République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique


**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**


Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par


**LABED Fadhila**


Titre :

# Introduction aux équations différentielles stochastiques rétrogrades

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **ZEGHDOUDI Kadhem** | UMKB | Président |
| Dr. | **LABED Saloua** | UMKB | Encadreur |
| Dr. | **KORICHI Fatiha** | UMKB | Examinateur |

Juin 2018

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes chèrs parents*

*Mes frères : Hamza, Djallel, Islem, Nassim, Issam*

*Mes chères : Asma, Dounia, Lilia, Fatna*

*Mes amis : Hanan, Romaissa, Micha, Karima, Merzaka, Ladmia, Missou, Sabrina, Nina, Aicha, Fatma, Majda, Djawaher, Souhir et tous mes collègues*

*Tous les membres de ma famille*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord **Allah**

le tous puissant, qui m'a donné la patience et l'effort pour réaliser ce mémoire.

En second lieu, je tiens a remercier mon encadreur **Dr. LABED Saloua**, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail, il m'a en effet guidé pendant toute l'année.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury Dr. **ZEGHDOUDI Kadhem et Dr. KORICHI Fatiha**, qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Je remercie tous les enseignants du département de Mathématiques, je remercie également le chef de département Pr. "**HAFAYED Mokhtar**".

Je tiens remercie

à ma famille, notamment à **mes parents** pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

A tous, pour tous.

merci

# Table des matières

# Introduction

Dans ce travail nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastique rétrogrades. En particulier, l'étude des équations différentielles stochastique rétrogrades dans le cas où le générateur est Lipshitzien.

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades a connu un formidable développement à partir des années 1990. Ces équations sont apparues en 1973, dans un article de J.M. Bismut, qui concernait le contrôle stochastique optimal et la version probabiliste du principe du maximum de Pontryagin. Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng [7] pour avoir obtenir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le terme déterministe de l'équation n'est pas linéaire. Depuis de nombreux travaux ont été effectués. La théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations etroites avec les mathématiques financières et les equations aux dérivées partielles.

Nous allons présenter dans ce qui suit la description des chapitres de ce mémoire :

- Dans le premier chapitre, on présente des notions de base de calcul stochastique (généralité de processus stochastique, mouvement Brownien, martingale, intégrale stochastique et calcul d'Itô etc, ...).

- Dans le deuxième chapitre, on étudie le résultat d'existence et d'unicité d'une solution dans le cas Lipschitzienne. Ce résultat a été obtenu par E. pardoux et S.peng en 1990 [7].

# Chapitre 1

# Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire.

## 1.1 Notions générales

### 1.1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** *Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeur dans* $(E, \varepsilon)$, *appelée espaces d'états généralement* $(E, \varepsilon) = \left(\mathbb{R}^d, \mathbf{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

**Remarque 1.1.1 -** *Dans la pratique l'indice* $t$ *représente le temps.*

- *Pour* $t \in \mathbb{R}_+$ *fixé,* $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow X_t(\omega)$ *est une fonction à valeur réelles, appelée trajectoire du processus.*

**Définition 1.1.2** *Soient* $X = (X_t)_{\ t\geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastique :*

**a)** *On dit que* $Y$ *est une modification de* $X$ *si, pour tout* $t \geq 0$*, les variables aléatoires* $X_t$ *et* $Y_t$ *sont égales P.p.s c'est à dire :* $\forall\ t \geq 0,\ P(X_t = Y_t) = 1.$

**b)** $X$ *et* $Y$ *sont indistinguables si, P.p.s, les trajectoires de* $X$ *et de* $Y$ *sont les mêmes c'est à dire :* $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$

**c)** *On dit que* $X$ *et* $Y$ *sont èquivalents s'ils ont les mêmes lois de dimension finies.*

**d)** $X$ *et* $Y$ *sont identique si :*

$$\forall t \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\,.$$

**Proposition 1.1.1** *1. Indistinguable* $\Longrightarrow$ *modification* $\Longrightarrow$ *èquivalents.*

*2. Soient* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *deux processus stochastique continu alors :*

$X$ *et* $Y$ *sont indistinguables* $\Longleftrightarrow$ $X$ *est une modification de* $Y$*.*

**Définition 1.1.3** *Un processus* $X$ *est dit continue si pour presque toutes les trajectoires sont continues, c'est à dire :*

$$P\left(t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto X_t \textit{ est continu}\right) = 1.$$

**Notation 1.1.1** *Pour* $t \geq 0$ *et* $X$ *un processus stochastique on note :*

**a)** *Limite à gauche en* $t$ *:*

$$X_{t^-} = \lim_{s\to t} X_s, \quad s < t.$$

**b)** *Limite à droite en* $t$ *:*

$$X_{t^+} = \lim_{s\to t} X_s, \quad s > t.$$

**Remarque 1.1.2** *On dit qu'un processus* $X$ *est continue à droite et limite à gauche (càd-làg) si pour presque toute les trajectoires sont continues à droite et limite à gauches.*

**Définition 1.1.4** *Un processus* $X = (X_t)_{\ t\geq 0}$ *est dit mesurable si la fonction :*

$$(t,\omega) \in (\mathbb{R}_+, \mathbf{B}(\mathbb{R}_+)) \times (\Omega, \mathcal{F}) \longmapsto X_t(\omega) \in \left(\mathbb{R}^d, \mathbf{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right).$$

*est mesurable.*

### 1.1.2 Filtration et adaptation

**Définition 1.1.5** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité. Une filtration sur cet espace est une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribu de* $\mathcal{F}$*, on a alors, pour tout* $0 \leq s \leq t$*,*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

On dira parfois que $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ est un espace de probabilité filtré.

