République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

ZEMIRI Naziha

Titre :

Mouvement Brownien standard et fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	CHIGHOUB Farid	UMKB	Président
Dr.	**YAKHLEF Samia**	UMKB	Encadreur
Dr.	BEROUIS Nassima	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Â mes chers Parents.

Â mes frères : MOHAMED, ADAM, SOUFFI et NANOU.

Â mes sours : SOUAD, AFAF, MINA, LAMISSE.

Un grand merci à tous ceux qui m'ont aidé à concrétiser ce travail.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu notre créateur pour m'avoir donné la force pour accomplie ce travail, et j'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur, **YAKHLEF Samia** pour m'avoir proposé ce sujet et pour toutes les heures qu'il a consacrées pour me donner la saveur d'ètudier les Mathématiques.

Je tiens à remercier monsieur **CHIGHOUB Farid** pour avoir accepté d'être le président du jury et **BEROUIS Nassima** pour avoir accepté d'examiner mon mémoire, pour l'avoir lue avec attention, et leurs commentaires qui on permis d'améliorer la précision et la présentation de ce mémoire.

Table des matières

Table des figures

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le mouvement Brownien standard et mouvement Brownien fractionnaire. Le mouvement Brownien standard est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien standard est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown.** Le mouvement Brownien qui joue un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques en temps continue, c'est la description mathématique de la trajectoire aléatoire d'une particule dans un fluide, qui soumise à l'échelle atomique à des chocs avec d'autres particules.

Dans le cadre déterministe, de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles (ou équations aux dérivées partielles). Pour les phénomènes modélisés par un mouvement Brownien, on s'attend à avoir des équations différentielles faisant intervenir le mouvement Brownien. Malheureusement, ce processus a des trajectoires presque sûrement non dérivables et il n'est pas possible de considérer des équations différentielles le faisant vraiment intervenir. Plutôt que de le dériver, on cherchera dans la suite, à intégrer contre ce processus, ce qui permet de construire l'intégrale stochastique de la forme :

$$\int_0^t H_s dB_s$$

Les équations différentielles stochastique dirigées par semi-martingales, particulièrement, le mouvement Brownien, sont couramment utilisées pour modéliser la dynamique des prix du marché boursier.

Etant donné les travaux de Hurst, Mandelbrot et Van Ness, les mouvements Browniens fractionnaires ont joué un rôle plus important dans les nombreux domaines d'application tels que l'hydrologie, l'économie, des télécommunications et de la finance mathématique. Soit $B = \left\{B_t^H; t \geq 0\right\}$ un mouvement Brownien du paramètre Hurst $H \in]0,1[$. est un processus gaussien centré avec la fonction de covariance :

$$R_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

Notons que si $H = \frac{1}{2}$, le processus B est mouvement Brownien standard, mais si $H \neq \frac{1}{2}$, alors il n'a pas des accroissement indépendants. Si $H > \frac{1}{2}$, le processus $B = (B_H)_{t \geq 0}$, présente une dépendance à longue terme, qui est $\sum \left(E\left[B_1\left(B_{n+1} - B_n\right)\right]\right) \longrightarrow \infty$. Le mouvement Brownien fractionnaires est également auto-similaire avec le paramètre de Hurst H, qui est $\left\{B_{\alpha t}^H; t \geq 0\right\}$ à la même loi de probabilité que$\left\{\alpha^H B_t^H; t \geq 0\right\}$. Cette propriété est une conséquence immédiate. Du fait que la fonction de covariance est homogène de l'ordre $2H$. Le paramètre de Hurst a été introduit par l'hydrologue britannique Harold Edwin Hurst (1880 à 1978) dans l'analyse statistique des eaux de ruissellement annuel de la rivière du Nil. Ce processus a été introduit par Kolmogorov et étudié par Mandelbrot et Van Ness, où une représentation stochastique en termes d'un mouvement Brownien standard a été établie. De fonction de covariance il résulte que l'augmentation du processus dans un intervalle $[s,t]$ a une distribution normale avec une moyenne nulle et de variance $E\left[|B_t - B_s|^2\right] = |t-s|^{2H}$; *i.e.*, le processus est à accroissement stationnaire.

Chapitre 1

Mouvement Brownien

1.1 Rappels sur les variables gaussiennes

La loi normale est l'une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 qui l'utilisa afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Laplace et Gauss au $XIX\grave{e}me$ siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques. Sa densité de probabilité dessine une courbe dite courbe en cloche ou courbe de Gauss.

Définition 1.1.1 *Soit $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$, on dit qu'une v.a.r X suite une loi normale d'espérance m, et de variance σ^2 si sa fonction de densité f_X est donnée par :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

et on note $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Remarque 1.1.1 *Nous avons :*

Si X suit la loi normale elle admet pour fonction caractéristique, la fonction $\varphi_X(t)$ donnée *par :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = e^{itm-\frac{\delta^2 t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

Les v.a.r constantes sont des v.a.r gaussiennes de variance nulle ($i.e$ $\sigma = 0$).

Les variables aléatoires gaussiennes sont très importantes en théorie de probabilité car elles possèdent de nombreuses propriétés. La proposition suivante établit quelques unes.

Proposition 1.1.1 *Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+$,*

1. *Si $X \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors X est symétrique $\left(X \overset{\mathcal{L}}{=} -X\right)$.*
2. *Si X est une variable aléatoire gaussiennes, alors $\forall a, b \in \mathbb{R}, aX + b$ est encore une variable aléatoire gaussienne.*

La famille des variables aléatoires gaussiennes est fermée pour la convergence en loi. Le théorème suivant l'illustre.

Théorème 1.1.1 *Soit $(m_n)_{n\geq 1}, (\sigma_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ resp, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r avec $X_n \to \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.*

Si :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ alors } X \to \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right),$$

$$o\grave{u}$$

$$m = \lim_{n\longrightarrow+\infty} m_n \text{ et } \sigma = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sigma_n.$$

1.2 Vecteurs gaussiens

Définition 1.2.1 *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, X est une vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussien*

$$i.e \quad \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

est une v.a.r gaussienne.

Proposition 1.2.1 *Si X est une vecteur gaussien alors :*

1. *Sa fonction caractéristique φ_X est donné par :*

$$\varphi_X(u) = \exp\left\{ i \langle u, \mathbb{E}(X) \rangle - \frac{1}{2} u^t cov(X) u \right\},$$

où

$$\langle u, \mathbb{E}(X) \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{E}(X_i),$$

et

$$cov(X) = (cov(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

2. *Si $\forall i \neq j, cov(X_i, X_j) = 0$ alors, les v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes.*

3. *Si $X \to \mathcal{N}(m, K)$, où K est la matrice de covariance avec $k_{i,j} = cov(X_i, X_j)$, si K est inversible alors sa fonction de densité est donnée par :*

$$f_X(x_1, ..., x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} e^{-\frac{1}{2}\left\langle K^{-1}(x-m), (x-m) \right\rangle}$$

Proposition 1.2.2 *Soit X un vecteur gaussien,*

1. *Si Y est un vecteur gaussien alors :*

$$X \overset{\mathcal{L}}{=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \\ cov(X) = cov(Y) \end{cases}$$

