République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

NOM Prénom

BOUBECHE Hadda

Titre :

Interpolation polynomial et multiple

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Dakhia Ghania**	UMKB	Président
Dr.	**Kaboul Hanane**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Soltani Sihame**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

A mon père Ammar et à ma mère Fatima pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs et mon frére : Leila, Touta, Samiha, rahma, sara, Noureddine pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A mes collègues et mes amis plus particulièrement : Selma et Habiba

REMERCIEMENTS

Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à "Alah" qui m'a guidé sur le bonne voie

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre directrice de recherche Dr :

KABOUL Hanan pour sa disponibilité, sa bienveillance, ses conseils pertinents, son accompagnement et son dévouement.

Nos remerciements vont également aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail de recherche.

Que nos enseignons trouvent ici l'expression de notre reconnaissance pour leurs conseils ; leurs remarques et leurs orientations.

Table des matières

Table des figures

Introduction

L'interpolation est une opération mathématique permettent de construire un objet géométrique (courbe, surface, ...ext) à partir des données d'un nombre fini de points, ou une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs. La solution du problème d'interpolation passe par les points prescrits.

L'idée et le pratique de l'interpolation ont une longue histoire remontant à l'Antiquité et s'étendant aux temps modernes. Nous allons brièvement esquisser le développement précoce du sujet dans les temps anciens et le Moyen-Age à travers le $17^{ème}$ siècle, l'intérêt était avant tout scientifique.

L'analyse numérique tient une place capitale dans les interventions des mathématiques, aussi bien en sciences physiques que dans le domaine de la biologie, des technologies et des sciences économiques et sociales. Mais elle offre aussi des possibilités très riches pour les sciences mathématiques elles-mêmes, Elle s'intéresse tant aux fondements qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique, elle permet ensuite d'étudier le problème, de déterminer sous quelles conditions (choix des paramètres), il existe une solution, ce qui doit être étudié par l'interpolation.

Dans le cadre de ce mémoire on va intéresser à l'interpolation (polynomial et multiple). Où l'interpolation polynomiale est une technique d'interpolation d'une ensemble de données ou d'une fonction par un polynôme. En d'autres termes, étant donné un ensemble de points, on cherche un polynôme qui passe par tous ces points. Et l'interpolation multiple désigne l'interpolation numérique des fonctions de plus d'une variable. Le problème est similaire à celui de l'interpolation polynomiale sur un intervalle réel : on connait les valeurs d'une fonction à interpoler aux points $(x_i, y_i, z_i, ...)$ et l'objectif consiste à évaluer la valeur de la fonction en des points $(x, y, z, ...)$

Ce mémoire est décomposé en deux chapitres :

Premier chapitre : Interpolation polynomial.

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps l'interpolation polynomial (Définition, Théorème) puis en donne quelques exemples (Lagrange, Newton, spline,...) et ses applications en calcul de l'intégral.

Deuxième chapitre : Interpolation multiple

Ce chapitre est dédié au différent type de l'interpolation multiple comme régions rectangulaires et régions triangulaires, et aussi l'intégration sur le triangle, et en fin on parle sur Interpolation sur les q-entiers.

Chapitre 1

Interpolation polynomial

L'interpolation consiste à construire une courbe passant par des points données : on cherche une fonction f, qui passe par les points (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$. Cette fonction s'appelle fonction d'interpolant.

Dans Les problèmes numériques on a plusieurs choix des fonctions interpolants. Les choix classiques sont : les polynômes (interpolation de Lagrange, d'Hermite,...), des polynômes trigométriques (série de Fourier), les fonctions polynomiales par morceaux (fonction-spline).

1.1 Interpolation polynomial

On cherche à remplacer ou à approcher une fonction connue uniquement par ses valeurs en certains points, par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme, car les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les polynômes. Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation polynomial qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points données.

Définition 1.1.1 *Notons $R_n[X]$ l'ensemble des polynômes de la variable x à cofficients réels de degré inférieur ou égal à n, on a donc* $\dim(R_n[X]) = n + 1$ *et*

$$\forall P_n \in R_n[X] : \quad P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n.$$

Théorème 1.1.1 *Étand donné* $n+1$ *point distincts* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *et les* $n+1$ *valeurs correspondantes* $y_0, y_{1,}..., y_n$ *,il existe un unique polynôme* $P_n \in R_n[X]$ *tel que*

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, ..., n. \tag{1.1}$$

Preuve. *En écrivons* P_n *comme ci-dessus, les équations* $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$, *deviennent*

$$a_0 + a_1 x_i + ... + a_n x_i^n = y_i, \ 0 \leq i \leq n,$$

ça nous donne un système de $n+1$ *équations linéaires avec* $n+1$ *inconnues* $a_0, a_1, ..., a_n$. *Ce système qui peuvent être écrie sous la forme*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & . & . & . & x_{n-1}^2 \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & . & . & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

il posséde une unique solution si la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & . & . & . & x_{n-1}^2 \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & . & . & x_n^2 \end{bmatrix}$$

appelé matrice de Vandermonde est inversible. Le déterminant de V *est donné par*

$$\det(V) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

où le produit est repris sur tout i *et* j *tels que* $0 \leq j < i \leq n$.*Par exemple, quand* $n = 2$,

$$\det V = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

puisque les x_i *sont deux à deux distincts, ce déterminant est non nul.* ($\det V \neq 0$), *Il y a par conséquent une unique solution a cette système* ■

