République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Ben Abdallah Hani

Titre :

Processus de Markov et leurs propriétés

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Labed Boubakeur**	UMKB	Président
Dr.	**Mansouri Badreddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Lakhdari Imad**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Au mon "**Dieu**" le clément et le miséricordieux.

Je dédie ce modest travail :

A la femme, le plus importante dans ma vie et le plus courageuse ma mère.

A mon père "**Said**".

A mes frères : **Cherif, Fahmi, Rafik, Zouhair.**

A tous mes amis surtou : **Kechroud Elmahdi, Rahim Bilel.**

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord **Dieu** le tout puissant de m'avoir donné la force, la volonté, le courage et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr. Mansouri Badreddine** pour ses orientations, sa patience, sa grande disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie également le membres du jury **Dr. Labed Boubakeur** et **Dr. Lakhdari Imad** qui m'on fait l'honneur d'accepter d'examiner mon sujet.

Je tiens à remercier aussi tous les enseignants de notre département de mathématique qui m'ont afin aide dans notre parcours d'étude, tout au long de ces années.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **ii**

Introduction **1**

1 Châine de Markov **3**

1.1 Variables aléatoires discrètes 3

1.1.1 Definitions 3

1.1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète 5

1.1.3 Lois de probabilité discrètes 5

1.2 Probabilité de transition 7

1.3 Châine de Markov 7

1.4 Matrice de Markov 8

1.5 Classification des Etats 11

1.6 Théorèmes limites 12

1.6.1 Les mesures stationnaires 12

1.6.2 Les mesures réversibles 13

1.6.3 L'espace d'états E est fini 14

1.6.4 L'espace d'états E est infini 15

1.7 Exemples de châines de Markov 16

1.7.1 La châine à deux etats 16
1.7.2 Promenade au hazard sur $\mathbb{Z}$ 16
1.7.3 Le modèle de la ruine du joueur 17

2 Processus de Markov 18

2.1 Processus stochastique 18
2.1.1 Filtration 18
2.1.2 Processus stochastique 19
2.1.3 Processus Croissant 19
2.1.4 Processus Gaussiens 20
2.2 Propriétés des processus 20
2.3 Processus de Markov 21
2.3.1 Equations de Kolmogorov 23
2.3.2 Processus de Poisson 24
2.3.3 Comportement asymptotique 25

3 Applications 27

3.1 Processus de naissance et de mort 27
3.1.1 Comportement asymptotique 29
3.2 Files d'attente 30
3.2.1 Description d'un système de file d'attente 30
3.2.2 Files d'attente formant un processus de naissance et de mort 32
3.2.3 Files d'attente M/G/1. 36

Bibliographie 39

Annexe B : Abréviations et Notations 40

Introduction

De nombreux domaines utilisent des observations en fonction du temps (ou plus rarement, d'une variable d'espace). Dans les cas les plus simples, ces observations se traduisent par une courbe bien définie. En réalité, des sciences de la Terre aux sciences humaines, les observations se présentent souvent de manière plus ou moins erratique. L'interprétation de ces observations est donc soumise à une certaine incertitude qui peut être traduite par l'utilisation des probabilités pour les représenter.

Un processus aléatoire généralise la notion de variable aléatoire utilisée en statistiques élémentaires. On le définit comme une famille de variables aléatoires $X(t)$, associées à toutes les valeurs $t \in T$,. L'ensemble des observations disponibles $x(t)$, constitue une réalisation du processus.

Un premier problème concerne le fait que la durée sur laquelle est construit le processus est généralement infinie alors qu'une réalisation porte sur une durée finie. Il est donc impossible de représenter parfaitement la réalité. Il y a une seconde difficulté beaucoup plus sérieuse : à la différence du problème des variables aléatoires, la seule information disponible sur un processus se réduit généralement à une seule réalisation.

Dans ce travail, nous intéressons à les processus stochastiques qui ont la situation à l'avenir ne dépend pas de sa connaissance de l'état dans le passé dans l'état actuel processus sans mémoire. Ce type des processus stochastiques appelé processus de Markov.

En mathématiques, un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passé. Les processus de Markov portent le nom de leur inventeur, Andreï Markov (1856-1922).

Les processus de Markov sont utilisés pour modéliser une variété de systèmes aléatoires importants, par exemple en physique particulièrement en physique statistique. Ils interviennent en particulier à travers l'équation de Fokker-Planck. Plus généralement l'hypothèse markovienne est souvent invoquée lorsque des probabilités sont utilisées pour modéliser l'état d'un système, en supposant toutefois que l'état futur du système peut être déduit du passé avec un historique assez faible, dans la théorie de l'information, commence en introduisant la notion d'entropie à partir d'une modélisation Markovienne de la langue anglaise. Il montre ainsi le degré de prédictibilité de la langue anglaise, muni d'un simple modèle d'ordre 1. Bien que simples, de tels modèles permettent de bien représenter les propriétés statistiques des systèmes et de réaliser des prédictions efficaces sans décrire complètement la structure complète des systèmes.x.

Dans ce mémoire, qui se compose de trois chapitres, et qui a pour tout but donné une bref sur la théorie des processus de markov est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre : on donne quelques rapel sur la théorie des chaines de Markov.

Le deuxième chapitre : Dans ce chapitre on répresente les processus de Markov et leurs propriétés.

Le troisième chapitre : dans le dernier chapitre, nous étudions quelques application comme processus de naissance et de mort, et les files d'attente.

Chapitre 1

Châine de Markov

1.1 Variables aléatoires discrètes

1.1.1 Definitions

Définition 1.1.1 *Etant donnée une expérience aléatoire, on not Ω l'ensemble de tous les résultas possibles de cette expérience. Un singleton de Ω est appelé évènement élémentaire. Un sous-ensemble A de Ω est appelé un évènement. Un évènement A est donc un ensemble constitué de résultas possibles de l'expérience. Si le résulta d'une expérience est donc A, on dit que A est réalisé.*

Définition 1.1.2 *Un tribu $\mathcal{A}$ sur Ω est une classe de parties de Ω qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$.

2- $A \in \mathcal{A} \to A^c \in \mathcal{A}$.

3- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ sont dans $\mathcal{A}$.

On appelle évenements les éléments de $\mathcal{A}$.

Exemple 1.1.1 $\{\emptyset, \Omega\}$ *est la plus petite tribu sur Ω. On l'appelle tribu grossière.*

• $P(\Omega)$ *est la plus grosse tribu sur* Ω. *On l'appelle tribu discrète.*

• *Si* $A \in \Omega$, $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ *est une tribu sur* Ω.

