq 0.$$

En plus, si $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ est à la fois une sous-solution et sur-solution de viscosité de 2.10, donc elle appelait une solution de viscosité de 2.10.

Théorème 2.5.1 *La fonction de valeur v est une solution de viscosité de l'équation d'HJB 2.10.*

Preuve. Pour tout $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, soit $v - \varphi$ atteint un maximum local en $(t,x_t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, soit $u \in U$ fixé, et x_t est la trajectoire de l'état avec le contrôle $u_t = u$, puis par le principe de programmation dynamique, et la formule d'Itô, nous avons pour $s > t$, avec $s - t > 0$ assez petit,

on a :

$$v(t,x) = E^{t,x}\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + v\left(s, x_s^{t,x}\right)\right],$$

et par la formule d'Itô entre t et s :

$$\varphi(s, x_s^{t,x}) - \varphi(t,x) = \int_t^s (\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \pounds^{u_r}\varphi)(r, x_r^{t,x})dr + \int_t^s D_x\varphi(r, x_r^{t,x})\sigma^T(r, x_r^{t,x}, u_r)dW_r,$$

alors :

$$0 \leq E\left[v(t,x) - \varphi(t,x) - v(s, x_s^{t,x}) + \varphi(s, x_s^{t,x})\right],$$

$$0 \leq E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr - \varphi(t, x_t) + \varphi(s, x_s^{t,x})\right],$$

$$0 \leq E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + \int_t^s (\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \pounds^{u_r}\varphi)(r, x_r^{t,x})dr\right],$$

on divise par $s - t$ et quand $s - t \to 0$ on trouve :

$$0 \leq \lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} E\left[\int_t^s f(r, x_r^{t,x}, u_r)dr + \int_t^s (\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \pounds^{u_r}\varphi)(r, x_r^{t,x})dr\right],$$

$$0 \leq \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + G(t, x, u_t, D_x\varphi(t,x), D_{xx}\varphi(t,x)),$$

donc :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + G(t, x, u_t, -D_x\varphi(t,x), -D_{xx}\varphi(t,x)) \leq 0, \ \forall u \in U,$$

alors on peut écrire :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u \in U} G(t, x, u_t, -D_x\varphi(t,x), -D_{xx}\varphi(t,x)) \leq 0, \ \forall u \in U.$$

D'autre part, si $v-\varphi$ atteint un minimum local en $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, alors pour tout $\epsilon>0$, et $s>t$ avec $s-t>0$ assez petit, on peut trouve un contrôle $u_r=u_t^\epsilon\in U$, telle que :

$$
\begin{aligned}
&0\geq E[v(t,x)-\varphi(t,x)-v(s,x_s^{t,x})+\varphi(s,x_s^{t,x})],\\
&0\geq -\epsilon(s-t)+E\left[\int_t^s f(r,x_r^{t,x},u_r)dr-\varphi(t,x)+\varphi(s,x_s^{t,x})\right],\\
&0\geq -\epsilon(s-t)+E\left[\int_t^s f(r,x_r^{t,x},u_r)dr+\int_t^s (\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\pounds^{u_r}\varphi)(r,x_r^{t,x})dr\right],
\end{aligned}
$$

divisant par $(s-t)$, et quand $s-t\to 0$ nous obtenons :

$$
\epsilon\leq\frac{1}{s-t}E\left[\int_t^s -\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,x_r^{t,x})+G(r,x_r^{t,x},u_r,-D_x\varphi(r,x_r^{t,x}),-D_{xx}\varphi(r,x_r^{t,x}))dr\right],
$$

$$
0\leq\lim_{s\to t}\frac{1}{s-t}E\left[\int_t^s -\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,x_r^{t,x})+\sup_{u\in U}G(r,x_r^{t,x},u_r,-D_x\varphi(r,x_r^{t,x}),-D_{xx}\varphi(r,x_r^{t,x}))dr\right],
$$

$$
-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+\sup_{u\in U}G(t,x,u_t,-D_x\varphi(t,x),-D_{xx}\varphi(t,x))\geq 0,
$$

donc on a :

$$
-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+\sup_{u\in U}G(t,x,u_t,-D_x\varphi(t,x),-D_{xx}\varphi(t,x))=0.
$$

Nous concluons que v est une solution de viscosité de l'équation d'HJB 2.10.