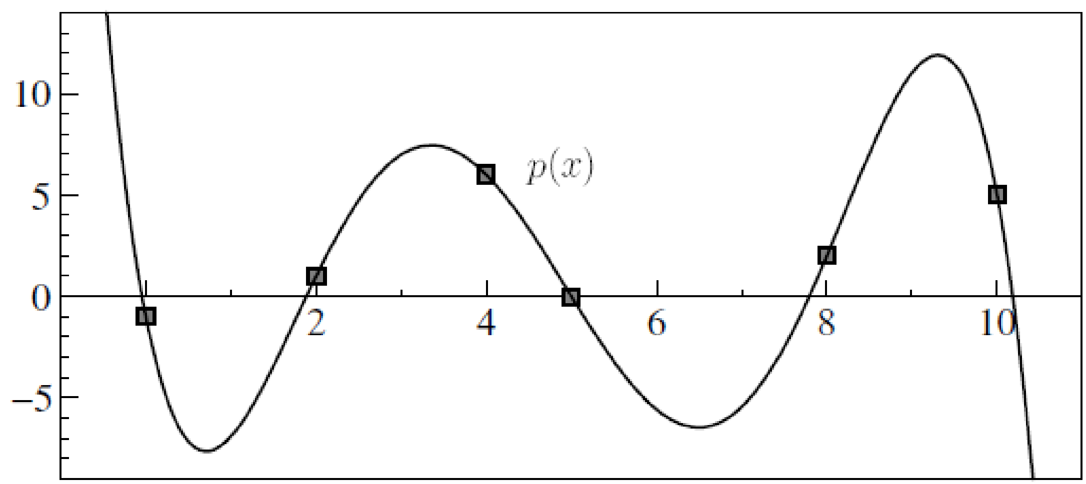

FIG. 1.1 – Polynôme d'interpolation de degré 5

1.2 Méthode d'interpolation

1.2.1 Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation

Soit $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ division de l'intervalle $[a, b]$ et $\{y_i\}_{i=0}^n$, des valeurs correspondantes. Le problème est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égale à n, $P_n \in R_n$, appelé polynôme d'interpolation, vérifiant $P_m(x_i) = y_i$, il y a une et une seule solution, si on cherche cette solution dans l'espace $R_n(m = n)$. En effet, en définissant les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{1.2}$$

on remarque qu'ils forment une base de R_n. Comme $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, on peut déduire que le polynôme d'interpolation recherché s'écrit sous la forme suivante et il est unique :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \tag{1.3}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \forall i = j \\ 0 & \forall i \neq j. \end{cases}$$

Les L_i sont **les polynôme de Lagrange au point** x_i. $P_n(x)$ s'appelle **le polynôme d'interpolation de Lagrange.**

Définition 1.2.1 *soit w_{n+1} le polynôme nodal de degré $n + 1$ associé aux noeuds x_i et défini par*

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Le prochain théorème donne l'erreur d'interpolation faite quand on remplace une fonction f par son polynôme d'interpolation $P_n f$ associé aux noeuds x_i.

Théorème 1.2.1 *Soient* $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$, $n+1$ *noeuds distincts et* $f \in C^{n+1}([a,b])$, *L'erreur d'interpolation au point* $x \in [a,b]$ *est donné par*

$$E_,(x) := f(x) - P_n f(x) = \frac{f^{\prime n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x),$$

avec $\xi \in [a,b]$.

Preuve. *Il est clair, qu'on ne peut rien dire sur l'erreur d'interpolation. En si on ne connaît aucun renseignement sur la fonction* f, *sauf ses valeurs dans les noeuds* x_i. *Etudions maintenant plus en détail la convergence uniforme du polynôme de Lagrange.* ∎

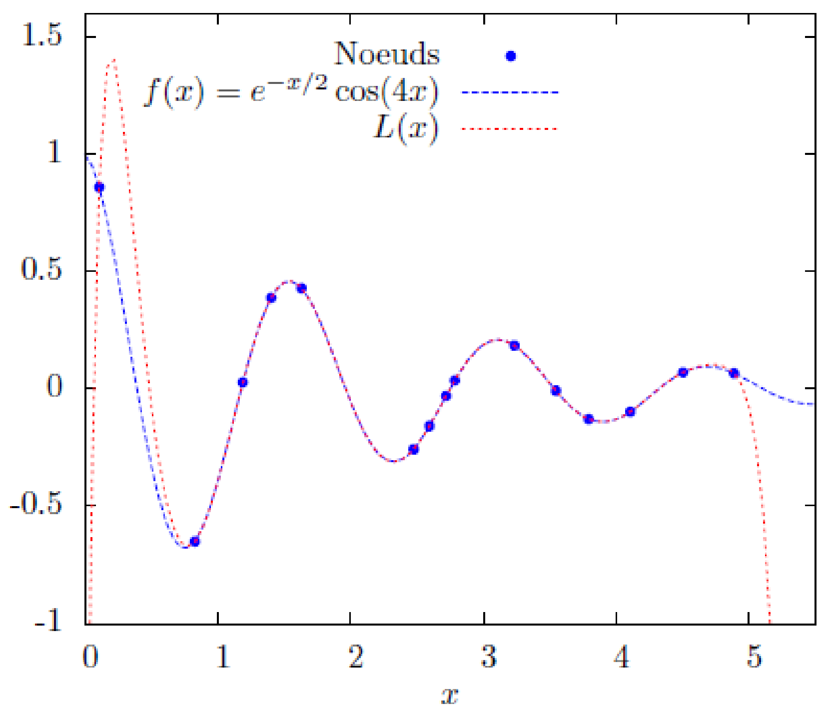

FIG. 1.2 – Interpolation par un polynôme de Lagrange

Stabilité et convergence du polynôme de Lagrange

Notons la norme maximum d'une fonction $f \in C([a,b])$ par $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x),$$

Si on remplace les valeurs $f(x_i)$ par des valeurs approchées $\tilde{f}_i$ (par exemple due aux erreurs dans les mesures expérimentales ou aux erreurs d'arrondi) on aura une erreur sur le polynôme d'interpolation

$$\left\| P_n - \tilde{P}_n \right\|_\infty = \left\| \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \tilde{f}_i) L_i(x) \right\|_\infty \leq A_n \max \left| f(x_i) - \tilde{f}_i \right|,$$

avec

$$A_n = \|\lambda_n(x)\|_\infty, \qquad \lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|.$$

La constante A_n, qui dépend que de n, de $[a,b]$ et des points x_i est appelé constante de Lebesgue et joue le rôle d'une constante de stabilité pour l'interpolation. On peut montrer en plus le théorème suivant de majoration de l'erreur d'interpolation.

Théorème 1.2.2 *soit $f \in C([a,b])$ et $P_n \in R_n$ son polynôme d'interpolation associé aux noeuds $x_0, ..., x_n$. Alors on a*

$$\|E_n\|_\infty = \|f - P_n\|_\infty \leq (1 + A_n) E_n^*(f), \qquad E_n^*(f) = \inf_{q \in R_n} \|f - q\|_\infty$$

On remarque que n dépend que des noeuds x_i tandis que E_n^* dépend que de f. Analysons ces deux termes.

Notons n l'infimum des constantes de Lebesgue pour tous les choix possible de noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ à n fixé. On peut montrer que

$$\bar{A}_n \sim \frac{2}{\pi}\log(n), \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{n\to\infty} \bar{A}_n = \infty. \tag{1.4}$$

Il est très compliqué de trouver les noeuds qui mènent vers la constante de Lebesgue minimale $\bar{A}_n$. Par contre, les points d'interpolation de Tchebychev

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+1}\pi\right), \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

qui sont les zéros du polynôme de Tchebychev de degré $n+1$, sont quasi optimaux. En ce qui concerne le deuxième terme, le théorème de Weierstrass montre que pour toute fonction $f \in C([a,b])$ on a

$$\lim_{n\to\infty} E_n^*(f) = 0.$$

Il est important de remarquer maintenant que pour une fonction $f \in C([a,b])$ donnée, le choix des noeuds d'interpolation est crucial Par contre on peut montrer, due à 1.4, que pour n'importe quel choix de noeuds $x_0^{(n)}, ..., x_n^{(n)}$ pour chaque valeur de n, on trouvera toujours une fonction $f \in C([a,b])$, telle que le polynôme d'interpolation p_n ne converge pas uniformément vers f, pour $n \to \infty$. 1.4 montre aussi que l'interpolation de Lagrange peut devenir très instable pour des grand n.