Définition 1.1.3 *Soit* Ω *un ensemble. Une loi de probabilité* P *sur* Ω *est une fonction qui à tout évenement* A *associé un nombre réel* $P(A)$, *et qui à les trois propriétés :*

• $0 \leq P(A) \leq 1$.

• $P(\Omega) = 1$.

• *Pour tout famille finie ou dénombrable* $(A_n)_{n \in I}$ *d'évenements deux à deux disjoints :*

$$P\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} P(A_n).$$

$(\Omega, \mathcal{A})$ *s'appelle un espace probabilisible.*

Définition 1.1.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisible, on appelle variable aléatoire réelle discrète tout application* $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *tel que :*

• $X(\Omega)$ *est une ensemble finie ou dénombrable.*

• $\forall\ x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.5 *Soit* B *un évenement tel que* $P(B) \neq 0$. *Pour tout évenement observable* A, *on définie :*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

appellé probabilité conditionnelle de l'évenement A sous l'hypothèse B.

Définition 1.1.6 *La probabilité de la variable aléatoire discrète* X *sachant la variable discrète* Y *est la probabilité conditionnelle de l'évenement* $\{X = x\}$ *sachant l'évenement* $\{Y = y\}$ *tel que* $x, y \in E$ *ensemble dénombrable, et définie comme suit :*

$$P(X = x\ / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

1.1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.1.7 *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on appelle loi de probabilité de X et on note P_X l'application :*

$$P_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & P(X=x) \end{array}$$

Définition 1.1.8 *Soit $X : \Omega \to F \subset \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles .Elle est dite intégrable si $\sum\limits_{x \in F} |x| \, P(X = x) < +\infty$. Dans ce cas, on définie son éspérance $\mathbb{E}(X)$ par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in F} x P(X = x).$$

• *X est dit de carré intégrable si X^2 est intégrable i.é, si :*

$$\sum_{x \in F} x^2 P(X = x) < +\infty.$$

Dans ce cas, on définie la variance de X par :

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

1.1.3 Lois de probabilité discrètes

Loi de Bernoulli

On dit que X suite une loi de bernoulli de paramètre p si :

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}. \qquad k = 0\ ; 1$$

Les moments suivants :

$$\mathbb{E}(X) = p\ ;\ V(X) = p(1-p).$$

Loi de Binomiale

On dit que X suite une loi de binomiale de paramètre n et p si :

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad k=0\ ;1\ ;2;...\ ;n.$$

où :

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Les moments suivants :

$$\mathbb{E}(X)=np\ ;\ V(X)=np(1-p).$$

Loi de Poisson

On dit que X suite une loi de poisson de paramètre $\lambda>0$ si :

$$P(X=k)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}. \qquad k=0\ ;1\ ;2\ ...$$

$$\mathbb{E}(X)=V(X)=\lambda.$$

Loi géometrique

On dit que X suite une loi géometrique de paramètre p si :

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p. \qquad k=1\ ;\ 2\ \ ...$$

Les moments :

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}\ ;\ V(X)=\frac{(1-p)}{p^2}.$$

1.2 Probabilité de transition

Définition 1.2.1 *On appelle probabilité de transition sur l'espace dénombrable* E *tout application* P *de* $E \times E$ *dans* $[0,1]$ *telle que pour tout* $i \in E$, $P(i,\cdot) \geq 0$ $(\forall j \in E)$ *et* $\sum_{j \in E} P(i,j) = 1$.

1.3 Châine de Markov

Définition 1.3.1 *Soit* $(X_n)_{n \in N}$ *une suite de variable aléatoire à valeurs dans un espace* E *finie ou dénombrable, appelé espace d'états. On dit que* $(X_n)_{n \in N}$ *est une châine de Markov si :*

$$P(X_{n+1} = j \;/\; X_n = i_n \;,\; X_{n-1} = i_{n-1} \;,\; \ldots \;,\; X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \;/\; X_n = i_n).$$

pour tout $j \in E$.

on pose :

$$P(X_{n+1} = j \;/\; X_n = i) = p_{ij}.$$

Les probabilités p_{ij} sont appelés probabilité de transition de la châine de Markov .

• La châine de Markov est dit homogène, si la probabilité de transition ne dépand pas de n.

1.4 Matrice de Markov

La matrice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdot\cdot & \cdot\ \cdot \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdot\cdot & \cdot\ \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont les probabilités de transition $p_{i,j}$ est appellée matrice de transition de la châine de markov. C'est une matrice finie et carré.

Propriété 1.4.1 *Tout matrice de transition $\boldsymbol{P} = (p_{i,j})$ $((i,j) \in E^2)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- *pour tout couple (i,j), ona : $p_{i,j} \geq 0$.*
- *pour tout $i \in E$, on a :*

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

Démonstration 1.4.1 *Les nombres p_{ij} sont des probabilités , donc des nombres positifs. par ailleurs ,pour chaque $i \in E$, l'application*

$$\mathbf{B} \rightarrowtail \sum_{j \in B} p_{ij}.$$

definie une mesure de probabilité sur E.

Remarque 1.4.1 *Une matrice $\boldsymbol{P}$ qui vérifie les conditions de la propriété précedente, est appelée matrice stochastique.*

Propriété 1.4.2 *Soit $\boldsymbol{P}$ une matrice de transition. Alors :*

- *$\boldsymbol{P}$ admet la valeur propre 1.*

• *On peut associer à cette valeur propre le vecteur propre* $\boldsymbol{V}$ *ayant toutes ses composantes égales à 1.*

Démonstration 1.4.2 *Ona* $\mathbf{P}.\mathbf{V} = \mathbf{V}$ *si et seulement si, pour tout* $i \in E$*, la relation suivante est satisfaite :*

$$\sum_{j\in E} p_{ij}.v_j = v_i.$$

Il suffit donc, pour tout $i \in E$ de prendre $v_i = 1$.