**Définition 1.1.6** *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration.*

- *On définit* $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\underset{s<t}{\cup}\mathcal{F}_s)$ *la tribu des èvènement antérieurs à* $t > 0$ *et* $\mathcal{F}_{t^+} = \left(\underset{\epsilon>0}{\cap}\mathcal{F}_{t+\epsilon}\right)$ *la tribu des événements instantéments postérieurs à* $t \geq 0$.
- *On dit qu'une filtration continue à droite si* $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$. *De façon analogue si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$ *pour tout* $t \geq 0$ *on dit qu'elle est continue à gauche.*

**Définition 1.1.7** *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t$*,* $X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

**Définition 1.1.8** *Soit* $X$ *un processus stochastique, on introduit la filtration* $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$*, cette filtration s'appelle la filtration naturelle augmenté de* $X$ *dèfinie par*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t\},$$

*pour* $t \geq 0$*,* $\mathcal{N}$ *: l'ensemble des èvènements* $P$*-négligeables.*

**Définition 1.1.9** *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, on dira que* $\mathcal{F}_t$ *satisfait au condition habituelles (usuelles) si et seulement si :*

1. $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles* $P$*-négligeables (complète).*
2. $\mathcal{F}_t$ *est continue à droite* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$.

**Définition 1.1.10** *La filtration standard est une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *qui satisfait les conditions usuelles.*

**Remarque 1.1.3** *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est toujours adapté à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^X$.

**Définition 1.1.11** *Un processus* $X$ *est progressivement mesurable par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour* $t \geq 0$*, l'application :*

$$\begin{aligned} ([0,t]\times\Omega, \mathbf{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) &\to \left(\mathbb{R}^d, \mathbf{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (s,\omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

*définie sur* $[0,t]\times\Omega$ *est mesurable pour la tribu* $\mathbf{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$.

**Proposition 1.1.2 -** *Si un processus* $X$ *est adapté à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *alors il admet une modification progressivement mesurables.*

**-** *Si un processus* $X$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et si les trajectoires sont continues à droite, alors il est progressivement mesurables.*

### 1.1.3 Temps d'arrêt

**Définition 1.1.12** *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une variable aléatoire* $\tau$ *à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$*, tel que, pour tout* $t \geq 0$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

**Définition 1.1.13** *Soit* $\tau$ *un temps d'arrêt pour la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*. On appelle tribu des èvenements antérieur à* $\tau$ *la tribu dèfinie par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0\}.$$

**Proposition 1.1.3 -** *Si $\tau$ est un temps d'arrêt, $\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

- *Si $\tau$ est un temps d'arrêt, fini presque sûrement et $(X_t)\ _{t\geq 0}$ est un processus adapté continue, alors $X_\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

- *Si $s$ et $\tau$ sont deux temps d'arrêt tel que $s \leq \tau$ P.p.s, alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\tau$.*

- *Si $s$ et $\tau$ sont deux temps d'arrêt alors $s \wedge \tau = \inf(s, \tau)$ est un temps d'arrêt.*

*En particulier si $s$ est un temps d'arrêt et $t$ est un temps déterministe $S \wedge t$ est un temps d'arrêt.*

**Proposition 1.1.4** *Soit $\tau$ un temps d'arrêt, si $X$ est progressivement mesurable le processus arrêté $X^\tau$ définie $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$ est progressivement mesurable.*

**Définition 1.1.14 i)** *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$est un processus à accroissements indépendants si :*

1. *$X_0 = 0$ p.s*
2. *$\forall n \geq 1$, $\forall t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, telle que : $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables aléatoires*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

*sont indépendantes.*

**ii)** *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires, si c'est un processus à accroissements indépendants et si : $\forall s, t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq s \leq t$ la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que $X_{t-s}$. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 : X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

**Définition 1.1.15** *(Variation finie, bornée et quadratique)*

*On définit la variation infinitésimale d'ordre $p$ d'un processus $X$ sur $[0,T]$ associée à une subdivision $\pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ de $[0,T]$ par :*

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p .$$

*Si $V_T^p(\pi_n)$ a une limite dans un certain sens lorsque $\|\pi_n\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, la limite ne dépend pas de la subdivision choisie, on l'appelle variation d'ordre $p$ de $X$ sur $[0,T]$.*

**Proposition 1.1.5 -** *Si $p = 1$, la limite s'appelle variation totale de $X$.*

- *Si $V_T^1$ est finie, on dit que $X$ à variation finie.*
- *Si $V_T^1$ est bornée, on dit que $X$ à variation bornée.*
- *Si $p = 2$, la limite s'appelle variation quadratique de $X$ notée $\langle X\rangle_T$.*

### 1.1.4 Espérance conditionnelle

**Définition 1.1.16** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu, l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire $E[X \mid \mathcal{G}]$ tel que :*

**i)** *$\mathcal{G}$-mesurable.*

**ii)** $\displaystyle\int_A E[X \mid \mathcal{G}]\, dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$

**Propriété 1.1.1** *Soient $X, Y$ deux variables aléatoires réelles appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On a alors :*

1. ***Linéarité*** *: Soit $a$ et $b$ deux constantes*

$$E[aX + bY \mid \mathcal{G}] = aE[X \mid \mathcal{G}] + bE[Y \mid \mathcal{G}].$$

2. ***Positivité*** *: si* $X \geq Y \Longrightarrow E[X \mid \mathcal{G}] \geq E[Y \mid \mathcal{G}]$ *p.s.*
3. *Si* $X$ *est indépendante de* $\mathcal{G}$*, alors* $E[X \mid \mathcal{G}] = E[X]$.
4. *Si* $X$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable, alors :* $E[X \mid \mathcal{G}] = X$.
5. *Si* $X$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable, alors :* $E[XY \mid \mathcal{G}] = XE[Y \mid \mathcal{G}]$.
6. $E[E[X \mid \mathcal{G}]] = E[X]$.