1.2.2 Forme de Newton du polynôme d'interpolation

La forme de Lagrange 1.3 du polynôme d'interpolation n'est pas la plus commode d'un point de vue pratique. Dans cette partie on introduira une autre expression du même polynôme d'interpolation.

Soient $(x_i, y_i)_{i=0}^n$, $n+1$ couples, où on notera $y_i = f(x_i)$. Le but est de représenter le polynôme d'interpolation $p_n \in R_n$ comme la somme de $p_{n-1} \in R_{n-1}$ (associé aux noeuds

x_i, pour $i = 0, ..., n-1$) et d'un polynôme $q_n \in R_n$. Donc

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) - q_n(x),$$

Ce qui implique $q_n(x_i) = p_n(x_i) - p_{n-1}(x_i) = 0$ pour $i = 0, 1, ..., n-1$ et donc $q_n \in R_n$ a la forme

$$q_n(x) = a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}).$$

Le coefficient a_n, appelé $n-iéme$ différence divisée de Newton, et noté souvent $f[x_0, ..., x_n]$,a la forme suivante

$$a_n = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x)}{w_n(x_n)},$$

et se laisse calculer par récurrence comme suit

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_0, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{1.5}$$

Il faut remarquer que $w_0 = 1$ et $y_i = f(x_i) = f[x_i]$. **Le polynôme d'interpolation de Newton** est

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i(x) f[x_0, ..., x_i]. \tag{1.6}$$

D'après le théorème 1.1.1 d'existence et unicité du polynôme d'interpolation, le polynôme d'interpolation de Newton 1.6 n'est rien d'autre qu'une autre forme du polynôme de Lagrange. L'avantage de la formule de Newton est que les différences divisées sont invariantes par rapport à la permutation des noeuds. Par conséquent, pour rajouter un nouveau noeud x_{n+1}, on n'a qu'à rajouter au polynôme $P_n f$ le terme $a_{n+1}w_{n+1}$, ce qui signifie une considérable réduction du coût numérique, par rapport à l'implémentation de la formule de Lagrange.

L'expression de l'erreur d'interpolation avec la formule de Newton est la suivante

$$E_n(x) = f(x) - P_n f(x) = w_{n+1} f\left[x_0, ..., x_n\right].$$

1.2.3 Interpolation d'Hermite

On peut généraliser l'interpolation de Lagrange d'une fonction f pour chercher un polynôme (courbe) qui passe pas seulement par les points $(x_i, f(x_i))$, mais dont les dérivées coïncident à certains points nodaux avec les dérivées de la fonction f. On se donne donc $(xi, f^{(j)}(x_i))$, pour $i = 0, ..., n$, On pose $m = n + k_0 + +k_1 + ... + k_n$, il existe un polynôme unique P_m de degré $\leq m$, appelé le polynôme d'interpolation d'Hermite, tel que

$$P_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad \forall i = 0, ..., n \qquad \forall j = 0, ..., k_i$$

l'interpolation de Lagrange est un cas particulier d'Hermite ($k_0 = k_1 = ... = k_n$), **le polynôme de Hermite** est donné par

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k_i} y_i^{(j)} H_{ij}(x),$$

avec les polynômes H_{ij} sont donné par

$$H_{ij}(x) = \frac{(x - x_i)^j}{j!} q_i(x) - \sum_{k=j+1}^{k_i} C_k^j q(x_i) H_{ik}(x),$$

et

$$H_{ik_i} = \frac{(x - x_i)^{k_i}}{j!} q_i(x),$$

et

$$q_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_l}{x_i - x_l} \right)^{k_l+1}.$$

Dans le cas ($k_0 = k_1 = ... = k_n = 1$) on a les expressions suivante

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) Z_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i) V_i((x),$$

avec

$$Z_i(x) = [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)]L_i^2(x), \qquad \text{et} \qquad V_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x),$$

où $L_i(x)$ est le polynôme de Lagrange

L'erreur d'interpolation pour le polynôme d'Hermite est donnée par

$$f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Phi_N(x),$$

avec $\xi \in [a, b]$ et le polynôme nodal $\Phi_N \in R_N$ $\Phi_N(x) = (x - x_0)^{m_0+1} + ... + (x - x_n)^{m_n+1}$.

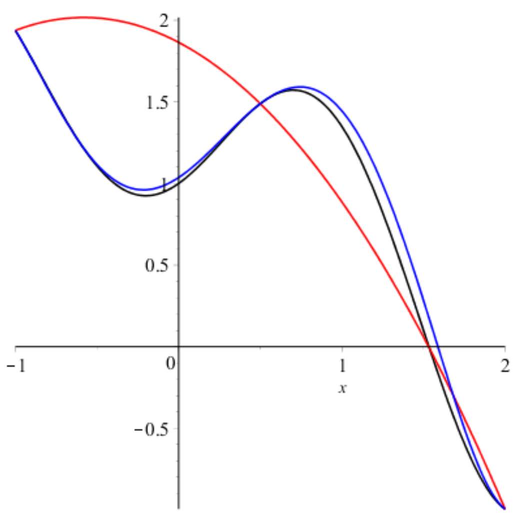

FIG. 1.3 – Comparaison graphique entre interpolation de Lagrange (en rouge) et de Hermite (en bleu) en trois points équidistants de la fonction $f(x) = x\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$ en (noire)

1.2.4 Splines

Définition 1.2.2 *Soit $a = x_0 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_n = b$ une division de $[a, b]$ avec $n + 1$ noeuds distincts. La fonction $s_k(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est une spline de degré k aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$. si*

$$s_{k|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{R}_k, i = 0, ..., n - 1,$$