Exemple 1.4.1 *La matrice de transition de la châine d'Ehrenfest definie sur* $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *est égale à :*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.4.1 *Soit la châine* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans l'ensemble* E *et de matrice de transition* $\boldsymbol{P}$*. Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et quels que soient les états* x_0*, ... ,* x_k *occupés aux temps 0, ... ,*k *:*

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_k = x_k) = P(X_0 = x_0).P_{x_0,x_1}. \ ... \ .P_{x_{k-1},x_k}.$$

Démonstration 1.4.3 *Par la formule des conditionnements on obtient :*

$$\begin{aligned} P(X_k = x_k, ..., X_0 = x_0) &= P(X_k = x_k \ / \ X_{k-1} = x_{k-1}, ..., X_0 = x_0) \\ &\times P(X_{k-1} = x_{k-1} \ / \ X_{k-2} = x_{k-2}, ..., X_0 = x_0) \times ... \times P(X_0 = x_0). \end{aligned}$$

puis par application de proprieté de markov :

$$\begin{aligned} P(X_k = x_k, ..., X_0 = x_0) &= PX_k = x_k \ / \ X_{k-1} = x_{k-1}) \times P(X_{k-1} = x_{k-1} \ / \ X_{k-2} = x_{k-2}) \\ &\times ... \times P(X_0 = x_0) \\ &= P(X_0 = x_0) . P_{x_0, x_1} .....P_{x_{k-2}, x_{k-1}} . P_{x_{k-1}, x_k} . \end{aligned}$$

On détermine la probabilité de transition d'un état x_i à un état x_j entre deux instants quelconques m et p gràce à l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Théorème 1.4.2 (Équation de Chapman-Kolmogorov) *Soient un châine $(X_n)_{n \geq 0}$ et les instants m, n et p vérifiant $m < n < p$.*

pour tout couple d'états x_i, x_j de E, ona :

$$P(X_p = x_j \ / \ X_m = x_i) = \sum_{x_K \in E} P(X_P = x_j \ / \ X_n = x_k) . P(X_n = x_k \ / \ X_m = x_i) .$$

Théorème 1.4.3 (Loi d'évolution d'une châine) *La matrice de transition $\mathbf{P}^{(k)}$ associé à l'ensemble des probabilité de transition en k unité de temps, constituée des termes $(P(X_k = x_j \ / \ X_0 = x_i))_{i,j}$, est definie par :*

$$\mathbf{P}^{(k)} = \underbrace{\mathbf{P} \times \mathbf{P} ... \times \mathbf{P}}_{k \ fois} = \mathbf{P}^k$$

d'ou la loi d'évolution de la châine :

$$\forall \mathbf{k} \ , \ \pi(k) = \pi(0) . \mathbf{P}^k$$

Le théorème montre que l'évolution aléatoire d'une châine est entièrement par la connaissance de sa loi initiale $\pi(0)$ et de sa matrice de transition **P.**

1.5 Classification des Etats

1) Soient i et j deux états de E

• On dit que l'état j est accessible depuis l'état i si :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ p_{i,j}^{(n)} = P\left(X_n = j/X_0 = i\right) > 0.$$

• On dit que les états i et j communiquent si chacun est accessible depuis l'autre. On note alors $i \leftrightsquigarrow j$. Lorsque l'espace E est réduit à une seule classe (i.e touts les états communiquent), on dit que la châine est irréductible. En général, E se partitionne en états isolés dans lesquels on ne revient jamais une fois qu'on les a quittés, et en classes irréductibles disjointes.

2) Soit une châine de Markov avec espace des états E et matrice de Markov $\mathbf{P}$. Soit $\mathbf{T}$ l'instant du passage par état j.

• L'état j est dit récurrent si

$$P_j\left(\mathbf{T} < +\infty\right) = 1.$$

Si non, si

$$P_j(\mathbf{T} = +\infty) > 0.$$

Alors j est dit transitoire.

• L'état récurrent j est dit nul si

$$\mathbb{E}_j\left(\mathbf{T}\right) = +\infty.$$

Si non il est dit non-nul.

• La période $d(i)$ d'un état i est définie par

$$d(i) = p\,\mathrm{gcd}\left\{n \geq 0 : P_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$

Par convention, $d(i) = 0$ si l'ensemble ci-dessus est vide. Un état i est périodique si $d(i) > 0$ et apériodique sinon ($d(i) = 0$ ou 1).

Si non, j est dit apériodique.

La probabilité de premiere transition en n unités de temps de l'état i à l'état j, notée $f_{ij}^{(n)}$, est defini par :

$$f_{ij}^{(n)} = P\left(\mathbf{T}_j = n \ / \ X_0 = i\right) = P\left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j \ / \ X_0 = i\right).$$

$f_{ij}^{(n)}$ est la probabilité de premier retour à l'état i en n unités de temps.

- j est récurrent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$.
- j est transitoire $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_{jj}^{(n)} < 1$.

1.6 Théorèmes limites

Étant donné une châine de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'objectif de cette dernière partie est d'approximer la loi de la v.a. X_n lorsque n tend vers l'infini.

1.6.1 Les mesures stationnaires

Définition 1.6.1 *Une mesure stationnaire (ou invariante) d'une châine de Markov de matrice de transition* $\mathbf{P}$ *est une loi de probabilité sur* E*, disons* $\pi = (\pi(j))_{j\in E}$*, vérifiant* $\pi = \pi\mathbf{P}$.

Soit π une mesure stationnaire pour la châine de Markov $(X_n)_{n\in N}$ de matrice de transition $\mathbf{P}$. Rappelons que le vecteur ligne $(u_n(j))_{j\in E}$ désigne la loi de la v.a. X_n. La formule $u_{n+1} = u_n\mathbf{P}$ implique que si la loi de X_n est π (i.e $u_n = \pi$) alors il en est de même pour la loi de X_{n+1} (i.e $u_{n+1} = \pi$). Par conséquent, si la loi initiale u_0 (celle de X_0) est π alors toutes les v.a. X_n seront distribuées selon π. C'est ce qui justifie le qualificatif de stationnaire. Cela signifie que la probabilité de se trouver dans un état donné reste constante au cours du temps, bien que la châine saute constamment d'état en état. Une mesure stationnaire doit donc être comprise comme un équilibre dynamique en loi.

1.6.2 Les mesures réversibles

Définition 1.6.2 *Une mesure réversible d'une châine de Markov de matrice de transition* $\mathbf{P}$ *est une loi de probabilité sur E, disons $\pi = (\pi(i))_{i\in E}$, vérifiant*

$$\forall i, j \in E \quad \pi(i)\, p_{i,j} = \pi(j)\, p_{j,i.}$$

Proposition 1.6.1 *Toute mesure réversible d'une châine de Markov est stationnaire pour cette même châine.*

Démonstration 1.6.1 *Soient $j \in E$ et $\pi = (\pi(i))_{i\in E}$ une mesure réversible d'une châine de Markov de matrice de transition* $\mathbf{P}$. *Dès lors,*

$$\begin{aligned}\sum_{i\in E}\pi(i)\, p_{i,j} &= \sum_{i\in E}\pi(j)\, p_{j,i} \\ &= \pi(j)\sum_{i\in E}p_{j,i} \\ &= \pi(j)\end{aligned}$$

car la somme des coefficients d'une même ligne de $\mathbf{P}$ vaut 1. Il vient $\pi\mathbf{P} = \pi$; π est donc stationnaire pour la châine de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$.