## 1.2 Mouvement Brownien

**Définition 1.2.1** *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique* $(W_t)_{t \geq 0}$ *à valeur réel, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*

1. ***Continuité :*** *P.p.s la fonction* $s \longmapsto W_s(\omega)$ *est une fonction continue.*
2. ***Indépendance des accroissements*** *: si* $s \leq t$ *,*$W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $F_s = \sigma(W_u, u \leq s)$.
3. ***Stationnarité des accroissements :*** *si* $s \leq t$*,la loi de* $W_t - W_s$ *est identique à celle de* $W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$.

**Théorème 1.2.1** *Si* $(W_t)_{t \geq 0}$ *est un mouvement Brownien, alors* $W_t - W_0$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne* $rt$ *et de variance* $\sigma^2 t$ *,* $r$ *et* $\sigma$ *étant des constantes réelles.*

**Définition 1.2.2** *Un mouvement Brownien est dit standard si :*

1. $B_0 = 0$ *P.p.s.*
2. $E(B_t) = 0$.
3. $E(B_t^2) = t$.

**Définition 1.2.3** $B_t$ *suit une loi* $\mathcal{N}(0, t)$. *Dans ce cas la loi de* $B$ *prend la forme :*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx,$$

*$dx$ étant la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

**Remarque 1.2.1** *Dans la suite, lorsque l'on parlera de mouvement Brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement Brownien standard.*

**Définition 1.2.4** *On appellera $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeur réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

- *Pour tout $t \geq 0$, $B_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*
- *Si $s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*
- *Si $s \leq t$, la loi $B_t - B_s$ est identique à celle de $B_{t-s} - B_0$.*

**Définition 1.2.5** *On appelle mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $B = \left(B^1, B^2, ..., B^d\right)$ où les $B^i$ sont des mouvement Brownien réels indépendants.*

**Proposition 1.2.1** *Soit $B$ un mouvement Brownien, la filtration $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles et $B$ est un $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ mouvement Brownien.*

**Définition 1.2.6** *Le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien (centré) de fonction de covariance :*

$$Cov\,(s,t) = \inf\,(s,t) = s \wedge t.$$

**Proposition 1.2.2** *Un processus $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien si et seulement si c'est un processus gaussien, continu, centré, de fonction de covariance :*

$$Cov\,(s,t) = \inf\,(s,t)\,.$$

**Preuve.** *Le premier implication :* pour $t_1 \leq ... \leq t_n$ le vecteur $\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ constitué de gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien. Ainsi par combinaisons linéaires $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ l'est également. Le mouvement Brownien est un processus gaussien continu.Il est de plus centré et si $t \geq s$ :

$$cov\,(B_t, B_s) = E\,[B_t B_s] = E\,[(B_t - B_s)\,B_s] + E\left[(B_s)^2\right] = s.$$

*Le deuxième implication :* on vérifie la définition point par point.

**a)** $E\left[(B_0)^2\right] = 0$, donc $B_0 = 0$ $\;P.p.s.$

**b)** $B$ est continu par hypothèse.

**c)** Pour $t_1 \leq ... \leq t_n \leq s < t$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n}, B_t - B_s)$ est gaussien avec

$$Cov\,(B_t - B_s, B_{t_i}) = 0.$$

Ainsi

$$B_t - B_s \perp (B_{t_1}, ..., B_{t_n})$$

et donc d'aprés la remarque ci dessus, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B = \sigma\,(B_u, u \leq s)\,.$

**d)** Enfin, pour $s \leq t$, $B_t - B_s$ est gaussienne, centrée de variance

$$Var\,(B_t - B_s) = t + s - 2\inf\,(s,t) = t - s.$$

■

**Remarque 1.2.2** *Le mouvement Brownien n'est pas dérivable.*

**Théorème 1.2.2** *Si $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien réel, alors $B$ admet une variation quadratique et :*

$$P.p.s, \quad \langle B, B\rangle_t = t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

## 1.3 Martingale à temps continue

**Définition 1.3.1** *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale (respectivement une sous-martingale, sur martingale) si pour tout* $t \geq 0$ *:*

**i)** $M_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

**ii)** $M_t$ est intégrable, c'est à dire : $E\left(|M_t|\right) < +\infty$.

**iii)** $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s$, pour tout $0 \leq s \leq t$ ( respectivement $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq M_s$ , $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s$ ).

**Remarque 1.3.1** *Une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *vérifie la propriété suivante :*

$$\forall t \geq 0, \qquad E\left[M_t\right] = E\left[M_0\right].$$

**Proposition 1.3.1** *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale de carré intégrable, alors,* $\forall s \leq t$*, on a :*

$$E\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}
E\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2E\left[M_tM_s \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_s^2 + M_s^2 \\
&= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 \\
&= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - E\left[M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.2** *Si* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien, alors :*

1. $B_t$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*
2. $B_t^2 - t$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*
3. $\exp\left(\sigma B_t - (\sigma^2/2)\, t\right)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

**Preuve.** Le fait que ce sont des processus adaptés, continus et intégrables est immédiat. Montrons l'identité martingale :
si : $s \leq t$ alors $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$. Donc

$$E\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t - B_s\right].$$

Mais un mouvement Brownien est centrée, donc $E\left[B_t - B_s\right] = 0$ . On en déduit le premier point.