Une spline est donc une courbe régulière, polynomiale par morceaux et qui peut avoir des discontinuités à la $k - ième$ dérivée. Les conditions demandées à la définition précédente ne permettent pas de déterminer une spline de manière unique. En effet, la restriction $s_{k_i}(x) := s_{k|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{R}_k$ se laisse écrire sous forme polynomiale

$$s_{ki}(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{ij} (x - x_i)^j , i = 0, ..., n-1, \tag{1.7}$$

ce qui requiert la connaissance de $(k+1)\ n$ coefficients α_{ij}. Due a la régularité globale de la spline, on a

$$s_{k,i-1}^{(m)}(x_i) = s_{k,i}^{(m)}(x_i),\ \ i = 0, ..., n-1,\ \ m = 0, ..., k-1, \tag{1.8}$$

ce qui montre qu'il reste $(k+1)n - k(n-1) = k+n$ degrés de liberté pour caractériser la spline. Si la spline doit interpoler une fonction f aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, c-à-d.$s_k(x_i) = f(x_i)$ $\forall i$, il reste tout de même $k-1$ degrés de liberté. Pour fixer la spline de manière unique, on pourra poser les conditions suivantes :

1. splines périodiques (ont un sens si f est périodique!), si

$$s_k^{(m)}(a) = s_k^{(m)}(b), m = 1, ..., k-1.$$

2. splines naturelles, si pour $k = 2l - 1$, $l \geq 2$

$$s_k^{(l+p)}(a) = s_k^{(l+p)}(b) = 0, p = 0, ..., l-2.$$

Une manière de construire une spline a été donnée par les formules 1.7, 1.8. Une autre manière consiste à décomposer la spline à l'aide d'une base de splines. En effet, en notant l'espace des splines s_k par

$$\mathcal{S}_k := \left\{ s_k \in C^{k-1}([a,b]) \ / \ s_{k|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{R}_k,\ \ i = 0, ..., n-1 \right\}$$

on remarque que $dim\mathcal{S}_k = n + k$. L'approche consiste maintenant à construire une base de splines $\{\phi_k\}_{l=1}^{k+n} \in \mathcal{S}_k$.

1.2.5 Interpolation de Taylor

Définition 1.2.3 *Supposons que les valeurs de f et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n en un point x_0. Alors, l'unique polynôme P_n de degré inferieur ou égal à n vérifiant*

$$\forall k = 0, 1, ..., n \qquad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

est donné par

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

où

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x - x_0)^{n+1},$$

$P_n(x)$ est le seul polynôme de degré inferieur ou égal à n tel que

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \textit{pour } k = 0, 1, ..., n.$$

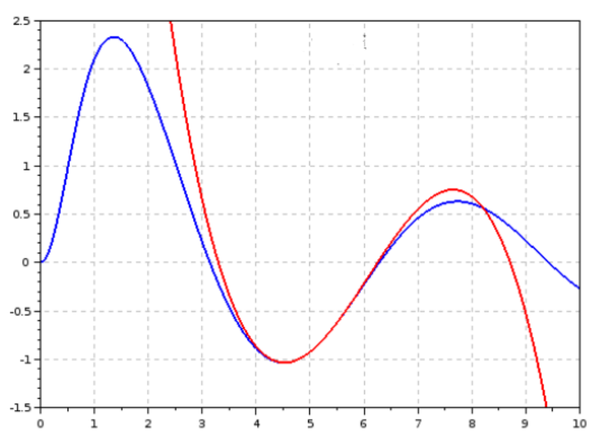

FIG. 1.4 – Polynôme de Taylor avec la fonction $f(x) = \frac{5x\sin(x)}{1+x^2}$

1.2.6 Interpolation trigonométrique(série de Fourier)

Définition 1.2.4 *un polynôme trigonomitrique de degré n est un expression de la forme*

$$P_n(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{n} [A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)],$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

et

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx)dx, \qquad B_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx)dx \qquad j = 0, 1, ..., n.$$

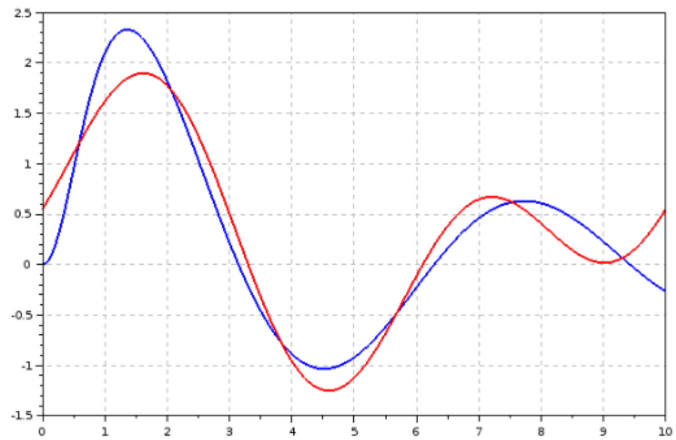

FIG. 1.5 – Série de Fourier avec la fonction $f(x) = \frac{5x\sin(x)}{1+x^2}$

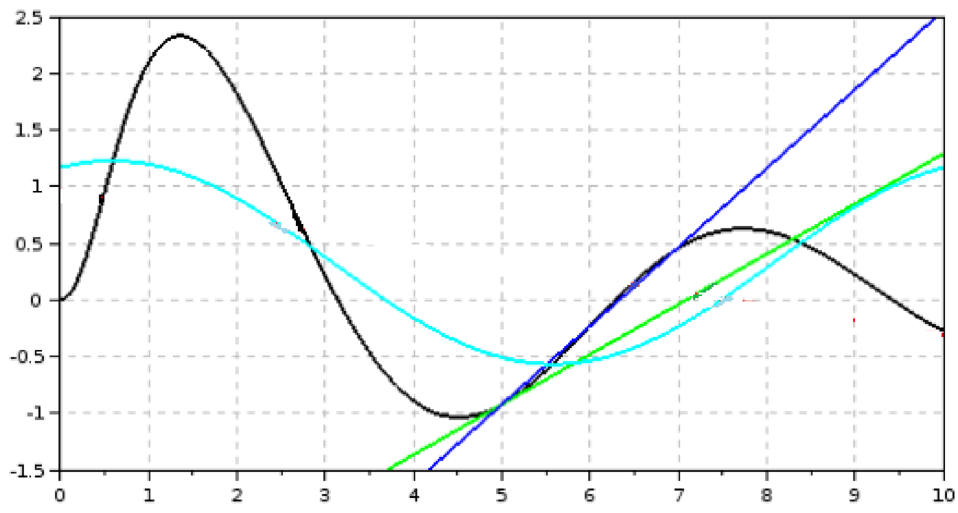

FIG. 1.6 – Comparaison graphique entre interpolation de Lagrange (bleu) et de série de Fourier (en bleu claire) et polynôme de Taylor en (vert) $f(x) = \frac{5x\sin(x)}{1+x^2}$en (noire)