Le théorème suivant est consacré à une preuve d'unicité de la solution de viscosité à l'équation d'HJB. ■

Définition 2.5.2 *Soit $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, on définit la sur-différentielle (respectivement sous-différentielle) du second ordre de la fonction v au point (t,x) telle que $(t,x)\in[0,T]\times$*

$\mathbb{R}^n$, *on le note par* $D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x)$ *(respectivement* $D_{t,x}^{1,2,-}v(t,x)$*) est un ensemble défini par :*

$$D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x) = \left\{(p,q,Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} / \lim_{y\to x, s\to t} \sup_{s\in[0,T]} \frac{I(s,y)}{|s-t| + |y-x|^2} \leq 0\right\},$$

respectivement :

$$D_{t,x}^{1,2,-}v(t,x) = \left\{(p,q,Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} / \lim_{y\to x, s\to t} \inf_{s\in[0,T]} \frac{I(s,y)}{|s-t| + |y-x|^2} \geq 0\right\},$$

où :

$$I(s,y) = v(s,y) - v(t,x) - q(s-t) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}(y-x)^T p(y-x),$$

et :

$$p = \frac{\partial v}{\partial t}(t,x), q = D_x v(t,x), Q = D_{xx}v(t,x).$$

Théorème 2.5.2 (le théorème d'unicité) *Une fonction* $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *est appelé une solution de viscosité de l'équation d'HJB si :*

$$-p + \sup_{u\in U} G(t,x,u_t,-q,-Q) \leq 0, \forall (p,q,Q) \in D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

$$-p + \sup_{u\in U} G(t,x,u_t,-q,-Q) \geq 0, \forall (p,q,Q) \in D_{t,x}^{1,2,-}v(t,x),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

$$v(T,x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.5.1 *Soit* $w \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *alors* w *est une solution de viscosité de 2.10 si et seulement si* w *est une solution classique de 2.10.*

Preuve. Voir [6] page 196. ■

Théorème 2.5.3 *Soit* v, $w \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *nous supposons que* v *est une sur-solution de 2.10, et* w *est une sous-solution de 2.10, avec ces conditions terminales qui atteint* $w(T,x) \leq v(T,x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *alors* $w(t,x) \leq v(t,x)$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Preuve. Voir [5] page 76. ■

Corollaire 2.5.1 *Soit $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ une solution de viscosité de l'équation d'HJB 2.10 alors pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ on a :*

$$\inf_{(p,q,Q,u)\in D^{1,2,+}_{t,x}v(t,x)\times U} [p + G(t,x,u_t,q,Q)] \geq 0.$$

Preuve. Voir [6] page 275. ■

Lemme 2.5.1 *Soit $g \in C([0,T])$, supposons qu'il existe $\rho \in L^1([0,T])$ de telle sorte que $h > 0$ suffisamment petit :*

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} \leq \rho(t),\ \forall t \in [0,T], \tag{2.18}$$

alors :

$$g(t) - g(0) \leq \int_0^t \limsup_{h\to 0^+} \frac{g(r+h)-g(r)}{h} dr,\ \forall t \in [0,T]. \tag{2.19}$$

Preuve. Nous pouvons appliquer le lemme de Fatou sur 2.18 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \limsup_{h\to 0^+} \frac{g(r+h)-g(r)}{h} dr &\geq \limsup_{h\to 0^+} \int_0^t \frac{g(r+h)-g(r)}{h} dr, \\
&= \limsup_{h\to 0^+} \frac{\int_{0+h}^{t+h} g(r)dr - \int_0^t g(r)dr}{h}, \\
&= \limsup_{h\to 0^+} \frac{\int_t^{t+h} g(r)dr - \int_0^{0+h} g(r)dr}{h}, \\
&= g(t) - g(0).
\end{aligned}$$

où : $\int_a^{a+b} g(r)dr = g(a)$.