1. Pour démontrer le premier :

$$\begin{aligned} E\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[B_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= B_s. \end{aligned}$$

2. Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

$$\begin{aligned} E\left[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s E\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] \end{aligned}$$

mais comme $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale $E\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$ et donc :

$$E\left[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien permettent de plus d'affirmer que :

$$\begin{aligned} E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left(B_{t-s}^2\right) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

$B_t$ suit une loi gaussienne centrée de variance t. On en déduit que si $s \leq t$ :

$$E\left[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s^2 - s.$$

3. Pour démontrer le dernier point, rappelons, tout d'abord, que, si $g$ est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$E\left[\exp\left(\lambda g\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda x\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

De plus, si $s < t$ :

$$E\left[\exp\left(\sigma B_t - \sigma^2 t/2\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\sigma B_s - \sigma^2 t/2\right) E\left[\exp\left(\sigma\left(B_t - B_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

car $B_s$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, et comme $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\sigma\left(B_t - B_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\exp\left(\sigma\left(B_t - B_s\right)\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(\sigma\left(B_{t-s}\right)\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(\sigma g\sqrt{t-s}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\left(t-s\right)}{2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

■

**Définition 1.3.2** *(Martingale locale)*

*Soit $M$ un processus définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ à valeurs réelles continues, on dit que $M$ est une martingale locale continue si :*

1. *$M_0$ est intégrable.*
2. *Il existe une suite de temps d'arrêt $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{T}_n \uparrow +\infty$ p.s et telle que $M^{\mathcal{T}_n}$ soit une martingale uniformément intégrable.*

*On dit que la suite $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réduit $M$ ou est une suite localissant pour $M$.*

**Définition 1.3.3** *(Semi-martingale continue)*

*Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

*où $M$ est une martingale locale (null en $t = 0$) et $A$ est un processus à variation finie.*

**Théorème 1.3.1** *(Représentation des martingales Browniennes)*

*Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration d'un mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Alors il existe un unique processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ de $M^2\left(\mathbb{R}^K\right)$, tel que :*

$$\forall t \geq 0,\ M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s, \quad P.p.s.$$

**Théorème 1.3.2** *(Théorème d'arrêt.)*

*Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $T$ et $S$ sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq k$, $k$ étant une constante réelle finie, alors $M_T$ est intégrable et :*

$$E\left[M_T \mid \mathcal{F}_S\right] = M_S \quad P.p.s.$$

## 1.4 Intégrale stochastique - calcul d'Itô

Soit $\omega \longmapsto I_t(\omega) = \left(\int_0^t X_s dB_s\right)(\omega)$ une variable aléatoire où $(X_t)_{t\geq 0}$ est un certain processus et $\{B_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement Brownien. Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel $dB_s$ puisque la fonction $s \longmapsto B_s$ n'est pas dérivable. K. ITÔ en 1942 introduit l'intégrale stochastique laquelle permet de construire $I_t(\omega)$ comme une limite de v.a, sous l'hypothèse d'adaptation du processus $X$ à la filtration du Brownien.

### 1.4.1 Intégrale stochastique

Dans tout ce paragraphe, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilité complet, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration qui vérifier les conditions habituelles et $B$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien (on peut prendre $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$).

**Définition 1.4.1** *L'intégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :*

$$\int_0^t H_s dB_s \tag{1.1}$$

*où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $(H_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.*

### 1.4.2 Propriétés de l'intégrale stochastique

On note $\Lambda$ l'ensemble des processus $H$ adapté càdlag, $\forall t \geq 0$ :

$$E\left[\left(\int_0^t H_s ds\right)^2\right] < \infty.$$

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :** Soit $a$ et $b$ des constantes et $m$, $n$ deux processus dans $\Lambda$, on a :

$$\int_0^t (am_s + bn_s)\, dB_s = a\int_0^t m_s dB_s + b\int_0^t n_s dB_s.$$

2. Le processus (1.1) est une martingale à trajectoire continues.
3. **Isométrie :** $E\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.
4. Le processus : $t \longrightarrow \left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 - \int_0^t H_s^2 ds$, est une martingale.
5. $E\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] = 0$, et $Var\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.

### 1.4.3 Calcul d'Itô

Nous introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastique. La formule d'Itô donner la façon de différencier $t \longmapsto f(B_t)$ si $f$ est un fonction deux fois continûment différentiable.

#### Processus d'Itô

**Définition 1.4.2** *Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que : P.p.s*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

*avec :*

* $X_0$ *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

* $(b_t)_{t\leq T}$ *et* $(\sigma_t)_{t\leq T}$ *des processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté.*

* $\int_0^T \mid b_s \mid ds < +\infty \quad P.p.s.$

* $\int_0^T \mid \sigma_s \mid dB_s < +\infty \quad P.p.s.$

### Formule d'Itô

**Théorème 1.4.1** **1)** *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

*et* $f$ *une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

*tel que :*

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$
$$\text{et } \int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s)\, b_s ds + \int_0^t f'(X_s)\, \sigma_s dB_s.$$

*Avec la table de multiplication*

| | $dt$ | $dB_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dB_t$ | 0 | $dt$ |