2. *Si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors X est symétrique $\left(X \overset{\mathcal{L}}{=} -X \right)$.*

3. *Invariance par transformation linéaire i.e si $Y = AX + b$, où A est une application linéaire et $b \in \mathbb{R}^n$, alors Y est un vecteur gaussien.*

1.3 Processus gaussiens

Définition 1.3.1 *Un processus aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes.*

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien réel $(i.e. E = \mathbb{R})$. Pour tous $s, t \in T$, on pose :

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t) \tag{1.1}$$

et

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}((X_t - m(t))(X_s - m(s))) \tag{1.2}$$

Définition 1.3.2 **1)** *La fonction $m : T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en (1.1) s'appelle la moyenne du processus X.*

2) *La fonction $\Gamma : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en (1.2) est appelée la covariance du processus gaussien X.*

Remarque 1.3.1 *Pour toute partie finie $I = \{t_1, ..., t_n\}$ de l'espace des temps T,la matrice*

$$\Gamma_I = (\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est de type positif puisque c'est la matrice des covariances du vecteur gaussien

$$X_I = (X_{t_1}, ..., X_{t_n}).$$

Les deux fonctions m et Γ caractérisent entièrement la loi d'un processus gaussien.

Théorème 1.3.1 *Soient $m : T \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Gamma : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que pour toute partie finie $I = \{t_1, ..., t_n\}$ de T, la matrice $\Gamma_I = (\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit de type positif. Alors il existe un processus gaussien réel $X = (X_t)_{t \in T}$, unique à équivalence près, tel que pour toute partie finie $I = \{t_1, ..., t_n\} \subset T$, le vecteur aléatoire $X_I = (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ soit de loi $\mathcal{N}_n(m_I, \Gamma_I)$ avec $m_I = (m(t_1), ..., m(t_n))$.*

1.4 Le mouvement Brownien

Robert Brown (1828) observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.

Delsaux (1877) explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.

Bachelier (1900) met en évidence le caractère "markovien" du mouvement brownien, en vue d'étudier les cours de la Bourse.

Einstein (1905) détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'"intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équation aux dérivées partielles de type parabolique.

Smoluchowski (1905) décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

N.Wiener (1923) réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du Brownien.

P.Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien.

Définition 1.4.1 *On appelle mouvement Brownien (standard) un processus stochastique* $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *vérifiant :*

1. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$*.p.s.*
2. $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est à accroissements indépendants.*
3. $\forall 0 \leq s \leq t$ *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$.
4. *L'application* $t \longrightarrow B_t$ *est continue* $\mathbb{P}$*.p.s.*

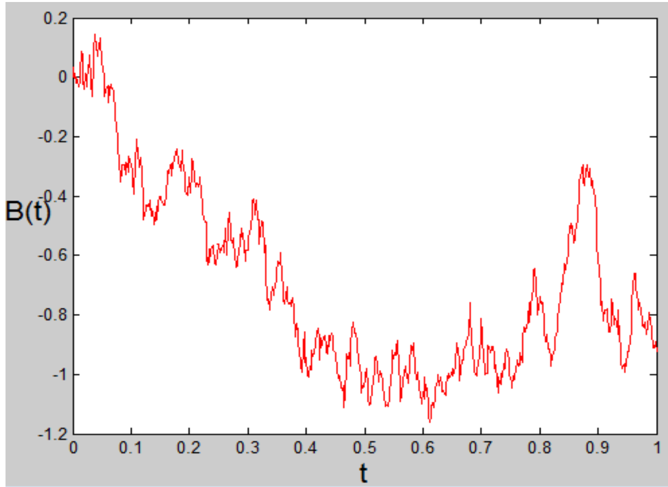

FIG. 1.1 – Trajectoire de m.B

1.5 Construction du mouvement Brownien

Il existe de nombreuses constructions du mouvement Brownien mais toutes procèdent en fait des mêmes idées, soit on le construit explicitement par une méthode hilbertienne à partir d'une suite de variables aléatoires normales indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$, soit on utilise le théorème de Kolmogorov pour justifier son existence.

1.5.1 Existence du mouvement Brownien

Théorème 1.5.1 *Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ muni de la tribu produit $B_{\mathbb{R}}^{\otimes[0,+\infty[}$ tel que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ des applications coordonnées, soit un mouvement Brownien naturel.*

Preuve. On vient de voir qu'un processus réel, gaussien centré, partant de 0 et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ est un mouvement Brownien. Il suffit donc d'après le théorème (1.3.1) de prouver le résultat suivant : ■

Lemme 1.5.1 *Pour tout entier n et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, la matrice $\Gamma = (\min(t_i,t_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est de type positif.*

Preuve. Par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Si $n = 2$, on a :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 \, t_1 \\ t_1 \, t_2 \end{pmatrix},$$

et pour un vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, on a facilement $\langle u|\Gamma u\rangle = t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_2u_2^2 \geq t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_1u_2^2 = t_1 (u_1 + u_2)^2 \geq 0$, d'où le résultat dans ce cas. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante : Pour $(n-1)$ instants, la matrice Γ correspondante est telle que pour tout vecteur $v = (v_1, ..., v_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a $\langle v/\Gamma v\rangle \geq t_1 (v_1 + ... + v_{n-1})^2$.Pour vérifier cette hypothèse à l'ordre n, remarquons que la matrice Γ a sa première ligne et sa première colonne composées uniquement de la valeur t_1 et que le reste constitue une matrice Γ_{n-1} correspondant aux valeurs $t_2 \leq ... \leq t_n$. Pour tout vecteur $u = (u_2, ..., u_n)$ on obtient alors :

$$\langle u|\Gamma u\rangle = t_1u_1^2 + 2t_1u_1 (u_2 + ... + u_n) + \langle v|\Gamma_{n-1}v\rangle ,$$

où $v = (u_2, ..., u_n)$. Mais on a $\langle v|\Gamma_{n-1}v\rangle \geq t_2 (u_2 + ... + u_n)^2 \geq t_1 (u_2 + ... + u_n)^2$, et l'hypothèse de récurrence est aussitôt vérifiée. D'où le résultat. ■

1.5.2 Construction hilbertienne du mouvement Brownien

Soit $I = [0, T]$ (ou $\mathbb{R}_+$) et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2 (I, dt)$ des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I. On not $\langle f, g\rangle = \int_0^T f(t)\, g(t)\, dt$ le produit scalaire des fonctions $f, g \in L^2 (I, dt)$.