Attention la réciproque est fausse : la matrice stationnaire $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$ n'est pas réversible. En effe,

$$\pi_a p_{a,b} = \frac{1}{5} \times 1 \quad alors \quad que \quad \pi_b p_{p,a} = 0.$$

Cependant, en pratique (et notamment pour les projets), pour obtenir une mesure stationnaire, il est recommandé de commencer par chercher une mesure réversible, plus facile à identifier qund elle existe.

1.6.3 L'espace d'états E est fini

Proposition 1.6.2 *considérons une châine de Markov homogène à espace d'états fini E et de matrice de transition $\mathbf{P}$. Elle admet au moins une mesure stationnaire, Si la châine est irréductible alors il y a unicité de la mesure stationnaire (notons-la π). dans ce cas,elle charge tous les états*

$$\pi(i) > 0, \text{ pour tout } i \in E$$

et le temps moyen de retour en i est égal à l'inverse de $\pi(i)$:

$$\mathbb{E}\left[T(i)/X_0 = i\right] = \frac{1}{\pi(i)}, \text{ pour tout } i \in E.$$

Cependant, l'éxistence et l'unicité de la mesure stationnaire π n'assure pas la convrgence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers π. Cette convergence repose en fait sur l'apériodicité de la châine. Le résulta suivant est non trivial. Il ne sera pas démontré.

Théorème 1.6.1 *considérons une châine de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à espace d'état fini E et de matrice de transition $\mathbf{P}$. Supposons de plus que la châine et irréductible et apériodique. Notons π sa mesure stationnaire*

(1) La matrice $\mathbf{P}^n$ converge quand tend vers l'infini vers une matrice dont toutes les lignes sont égale à π.

(2) Quelle que soit la loi de X_0, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence en loi quend n tend vers l'infini vers π : pour tout état i, $P(X_n = i) \to \pi(i)$.

Les pointes (1) et (2) s'interprètent par de l'indépendance asymptotique : en deux instants éloignés l'un de l'autre, la châine se comporte de manière presque indépendante. En effet, les quantités $P(X_n = j \ / \ X_0 = i)$ et $P(X_n = j)$ tendent toutes les deux vers la même limite $\pi(j)$. Elles sont donc proches asymptotiquement, ce qui donne

$$P(X_n = j \ , \ X_0 = i) \simeq P(X_n = j)\, P(X_0 = i).$$

En utilisant l'invariance par translation dans le temps, la relation ci-dessus se généralise en

$$P\left(X_{n+m}=j\ ,\ X_m=i\right)\simeq P\left(X_{n+m}=j\right)P\left(X_m=i\right).$$

1.6.4 L'espace d'états E est infini

Définition 1.6.3 *Considérons unz châine de Markov homogène irréductible et récurrent, à espace d'états infini E. Soit $i\in E$. Le temps de retour $T(i)$ à i est fini presque sûrement (car i est récurrent). Si, de plus,*

$$\mathbb{E}\left[T(i)/X_0=i\right]<+\infty,$$

l'état i est qualifié de récurrent positif. Dans le cas contraire, i est qualifié de récurrent nul.

Être récurrent nul signifie que l'on revient presque sûrment en temps fini en cet état mais que le temps de retour est plutôt long. Si long que son espérance est infinie.

La marche aléatoire simple et symétrique (i.e, avec $p=1/2$) sur $\mathbb{Z}$ est un exemple de châine de Markov pour laquelle tous les états sont récurrent nuls.

Le théorème suivant établit que la récurrent positive est une propriété de classe (même chose pour la récurrent nulle) : c'est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure stationnaire. Si c'est le cas, il y a unicité de la mesure stationnaire.

Théorème 1.6.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une châine de Markov homogène irréductible, à espace d'états infini E. Sont équivalentes :*

(i) tout les états sont récurrents positifs ;

(ii) il existe au moins un état récurrent positif ;

(iii) la châine $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet (au moins) une mesure stationnaire.

Lorsque ces condition sont vérifiées, il y a unicité de la mesure stationnaire . Notons-la π.

Elle est définie par :

$$\forall i \in E,\ \frac{1}{\pi(i)} = \mathbb{E}\left[T(i)\ /\ X_0 = i\right].$$

Si de plus, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est apériodique alors :

(1) la matrice $\mathbf{P}^n$ converge quand n tend vers l'infini vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π;

(2) quelle que soit la loi de X_0, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence en loi quand n tend vers l'infini vers π :

pour tout état i, $P(X_n = i) \to \pi(i)$.

1.7 Exemples de chaînes de Markov

1.7.1 La chaîne à deux etats

En excluant le cas trivial de la matrice unité, la matrice da transition correspandante est de la forme :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} ; (0 < \alpha, \beta \leq 1)$$

Les calculs sont explicites .Pour tout $n \geq 0$; on peut évaluer la $n^{ième}$ puissance $\mathbf{P}^n$, ainsi que la valeur limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}^n$.

1.7.2 Promenade au hazard sur $\mathbb{Z}$

Considérons une chaîne de Markov, homogène dans le temps, caractérisée par l'ensemble des états $E = \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ et la matrice de transition $\mathbf{P}$=(p_{ij}) $(i, j \in \mathbb{Z})$, avec pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$p_{ij} = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1. \\ 1-p \text{ si } j = i-1. \\ 0 \text{ si dans les autres cas.} \end{cases}$$

ou p est un nombre fixé tel que $p \in]0,1[$.

1.7.3 Le modèle de la ruine du joueur

Un joueur A joue contre un joueur B une suite de parties de $\ll$ *pile* $\gg$ ou $\ll$ $face$ $\gg$, independantes. La somme totale de heurs fortunes est de a euros.

A chaque partie, on convient que le joueur A gagne un euro (que lui donne le joueur B) avec un probabilité q ($p \in]0,1[$; $q = 1 - p$). Le joueur s'arrète des que l'un des joueur est ruiné.

Pour chaque $n \geq 0$, on désigne par X_n la fourtune du joueur A à l'inssue de la $n^{ième}$ partie. la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une châine de Markov, dont l'ensemble des étates est $E = \{0, 1, ..., a\}$ Les états 0 (ruine de A) et a (ruine de B).

Sa matrice de transition est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Processus de Markov

Les processus aléatoires que l'on considère dans ce chapitre sont des processus en temps continue analogues aux chaînes de Markov. Ils se caractérisent par la propriété de mémoire à court terme suivante. Connaissant l'état du processus au temps présent, la prédiction de l'état futur se fait indépendamments du passé du processus. Un exemple de processus de Markov en temps continue a déjà été rencontré. Il s'agit du processus de Poisson. Si l'on pose pour état au temps t le nombre total d'arrivées à cet instant, le processus de Poisson est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui n'effectue des sauts que de l'état n vers l'état $(n+1)$, $n \geq 0$.