1.2.7 Les polynômes de Chébyshev

La fonction de poids de Chébyshev est donnée sur $(-1, 1)$ par

$$z(x) = (1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Les polynômes de Chébyshev sont

$$T_k(x) = \cos s(k\theta), \quad \text{avec} \quad \theta = arc\cos x, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

ou

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k = 0, 1, 2, ... \\ T_0 = 1, \qquad T_1(x) = x. \end{cases}$$

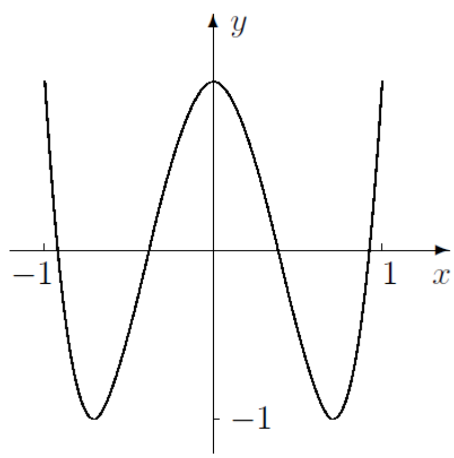

FIG. 1.7 – Graphe du polynôme $T_4(x)$ de Chebyshev (x)

1.2.8 Les polynômes de Legrendre

La fonction de poids de Legendre est donnée sur $(-1,1)$ par $w=1$. **Les polynômes de Legendre** sont

$$L_k(x)=\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{(\frac{k}{2})}(-1)^l\left(\begin{array}{c}k\\ l\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}2k+2l\\ k\end{array}\right)x^{k-2l},\qquad k=0,1,2,...,$$

où $(\frac{k}{2})$ signifie la partie entière de $\frac{k}{2}$. La formule de réccurence est la suivante

$$\begin{cases} L_{k+1}(x)=\frac{2k+1}{k+1}xL_k(x)-\frac{k}{k+1}L_{k-1}(x) & k=0,1,2,...\\ L_0=1, \qquad L_1(x)=x. \end{cases}$$

1.3 Intégration numérique

Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a,b]$ et si on connaît sa primitive $F(x)$, on peut facilement calculer l'int´egrale ‘a l'aide de la formule de Newton-Leibniz

$$I(f):=\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b).$$

Par contre, très souvent on ne connaît pas la primitive F(x) ou elle est trop compliquée. Pour cette raison on fait appel à des méthodes approchées de calcul d'intégrales, appelées formules de quadrature ou d'intégration numérique. Le procédé usuel consiste à remplacer la fonction donnée sur [a, b] par une fonction d'interpolation ou d'approximation f_n, qui sera plus facile à intégrer. On approche alors $I(f)$ par

$$I_n(f):=I(f_n)=\int_a^b f_n(x)dx.$$

L'erreur de quadrature sera ainsi donnée par

$$|E_n(f)| := |I(f) - I(f_n)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq (b-a) \parallel f - f_n \parallel_\infty .$$

ce qui montre qu'une bonne approximation de la fonction f mène à une bonne approximation

de l'intégrale $I(f)$. Le degré d'exactitude d'une formule de quadrature est défini comme le plus grand entier $q \geq 0$ tel que

$$I_n(p) = I(p), \qquad \forall p \in R_q.$$

Chapitre 2

Interpoaltion multiple

2.1 Régions Rectangulaires

L'interpolation multivariée concerne l'interpolation d'une fonction de plus d'une variable, et nous constaterons que ce n'est en aucun cas simple et directe comme interpolation d'une fonction d'une variable (interpolation univariée). étant donné les valeurs d'une fonction univariée f à $n+1$ abscisses distinctes $x_0, x_1, ..., x_n$,nous pouvons choisir $n+1$ monômes $1, x, x^2, ..., x^n$ comme base pour P_n, qui fournit un solution unique au problème d'interpolation suivant : trouver $p_n \in P_n$ tel que $p_n(x_j) = f(x_j)$ pour $0 \leq j \leq n$. Nous avons également vu comment le choix des polynômes fondamentaux $L_j(x)$. ou les polynômes de Newton $\Pi_i(x)$,Il n'y a pas de difficulté théorique à mettre en place un cadre pour discuter de l'interpolation d'une fonction multivariée f dont les valeurs sont connues en N points dans l'espace euclidien d-dimensionnel $\mathbb{R}^d$. soit $x_0, x_1, ..., x_N$, N points distinctes dans $\mathbb{R}^d$, et soit $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$, N fonctions linéairement indépendantes dans $C[\mathbb{R}^d]$, l'espace linéaire de tous les fonctions continus de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, aucune des fonctions ϕ_j peut être exprimé comme une combinaison linéaire des autres. Finalement soit $S_\phi \subset C[\mathbb{R}^d]$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires ϕ_j, et soit $f \in C[\mathbb{R}^d]$ une fonction qui n'est pas dans S_ϕ. Nous pouvons obtenir une solution unique du problème d'interpolation de déterminer

$a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_1\phi_1(x_j) + a_2\phi_2(x_j) + ... + a_N\phi_N(x_j) = f(x_j) \tag{2.1}$$

pour $1 \leq j \leq N$ si et seulement si le matrice

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & ... & \phi_N(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & ... & \phi_N(x_2) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & & \phi_N(x_N) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

est inversible. En particulier, on prend $d = 1$, et on choisit ϕ_j les N premier monômes et alors S_ϕ est simplement P_{N-1}, l'ensemble des polynômes de degré au plus $N - 1$. Ainsi, la matrice ci-dessus A est le $N * N$ Vandermonde matrice, dont sa forme $(n + 1) * (n + 1)$ est donnée par 1.3. L'exemple suivant nous avertit des pièges possibles en interpolation multivariée.

Exemple 2.1.1 *Supposons qu'on a une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et que les valeurs de $f(x, y)$ sont connus aux points* $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, *et* $(0, -1)$. *Construisons une fonction d'interpolation de la forme*

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy.$$

Dans ce cas, le système d'équations 2.1 devenient

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,0) \\ f(-1,0) \\ f(0,1) \\ f(0,-1) \end{bmatrix}.$$

On note r_1^t, r_2^t, r_3^t, r_4^t les lignes de la matrice ci-dessus. Puisque la matrice est évidemment singulière, ses ligne doivent être linéairement dépendantes, et on remarque que $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$. Le système d"équations linéaires ci-dessus a une solution si et seulement si

$$f(1,0) + f(-1,0) = f(0,1) + f(0,-1).$$

Si cette condition est satisfaite a_1, a_2 et a_3 sont bien déterminés et a_4 peut être choisi n'importe quelle constante réel.
On limite la discussion de l'interpolation multivariée à des tableaux rectangulaires d'abscisses dans $\mathbb{R}^2$, avec une extension évidente à des tableaux en forme de boîte dans des dimensions plus élevées, et dans la section 2.2, nous considérons les abscisses disposées en forme triangulaires, avec des extensions évidentes à des dimensions plus élevées.