Théorème 1.5.2 *Soit $(\mathcal{N}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $t \in I$, on pose :*

$$B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle 1_{[0,t]}, e_n \right\rangle \mathcal{N}_n \tag{1.3}$$

Alors le processus $B = (B_t)_{t\in I}$ *est bien défini et c'est un mouvement Brownien naturel sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Preuve. La série (1.3) converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En effet si $S_t^{(n)}$ désigne sa somme partielle d'ordre n, comme les $\mathcal{N}_k$ sont non corrélées, pour tout $m \leq n$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left(S_t^{(n)} - S_t^{(m)}\right)^2\right) = \sum_{k=m+1}^{n} \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle^2 \longrightarrow 0$$

quand $m, n \longrightarrow \infty$ comme reste de la série convergente qui s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle^2 = \left\| 1_{[0,t]} \right\|_{L^2(I)}.$$

Ce qui montre que la suite $S_t^{(n)}$ est de Cauchy dans L^2 donc elle converge. De plus comme les $S_t^{(n)}$ sont des variables aléatoires normales centrées, il en est de même pour leur limite B_t Par le même argument, on voit aussi que toute combinaison linéaire $a_1 B_{t_1} + ... + a_N B_{t_N}$ est aussi une variable normale centrée donc le processus $(B_t)_{t\in I}$ est gaussien centré. De plus $B_0 = 0$ par définition et pour tout $s, t \in [0, I]$, grâce à l'indépendance des $\mathcal{N}_j$, on voit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_s B_t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle 1_{[0,s]}, e_k \right\rangle \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle \\ &= \left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \right\rangle = \min(s,t),\end{aligned}$$

par la formule de Bessel-Parceval. Le processus B est donc un mouvement Brownien sur I d'après la définition(1.4.1). ■

Théorème 1.5.3 *Un processus* B *est un mouvement Brownien si et seulement si c'est un processus Gaussienne continu, centré, et de fonction de covariance* $cov(B_s, B_t) = \min(s,t)$.

Preuve. ($\Longrightarrow$) : Les composantes du vecteur $\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$, où $t_1 \leq t_2 .... \leq t_n$,sont des variables aléatoires Gaussiennes et indépendantes, il est donc lui-même Gaussien. Par conséquent, toute combinaison linéaire est Gaussiene et le processus B est Gaussien. Par hypothèse, le processus est continu. Il est aussi centré car :

$$\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(B_t - B_0) = 0.$$

Enfin, sa fonction covariance est, pour $s < t$,

$$\begin{aligned} cov(B_s, B_t) &= \mathbb{E}(B_s B_t) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \\ &= \mathbb{E}(B_s)\,\mathbb{E}(B_t - B_s) + var(B_s - B_0) \\ &= 0 + s \\ &= s. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) : Nous allons montrer une-à-une les propriétés du mouvement Brownien décrites à la définition (1.4.1). Pour (1), on a $\mathbb{E}(B_0^2) = var(B_0) = 0$,ce qui fait que $B_0 = 0$ presque sûrement. Ensuite, B est continu, par hypothèse, donc (4) est satisfaite. Pour (2), nous remarquons que pour $r_1 \leq ... \leq r_n \leq s \leq t$,le vecteur $(B_{r_1}, ..., B_{r_n}, B_t - B_s)$ est Gaussien. De plus,

$$cov(B_t - B_s, B_{r_i}) = r_i \wedge s - \min(r_i, t) = 0$$

Donc, $B_t - B_s$ est indépendante de tout vecteur $(B_{r_1}, ..., B_{r_n})$, et donc indépendante de $A_s^B = \delta\left\{(B_s)_{s \leq t}\right\}$. Finalement, pour montrer (3), nous constatons que pour $s \leq t, B_t - B_s$ est Gaussienne, et donc déterminée par son espérance et sa variance, qui sont $\mathbb{E}(B_t - B_s) =$

0 et

$$\begin{aligned} var\left(B_t - B_s\right) &= var\left(B_t\right) + var\left(B_s\right) - 2cov\left(B_t, B_s\right) \\ &= t + s - 2\left(s \wedge t\right) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s \rightarrow \mathcal{N}\left(0, t-s\right)$ et la loi de $B_t - B_s$ ne dépend que de $t - s$. ■

Proposition 1.5.1 *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.

$$\begin{cases} i \cdot \left(B_t; t \in \mathbb{R}_+\right) \text{ est à accroissements indépendants} \\ ii \cdot \forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}\left(0, t-s\right) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} iii \cdot \forall t \geq 0, B_t \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}\left(0, t\right) \\ iv \cdot \forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \text{ et } B_s \text{ sont indépendants} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} v \cdot \left(B_t\right)_{t \geq 0} \text{ est un processus gaussien, centré} \\ vi \cdot \forall s, t \in \mathbb{R}_+, cov\left(B_t, B_s\right) = \mathbb{E}\left[B_t B_s\right] = s \wedge t \end{cases}$$

Le mouvement Brownien possède trois propriétés essentielles, et sont données par la proposition suivante.

Proposition 1.5.2 *Soit $B = \left(B_t; t \in \mathbb{R}_+\right)$ un mouvement Brownien, alors :*

a) *Le processus $\left(-B\right) = \left(-B_t; t \in \mathbb{R}_+\right)$, est un mouvement Brownien,* ***(symétrique).***

b) *Pour tout $s > 0$, le processus :*

$$B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s; t \in \mathbb{R}_+,$$

est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma\left(B_u, u \leq s\right)$, ***(c'est la propriété de Markov simple).***

c) *Si $\lambda > 0$, et si $B_t^{\lambda} = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}, t \geq 0$ alors le processus $B^{\lambda} = \left(B_t^{\lambda}\right)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien,* ***(changement d'échelle)****.*

Preuve.

a) Symétrique

$1 \cdot -B_0 = 0$ $\mathbb{P}.p.s.$

$v\cdot$ On a $(-B_t)$ est de même loi que B_t.En effet : $B_t \rightarrow \mathcal{N}(0,t)$, donc $-B_t$ est symétrique, ainsi $-B_t \overset{d}{=} B_t$, alors $-B_t \rightarrow \mathcal{N}(0,t)$.

$vi \cdot \forall s,t \in \mathbb{R}, cov\left((-B_t)(-B_s)\right) = \mathbb{E}\left[(-B_t)(-B_s)\right] = \mathbb{E}\left[B_t B_s\right] = s \wedge t.$

4$\cdot$ L'application $t \longrightarrow -B_t$ est continue $\mathbb{P}-p.s.$et d'après la définition de mouvement Brownien et la proposition $(1.5.1)$, $(-B)$ est un mouvement Brownien.

b) Propriété de Markov simple

Soit $s > t$, alors :

$1 \cdot B_0^{(s)} = B_s - B_s = 0$ $\mathbb{P}.p.s.$

$i \cdot \forall t > 0, B_t^{(s)}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$.

$ii\cdot$ Si $u < v$, alors $B_v^{(s)} - B_u^{(s)}$ et $B_u^{(s)}$ sont indépendants, en effet :

$\forall s > 0$, et pour $u < v, B_v^{(s)} - B_u^{(s)} = B_{u+s} - B_s - B_{v+s} + B_s = B_{u+s} - B_{v+s}$ puisque $s < u+s < v+s$, alors :

$$B_{v+s} - B_{u+s} \qquad \text{et} \qquad B_{u+s} + B_s,$$

sont indépendants.

4) Les deux applications : $s \longrightarrow B_{u+s}$ $\mathbb{P}-p.s$ et $s \longrightarrow -B_s$ $\mathbb{P}-p.s,$

sont continues donc l'application $t \longrightarrow B_{u+s} - B_s$ l'est aussi.

c) Changement d'échelle. Soit $\lambda > 0$, on a :

$1 \cdot B_0^{\lambda} = \frac{1}{\lambda} B_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$

$v\cdot$ Il est clair que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré.