2.1 Processus stochastique

2.1.1 Filtration

Définition 2.1.1 *On va s'intéresser à des phénomènes dépandant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.*

Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.
On demande souvent que les ensemble négligables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.

On parle d'hypothèses habituelles si :

• Les ensembles négligables sont continu dans $\mathcal{F}_0$.

• La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Une filtration $\mathcal{G}$ est dit plus grosse que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t$.

2.1.2 Processus stochastique

Définition 2.1.2 • *Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires* $(X_t \ ,t \in [0, +\infty[)$ *définies sur le même espace de propabilité.*

• *On dit que le processus est à trajectoire continues (ou est continu) si les application* $t \rightarrow X_t\,(w)$ *sont continues pour presque tout* w.

• *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvu de limites à gauche. Même definition pour càdlàd.*

2.1.3 Processus Croissant

• Un processus $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t,\ t \geq 0)$ est un processus croissant si $\mathcal{A}_0 = 0$ et $t \rightarrow \mathcal{A}_t$ est une fonctione croissante, c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_t\,(w) \leq \mathcal{A}_s\,(w)\,, \forall t \leq s \ ;\ p.s$$

Sauf mention du contraire, les processus croissants sont pris continue à droite.

• Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, t[$ si :

$$\underset{t_i}{Sup} \sum_i \left| V_{t_{i+1}} - V_{t_i} \right| \leq k.$$

Le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

• Un processus $V = (V_t \ ,t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0, t]$ si :

$$\underset{t_i}{Sup} \sum_i \left| V_{t_{i+1}} - V_{t_i} \right| < +\infty.$$

Le sup étant pris sur subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

• Un processus $V = (V_t, \ t \geq 0)$ est dit à variation finie s'il est à variation finie sur $[0, t]$ pour tout t. Il est alors la différence de deux processus croissants (et réciproquement).

2.1.4 Processus Gaussiens

• Un processus X est dit gaussien si tout combinaison linéaire finie $(X_t, \ t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \ \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

est une v.a.r. gaussienne.

• Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance.

• Un espace gaussien est un sous-espace (vectoriel fermé) de $L^2(\Omega)$ formé de v.a.r. gaussiennes centrées.

• L'espace gaussien engendrée par un processus gaussien est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendrée par les v.a.r. centrée $(X_t - \mathbb{E}(X_t), \ t \geq 0)$,
c'est-à-dire le sous-espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.

2.2 Propriétés des processus

• Un processus X est mesurable si l'application $(t, w) \rightarrow X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque w, on associe la fonction $t \to X_t(w)$ qui est appelée trajectoire.

• Soient X et Y deux processus. X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les v.a. X_t et Y_t sont égales $P-p.s.$: $\forall t \geq 0,\ P(X_t = Y_t) = 1$.

• X et Y sont indistinguables si, $P-p.s.$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire $P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1$.

• Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

• Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si l'application $(s, w) \to X_s(w)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.

• Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continue à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.

2.3 Processus de Markov

Définition 2.3.1 *On dit que le processus $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus de Markov si, pour tout $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathbb{N}$, et $x_u \in \mathbb{N}$, $0 \leq u \leq s$:*

$$P(X_{t+s} = j \ / \ X_s = i,\ X_u = x_u\ ,\ \forall 0 \leq u \leq s) = P(X_{t+s} = j \ / \ X_s = i).$$

En d'autres termes, un processus de Markov est un processus ayant la propriété suivante. La loi conditionnelle de la variable future X_{t+s} sachant l'état présent X_s et tout l'histoire du processus jusqu'au temps s ne dépend que du présent et est indépendante du passé. Si, de plus,

$$P_{ij}(s,t) = P(X_{t+s} = j \ / \ X_s = i).$$

ne dépend pas de s, le processus $\{X_t, \ t \geq 0\}$ est dit homogène . Touts les processus de Markov considérés dans ce chapitre seront homogènes.

Supoposons qu'un processus de Markov homogène $\{X_t, \ t \geq 0\}$ se trouvait en i au temps $t = 0$ et qu'il n'ait pas quitté cet état durant l'intervalle de temps $[0,t]$.

Cherchons àcaractériser la loi conditionnelle de la variable aléatoire T_i égale à la durée de séjour dans l'état i. Soit $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(T_i > t + s / T_i > t) &= P(T_i > t + s / X_t = i) \\ &= P(T_i > s) \end{aligned}$$

Ainsi, la variable T_i possède la propriété d'absence de mémoire qui caractérise la loi exponentielle. Le paramètre de cette loi dépend de l'état i. On not ce paramètre v_i. Cette propriété d'absence de mémoire suggère une manière intuitive de construire un processus de Markov homogène quelconque.

1) Pour tout i dans $\mathbb{N}$, le temps de séjour dans l'état i (avant d'effectuer une transition vers un autre état) est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre v_i.

2) Lorsque le processus "quitte" l'état i ,il choisit d'aller en $j \neq i$ avec la probabilité p_{ij}. Les probabilités de transition vérifient donc :

$$p_{ij} \geq 0 \ \ ; \ \ \sum_{i \neq j} pij = 1.$$

3) Toutes les durées de séjour sont indépendantes entre elles, et indépendantes des états de la chaîne.

2.3.1 Equations de Kolmogorov

Soit $\{X_t,\, t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs entières. Pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on pose :

$$\forall i \neq j \ , \ \lambda_{ij} = v_i p_{ij}.$$

La vitesse avec laquelle le processus sort de létat i est v_i et la probabilité avec laquele il entre dans j est p_{ij}. Ainsi, on peut interpréter λ_{ij} comme le taux avec lequel le processus partant de i entre en j. Bien entendu

$$v_i = \sum_{i \neq j} v_i p_{ij} = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}.$$

et

$$\forall i \neq j \ , \ p_{ij} = \lambda_{ij} \ / \ v_i.$$

Ainsi, la donnée de la famille $\{\lambda_{ij}\, ;\, i \neq j\}$ détermine complètement le processus en question. Posons, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ et $s, t \geq 0$,

$$P_{ij}(t) = P\left(X_{t+s} = j \ / \ X_s = i\right).$$

Il s'agit de la probabilité conditionnelle pour que le processus en i au temps s se trouve en j au temps $t+s$. Par homogénéité, cette grandeur ne dépend pas de s. La proposition suivante justifie la dénomination de taux de transition appliquée aux λ_{ij}.

Proposition 2.3.1 *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $h \geq 0$

1- $P_{ii}(h) = v_i h + o(h)$.