Exemple 2.1.2 *Soit l'équation $z = f(x,y)$ qui correspond à une surface espace euclidien tridimensionnel. Les coordonnées de chaque point (x,y,z) dans la surface satisfont $z = f(x,y)$ Par exemple l'équation $z = 1 + 2x + 3y$ correspond au plan unique qui traverse les trois points $(\frac{-1}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{-1}{3}, 0)$, et $(0,0,1)$ et l'équation $z = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ correspond à la partie de la sphère avec le centre $(0,0,0)$ et rayon 1 qui se trouve au-dessus du xy-plan, C'est l'hémisphère des points tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$. Si pour une fonction générale $f(x,y)$ nous fixons maintenant le valeur de x, choisir $x = x_i$ alors l'équation $z = f(x_i, y)$ correspond à la courbe définie par l'intersection du plan $x = x_i$ et la surface $z = f(x,y)$. Ensuite, en utilisant l'expérience avec Lagrange univariée interpolation on* *construisons une fonction d'interpolation*

$$\xi(x,y) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i; y) L_i(x), \tag{2.3}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} (\frac{x - x_j}{x_i - x_j}),$$

le produit ci-dessus étant pris en charge tous j de 0 à m, mais à l'exclusion $j = i$ on appelons $\xi(x,y)$ une fonction de mélange. on écrirons $\xi(f; x, y)$ pour désigner cette fonction de mélange lorsque nous voulons souligner sa dépendance sur la fonction f La fonction de mélange $\xi(f; x, y)$ d'accord avec $f(x,y)$. à tous les points où l'avion $x = x_i$ croise $z = f(x,y)$ $0 \leq i \leq m$.

Exemple 2.1.3 *Déduisons la fonction de mélange pour 2^{x+y} qui coïncide avec la fonction donnée pour $x = -1, 0 et\ 1$. Suivant le modèle de 2.3 nous obtenons la fonction de mélange*

$$\xi(x,y) = 2^{-1+y}.\frac{1}{2}x(x-1) + 2^y.(1+x^2) + 2^{1+y}.\frac{1}{2}x(x+1),$$

ce qui simplifie pour donner

$$\xi(x,y) = 2^{y-2}(x^2 + 3x + 4)$$

Nous pouvons échanger les rôles de x et y dans la construction d'une fonction de mélange, et interpoler $y = y_0, y_1, ..., y_n$.Pour éviter toute confusion, on notera des polynômes fondamentaux dans la variable y par $M_j(y)$, où

$$M_j(y) = \prod_{k \neq j} \left(\frac{y - y_k}{y_j - y_k} \right),$$

et le produit est pris sur tout k de 0 à n, mais à l'exclusion de $k = j$. alors, nous pouvons *construire la fonction de mélange alternatif*

$$\eta(x,y)=\eta(f;x,y)=\sum_{j=0}^{n}f(x,y_j)M_j(y), \tag{2.4}$$

qui est en accord avec $f(x,y)$ le long de chacune des $n+1$ courbes définies par l'intersection du plan $y=y_j$ avec la surface $z=f(x,y)$, pour $0\leq j\leq n$.
Il est alors intéressant d'appliquer ce deuxième processus de fusion, défini par 2.4, non à $f(x,y)$, mais à la première fonction de mélange $\blacksquare(x,y)$, définie par 2.3. Nous obtenons, disons,

$$p(x,y)=\eta(\xi;x,y)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}f(x_i,y_i)L_i(x)\right)M_j(y), \tag{2.5}$$

et nous notons que $p(x,y)$ est un polynôme en x et y. En écrivant la sommation répétée 2.5 comme une double sommation, on obtient

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}f(x_i,y_i)L_i(x)M_j(y).$$

2.2 Régions triangulaires

Dans cette section, on explorera les méthodes d'interpolations sur des ensembles d'abscisses triangulaires , et on indiquera des généralisations à des dimensions plus élevées.
Le cas le plus simple consiste à construire un polynôme d'interpolation en x et en y de la forme $a_1+a_2x+a_3y$ pour une fonction f sur les trois points (x_0,y_0), (x_1,y_0) et (x_1,y_1) où x_0 et x_1 sont distinct, dequis

$$\det\begin{bmatrix}1 & x_0 & y_0\\ 1 & x_1 & y_0\\ 1 & x_1 & y_1\end{bmatrix}=(x_1-x_0)(y_1-y_0). \tag{2.6}$$

Le déterminant ci-dessus est non nul quand x_0 et x_1 sont distincts et y_0 et y_1 sont distincts, le probléme d'interpolation ci-dessus a une solution unique. Cela résulte de la propriété géométrique qu'il y a un plan unique passant par trois points non colinéaires. dans l'espace euclidien en trois dimensions. Ayant ainsi commencé avec un polynôme de degré un en x et y qui interpole $f(x, y)$ à trois points non colinéaires, il est naturel de considérer ensuite un polynôme de degré total deux dans x et y, de la forme

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2.$$

Nous pouvons choisir les valeurs des six coefficients de telle sorte que ce polynôme interpole $f(x, y)$ uniquement à six points choisis de maniére appropriée.
De cette façon, nous sommes conduits inévitablement à des nombres triangulaires de coefficients et de points d'interpolation Le nième nombre triangulaire est la somme des premiers n nombres naturels, les quatre premiers étant

$$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10.$$

Les monômes dans x et y du degré total j sont

$$x^j, x^{j-1}y, x^{j-2}y^2, ..., x^2y^{j-2}, xy^{j-1}, y^j,$$

						y^3			
			y^2			y^2	xy^2		
	y		y	xy		y	xy	x^2y	
1	1	x	1	x	x^2	1	x	x^2	x^3

TAB. 2.1 – Les monomes dans x et y de degree 0,1,2 et 3 Chaque diagonale contient les monomes du meme degre total en x et y

et il y a $j+1$ de ces. Ainsi, le nombre de monômes du degré total ne dépasse pas n est le $(n+1)$

$$1+2+...+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=C_{n+2}^{2}.$$

Les monômes dans x et y du degré total ne dépasse pas n, pour $0 \leq n \leq 3$, sont représentés dans le tableau 2.1 la disposition de ce tableau montre pourquoi il est naturel de chercher un polynôme interpolant en x et y du degré total n pour correspondre une fonction sur un tableau triangulaire de $1+2+...+(n+1)$ abscisses..