$vi \cdot \forall s, t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} cov\left(B_s^\lambda, B_t^\lambda\right) &= cov\left(\frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 s}, \frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} cov\left(B_{\lambda^2 s}, B_{\lambda^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2 s \wedge \lambda^2 t\right) \\ &= s \wedge t. \end{aligned}$$

4· L'application $t \longrightarrow B_t^\lambda$ est continue $\mathbb{P} - p.s.$

D'oú $B^\lambda = \left(B_t^\lambda\right)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien. ■

1.6 Régularisation des trajectoires

Définition 1.6.1 (Modification, version) *Deux processus* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $\left(\tilde{X}_t\right)_{t\in T}$ *sont des versions ou des modifications l'un de l'autre, si :*

$$\forall t \in T, \mathbb{P}\left(X_t = \tilde{X}_t\right) = 1.$$

Si $\mathbb{P}\left(X_t = \tilde{X}_t \ \forall t\right) = 1$, *on dit que les deux processus sont indistinguables.*

Théorème 1.6.1 (Critére de Kolmogorove) *Soit* $X = (X_t, t \in [0,1])$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\exists p > 1, c < \infty, \varepsilon > 0$, *tel que* $\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq c. |t-s|^{1+\varepsilon} \, \forall t, s \in [0,1]$. *Alors, il existe une version* $\tilde{X}$ *de* X *dont p.s les trajectoires sont hölder-continues d'exposant* α *pour tout* $\alpha < \varepsilon/p$.

Proposition 1.6.1 (Dvoretski) *Il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in [0,1] : |B_{t+s} - B_t| \leq \sqrt{c}, \forall s \in [0, \varepsilon]\right) = 0.$$

Corollaire 1.6.1 (Play, Wiener, Zygmund) *Avec probabilité* 1, *la trajectoire Brow-*

nienne est nulle part différentiable, i.e :

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in \mathbb{R}_+,\ \textit{tel que } \lim_{s \longrightarrow t} \frac{B_t - B_s}{t - s} \textit{ existe}\right) = 1.$$

1.7 Mouvement Brownien et martingales

Le mouvement Brownien, ainsi que toute une série de processus d'érivés, sont des martingales. Les martingales, sur- et sous-martingales sont définies comme dans le cas discret, sauf qu'on considére tous les temps $t > s$, pour les quels $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Commençons par considèrer le mouvement Brownien.

Théorème 1.7.1 (Propriété de martingale du mouvement Brownien) *Le mouvement Brownien est une martingale par rapport à la filtration canonique* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Preuve. Pour tout $t > s \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(B_t/\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_t - B_s + B_s/\mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(B_t - B_s/\mathcal{F}_s\right) + \mathbb{E}\left(B_s/\mathcal{F}_s\right) \\ &\mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) + B_s \\ &= B_s. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7.1 a) $\left(B_t^2 - t\right)_{t \geq 0}$ *est une martingale.*

b) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right)_{t \geq 0}$ *est une martingale.*

Preuve.

a) Pour tout $t > s > 0$,on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t^2/\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_s^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + \left(B_t - B_s\right)^2/\mathcal{F}_s\right) \\
&= B_s^2 + 0 + (t-s) \\
\mathbb{E}\left(B_t^2 - t/\mathcal{F}_s\right) &= B_s^2 - s.
\end{aligned}$$

b) 1. L'intégrabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_t|\right) &= \mathbb{E}\left[\left|\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right|\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\lambda b - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right) db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{b^2 - 2t\lambda b + \lambda^2 t^2}{2t}\right) db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\left(b - t\lambda\right)^2}{2t}\right) db = 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

2. Puisque X_t est une fonction continue de variables aléatoires $\mathcal{F}_t-$mésurables, X_t est elle-même $\mathcal{F}_t-$mésurables.

3. Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] &= X_s\mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s}/\mathcal{F}_s\right], \text{car } X_s > 0 \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\frac{\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)}{\exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s\right)}/\mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(B_t - B_s\right) - \frac{\lambda^2}{2}\left(t-s\right)\right)/\mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(B_t - B_s\right) - \frac{\lambda^2}{2}\left(t-s\right)\right)\right] \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\lambda b - \frac{\lambda^2}{2}\left(t-s\right)\right)\exp\left(-\frac{b^2}{2\left(t-s\right)}\right)db \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(-\frac{b^2 - 2\left(t-s\right)\lambda b + \lambda^2\left(t-s\right)}{2\left(t-s\right)}\right)db \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(-\frac{\left(b-\left(t-s\right)\lambda\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right)db \\
&= X_s.
\end{aligned}$$

■

1.8 Propriétés trajectorielles

Les trajectoires du mouvement Brownien sont caractérisées par une “remarquable" irrégularité. Nous nous proposons de mettre en évidence ici quelques unes de ces pathologies.

Proposition 1.8.1 *Soit (B_t) un mouvement Brownien. Alors $\mathbb{P}-p.s$,*

a) $\limsup_{t\longrightarrow+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t\rightarrow 0^+}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$

b) $\liminf_{t\longrightarrow+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t\longrightarrow+0}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$

Preuve. Pour (a) on considère la variable aléatoire

$$R = \lim \sup_{t \longrightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \lim \sup_{t \longrightarrow +\infty} \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t}} \ (\forall s \geq 0) .$$

Par indépendance des accroissements Browniens $R \perp \sigma(B_u, u \leq s)$ pour tout $s \geq 0$ et donc $R \perp \sigma(B_u, u \geq 0)$. Ainsi $R \perp R$ et donc R est une constante (finie ou infinie). Supposons que R est finie, ainsi par définition de la lim sup, $\mathbb{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R+1\right) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Or $\mathbb{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R+1\right) = \mathbb{P}(B_1 \geq R+1) > 0$ d'où le résultat. La deuxième partie de (a) se traite de la même manière. Le point (b) est une conséquence immédiate de (a) et de la symétrie du Brownien. ■

Corollaire 1.8.1 (B_t) *n'est* $\mathbb{P} - p.s$ *dérivable ni à droite, ni à gauche en tout point.*

Preuve. On peut voir que B_t n'est $\mathbb{P} - p.s$ pas dérivable à droite en 0 car :

$$\lim \sup_{t \longrightarrow +0} \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t}} = +\infty \ \mathbb{P} - p.s.$$

En considérant ensuite (avec les notations de la proposition (1.5.2)) les Browniens transformés B_t^s et Z_t tq :

$$\left(Z_t = tB_{\frac{1}{t}}, t > 0, Z_0 = 0\right)$$

on montre la non dérivabilité à droite et à gauche en tout point. ■

Remarque 1.8.1 *Les trajectoires du mouvement Brownien sont donc des exemples explicites de fonctions continues nulle part dérivables. Notons que sans faire appel aux probabilités, la construction explicite d'un tel objet est loin d'être évidente. Du point de vue de la modélisation, la non dérivabilité signifie qu'on ne peut définir la vitesse de la particule, ceci est donc physiquement trés imparfait. Le fait d'avoir négligé la masse de la particule (pas d'inertie) est une explication de ce phénomène.*

1.9 Variation et Variation quadratique

Proposition 1.9.1 *Soit $t > 0$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, ..., 2^n\}, t_j^n = \frac{t_j}{2^n}$. Alors :*

$$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right|^2 \overset{p.s \text{ et } L^2}{\longrightarrow} t.$$

Preuve. On a $\mathbb{E}[Z_t^n] = t$. Ainsi pour la convergence dans L^2 il faut montrer que :

$$Var(Z_t^n) \longrightarrow 0.$$

Or,

$$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var\left(\left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right|^2 \right) = \sum_{j=1}^{2^n} \left(\frac{t}{2^n} \right)^2 = 2^{-n} t^2,$$

la dernière égalité provenant du fait que $X \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ vérifie $\mathbb{E}[X^4] = 2\sigma^4$. On a de plus que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |Z_t^n - t|^2 \right] < \infty.$$

Ainsi d'après l'inégalité de Tchebychev et la convergence $p.s$ est démontrée. ■

Corollaire 1.9.1 *On a :*

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right| \overset{p.s}{=} +\infty.$$

Le mouvement Brownien n'est donc pas à variations bornées.