Cela prouve 2.19 pour tout $t \in [0,T]$, et le cas quand $t = T$ est obtenu par la continuité de g. ■

Lemme 2.5.2 *1. Il existe une constante $C \geq 0$, telle que pour tout $t, s \in [0,T]$ et x, $y \in \mathbb{R}^n$ la fonction valeur v satisfait :*

$$|v(t,x) - v(s,y)| \leq C \left(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y| \right),$$

2. Il existe une constante $C \geq 0$, telle que pour tout $t \in [0,T]$, $s \in [t,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$:

$$E\left(\left| x_s^{t,x} - x \right|^2 \right) \leq C\,|s-t|\,, \forall s \geq t,$$

Preuve. Voir [6] page 178, 186. ■

2.5.2 Théorème de vérification au sens de viscosité

Théorème 2.5.4 *Soit $w \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ une solution de viscosité de l'équation d'HJB alors :*

1. *$w(s,y) \leq J(s,y,u)$ pour tout $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et pour $u \in U$.*
2. *Soit $(\tilde{x}_t, \hat{u}_t)$ est un couple admissible donné pour le problème 2.1 et 2.4 supposons qu'il existe $\left(\hat{p}, \hat{q}, \hat{Q}\right) \in L^2_{\mathcal{F}}([s,T], \mathbb{R}) \times L^2_{\mathcal{F}}([s,T], \mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([s,T], \mathbb{R}^{n\times d}\right)$, pour tout $t \in [s,T]$,*

$$\left(\hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{Q}(t)\right) \in D^{1,2,+}_{t,x} w(t, \tilde{x}_t), \ \ P\text{-}p.s, \tag{2.20}$$

telle que :

$$-\hat{p}(t) + G\left(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t), -\hat{q}(t), -\hat{Q}(t)\right) = 0, \ \ P\text{-}p.s, \tag{2.21}$$

Alors $(\tilde{x}_t, \hat{u}_t)$ est un couple optimal pour le problème 2.1 et 2.4.

Preuve. Partie (1) est évident et d'après l'unicité de la solution de viscosité on a : $w = v$. Nous montrons seulement la partie (2) du théorème, fixons $\varphi(t, \tilde{x}_t, \hat{u}_t) = \hat{\varphi}(t)$, pour $\hat{\varphi} = b$, σ, f etc, pour simplifier la notation, pour $t \in [0,T]$ fixé telle que 2.20 et 2.21 sont vérifiées, on choisit une fonction de test $\phi \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ déterminée par $\left(\hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{Q}(t)\right) \in D^{1,2,+}_{t,x} w(t, \tilde{x}_t)$ et lemme 2.5.2 ;

On applique la formule d'Itô pour la fonction ϕ, on trouve que pour chaque $h > 0$,

$$w(t+h, \tilde{x}_{t+h}^{t,x}) - w(t, \tilde{x}_t^{t,x}) \leq \phi(t+h, \tilde{x}_{t+h}^{t,x}) - \phi(t, \tilde{x}_t^{t,x}),$$

où :

$$\phi(t+h, \tilde{x}_{t+h}^{t,x}) - \phi(t, \tilde{x}_t^{t,x}) = \int_t^{t+h} \phi_t(r, \tilde{x}_r^{t,x}) dr + \int_t^{t+h} D_x \phi(r, \tilde{x}_r^{t,x}) \hat{b}\,(r) + \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{2} tr \left[\hat{\sigma}^T\,(r)\, D_{xx} \phi(r, \tilde{x}_r^{t,x}) \hat{\sigma}\,(r) \right] dr + \tag{2.23}$$

$$\int_t^{t+h} D_x \phi(r, \tilde{x}_r^{t,x}) \hat{\sigma}^T(r, \tilde{x}_r^{t,x}, u_r) dW_r. \tag{2.24}$$