2- $P_{ij}(h) = \lambda_{ij} h + o(h)$. lorsque $i \neq j$.

Démonstration 2.3.1 *Nous avons, pour tout* $i \neq j$, $h \geq 0$

$$
\begin{aligned}
P(X_h = j \ / \ X_0 = i) &= P(T_i < h)\, p_{ij} + o(h) \\
&= v_i h p_{ij} + o(h) \\
&= \lambda_{ij} h + o(h).
\end{aligned}
$$

La première assertion est évidente. Elle traduit simplement le fait que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij}(h) = 1.$$

La proposition suivante établit une propriété de semigroupe pour les probabilités de transition analogue à celle démontrée auparavant pour les châine de Markov.

Proposition 2.3.2 (Propriété de semigroupe)

$$\forall s, t \geq 0 \ , \qquad P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ik}(t)\, P_{kj}(s).$$

Démonstration 2.3.2 *Conditionner aux valeurs de* X_t *et appliquer la propriété de Markov.*

2.3.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de Markov. En effet, nous avons, pour tout $i > 0$:

$$v_i = \lambda \quad et \quad p_{i,i+1} = 1.$$

Dans cette section, nous justifiions l'aspect intuitif du processus de Poisson en obtenant la loi de poisson à partir des équations infinitésimales. La référence à la definition de processus de Markov ne sera pas directement utilisée dans ce qui suit.

Définition 2.3.2 *Le processus de comptage* $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ *est un processus de Poisson de taux* $\lambda > 0$ *si :*

1) le processus est à accroissement indépendants et stationnaires.

2) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$.

3) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

2.3.3 Comportement asymptotique

Nous cherchons à caractériser le comportement asymptotique d'un processus de Markov homogène $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ dons l'éspace d'état est égale à $\mathbb{N}$. Supposons que la variable X_t converge en loi vers une loi π et supposons que l'inversion des signes $\sum$ et lim soit licite. On obtient, par les équations de Kolmogorov

$$0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \pi_j \lambda_{ji} - v_i \pi_i.$$

soit

$$0 = \pi \Lambda$$

et, évidemment

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1.$$

Par analogie avec les châines de Markov, nous cherchons des conditions sous les quelles ce systèmes admet une solution unique. Pour simplifier la discussion, nous limitons à des ensembles d'état finis. L'existence d'une solution au système

$$0 = \pi \Lambda$$

est garantie par le fait que 0 est toujours valeur propre de Λ. Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unicité d'une solution stationnaire est, comme pour les chaînes, liée à une notion de connexité de diagramme de transition du processus $\{X_t\,;\, t \geq 0\}$.

Remarque 2.3.1 *La matrice Λ est définie par :*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -v_0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} & ... \\ \lambda_{10} & -v_1 & \lambda_{12} & ... \\ . & . & & \\ . & . & & \end{pmatrix}.$$

Définition 2.3.3 *Le processus $\{X_t\,;\, t \geq 0\}$ est dit irréductible si :*

$$\forall i, j\ ,\ \exists k_1, ..., k_n \quad t.q. \quad \lambda_{ik_1} > 0 \text{ et } ... \text{ et } \lambda_{k_n j} > 0.$$

L'interprétation est la même que pour les chaînes. Le problème de la périodicité ne se pose pas puisque les temps de transition sont aléatoires. On admet le résultat suivant.

Théorème 2.3.1 *Si le processus $\{X_t\,;\, t \geq 0\}$ est irréductible, alors la variable X_t converge en loi quant $t \to +\infty$ vers la loi π solution de*

$$0 = \pi\Lambda.$$

indépendant de la loi de la condition initiale X_0.

Chapitre 3

Applications

3.1 Processus de naissance et de mort

Définition 3.1.1 *Un processus de naissance et de mort est un processus de Markov homogène à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *tel que :*

$$\lambda_{i\ i+1} = \lambda_i,$$

$$\lambda_{i\ i-1} = u_i,$$

$$\lambda_{i\ j} = 0 \ si \ j \neq i, i-1, i+1,$$

où $\lambda_i \geq 0$, $u_i \geq 0$ et $i \in \mathbb{N}$.

Le générateur d'un processus de naissance et de mort est :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & . & . & . \\ u_1 & -(\lambda_1 + u_1) & \lambda_1 & . & . \\ 0 & u_2 & -(\lambda_2 + u_2) & \lambda_2 & . \\ 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Les équations de Kolmogorov d'un processus de naissance et de mort sont :

$$p_0' = -\lambda_0 p_0 + u_1 p_1$$

$$p_j' = \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + u_j)\, p_j + u_{j+1} p_{j+1}, \forall j \geq 1.$$

Les processus de naissance purs sont des processus pour lesque

$$\forall i \in \mathbb{N}, u_i = 0.$$

Dans ce cas, nous avons :

$$p_0' = -\lambda_0 p_0$$

$$p_j' = \lambda_{j-1} p_{j-1} - \lambda_j p_j, \forall j \geq 1.$$

On retrouve le processus de Poisson d'intensité λ quand $\lambda_i = \lambda$. La solution de ces équations est alors :

$$p_j\,(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \quad , \quad \forall j \geq 0.$$

On dit qu'un processus de naissance et de mort n'explose pas en temps fini si :

$$\forall t \geq 0, \qquad P\,(X_t < +\infty) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P\,(X_t = n) = 1.$$

Remarque 3.1.1 *On peut montrer qu'un processus de naissance et de mort n'explose pas en temps fini si et seulement si la série* $\sum_{i \in \mathbb{N}} 1/\lambda_i$ *diverge.*

3.1.1 Comportement asymptotique

Théorème 3.1.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de naissance et de mort irréductible admette une unique loi stationnaire est que la série*

$$S=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{j-1}}{u_1u_2...u_j}$$

soit convergente. Dans ce cas, la distribution stationnaire est donnée par :

$$\pi_0=\frac{1}{1+S}$$

et

$$\pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{j-1}}{u_1u_2...u_j}\pi_0 \quad , \quad \forall j\geq 1.$$

Démonstration 3.1.1 *D'après les résultats du paragraphe précédent, on doit avoir*

$$\pi\Lambda=0 \ et \ \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$$

soit

$$\begin{aligned}
-\lambda_0\pi_0+u_1\pi_1&=0\\
\lambda_0\pi_0-(\lambda_1\pi_1+u_1\pi_1)+u_2\pi_2&=0\\
\lambda_{j-1}\pi_{j-1}-(\lambda_j\pi_j+u_j\pi_j)+u_{j+1}\pi_{j+1}&=0\\
.&=.\\
.&=.
\end{aligned}$$

De ces premières équations, on tire

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda_0}{u_1}\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{\lambda_0\lambda_1}{u_1 u_2}\pi_0 \\
. &= . \\
\pi_j &= \frac{\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{j-1}}{u_1 u_2 ... u_j}\pi_0 \\
. &= .
\end{aligned}
$$

La deuxème condition s'écrit donc $S\pi_0 + \pi_0 = 1$ soit $\pi_0 = 1/(1+S)$. Le système admet donc une solution ssi $S < +\infty$.