Preuve. Supposons par l'absurde que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right| < \infty \right) > 0.$$

Dans ce cas

$$t = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right|^2 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right| \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right|.$$

La trajectoire Brownienne étant continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue, ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\max_{1\leq j\leq 2^n}\left|B_{t_j^n}-B_{t_{j-1}^n}\right|=0\ \mathbb{P}-p.s$$

Comme $\mathbb{P}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\left|B_{t_j^n}-B_{t_{j-1}^n}\right|<\infty\right)>0$, ceci est en contradiction avec $t>0$. ■

1.10 Non différentiabilité des trajectoires Browniennes

Théorème 1.10.1 *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont différentiables en aucun point.*

Preuve. Il suffit d'après $(B_{t+s}-B_s)$ est un mouvement Brownien de se restreindre à l'étude des trajectoires sur l'intervalle $[0,1]$. Fixons $M>0$ et pour tout entier $n>0$ considérons l'événement :

$$A_n=\left\{w\in\Omega;\exists s\in\left[\frac{2}{n},1-\frac{2}{n}\right]:|s-t|\leq\frac{2}{n}\Longrightarrow|B_s(w)-B_t(w)|\leq 2M|s-t|\right\}$$

Les A_n forment une suite croissante et $A^{(M)}=\cup_n A_n$ contient tous les $w\in\Omega$ tels que la trajectoire $t\longrightarrow B_t(w)$ a une dérivée en un point de $]0,1[$ dont la valeur absolue est inférieure à $2M$. D'autre part si $s\in\left[\frac{2}{n},1-\frac{2}{n}\right]$ est tel que $|s-t|\leq\frac{2}{n}$ implique $|B_s(w)-B_t(w)|\leq 2M|s-t|$ et si k est le plus grand entier tel que $\frac{k}{n}\leq s$, alors, on a :

$$\Delta_k(w)=\max\left(\left|B_{\frac{k+2}{n}}(w)-B_{\frac{k+1}{n}}(w)\right|,\left|B_{\frac{k+1}{n}}(w)-B_{\frac{k}{n}}(w)\right|,\left|B_{\frac{k}{n}}(w)-B_{\frac{k-1}{n}}(w)\right|\right)\leq\frac{6M}{n}.$$

Si donc on considère les événements

$$\tilde{A}_n=\left\{w\in\Omega;\exists k\leq n-2:\Delta_k(w)\leq\frac{6M}{n}\right\}=\bigcup_{k=1}^{n-2}\left[\Delta_k\leq\frac{6M}{n}\right] \tag{1.4}$$

On a $A_n \subset \tilde{A}_n$. Donc pour prouver que $\mathbb{P}\left(A^{(M)}\right) = 0$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) = 0$. On déduit de (1.4) que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n-2} P\left(\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right). \tag{1.5}$$

Mais la valeur de $\mathbb{P}\left(\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right)$ ne dépend pas de k car le vecteur aléatoire

$$\left(B_{\frac{k+2}{n}} - B_{\frac{k+1}{n}}, B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}, B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)$$

a des composantes indépendantes et il est donc de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)^{\otimes 3}$ On peut alors récrire (1.5) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) &\leq (n-2)\left(P\left(\left|B_{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{6M}{n}\right)\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\frac{-6M}{n}}^{\frac{6M}{n}} \exp\left(-\frac{1}{2}nx^2\right) dx\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-6M}^{6M} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{n}\right) dy\right)^3 \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathbb{P}\left(A^{(M)}\right) = 0$. Pour finir, il suffit de remarquer que l'ensemble des $w \in \Omega$ tels que la trajectoire $t \longrightarrow B_t(w)$ est dérivable quelque part, est inclus dans $\underset{n\in w}{\cup} A^{(M)}$ qui est de probabilité nulle. ■

1.11 Le mouvement Brownien comme processus de Markov

Sachant que le mouvement Brownien est a accroissements indépendants, il est facile de calculer la loi conditionnelle de B_t sachant $\mathcal{F}_s$, pour $s < t$. Nous avons le.

Proposition 1.11.1 *Le mouvement Brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Markov.*

Preuve. Puisque $e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}$ indépendante de $\mathcal{F}_t$, ainsi que $e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}$ indépendante de B_t alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\mu B_{t+s}}/\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t+B_t]}/\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}/\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}\right] \text{ car } \mu\left[B_{t+s}-B_t\right] \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_t \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}/B_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\mu B_{t+s}}/B_t\right].
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.11.2 (Propriété de Markov forte) *Soit* τ *un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors :*

$$\mathbb{E}\left[f\left(B_{\tau+s}\right)/\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f\left(B_{\tau+s}\right)/\sigma\left(B_\tau\right)\right].$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini τ*, le processus* $(W_t, t\geq 0)$ *définie par* $W_t \overset{déf}{=} B_{t+\tau} - B_\tau$ *est un mouvement Brownien indépendant de* $\mathcal{F}_\tau$*.*

Chapitre 2

Mouvement Brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire à d'abord été introduit dans un cadre spatial de Hilbert par Kolmogorov en 1940 où il à été appelé Winer Helix. Le nom de mouvement Brownien fractionnaire est dû à Mandelbrot et VanNess qui, en 1968, ont fourni une représentation stochastique intégrale de ce processus en termes d'un mouvement Brownien standard.

Définition 2.0.1 *Un mouvement Brownien fractionnaire* $B^H = \left\{ B_t^H, t \geq 0 \right\}$ *de paramètre* H *dans* $(0,1)$, *est un processus gaussien centré vérifiant les conditions suivantes :*

1. B^H *est un processus stationnaire.*
2. $E\left(B_t^H\right) = t^{2H}$.
3. $B_0^H = 0$.

Le paramètre H *est l'indice de Hurst.*

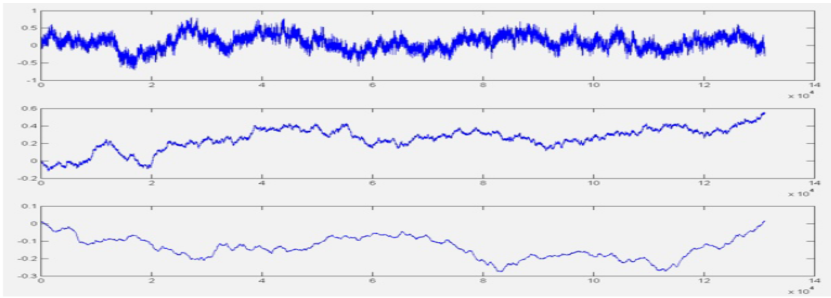

FIG. 2.1 – Trajectoires de mBf pour H=0,2 ; H=0,5 et H=0,7.