**2)** *De même si* $(t, x) \longmapsto f(t, x)$ *est une fonction deux fois continûment différentiables en* $x$ *et une fois différentiable en* $t$, *ces dérivées continues en* $(t, x)$, $(f \in C^{1,2})$, *on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s. \end{aligned}$$

### Intégration par parties

**Théorème 1.4.2** *Si $f$ est une fonction de classe $C^1$ :*

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = f(t)\, B_t - \int_0^t f'(s)\, B_s ds.$$

**Proposition 1.4.1** ***(Formule d'intégration par parties)***

*Soit $X_t$ et $Y_t$ deux processus d'Itô, c'est à dire on la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s.$$

*Alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

*avec la convention que :*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

**Preuve.** On a d'aprés la formule d'Itô :

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)\, d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\sigma_s + \sigma'_s)^2 ds \tag{1.2}$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t \sigma_s^2 ds \tag{1.3}$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s ds + \int_0^t \sigma_s'^2 ds \tag{1.4}$$

d'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$2X_t Y_t = 2X_0 Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + 2\int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds$$

ce qui implique :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

■

# Chapitre 2

# Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat d'existence et d'unicité d'une solution dans le cas ou le générateur Lipschitzien, un exemple d'EDSR sont donné à la fin du chapitre.

## 2.1 Présentation du problème

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé filtré et $\xi$ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = f\left(Y_t\right), \ t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant $t$, $Y_t$ ne dépende pas du futur après $t$ c'est à dire que le processus $Y$ soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas $\mathcal{F}_t$-adapté si n'est pas déterministe. La meilleure approximation-disons dans $L^2$-adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème (1.3.1) permet de construire un processus $Z$ de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s, \ \forall t \in [0, T].$$

On peut ecrire ceci autrement par un calcul élémentaire, on prend $t = T$ alors :

$$\begin{aligned} Y_T &= E(\xi) + \int_0^T Z_s dB_s \\ &= E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

On a alors :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s$$

i.e :

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t, \ t \in [0, T] \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus $Z$ dont le rôle est de rendre le processus $Y$ adapté. Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à $f$ de dépendre du processus $Z$, l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t) dt - Z_t dB_t, \ t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

ou de façon èquivalente sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

## 2.2 Notation

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et $B$ un mouvement Brownien $d-$dimensionnel sur cet espace. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. On travaillera avec deux espaces de processus :

$$S^2\left(\mathbb{R}^k\right) = \left\{ \begin{array}{r} Y : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ progressivement mesurables et tel que} \\ \|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty \end{array} \right\}$$

et $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ est un sous-espace de $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ formé par le processus continues

$$\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right) = \left\{ \begin{array}{r} Z : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times d} \text{ progressivement mesurables et tel que} \\ \|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty \end{array} \right\}$$

$M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de désigne $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.
Les espaces $S_c^2$, $S^2$ et $M^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous considérons $\mathcal{B}^2$ l'espace $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ telle que :

$$\|(U,V)\|_0 = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |U_t|^2 + \int_0^T \|V_s\|^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le couple $(\mathcal{B}^2, \|.\|_0)$ est un espace de Banach. Dans tout ce chapitre, nous donnons une application aléatoire :

$$\begin{aligned} f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (t,y,z) &\longrightarrow f(t,y,z) \end{aligned}$$

le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire $\xi$, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Enfin on précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (2.1).

**Remarque 2.2.1 -** *Pour $k, d \geq 1$ et $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, on notera $\|Z\| = \sqrt{trace\,(Z^t Z)}$.*

**-** *Pour $k \geq 1$, $Y \in \mathbb{R}^k$ on notera $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$, on a donc :*

$$|Y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2}.$$

**-** *La fonction $f$ s'appelle le générateur de l'EDSR et $\xi$ la condition terminale.*

**-** *La matrice $Z^t Z$ s'appelle la matrice de diffusion.*

## 2.3 Solution de l'EDSR

On veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (2.1).

Supposons qu'il existe un processus progressivement mesurable $\left\{\bar{f},\ 0 \leq t \leq T\right\} \in M^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et des constantes $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$ tels que :

**H1** $\forall\,(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $\quad \{f\,(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable.

**H2** On a $\forall t, y, z \quad |f\,(t,y,z)| \leq \bar{f}_t + \lambda\,(|y| + \|z\|)$ $P.p.s.$

**H3** $\forall\,(t,y,z)\,,\quad f\,(t,y,z)$ est continue, $P.p.s.$

**Définition 2.3.1** *Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus*

$$(Y, Z) = \{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$$

*vérifiant :*

**1.** *$Y$ et $Z$ sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$.*

**2.** $P.p.s \qquad \displaystyle\int_0^T \left\{|f\,(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds < \infty.$

**3.** *P.p.s, on a :*
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ \ 0 \leq t \leq T.$$

**Remarque 2.3.1** *Il est important de retenir les trois points suivants :*

- *Les intégrales de l'équation*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

*étant bien définies.*

- *Le processus $Y$ est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier $Y_0$ est une quantité déterministe.*

- *On a :*
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_0^t Z_s dB_s$$
*telle que $\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds$ est à variation finie et $\int_0^t Z_s dB_s$ est une martingale. Alors $Y_t$ est une semi-martingale continue.*

**Proposition 2.3.1** *Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive $\lambda$ tels que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d},\ \ |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda (|y| + \|z\|)$$

*si $\{(y_t, z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.1) telle que $Z \in M^2$, alors $Y$ appartient à $S_c^2$.*

Pour montrer cette proposition, on a besoin de lemme de Gronwall et l'inégalité de Doob