Prenant l'espérence :

$$E\left[\phi(t+h, \tilde{x}_{t+h}^{t,x}) - \phi(t, \tilde{x}_t^{t,x})\right] = E\left[\int_t^{t+h} \phi_t(r, \tilde{x}_r^{t,x}) dr + \int_t^{t+h} D_x \phi(r, \tilde{x}_r^{t,x}) \hat{b}\,(r)\right] + \tag{2.25}$$

$$E\left[\frac{1}{2} tr \left[\hat{\sigma}^T\,(r)\, D_{xx} \phi(r, \tilde{x}_r^{t,x}) \hat{\sigma}\,(r)\right] dr\right], \tag{2.26}$$

Il est bien connu par la propriété martingale des intégrales stochastiques qu'il ya une constante C, indépendante de t, telle que :

$$E\left(\left|\tilde{x}_r^{t,x} - \tilde{x}_t^{t,x}\right|^2\right) \leq C\left|r-t\right|,\ \forall r \geq t, \tag{2.27}$$

par conséquent, d'après lemme 2.5.2, nous avons :

$$\sup_{s \leq r \leq T} \left|\phi_t(r, \tilde{x}_r^{t,x})\right|^2 \leq C^2 \sup_{s \leq r \leq T} E\left[1 + \frac{\left|\tilde{x}_r^{t,x} - \tilde{x}_t^{t,x}\right|^2}{r-t}\right] \leq C,$$

alors :

$$\sup_{s \leq r \leq T} E\left|\phi_t(r, \tilde{x}_r^{t,x})\right| \leq \sqrt{C}.$$

De plus, par lemme 2.5.2, et les conditions 2.2 et 2.3, on peut montrer que :

$$\sup_{s\leq r\leq T} E\left|\phi_x(r,\tilde{x}_r^{t,x})\hat{b}\left(r\right)+\frac{1}{2}tr\left[\hat{\sigma}^T\left(r\right)\phi_{xx}(r,\tilde{x}_r^{t,x})\hat{\sigma}\left(r\right)\right]\right|\leq hC,$$

donc :

$$\frac{E[w(t+h,\tilde{x}_{t+h}^{t,x})-w(t,\tilde{x}_t^{t,x})]}{h}\leq C. \tag{2.28}$$

Maintenant, nous calculons, pour tout $N>0$ fixé :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E[\phi_t\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)-\hat{p}(t)]dr &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}E\left[\left(\phi_t\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)-\hat{p}(t)\right)\mathbf{1}_{\left|\tilde{x}_r^{t,x}-\tilde{x}_t^{t,x}\right|>N|r-t|^{\frac{1}{2}}}\right]dr\\ &\quad+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E\left[\left(\phi_t\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)-\hat{p}(t)\right)\mathbf{1}_{\left|\tilde{x}_r^{t,x}-\tilde{x}_t^{t,x}\right|\leq N|r-t|^{\frac{1}{2}}}\right]dr,\\ &= I_1(N,h)+I_2(N,h),\end{aligned}$$

D'après l'inégalité d'hölder, et 2.27 on obtient :

$$\begin{aligned}I_1(N,h) &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}E\left[\left(\phi_t\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)-\hat{p}(t)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[P\left(\left|\tilde{x}_r^{t,x}-\tilde{x}_t^{t,x}\right|>N\left|r-t\right|^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}dr,\\ &\leq \frac{C}{N}\rightarrow 0, \text{uniformément dans } h>0 \text{ comme } N\rightarrow\infty,\end{aligned}$$