Remarque 2.0.1 **a)** *Si* $H = \frac{1}{2}$, B^H *est le mouvement Brownien standard.*

b) *Si* $H \neq \frac{1}{2}$, *les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire ne sont pas indépendants.*

Propriété 2.0.1 B^H *admet comme fonction de covariance, la fonction* R_H *définie pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *par :*

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Preuve. *On a :*

$$\mathbb{E}\left[\left[B_t^H - B_s^H\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[\left[B_t^H\right]^2\right] + \mathbb{E}\left[\left[B_s^H\right]^2\right] - 2\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right].$$

Et comme :

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{t-s}^H.$$

Finalement, on a :

$$\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right] = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

■

Remarque 2.0.2 *Si $H = \frac{1}{2}$, alors :*

$$\begin{aligned} E\left(B_t^H B_s^H\right) &= \frac{1}{2}\left(t + s - |t-s|\right) \\ &= s \\ &= s \wedge t \\ &= cov\left(B_t, B_s\right). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la covariance du mouvement Brownien standard.

Proposition 2.0.3 *Le mouvement Brownien fractionnaire B_t^H est un processus à accroissement stationnaire.*

Preuve. Comme B_t^H est un processus gaussien il suffit de vérifier que :

$$cov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) = cov\left(B_{t_1+h}^H - B_{t_{0+h}}^H, B_{s_1+h}^H - B_{s_0+h}^H\right),$$

tel que $s_0 < s_1 < t_0 < t_1$, par simplification on se ramène au cas où il ya deux incréments :

$$\begin{aligned} cov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) &= cov\left(B_{t_1}^H, B_{s_1}^H\right) - cov\left(B_{t_1}^H, B_{s_0}^H\right) - cov\left(B_{t_0}^H, B_{s_1}^H\right) + cov\left(B_{t_0}^H, B_{s_0}^H\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + s_1^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}\right) - \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + s_0^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(t_0^{2H} + s_1^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}\right) + \frac{1}{2}\left(t_0^{2H} + s_0^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H}\right). \end{aligned}$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$cov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) = \frac{1}{2}\left\{(t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}\right\},$$

et

$$\begin{aligned}
cov\left(B^H_{t_1+h}-B^H_{t_0+h},B^H_{s_1+h}-B^H_{s_0+h}\right) &= cov\left(B^H_{t_1+h},B^H_{s_1+h}\right)-cov\left(B^H_{t_1+h},B^H_{s_0+h}\right)\\
&\quad -cov\left(B^H_{t_0+h},B^H_{s_1+h}\right)+cov\left(B^H_{t_0+h},B^H_{s_0+h}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left((t_1+h)^{2H}+(s_1+h)^{2H}-(t_1+s_1)^{2H}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left((t_1+h)^{2H}+(s_0+h)^{2H}-(t_1-s_0)^{2H}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left((t_0+h)^{2H}+(s_1+h)^{2H}-(t_0-s_1)^{2H}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left((t_0+h)^{2H}+(s_0+h)^{2H}-(t_0-s_0)^{2H}\right).
\end{aligned}$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$cov\left(B^H_{t_1+h}-B^H_{t_0+h},B^H_{s_1+h}-B^H_{s_0+h}\right)=\frac{1}{2}\left\{(t_1-s_0)^{2H}-(t_1-s_1)^{2H}+(t_0-s_1)^{2H}+(t_0-s_0)^{2H}\right\},$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.0.4 *Si X_t est un processus gaussien stationnaire et $X_0=0$ tel que :*

$$Var\left(X_t\right)=t^{2H},$$

alors X_t est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H.

Preuve. On a :

$$cov\left(X_t,X_s\right)=\frac{1}{2}\left\{Var\left(X_t\right)+Var\left(X_s\right)-Var\left(X_t-X_s\right)\right\},$$

on utilise la stationnarité d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}
cov\left(X_t,X_s\right)&=\frac{1}{2}\left\{Var\left(X_t\right)+Var\left(X_s\right)-Var\left(X_{t-s}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(t^{2H}-s^{2H}-(t-s)^{2H}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.0.3 *1. La fonction de covariance R_H définie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ est continue, semi-définie positive et symétrique.*

2. Le mouvement Brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien de variance t^{2H}.

2.1 Auto-similarité

Définition 2.1.1 *Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ est dit auto-similaire d'ordre $\mathcal{B}$ s'il existe $\mathcal{B} > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$ les processus :*

$$\{X_{\alpha,t} : t \in \mathbb{R}\} \ \ et \ \left\{\alpha^{\mathcal{B}}.X_t : t \in \mathbb{R}\right\},$$

aient même loi.

Théorème 2.1.1 *Le Mouvement Brownien fractionnaire $\left\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\right\}$ de paramétre H est auto-similaire d'ordre H.*

Preuve. Fixons $\alpha > 0$. Il est évident que $\left\{B_{\alpha t}^H : t \in \mathbb{R}\right\}$ est $\left\{\alpha^H B_t^H : t \in \mathbb{R}\right\}$ sont deux processus Gaussiens centrés. Il est suffit donc de montrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_{\alpha t}^H B_{\alpha s}^H\right] &= \frac{1}{2}\left(|\alpha s|^{2H} + |\alpha t|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \\
\mathbb{E}\left[\alpha^H B_t^H \alpha^H B_s^H\right] &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right] \\
&= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

■

2.2 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe en va présenter l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire.

Proposition 2.2.1 *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont hölder continues de paramètre $\alpha < H$.*
Pour la démonstration on utilise le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 *Dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire on a :*

$$E\left(B_t^H B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right),$$

et

$$E\left(B_t^{2H}\right) = t^{2H}.$$

Preuve. On a :

$$E\left(\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right) = E\left(\left|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}\right|\right).$$

Par l'application de la linéarité de l'espérance, et du corollaire précédent on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}\right|\right) &= \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2H}\right|\right) - 2\mathbb{E}\left(\left|B_t^H B_s^H\right|\right) + \mathbb{E}\left(\left|B_s^{2H}\right|\right) \\ &= \left|t^{2H}\right| + \left|s^{2H}\right| - \left|t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right| \\ &= |t-s|^{2H}. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right) = |t-s|^{2H}.$$

On prend $\gamma = 2, d = 1$, d'où $d + \varepsilon = 2H$ d'oû $\varepsilon = 2H - 1$,

d'après le théorème du KOLMOGOROV, B_t^H à une modification (version) $\widetilde{B}^H$, dont les trajectoires sont hölder-continue, de paramètre

$$\alpha \in [0, \varepsilon/\mu[= \left[0, \frac{2H-1}{2}\right[= \left[0, H - \frac{1}{2}\right[.$$