Exemple 2.2.1 *Considérons le probléme de la construction d'un polynôme interpolant pour une fonction donnée f sur les six points définis par*

$$(x_i, y_i),\ i, j \geq 0,\ i+j \leq 2,$$

où les x_i sont distincts et les y_i sont distincts. Nous allons montrer que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_0 & x_1^2 & x_1y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_2 & y_0 & x_2^2 & x_2y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_0 & y_1 & x_0^2 & x_0y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_0 & y_2 & x_0^2 & x_0y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} = -\psi(x_0, x_1, x_2)\psi(y_0, y_1, y_2), \tag{2.7}$$

où $\psi(x_0, x_1, x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)^2$.

Premier, en mettant $x_0 = x_1$ en lignes 1 et 2, et encore en lignes 4 et 5 on voit ça $(x_1 - x_0)^2$est un facteur, et ainsi $\psi(x_0, x_1, x_2)$ est un facteur du déterminant. (Pour voir que le facteur $x_1 - x_0$ se produit deux fois, on pourrions remplacer x_0 en ligne 4 par x_0',et remplacer x_1 en ligne 5 par x_1'. on soutenons ensuite que $x_1' - x_0'$ doit être un facteur. Puis, laisser x_0' et x_1' ont tendance à x_0 et x_1, respectivement on voit que le facteur $x_1 - x_0$

apparaît deux fois dans l'expansion du déterminant.) De même on trouvons que $\psi(y_0, y_1, y_2)$ *est un facteur. depuis les deux côtés de 2.7 sont des polynômes du même degré dans les mêmes variables, 2.7 doit être correct à l'intérieur d'une constante multiplicative, et il suffira de comparer les coefficients de* $x_1^2 x_2^2 y_1^2 y_2^2$ *disons, des deux côtés. Le coefficient à gauche est le même que le coefficient de* $x_1^2 x_2^2 y_1^2$ *dans* $5{*}5$ *déterminant obtenu en supprimant la sixième ligne et la colonne du déterminant ci-dessus. Ceci, à son tour, est le même que le coefficient de* $-x_1^2 y_1^2$ *dans le déterminant* $4 * 4$ *obtenu en supprimant les troisième et sixième lignes et les quatrième et sixième colonnes du déterminant ci-dessus.Nous voyons que le coefficient de* $-x_1^2 y_1^2$ *est en effet* -1*. Cela montre qu'il y à un polynôme unique de degré total en* x *et* y *pas plus de deux que correspond à une fonction donnée* f *sur les six points définis ci-dessus.*
Le théorème suivant concerne une généralisation du résultat de l'exemple 2.2.1.

Théorème 2.2.1 *Étant donné un nombre entier positif* n *et un ensemble de points*

$$S_\Delta^n = \{(x_i, x_j) \mid i, j \geq 0,\ i + j \leq 0\}, \tag{2.8}$$

où les x_i *sont dinstincts et* y_i *sont distincts, il y a un polynôme unique de la forme*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{k} c_{r,k-r}\, x^r y^{k-r},$$

cela prend les mêmes valeurs qu'une fonction donnée $f(x, y)$ *sur l'ensemble* S_Δ^n*.*

Preuve. *Soit* A *la matrice carrée dont chacune des* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *lignes est constituée de* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *éléments*

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, ..., xy^{n-1}, y^n$$

évalué aux points (x_i, y_j) *de l'ensemble* S^n_Δ*, pris dans l'ordre*

$$
\begin{aligned}
&(x_0, y_1), (x_1, y_1), ...(x_{n-1}, y_1),\\
&...\\
&...\\
&(x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}),\\
&(x_0, y_n).
\end{aligned}
$$

La matrice A_1 *est la matrice* $3*3$ *qui apparaît en 2.6, et* A_2 *est la matrice* $6*6$ *de l'exemple 2.2.1, on pouvons étendre la méthode utilisée dans l'exemple 2.2.1 pour montrer (voir le problème 5.2.3) que la matrice* A *est non singulière pour une valeur générale de* n*. Il y a donc un polynôme interpolant unique de degré total* n *en* x *et* y *qui interpole une fonction donnée* $f(x, y)$ *sur l'ensemble* S^n_Δ*.* ■

Théorème 2.2.2 *Étant donné toute fonction* f *définie sur un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *qui comprend* S^n_Δ*, laissez*

$$f(x, y) = p_m(x, y) + r_m m(x, y), \qquad 0 \le m \le n, \tag{2.9}$$

où la séquence de polynômes (p_m) *est définie récursivement par*

$$p_m(x, y) = p_{m-1}(x, y) + q_m(x, y), \qquad m \ge 1, \tag{2.10}$$

Avec

$$q_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \Pi_k(x)\Pi_{m-k}(y)[x_0, ..., x_k][y_0, ..., y_k]f; \tag{2.11}$$

pour $m \ge 1$*, en commençant par*

$$p_0(x, y) = [x_0][y_0]f = f(x_0, y_0).$$

Ensuite, pour $m \geq 0$*, le terme d'erreur* $r_m(x, y)$ *satisfait*

$$r_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \Pi_{k+1}(x)\Pi_{m-k}(y)[x, x_0, ..., x_k][y_0, ..., y_{m-k}]f + \Pi_{m+1}(y)[x][y, y_0, ..., y_m]f,$$

et le polynôme $p_m(x, y)$ *interpole* $f(x, y)$ *sur l'ensemble* S^n_Δ.

Exemple 2.2.2 *Lorsque* $n = 2$ *dans léqation* $p_n(x, y) = \sum_{i,j} f(i, j)L_{i,j}(x, y)$*, on avons six points d'interpolation,et le polynôme interpolant est*

$$p_2(x,y) = \frac{1}{2}(2-x-y)(1-x-y)f(0,0) + x(2-x-y)f(1,0) + y(2-x-y)f(0,1) + \frac{1}{2}x(x-1)f(2,0)$$
$$+ xyf(1,1) + \frac{1}{2}y(y-1)f(0,2).$$

Si on évaluons $p_2(x, y)$ *au centre du triangle avec des sommets* $(0, 0), (2, 0)$ *et* $(0, 2)$*, on trouvons que*

$$p(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(4\alpha - \beta),$$

où β *est la moyenne des valeurs de* f *sur les sommets du triangle, et* α *est la moyenne des valeurs de* f *sur les trois autres points.*