D'autre part, pour $N>0$ fixé, nous appliquons lemme 2.5.1 pour obtenir :

$$\lim_{h\rightarrow 0^+}\sup_{t\leq r\leq t+h}\frac{\left(\left(\phi_t\left(r,\tilde{x}_t^{t,x}\right)-\hat{p}(t)\right)\mathbf{1}_{|\tilde{x}_r-\tilde{x}_t|\leq N|r-t|^{\frac{1}{2}}}\right)}{h}\rightarrow 0 \text{ si } h\rightarrow 0^+,\ \text{P-p.s.}$$

ainsi, nous concluons par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{h\rightarrow 0^+}I_2(N,h)\rightarrow 0,\ \text{si } h\rightarrow 0^+,\ \text{pour chaque } N \text{ fixé.}$$

Par conséquent, nous avons prouvé que :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E\left[\phi_t\left(r,\tilde{x}_t^{t,x}\right)\right]dr \to E\left[\hat{p}(t)\right].$$

De même méthode, nous pouvons montrer facilement que :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E\left[\phi_x\left(r,\tilde{x}_t^{t,x}\right)\hat{b}(t)\right]dr &= E\left[\phi_x\left(t,\tilde{x}_t^{t,x}\right)\hat{b}(t)\right]\\ &= E\left[\hat{q}(t)\hat{b}(t)\right].\end{aligned}$$

Et que :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E\left[\frac{1}{2}tr\left[\hat{\sigma}^T\left(r\right)\phi_{xx}(r,\tilde{x}_t^{t,x})\hat{\sigma}\left(r\right)\right]\right]dr &= E\left[\frac{1}{2}tr\left[\hat{\sigma}^T\left(t\right)\phi_{xx}(t,\tilde{x}_t^{t,x})\hat{\sigma}\left(t\right)\right]\right],\\ &= E\left[\frac{1}{2}tr\left[\hat{\sigma}^T\left(t\right)\hat{Q}(t)\hat{\sigma}\left(t\right)\right]\right].\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0^+}\frac{E[w(t+h,\tilde{x}_{t+h}^{t,x})-w(t,\tilde{x}_t^{t,x})]}{h} &\le E\left[\hat{p}(t)+\hat{q}(t)\hat{b}(t)+\frac{1}{2}tr\left[\hat{\sigma}^T\left(t\right)\hat{Q}(t)\hat{\sigma}\left(t\right)\right]\right],\\ &= -E[\hat{\varphi}(t)].\end{aligned}$$

Pour $\varphi = f$ et la dernière égalité est due à 2.22, notant et appliquant lemme 2.5.1 à la fonction $g(\tilde{x}_t) = E[w(t,\tilde{x}_t)]$ pour tout $t\in[s,T]$, nous arrivons à :

$$E\left[w(T,\tilde{x}_T^{t,x})-w(s,\tilde{x}_s^{t,x})\right] \le -\int_s^T E\left(\hat{\varphi}(t)\right)dt,$$

$$E\left[w(T,\tilde{x}_T^{t,x})\right]+\int_s^T E\left(\hat{\varphi}(t)\right)dt \le w(s,\tilde{x}_s^{t,x}).$$

Ce qui conduit à $w(s,y) \geq J(s,y,\hat{u})$, donc d'après partie (1) il en résulte que $(\tilde{x}_t, \hat{u}_t)$ est une couple optimale pour 2.1 et 2.4. ■

Donc on sait que le théorème 2.5.4 est plus forte que le théorème 2.4.1 pour la vérification d'optimalité.

Remarque 2.5.1 *Compte tenu du corollaire 2.5.1, il implique que si $\hat{u}_t$ contrôle feedback admissible et $\hat{p}(t), \hat{q}(t)$, et $\hat{Q}(t)$ sont des fonctions mesurables sur $D_{t,x}^{1,2,+}v(t,\hat{x}_t) \times U$ pour tout (t,x), et :*

$$\min_{(p,q,Q,u)\in D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x)\times U} \left\{p(t) - G\left(t, \hat{x}_t, u_t, q(t,x), Q(t,x)\right)\right\} = \hat{p}(t) - G\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, -\hat{q}(t,x), -\hat{Q}(t,x)\right) = 0,$$

alors pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, alors $\hat{u}_t$ est un contrôle optimal.