On a prouvé que $\widetilde{B}^H$ hölder continue de paramètre $\alpha < H$. ■

2.3 La variation d'ordre p

Théorème 2.3.1 *Considérons la variation d'ordre p du mouvement Brownien fractionnaire défini par :*

$$V_p = \mathbb{P} - \lim_{n \longrightarrow \infty} V_{n,p},$$

avec :

$$V_{n,p} = \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H \left(j.2^{-n} \right) - B^H \left((j-1)\, 2^{-n} \right) \right|^p.$$

Alors on a :

$$V_p = \begin{cases} 0 & si\ pH > 1, \\ +\infty & si\ pH < 1, \\ \mathbb{E}\left[\left| B_1^H \right|^p \right] & si\ pH = 1. \end{cases}.$$

Preuve. Soit $p \in \mathbb{R}^{+*}$, considérons les suites des variables aléatoires suivantes :

$$\left\{ Y_{n,p} = \left[2^{-n}\right]^{pH-1} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H \left(j.2^{-n} \right) - B^H \left((j-1)\,.2^{-n} \right) \right|^p : n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

et

$$\left\{ \tilde{Y}_{n,p} = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H (j) - B^H ((j-1)) \right|^p : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

L'auto-similarité assure que $B^H(j.2^{-n}) \overset{\mathcal{L}}{=} 2^{-nH}.B^H(j)$ par conséquent, il est claire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Y_{n,p} \overset{\mathcal{L}}{=} \tilde{Y}_{n,p}$. Il suffit maintenant de remarquer que la suite $\{B^H(j) - B^H(j-1) : j \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire et ergodique (comme toute suite issue d'un processus Gaussien à mesure spectrale continue). Comme on a :

$$\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_{n,p}\right] = \mathbb{E}\left[\left|B_1^H\right|^p\right] := c_{p,H} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1}$$

le théorème ergodique nous dit que l'on a :

$$\tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{L^1} c_{p,H} \quad \text{et } \tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{p.s} c_{p,H} \quad \text{donc } \tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{\mathcal{L}} c_{p,H}. \tag{2.2}$$

Pour démontrer (2.1), il suffit d'évoquer la stationnarité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_{n,p}\right] &= 2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left|B^H(j) - B^H((j-1))\right|^p\right] \\
&= 2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left|B^H(1)\right|^p\right] \\
&= 2^{-n}2^n\mathbb{E}\left[\left|B^H(1)\right|^p\right].
\end{aligned}$$

On a (2.2) et comme $Y_{n,p} \overset{\mathcal{L}}{=} \tilde{Y}_{n,p}$ on a donc $Y_{n,p} \overset{\mathcal{L}}{=} c_{p,H}$ comme $c_{p,H}$ est une constante déterministe, ceci implique que $Y_{n,p} \xrightarrow{\mathbb{P}} c_{p,H}$. Donc $[2^{-n}]^{pH-1} * V_{n,p} \overset{p}{\to} c_{p,H}$ ce qui démontre le résultat. ■

Corollaire 2.3.1 *Le mouvement Brwonien fractionnaire est $\mathbb{P} - p.s$ à variations non bornées sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Par auto-similarité et par stationnarité des accroissements, il suffit de considérer le compact $[0,1]$. En considérant la subdivision particulière de $[0,1]$: $\{0, 2^{-n}, ..., j.2^{-n}, ..., 1\}$, pour avoir la propriété de variation bornée (par b) il faut que $V_{n,1} \longrightarrow b \; \mathbb{P}-p.s.$ avec $b < \infty$. Or ce n'est pas possible car le théorème (2.3.1) nous fournit une sous-suite qui tend presque sûrement vers l'infini $(\mathbb{P}=1, H<1)$. ■

2.4 Non-Différentiabilité

Théorème 2.4.1 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Les trajectoires de mouvement Brownien fractionnaire sont $\mathbb{P}-p.s$ non-différentiable en t_0.

Preuve. On veut montrer que $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left[\limsup_{t \longrightarrow t_0}\left|\frac{B_t^H-B_{t_0}^H}{t-t_0}\right|=+\infty\right]=1$.

On se ramène au cas $t_0=0$ grâce à la stationnarité.

On va donc étudier le comportement de $\left|\frac{B_t^H}{t}\right|$ quand t tend vers t_0.

En fait on va démontrer la non-différentiabilité à droite :

On pose : $A(t)=\left[\sup_{0 \leq s \leq t}\left|\frac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right]$ avec $M>0$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[A(t)] & \geq \mathbb{P}\left[\left|\frac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right] \\
& \geq \mathbb{P}\left[\frac{t^H}{t}\left|B_1^H\right| \geq M\right] \quad \text{par auto-similarité} \\
& \geq \mathbb{P}\left[\left|B_1^H\right| \geq M . t^{1-H}\right] \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \mathbb{P}\left[\left|B_1^H\right| \geq 0\right] .
\end{aligned}
$$

Ainsi on a :

$$
\begin{gathered}
\forall M, \mathbb{P}[A(t)] \underset{t \longrightarrow 0^{+}}{\longrightarrow} 1 \\
\overline{\lim}_{t \longrightarrow 0^{+}}\left|\frac{B_t^H}{t}\right|=+\infty P-p.s \; \cdot \\
\overline{\lim}_{t \longrightarrow 0}\left|\frac{B_t^H}{t}\right|=+\infty P-p.s
\end{gathered}
$$

D'ou le théorème. ■

2.5 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale

Théorème 2.5.1 *Un processus $X = (X_t)_{T\geq 0}$ est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

où M est une martingale (nulle en $t = 0$) et A est un processus à variation finie .
Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale pour $H \neq \frac{1}{2}$.

Preuve. Soit $(X_t)_{t\in[0,t]}$ un processus stochastique.
Considérons la subdivision $\pi = 0 = t_0 < ... < t_n = T$. Posons :

$$S_p(X,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|^p,$$

la p-variation de X dans l'intervalle $[0,T]$ est définie comme suit :

$$V_p(X,[0,T]) = \sup_{\pi} S_p(X,\pi),$$

où π est une subdivision finie de $[0,T]$.
L'indice de la p-variation d'un processus est défini par :

$$I(X,[0,T]) = \inf\{p > 0, V_p(X,[0,T]) < \infty\}.$$

On affirme que :

$$I\left(B^H,[0,T]\right) = \frac{1}{H}.$$

En effet, considérons pour $p > 0$

$$Y_{n,p} = n^{pH-1}\sum_{i=1}^{n} \left|B^H_{\frac{i}{n}} - B^H_{\frac{i-1}{n}}\right|^p.$$

Par le théorème d'ergodicité $\tilde{Y}_{n,p}$ converges $p.s$ vers $\mathbb{E}\left(\left|B_1^H\right|^p\right)$ dans L^1 quand n tend vers l'infinie, Donc il converge aussi en probabilité vers $\mathbb{E}\left(\left|B_1^H\right|^p\right)$, il s'ensuit que :

$$V_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \left| B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p \underset{p,n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, \text{ si } \ pH > 1 \\ \infty, \text{ si } \ pH < 1 \end{cases}.$$

Donc on peut conclure que $I\left(B^H, [0,T]\right) = \frac{1}{H}$. Pour toute semi-martingale X.