3.2 Files d'attente

3.2.1 Description d'un système de file d'attente

Un système de file d'attente se d'écrit par un processus d'arrivée de clients, un mécanisme de service et une discipline d'attente.

• **Processus d'arrivée**

Nous supposons que les clients arrivent indépendamment les uns des autres. Les durées inter-arrivées $(X_n)_{n\geq 1}$ sont donc indépendantes. Nous supposons de plus que ces variables sont de même loi. Voici une liste d'arrivées possibles et les notation associées :

- arrivées à intervalles réguliers (châine de montage) : D (déterministe),
- arrivées poissonniennes : M (Markov),
- arrivées à intervalles suivant une loi d'Erlang : E_k égale à la loi gamma $\mathrm{G}(k,\lambda)$,
- arrivées à intervalles suivant une loi générale : G.

• **Discipline de service**

Les durées de services $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont des variables positives indépendantes et de même loi.

Voici une liste de services possibles et les notations associées :

- services de durée constante : D (déterministe),
- services de durée suivant une loi exponentielle : M (Markov),
- services de durée suivant une loi d'Erlang : E_k,
- services de durée suivant une loi générale : G.

• **Discipline d'attente**

Nous listons ci-dessous les différentes discipline d'attente

FIFO	Premier arrivé, premier servi
LIFO	Dernier arrivé, premier servi
RSS	Sélection au harard d'un client en attente

Cette liste n'est pas complète. On peut difinir d'autres types de priorité. Il faut alors déclarer précisément la manière dons les clients entrent en service. Lorsqu'il y a plusieurs serveurs en particulier, on peut par exemple :

- affecter les clients aux serveurs par rotation,
- créer une file d'attente unique,
- créer une file d'attente par un serveur.

• **Classification des files d'attente**

Il exist une nomenclature pour classer les files d'attente. Cette nomenclature est définie de la manière suivante. une file d'attente spésifique est désignée par le symbole

Arrivée / Service / Nombre de serveurs / Capacité maximale de la file / Nombre maximale de clients potentiels / Discipline de la file d'attente.

3.2.2 Files d'attente formant un processus de naissance et de mort

Une file d'attente simple : M/M/1.

Dans une file d'attente M/M/1, les clients se présentent à un serveur selon un processus de Poisson de paramètre λ et sont servis les uns aprés les autres. Les durées de service sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre u. Nous intéressons à l'évolution du nombre X_t de clients présents dans la file d'attente ou en service au temps $t > 0$. Le processus $\{X_t\,;\,t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort de taux

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \lambda_i = \lambda \quad , \quad u_i = u.$$

Posons $\rho = \lambda/u$. La série S s'écrit

$$S = \rho + \rho^2 + \rho^3 + ...$$

Elle converge ssi $\lambda < u$. On a alors

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad , \quad \pi_j = (1-\rho)\,\rho^j$$

et π est une loi géométrique décalée à gauche (i.e partant de 0)
La condition $\lambda < u$ est bient entendu équivalente à la condition $\rho < 1$. Ainsi, un régime stationnaire peut exister si (et seulement si) l'intensité de trafic est inférieure à cent pour cent. On voit de plus l'importance synthérique que joue ce paramètre lorsque l'on calcule le nombre moyen de clients en régime stationnaire

$$\mathbb{E}\,[L] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho} \ ,$$

la longueur moyenne de la file d'attente

$$\mathbb{E}\left[L^{q}\right]=\mathbb{E}\left[(L-1)\,\mathbf{1}_{(L\geq 1)}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\,\pi_{n}=\frac{\rho^{2}}{1-\rho}\ ,$$

et la durée moyenne d'attente en régime stationnaire

$$\mathbb{E}\left[W\right]=\frac{\rho}{\lambda\left(1-\rho\right)}.$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.2.1 *Soit* $0<\lambda<u$. *Dans le système M/M/1, La variable aléatoire* W *égale à durée de séjour des clients dans le système en régime stationnaire suite une loi exponentielle de paramètre* $u\left(1-\rho\right)=u-\lambda$.

Démonstration 3.2.1 *Sachant qu'il y a* n *clients dans le système lorsqu'un nouveau client arrive, nous avons*

$$W=Y_{1}+Y_{2}+...+Y_{n+1}$$

Le temps d'attente du nouveau client est la somme de $n+1$ durées de service : celle du nouveau client, celle du client en service, plus celles des $n-1$ autres clients. Un conditionnement classique donne la densité de la variable W

$$\forall t\geq 0\quad,\quad f_{W}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_{n}f_{Y_{1}+Y_{2}+...+Y_{n+1}}\left(t\right).$$

En prenant la transformés de Laplace des deux termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}Lf_{W}\left(s\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_{n}\left[Lf_{Y_{1}}\left(s\right)\right]^{n+1}\\&=\left(1-\rho\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^{n}\left(\frac{u}{u+s}\right)^{n+1}\\&=\frac{\left(1-\rho\right)u}{\left(1-\rho\right)u+s}.\end{aligned}$$

D'où, après invertion

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad f_W(t) = (1-\rho)\, u e^{-(1-\rho)ut}.$$

La file d'attente M/M/s.

Dans cette file d'attente, les arrivées se font selon un processus de Poisson de paramètre λ, les temps de services sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre u. A la différence de la file M/M/1, le système n'est pas constitué d'un unique serveur mais d'un nombre arbitraire s de serveur $(s \geq 1)$. Dans ce cas, on a encore un processus de naissance et de mort avec, pour tout $n \geq 0$,

$$\lambda_n = \lambda$$

et

$$u_n = \begin{cases} nu \text{ si } n \leq s, \\ su \text{ si } n > s. \end{cases}$$

On considère pour ce système une intensité de trafic normalisée par le nombre de serveurs

$$\rho = \frac{\lambda}{su}.$$

Le régime stationnaire du processus de naissance et mort associé exist si et seulement si :

$$\rho < 1.$$

Nous avons, pour tout $n \geq 0$,

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^n}{n!}\pi_0 \text{ si } n \leq s, \\ \dfrac{(s\rho)^n}{s!s^{n-s}}\pi_0 \text{ si } n > s. \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!\,(1-\rho)} \right]^{-1}.$$

Exercise 3.2.1 *Démontrer que la longueur moyenne de la file d'attente en régime stationnaire est égale à :*

$$\mathbb{E}\left[L^q\right] = \frac{s^s \rho^{s+1}}{(1-\rho)^2\, s!} \pi_0.$$

Solution 3.2.1 *La longueur L^q est égale à 0 si $L \leq s$ et elle est égale à $L - s$ si non. Nous avons donc :*

$$\mathbb{E}\left[L^q\right] = \sum_{n=s+1}^{+\infty} (n-s) \frac{(s\rho)^n}{s! s^{n-1}} = \frac{s^s \rho^s}{s!} \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n.$$

La file d'attente M/M/1/k.