**Lemme 2.3.1** ***(Lemme de Gronwall)***

*Soit $T > 0$ et soit $g$ une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0,T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds$$

*Alors on a pour tout $t \in [0,T]$,*

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

**Théorème 2.3.1** ***(Inégalité de Doob)***

*Si $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale continue, on a, pour tout $T \geq 0$,*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2\right] \leq 4E\left[|M_T|^2\right].$$

**Preuve.** (preuve de Proposition 2.3.1) On utilise principalement du **lemme de Gronwall** et du fait que $Y_0$ est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
Y_t &= \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s \\
&= \xi + \left(-\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds\right) - \left(-\int_0^t Z_s dB_s + \int_0^T Z_s dB_s\right) \\
&= \xi + \left(-\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \left(-\int_0^t Z_s dB_s\right)\right) + \left(\int_0^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_0^T Z_s dB_s\right) \\
&= \left(\xi + \int_0^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_0^T Z_s dB_s\right) - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t Z_s dB_s \\
&= Y_0 - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t Z_s dB_s
\end{aligned}$$

alors :

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \left|\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds\right| + \left|\int_0^t Z_s dB_s\right|.$$

On a $Z \in M^2$ alors :

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \left|\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds\right| + \sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|$$

et par l'hypothèse :

$$|f(s, Y_s, Z_s)| \leq f_s + \lambda (|Y_s| + \|Z_s\|)$$

donc :

$$\begin{aligned} |Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda (|Y_s| + \|Z_s\|)) \, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| \\ &\leq \left( |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda \|Z_s\|) \, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| \right) + \lambda \int_0^t |Y_s| \, ds \end{aligned}$$

posons :

$$\theta = |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda \|Z_s\|) \, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|.$$

Par suite on a :

$$|Y_t| \leq \theta + \lambda \int_0^t |Y_s| \, ds.$$

Par hypothèse, $Z$ appartient à $M^2$ d'aprés **l'inégalité de Doob**, on a :

$$E\left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|^2 \right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} E\left[ \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds \right]$$

le troisième terme de $\theta$ est de carré intégrable, il en est de même pour $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $Y_0$ est déterministe donc de carré intégrable, il s'en suit que $\theta$ est une variable aléatoire de carré intégrable, $Y$ est un processus continu, **le lemme de Gronwall** fournit l'inégalité :

$$|Y_t| \leq \theta \exp(\lambda t)$$

et on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \theta \exp(\lambda T)$$

donc :

$$E\left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] \leq \exp(2\lambda T) \, E\left(\theta^2\right).$$

Qui montre que $Y$ appartient à $S^2$. ■

**Lemme 2.3.2** *Soient* $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *et* $Y \in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. *Alors* $\left\{\int_0^t Y_s Z_s dB_s,\ t\in[0,T]\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Pour montrer ce lemme, on utilise l'inégalité suivante :

**Théorème 2.3.2** ***(Inégalité Burkholder-Davis-Gundy "B-D-G")***

*Soit* $p>0$ *un réel, il existe deux constantes* $c_p$ *et* $C_p$ *telles que, pour toute martingale continue* $X$, *nulle en zéro*

$$c_p E\left[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

*En particulier, si* $T\geq 0$,

$$c_p E\left[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\right].$$

**Preuve.** (preuve de Lemme 2.3.2) On va montrer que :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right|\right] < \infty$$

on a :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right|^2\right] = E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds\right|\right].$$

En appliquant l'inégalité **B-D-G**, il existe une constante positive $C$ telle que :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right|\right] &\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

et par suite en appliquant l'inégalité :

$$ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_sZ_sdB_s\right|\right] &\leq C\left[\frac{1}{2}E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right)+\frac{1}{2}E\left[\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right]\right]\\ &\leq \frac{C}{2}\left[E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right)+E\left(\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right)\right]\end{aligned}$$

on a par hypothèse :

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right)<\infty,\ \text{et}\ E\left(\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right)<\infty$$

alors :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_sZ_sdB_s\right|\right]<\infty.$$

D'où le résultat. ■

## 2.4 Cas Lipschitz

### 2.4.1 Résultat de Pardoux-Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le générateur $f$ est lipschitzien par rapport aux deux variables $y$ et $z$, ce résultat est dû à **E. Pardoux** et **S. Peng** en 1990 [7], c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire. Néanmoins dans la démonstration nous suivrons de prés Briand [1].

Rappelons que $f$ est définie sur $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également $\xi$ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans la suite, en site les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

**(L)** Il existe une constante $K \geq 0$ telle que $P.p.s$ :

**L.1) Condition de Lipschitz** en $(y, z)$ : pour tout $t, y, \acute{y}, z, \acute{z}$ :

$$|f(t, y, z) - f(t, \acute{y}, \acute{z})| \leq K (|y - \acute{y}| + \|z - \acute{z}\|) .$$

**L.2) Condition d'intégrabilité** :

$$E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 ds\right] < \infty.$$

#### Existence et unicité de l'EDSR

Nous commençons par un cas très simple, celui où $f$ ne dépend ni de $y$ ni de $z$ c'est à dire on se donne $\xi$ de carré intégrable et un processus $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s, \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

**Lemme 2.4.1** *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $(F_t)_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. *L'EDSR (2.2) possède une unique solution* $(Y, Z)$ *telle que* $Z \in M^2$.