Remarque 2.5.2 *La condition implique que :*

$$\min_{(p,q,Q,u)\in D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x)\times U} G\left(t, \hat{x}_t, u_t, \hat{q}(t,x), \hat{Q}(t,x)\right) = G\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{q}(t,x), \hat{Q}(t,x)\right),$$

Il montre également que 2.21 équivalente à :

$$\hat{p}(t) \geq G\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, -\hat{q}(t,x), -\hat{Q}(t,x)\right).$$

Ceci facilement vu en rappelant le fait que v est la solution de viscosité de 2.10, donc nous pouvons obtenir un contrôle optimal feedback en minimisant $p(t) - G\left(t, \hat{x}_t, u_t, q(t), Q(t)\right)$ sur $(p,q,Q,u) \in D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x) \times U$ pour tout (t,x) :

$$\min_{(p,q,Q,u)\in D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x)\times U} \left\{p(t) - G\left(t, \hat{x}_t, u_t, q(t), Q(t)\right)\right\} = 0.$$

Conclusion

Dans le cadre de la programmation dynamique, la technique de vérification joue un rôle important dans le test d'optimalité pour un contrôle donné et dans la construction du contrôle optimal feedback, en prenant la minimisation de l'hamiltonien du Problème de contrôle, toutefois le théorème de vérification classique existant est très restrictif et implique que l'équation de programmation dynamique qui associée à ce problème a une solution régulière.

Ainsi dans les pages suivantes, le théorème de vérification dans le sens de la viscosité est présenté pour avoir une applicabilité plus large que le théorème de vérification classique, et pour obtenir une solution de viscosité unique et continue pour l'équation d'HJB, qui est la fonction de valeur v, en pratique on applique le théorème de vérification avec prenons une fonction de vérification w pour être la fonction valeur v, puis nous pouvons de tester l'optimalité du contrôle donné.

Bibliographie

[1] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Lien : https ://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc/cours/M2_cours.pdf.

[2] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (2012). Deterministic and stochastic optimal control (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[3] Fleming, W. H., & Soner, H. M. (2006). Controlled Markov processes and viscosity solutions (Vol. 25). Springer Science & Business Media.

[4] Krylov, N. V. (2008). Controlled diffusion processes (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

[5] Pham, H. (2009). Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications (Vol. 61). Springer Science & Business Media.

[6] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

[7] Zhou, X. Y. (1993). Verification theorems within the framework of viscosity solutions. Journal of mathematical analysis and applications, 177(1), $208 - 225$.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	Espace de probabilité filtré.
W_t	Mouvement brownien.
EDS	Equation différentielle stochastique.
EDP	Equation différentielle partielle.
U	Ensemble des processus de contrôle admissible.
u_t	Contrôle admissible.
$\hat{u}_t$	contrôle optimale.
$J(t, x, u)$	la fonction de coût.
$v(t, x)$	La fonction de valeur.
HJB	L'équation d'Hamilton Jacobi Bellman.
$G(t, x, u, D_x v(t, x), D_{xx} v(t, x))$	L'Hamiltonien du problème de contrôle.
$\pounds^u$	L'opérateur linéaire de $2^{ème}$ associés au processus contrôlés u.

$D_x v$	Le gradiant de la fonction valeur par rapport à la variable x.
$D_x^2 v$	La hesienne de la fonction valeur par rapport à la variable x.
$L_{\mathcal{F}}^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$	L′ensemble des processus mesurable, $\mathcal{F}_t$-adapté et carré intégrable.
P-p.s	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P.