Dans cette file d'attente Markovienne, il n'y a qu'un seul serveur, mais la capacité du système est limitée à k clients au totale. cela signifie que les clients qui arrivent lorsque le système est saturé sont définitivement rejetés. Avec les conventions de notation utilisées précédement, Nous avons affaire à un processus de naissance et de mort de taux définis pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = u$$

et

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda \text{ si } n < k, \\ 0 \text{ si } n \geq k. \end{cases}$$

Puisque la capacité est limitée, nous obtenons un régime stationnaire indépendant des conditions initiales quelle que soit la valeur de l'intensité de trafic $\rho = \lambda/u$. Nous avons :

$$\forall n \geq 0 \ , \quad \pi_n = \pi_0 \rho^n$$

et, pour $\rho \neq 1$,

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}.$$

3.2.3 Files d'attente M/G/1.

Dans clients arrivent à une unité de service à des instants aléatoires suivant un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. Quand le serveur est occupé, les clients attendent leur tour. Les durées de service des clients successife sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de probabilité de fonction de répartition G et de moyenne $\frac{1}{u}$ et de variance σ^2. Pour tout $n > 0$, on note X_n le nombre total de clients dans l'unité de service à l'instant de départ du $n^{ème}$ client servi et A_n le nombre de clients arrivés pendant le service du $n^{ème}$ client.

Proposition 3.2.2 *La suite (X_n) est un châine de Markov de matrice de transition*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ 0 & 0 & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

où

$$\forall k \geq 0 \ , \quad a_k = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} \left(\lambda t\right)^k}{k!} dG\left(t\right).$$

Démonstration 3.2.2 *La démonstration s'appuie sur la remarque suivante. Pour tout n,*

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} \ si \ X_n > 0, \\ A_{n+1} \ si \ X_n = 0. \end{cases}$$

Par le caractère poissonnien du processus d'arrivée, la variable aléatoire A_{n+1} est indépendantes des variables $X_1, ..., X_n$.En conséquent, le processus $(X_n)_{n \geq 1}$ possède la propriété de Markov. De plus, nous avons

$$P\left(X_{n+1}=j\ /\ X_n=i\right)=\begin{cases} P\left(A_{n+1}=j-i+1\right) \text{ si } i>0, \\ P\left(A_{n+1}=j\right) \text{ si } i=0. \end{cases}$$

Les variables $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi. La châine (X_n) est donc homogène. Sachant que la durée de $n^{ème}$ service est égale à t, nous avons :

$$P\left(A_n=k\ /\ \text{durée du } n^{ème} \text{ service } =t\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!}.$$

Ainsi, après conditionnement, nous avons :

$$a_k=P\left(A_n=k\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!}dG\left(t\right)$$

Proposition 3.2.3 *La châine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, apériodique. Elle admet une unique loi de probabilité invariante si et seulement si $\rho=\dfrac{\lambda}{u}<1$.*

Dans ce cas, nous avons :

$$\forall k\geq 0,\ \lim_{n\to+\infty}P\left(X_n=k\right)=\pi_k$$

où π une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ de fonction génératrice est égale à

$$\forall\left|z\right|<1, G\left(z\right)=\frac{\left(1-\rho\right)A\left(z\right)}{1-\dfrac{1-A\left(z\right)}{1-z}}.$$

$$A\left(z\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k.$$

Démonstration 3.2.3 *Cherchons les solutions du système $\pi=\pi P$. Il s'écrit ici :*

$$\pi_n=a_n\left(\pi_0+\pi_1\right)+a_{n-1}\pi_2+...+a_0\pi_{n+1}\quad,\quad n\geq 0.$$

Multiplions par z^n. En sommant toutes les équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(z) &= (\pi_0 + \pi_1) A(z) + \pi_2 z A(z) + \pi_3 z^2 A(z) + ... \\ &= \pi_0 A(z) + \frac{A(z)}{z} \left[G(z) - \pi_0 \right]. \end{aligned}$$

On tire de cette équation

$$G(z) = \frac{\pi_0 A(z)}{1 - \dfrac{1 - A(z)}{1 - z}}.$$

Cette équation admet une solution convenable si $G(1) = 1$. Comme $A(1) = 1$ et

$$\lim_{z \to 1} \frac{1 - A(z)}{1 - z} = A'(1) = \rho \ ,$$

il faut donc que :

$$\pi_0 = 1 - \rho > 0.$$

Ce ci équivaut à

$$\rho < 1.$$

Bibliographie

[1] Bordeaux, I. PROBABILITES et STATISTIQUE.

[2] Caumel, Y. (2011). Variables aléatoires. Probabilités et proceccus stochastiques, 19-44.

[3] Coupier, D. PROCESSUS STOCHASTIQUES. POLYTECH'LILLE.

[4] Foata, D., & Fuch, A. (2002). Processus stochastique : processus de Poisson, châines de Markov et martingales : cours et exercices corrigés. Dunod.

[5] FRANCHI, J. Cours de probabilités (M1 de Mathématiques. UdS).

[6] François, O. (2004-2005). Notes de cours de Processus Aléatoires.

[7] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry.

[8] JOURDIN, B. (2018). Probabilités et statistique pour l'ingénieur.

[9] Lefebve, M. (2005). Processus stochastiques appliqué Presses inter Polytechnique.

[10] Suquet, C. (2004). Introduction au calcul de probabilités Université des Sciences et Technologies de Lille, France, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées. Disponible en ligne en mars.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	espace de probabilité.
$\mathbb{E}(X)$	l'espérance de variable aléatoire X.
$V(X)$	variance de variable aléatoire X.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
p	probabilité de transition.
$\mathbf{P}$	matrice de Markov.
lim	limite.
$p\,\mathrm{gcd}$	plus grand diviseur commun.
$p.s$	presque sûrement.
$P - p.s$	presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
$v.a.r$	variable aléatoire réelle.
$i.i.d$	identiquement indépendant distribuée.
π	loi invariante (mesure stationnaire).
M	Markov.