Pour montrer le lemme, on utilise le théorème (1.3.1) et le théorème de Fubini

**Théorème 2.4.1** ***(Théorème de Fubini)***

*Si* $Y = \{Y_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ *est un processus stochastique adapté tel que pour tout* $0 \leq t \leq T, Y_t \geq 0$ , *alors :*

$$E\left[\int_0^t Y_s ds\right] = \int_0^t E\left[Y_s\right] ds.$$

**Preuve.** (Lemme 2.4.1)

**1. Existence** : Supposons dans un premier temps que $(Y, Z)$ soit une solution vérifiant $Z \in M^2$.

Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement :

$$\begin{aligned}
Y_t &= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\left(\int_0^T Z_s dB_s - \int_0^t Z_s dB_s\right) \mid \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

On a :

$$E\left[\int_0^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^t Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] = 0$$

car : $\begin{cases} \displaystyle\int_0^T Z_s dB_s \text{ est une martingale} \\ \displaystyle\int_0^t Z_s dB_s \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \end{cases}$

alors :

$$Y_t = E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right].$$

On définit donc $Y$ à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver $Z$. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme $F$ est progressivement mesurable,

$\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $(F_t)_{t\in[0,T]}$, en fait dans $S_c^2$ puisque $F$ est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= E\left[\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_s ds \\ &= M_t - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

$M$ est une martingale Brownienne, par le théorème (1.3.1) , on construit un processus $Z$ appartenant à $M^2$ tel que :

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds \\ &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

On peut vérifie que $(Y,Z)$ ainsi construit une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds\right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned}$$

alors :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

**2. Unicité** : Si $\left(\tilde{Y}, \tilde{Z}\right)$ est une autre solution, on a :

$$\tilde{Y}_t = Y_t = E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

d'ou l'unicité de $Y$ puis que $Z = \tilde{Z}$ est vérifiée par le théorème (1.3.1) .

■

Si $f$ dépend de $y$ et de $z$. Néanmoins dans la démonstration nous suivrons de près Briand [1].

**Théorème 2.4.2** *(**Pardoux–Peng** [7]) Sous l'hypothèse (L) l'EDSR (2.1) possède une unique solution $(Y, Z)$ telle que $Z \in M^2$.*

**Preuve.** Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application $\Psi$ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de $\Psi$.

Pour $(U, V)$ élément de $\mathcal{B}^2$, on définie $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$. Ce processus appartient à $M^2$ puisque, $f$ étant Lipschitz :

$$|F_s| \leq |f(s, 0, 0)| + K|U_s| + K\|V_s\|$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le lemme 2.4.1 pour obtenir une unique solution $(Y, Z)$ telle que $Z \in M^2$. D'après la proposition 2.3.1, $Y$ appartient à $S_c^2$.

Ce qui implique que l'application $\Psi$ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien définie.

Soient $(U, V)$ et $(\acute{U}, \acute{V})$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(\acute{Y}, \acute{Z}) = \Psi(\acute{U}, \acute{V})$.

Notons $y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a : $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\left\{f(t, U_t, V_t) - f\left(t, \acute{U}_t, \acute{V}_t\right)\right\} dt + z_t dB_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ on obtient :

$$d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\left\{f(t, U_t, V_t) - f\left(t, \acute{U}_t, \acute{V}_t\right)\right\} dt + 2e^{\alpha t} y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre $t$ et $T$, on obtient :

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds=\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|y_s\right|^2+2y_s.\left\{f\left(s,U_s,V_s\right)-f\left(s,\acute{U}_s,\acute{V}_s\right)\right\}\right)ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dB_s$$

comme $f$ est Lipchitz :

$$\left|f\left(s,U_s,V_s\right)-f\left(s,\acute{U}_s,\acute{V}_s\right)\right|\leq K\left(\left|U-\acute{U}\right|+\left\|V-\acute{V}\right\|\right)$$

notant $u$ et $v$ pour $U-\acute{U}$ et $V-\acute{V}$ respectivement, il vient :

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\leq\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|y_s\right|^2+2K\left|y_s\right|\left|u_s\right|+2K\left|y_s\right|\left\|v_s\right\|\right)ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dB_s.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a :

$$2ab\leq\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2$$

et donc, l'inégalité précédente donne :

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\leq\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha+\frac{2K^2}{\varepsilon}\right)\left|y_s\right|^2 ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dB_s+\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds$$

prenant $\alpha=\dfrac{2K^2}{\varepsilon}$ et notant :

$$R_\varepsilon=\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds$$

on obtient :

$$\forall t\in[0,T],\qquad e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\leq R_\varepsilon-2\int_t^T e^{\alpha s}y_s.z_s dB_s. \tag{2.3}$$

D'après le lemme 2.3.2

$$M=\left\{\int_0^t e^{\alpha s}y_s.z_s dB_s\right\}_{0\leq t\leq T}$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 puisque $Y$ , $\acute{Y}$ appartiennent à $S^2$ et $Z$, $\acute{Z}$ appartiennent à $M^2$. En particulier, prenant l'espérance, on obtient, pour $t=0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), pour obtenir :

$$\forall t\in[0,T]\,,\; E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]+E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s\right|\right],$$

les inégalités B-D-G fournissent – avec $C$ universelle – :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq E\left[R_\varepsilon\right]+CE\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s}\left|y_s\right|^2.\left\|z_s\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\leq E\left[R_\varepsilon\right]+CE\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

puis, comme $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ on obtiant :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]+\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right]+\frac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right].$$

Prenant en considération l'inégalité **(2.4),** on obtient finalement :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(3+C^2\right)E\left[R_\varepsilon\right]$$

et par suite, revenant à la définition de $R_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] &\leq \varepsilon\left(3+C^2\right)E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2\int_0^T ds+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&\leq \varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon$ tel que $(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application $\Psi$ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|V_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