Dans le chapitre 1 nous avons vu que le polynôme interpolant dans une variable peut être évalué itérativement par l'algorithme de Neville-Aitken. Nous pouvons également dériver un processus itératif de type Neville-Aitken pour évaluer le polynôme d'interpolation pour $f(x, y)$*sur l'ensemble triangulaire de points. Définissons* $p^{[i,j]}_k(x, y)$ *comme le polynôme d'interpolation de* $f(x, y)$ *sur l'ensemble triangulaire des points*

$$S^{[i,j]}_k = \{(i + r, j + s) \mid r, s \geq 0,\ r + s \leq k\}.$$

L'ensemble $S^{[i,j]}_k$ *contient* $1 + 2 + ... + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$ *points disposés dans une formation en triangle rectangle, avec* (i, j)*comme point en bas à gauche. Ainsi* $p^{[i,j]}_0(x, y)$ *a la valeur constante* $f(i, j)$*. On pouvons calculer récursivement les polynômes interpolants*

$p_k^{[i,j]}(x,y)$ *dans un style Neville-Aitken.*

Théorème 2.2.3 *pour* $k \geq 0$ *et* $i,j \geq 0$

$$p_{k+1}^{[i,j]}(x,y) = (\frac{i+j+k+1-x-y}{k+1})p_k^{[i,j]}(x;y) + (\frac{x-i}{k+1})p_k^{[i+1,j]}(x,y) + (\frac{y-j}{k+1})p_k^{[i,j+1]}(x,y).$$

2.3 Intégration sur le Triangle

On discutons maintenant des règles d'intégration sur le triangle. Si on intégrons le polynôme interpolant $p_n(x,y)$, tel que $p_n(x,y) = \sum_{i,j} f(i,j)L_{i,j}(x,y)$, sur le triangle T_n avec les sommets $(0,0),(n,0)$ et $(0,n)$, on obtenons une règle d'intégration

$$Z_n(f) = \sum_{i,j} w_{i,j}^n f(i,j), \tag{2.12}$$

où la sommation est sur tous les entiers non négatifs i et j tels que $i+j \leq n$.Ainsi le poids $w_{i,j}^{(n)}$ est obtenu en intégrant le polynôme fondamental $L_{i,j}(x,y)$, et on voyons que

$$W_{i,j}^{(n)} = \int_0^n \left(\int_0^{n-1} L_{i,j}(x,y)dx \right) dy. \tag{2.13}$$

On dit que R_n est une règle d'intégration interpolatoire sur le triangle T_n. De l'unicité du polynôme interpolant, il s'ensuit que lorsque $f(x,y)$ est un polynôme de degré total au plus n en x et y,

$$R_n(f) = \int_0^n \left(\int_0^{n-y} f(x,y)dx \right) dy.$$

On disons que la règle est exacte pour de telles fonctions. En particulier, on avons

$$R_n(x^r y^s) = \int_0^n \left(\int_0^{n-y} x^r y^s dx \right) dy, \tag{2.14}$$

pour $r, s \geq 0$ et $r + s \leq n$. Sur l'évaluation de l'intégrale interne dans (2.14) on obtient

$$R_n(x^r y^s) = \frac{1}{n+1} \int_0^n (n-y)^{r+1} y^s dy,$$

et en faisant la substitution $y = nt$, on trouvons que

$$R_n(x^r y^s) = \frac{r^{r+s+2}}{r+1} \int_0^1 (1-t)^{r+1} t^s dt.$$

Par conséquent, il n'est pas difficile de démontrer cela, en intégrant par partie (voir ...) que

$$R_n(x^r y^s) = r^{r+s+2} \frac{r!s!}{(r+s+2)!}. \tag{2.15}$$

Si on remplaçons maintenant $f(x, y)$ dans 2.12 par $x^r y^s$, et utilisons 2.15, pour $r, s \geq 0$ et $r+s \leq n$, on obtenons un système d'équations linéaires pour déterminer les poids $w_{i,j}^{(n)}$. Ceci est préférable à l'évaluation directe des poids en intégrant les polynômes fondamentaux, en utilisant 2.13, Il y a des symétries dans les poids que nous pouvons utiliser pour simplifier la solution des équations linéaires.

Car on avons

$$w_{i,j}^{(n)} = w_{j,i}^{(n)} = w_{i,n-i-j}^{(n)} = w_{n-i-j,i}^{(n)} = w_{j,n-i-j}^{(n)} = w_{n-i-j,j}^{(n)}. \tag{2.16}$$

On considère $w_{i,j}^{(n)}$ et $w_{j,i}^{(n)}$. Si on échangeons i et j dans 2.13, alors de

$$L_{i;j}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-x-y \\ n-i-j \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

cela équivaut à échanger x et y, qui laisse l'intégrale inchangée, puisque le domaine d'intégration est symétrique en x et y, Ceci établit la relation $w_{i,j}^{(n)} = w_{j,i}^{(n)}$. Il ne reste plus qu'à montrer que, disons,

$$w_{i,j}^{(n)} = w_{i,n-i-j}^{(n)};$$

et toute la chaîne des égalités dans 2.16 suivra. De 2.13 et d'aprés 2.17 on pouvons exprimer $w(n)$ comme l'intégrale double

$$w_{i,n-i-j}^{(n)} = \int_0^n \int_0^{n-y} \binom{x}{i} \binom{y}{n-i-j} \binom{n-x-y}{j} dxdy.$$

On utilise maintemant le changment de variables

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= n - \xi - \eta, \end{aligned}$$

et on notons que le domaine d'intégration de cette dernière intégrale double, la région triangulaire $x, y \geq 0$, $x + y \leq n$, est transformé en
région triangulaire $\xi, \eta \geq 0$, $\xi + \eta \leq n$. Ainsi on obtenons

$$w_{i;n-i-j}^{(n)} = \int_0^n \left(\int_0^{n-\eta} \binom{\xi}{i} \binom{n-\xi-\eta}{n-i-j} \binom{\eta}{j} |J| \, d\xi \right) d\eta, \tag{2.18}$$

où $|J|$ c'est le module du jacobien,

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

En remplaçant $|J|$ par unité dans 2.18, on voyons que $w_{i;n-i-j}^{(n)} = w_{i,j}^{(n)}$.

Bibliographie

[1] Bratishchev, A. V., & Korobeinik, Y. F. (1976). The multiple interpolation problem in the space of entire functions of given proximate order. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, 40(5), 1102-1127.

[2] Claudia NEGULESCU, Interpolation, Universit´e de Provence, 2007.

[3] Filbet, F. (2013). Analyse numérique-Algorithme et étude mathématique-2e édition : Cours et exercices corrigés. Dunod.

[4] Lions, J. L. (1974). Cours d'analyse numérique : promotion 1972.

[5] Phillips, G. M. (2003). Interpolation and approximation by polynomials (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

[6] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications (French Edition). Springer, 1, 28.

[7] Radjeh, F. (2017). Cours de deuxième année. Université Mohamed khaider de biskra.

[8] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation_multivari%C3%A9e.

[9] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation_polynomiale.