$I\left(X, [0,T]\right)$ doit être dans $[0,1] \cup \{2\}$, Le mouvement Brownien fractionnaire ne peut pas être une semi-martingale sauf si $H = \frac{1}{2}$. ■

2.6 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas un processus de Markov

Définition 2.6.1 *Une fonction de transition est une famille $P_{s,t}, 0 \leq s \leq t$ de probabilités de transition d'un espace mesurable (E, ε) sur lui-même telle que pour tout $A \in \varepsilon$, on a :*

$$\int_E P_{t,u}(y,A)\, P_{u,s}(x,dy) = P_{t,u}(x,A)$$

Cette équation est appelée l'équation de Chapman-Kolmogorov. La fonction de transition $P_{s,t}$ est dite homogène si $P_{s,t}$,ne dépend que de la différence $t-s$. Dans ce cas, si l'on note $P_t \overset{(def)}{=} P_0$, alors l'équation de Chapman-Kolmogorov devient :

$$\int_E P_s(x,dy)\, P_t(y,A) = P_{t+s}(x,A),$$

pour tous $s \geq 0$ et $t \geq 0$.

Pour une fonction f mesurable et définie sur (E, ε), on notera :

$$P_{s,t} f(x) = \int_E f(y)\, P_{s,t}(x,dy), s < t, x \in E,$$

lorsque cette intégrale a un sens.

Définition 2.6.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré. Un processus adapté X est Markovien par rapport à la filtration $(\mathcal{F})_t$ avec pour fonction de transition $P_{s,t}$ si pour toute fonction f mesurable et positive sur (E, E), on a pour tous $s < t$,*

$$E\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right) = P_{s,t}\left(X_s\right), p.s.$$

La loi de X_0 sous $\mathbb{P}$ est applée la loi initiale de (X_t). Le processus X est dit markovien homogène si sa fonction de transition est homogène, auquel cas on a :

$$E\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right) = P_{t-s}\left(X_s\right), p.s.$$

Proposition 2.6.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)$ de paramètre de Hurst $H \in (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ n'est pas un processus de Markov.*

Preuve. On pose que X est un mouvement Brownien fractionnaire, on à alors :
Soit $R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$ la fonction de covariance de X d'indice $H \neq \frac{1}{2}$. Nous allons d'abord montrer que le processus X est markovien (non nessécairement homogène) si et seulement si R_H vérifie l'équation :

$$R_H\left(t, t_0\right) = \frac{R_H(t,s)\, R_H\left(s, t_0\right)}{R_H(s,s)}, t > s > t_0. \tag{2.3}$$

Soient $t > s > t_0$ et $U = X_s, V = X_t - \frac{R_H(t,s)}{R_H(s,s)} X_s$. Il est facile de voir que U et V sont des variables aléatoires gaussiennes, centrées et non corrélées, i.e $\mathbb{E}(UV) = 0$.
Celles-ci sont donc indépendantes et par conséquent pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(V/X_s = x\right) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}\left(X_t\right) - \frac{R_H(s,t)}{R_H(s,s)} \mathbb{E}\left(X_s\right) = 0.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}\left(X_t/X_s = x\right) = \frac{R_H\left(s,t\right)}{R_H\left(s,s\right)}x. \tag{2.4}$$

Supposons que X soit markovien et notons $\mathbb{P}\left(t, dx, t_0, x_0\right), t, t_0 \geq 0, x, x_0 \in \mathbb{R}$ ses probabilités de transition, i.e.$\mathbb{P}\left(X_t \in dx/X_{t_0} = x_0\right) = \mathbb{P}\left(t, dx, t_0; x_0\right)$. Rappelons alors que pour tous t_0, s et t tels que $0 \leq t_0 < s < t$, les probabilités de transition vérifient l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\mathbb{P}\left(t, dx; t_0, x_0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(t, dx; s, z\right) \mathbb{P}\left(s, dz; t_0, x_0\right). \tag{2.5}$$

Celle-ci avec (2.5) nous permet d'écrire, pour $0 \leq t_0 < s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t/X_{t_0} = x_0\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbb{P}\left(t, dx; t_0, x_0\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp\left(t, dx; s, z\right)\right) \mathbb{P}\left(s, dz; t_0, x_0\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R_H\left(s,t\right)}{R_H\left(s,s\right)}z\right) R\left(s, dz; t_0, x_0\right) \\
&= \frac{R_H\left(s,t\right)}{R_H\left(s,s\right)} \mathbb{E}\left(X_s/X_{t_0} = x_0\right) = \frac{R_H\left(s,t\right) R_H\left(s,t_0\right)}{R_H\left(s,s\right) R_H\left(t_0,t_0\right)} x_0.
\end{aligned}$$

L'égalité (2.4) appliquée en remplaçant s et x par t_0 et x_0 donne pour $t_0 < s < t$,

$$\mathbb{E}\left(X_t/X_{t_0} = x_0\right) = \frac{R_H\left(t_0,t\right)}{R_H\left(t_0,t_0\right)} x_0.$$

En comparant ceci à l'égalité ci-dessus, on obtient (2.3).

Il reste à vérifier que l'égalité (2.3) est fausse. Pour cela fixons $t_0 > 0$ et prenons $s = 2t_0$ et $t = 3t_0$.

L'égalité (2.3) entraîne alors immédiatement que :

$$2^{2H} = 3^{2H-1} + 1,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $H = \frac{1}{2}$.

En effet, il est facile de voir que la fonction $H \longrightarrow 2^{2H} - 3^{2H-1} + 1$, définie et continue sur $(0,1)$ admet un maximum unique au point $\log\left[\log 3/\left(3\log 2\right)\right]/\left[2\log\left(2/3\right)\right] \in \left(1/2, 1\right)$. $\blacksquare$

Bibliographie

[1] Analyse Stochastique du Mouvement Brownien Fractionnaire

[2] Chaumont, L. (2007). Introduction aux processus auto-similaires. Lecture Notes. Unpublished.

[3] Chagny, G. Construction du mouvement brownien.

[4] Cours de calcul stochastique Master M2 IRA Chistophe Chorro september 2006

[5] Gallardo, L. (2008). Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corrigés. Hermann.

[6] Quelques propriétés du Mouvement Brownien

[7] Rahmani, F. L. Quelques propriétés du mouvement Brownien classique et mouvement Brownien fractionnaire.

[8] Rahmani, F. L. Quelques propriétés du mouvement Brownien classique et mouvement Brownien fractionnaire.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(X_1, ..., X_n)$	échantillon de taille n de v.a's.
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}, \xrightarrow{\mathcal{D}}$	convergence en loi, convergence en distribution.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûre.
$\xrightarrow{m.p}$	convergence en moyenne d'ordre p.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité.
$\mathbb{P}$	probabilité.
B_t	Mouvement Brownien.
B_t^H	Mouvement Brownien fractionnaire.
$\mathbb{P} - p; s$	prbabilité presque sûre.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	filtration
$s \wedge t$	min (s, t)
$\overline{\lim}$	limite sup
mB	mouvement brownien
mbf	mouvement brownien fractionnaire