$\Psi$ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la proposition 2.3.1 implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ■

**Remarque 2.4.1** **1.** *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant* $Z\in M^2$.

**2.** *Nous allons voir dans la proposition suivante que le rôle de* $Z$*, plus précisément celui du terme* $\int_t^T Z_s dB_s$ *est de rendre le processus* $Y$ *adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire* $Z$ *est nul.*

**Proposition 2.4.1** *Soit* $(Y,Z)$ *la solution de l'EDSR (2.1) et soit* $\tau$ *un temps d'arrêt majoré par* $T$*. On suppose, outre l'hypothèse (L), que* $\xi$ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable et que* $f(t,y,z)=0$ *dès que* $\tau\leq t$*. Alors :*

$$Y_t = Y_{t\wedge\tau} \ \textit{et}\ Z_t = 0 \ \textit{si}\ t\geq\tau.$$

## 2.5 Exemple d'une EDSR financier

Un problème fréquent en finance consiste à donner un prix aux options. Une option européenne d'achat, un "call", de maturité $T$ et de prix d'exercice $K$, est un contrat qui donne le droit, mais non l'obligation à son détenteur d'acheter une part de l'action au prix d'exercice $K$ à la date $T$. Le vendeur de l'option s'engage donc à payer à son détenteur la somme $\xi = (S_T - K)^+$ qui représente le profit que permet l'exercice de l'option. A quel prix $v$ vendre l'option ? Le vendeur doit s'assurer qu'en vendant l'option au prix $v$ à la date $t = 0$, il disposera de la somme $\xi$ à la date $t = T$.

Pour trouver $v$, l'idée fondamentale est la duplication : le vendeur vend l'option au prix $v$ et investit cette somme dans le marché. Il peut investir soit dans l'action qui suit le cours :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r, \; 0 \leq t \leq T$$

soit dans un placement sans risque, dont le taux de rendement est fixe, égal à $r$, le prix d'une part est donné par : $E_t = E_0 e^{rt}$. Donc sa richesse à l'instant $t$ est : $V_t = q_t S_t + p_t E_t$ , où $q_t$ est le nombre de parts d'action, $p_t$ celui d'actif sans risque. On peut transformer cette équation :

$$dV_t = q_t dS_t + p_t dE_t = r p_t E_t dt + q_t S_t \left(\mu dt + \sigma dB_t\right).$$

L'évolution de la richesse ne dépend que de la variation des prix (stratégies auto-financées : pas d'ajout, ni de retrait d'argent). Comme $p_t E_t = V_t - q_t S_t$, on obtient :

$$dV_t = rV_t dt + \sigma q_t S_t \frac{\mu - r}{\sigma} dt + q_t S_t \sigma dB_t.$$

Notons $Z_t = \sigma q_t S_t$ et $\theta = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ (c'est le "risk premium"), on a :

$$dV_t = rV_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dB_t.$$

Et le vendeur veut obtenir :

$$V_T = \xi$$

d'où :

$$V_t = \xi - \int_t^T (rV_s + \theta Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On peut calculer explicitement $V_t$ pour tout $t$ (par la formule d'Itô) :

$$V_t = E\left[\xi \exp\left(-\theta\left(B_T - B_t\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(T-t\right) - r\left(T-t\right)\right) |\mathcal{F}_t\right].$$

Comme $v = V_0$, on a :

$$v = E\left[e^{-rT}\xi \exp\left(-\theta B_T + \frac{\theta^2}{2}T\right)\right]$$

On peut calculer cette espérance et on obtient la formule de Black-Scholes :

$$v = S_0\Phi\left(d\right) - Ke^{-rt}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

avec :

$$d = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \qquad \Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

On peut remarquer que dans cette formule $\mu$ n'apparaît pas, par contre $\sigma$ joue un rôle primordial.

# Bibliographie


[1] Briand, P., & Hu, Y. (1998). *Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs.* Journal of Functional Analysis, 155(2), 455-494.

[2] Jeanblanc, M. (2006). *Cours de calcul stochastique.* Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[3] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). *Eléments de calcul stochastique.* IRBID, septembre

[4] Khaoula, M. (Juin 2017). *Existence et unicité des solution pour les EDSRs avec coefficient lipschitez.* Mémoire Mastère.

[5] Lamberton, D. (1991). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.*

[6] Le Gall, J. F. (2012). *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique* (Vol. 71). Springer Science & Business Media.

[7] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). *Adapted solution of a backward stochastic differential equation.* Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
| $EDSR$ | : | Equation différentielle stochastique rétrograde. |
| $càdlàg$ | : | continue à droite et limite à gauche. |
| $P.p.s$ | : | La notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $P$. |
| $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ | : | Espace de probabilité. |
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ | : | Espace de probabilité filtré. |
| $\mathcal{N}$ | : | L'ensemble des négligeable. |
| $L^2$ | : | L'espace de Hilbert. |
| $\mathbf{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ | : | La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$. |
| $E$ | : | L'espérance par rapport à la probabilité. |
| $Var$ | : | La variance. |
| $\mathcal{N}(0, t)$ | : | La loi Gaussienne centré et de variance $t$. |
| $\tau$ | : | Temps d'arrêt. |
| $(\mathcal{B}^2, \|.\|_0)$ | : | Espace de Banach. |
| $v.a$ | : | Variable aléatoire |
| $Cov$ | : | Covariance |
| $p.s$ | : | Presque sûrement |