République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BENSAHLA Hafidha

Titre :

Les Différences finies pour les problèmes d'évolution

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**SILABEDI Noureddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BELAGOUN Abdelghani**	UMKB	Président
Dr.	**GHOUDJMIS Fatiha**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années d'étude, qu'ALLAH les protège.

À mes sœurs pour leurs aides morales et leurs conseils.

Aux petits :≪ Saif, Sara, Rami, Sami, Khawla, Ahmed, Abd allah, Meriem, Sirin, Omren ≫

À mes frères pour leurs précieuses aides et leurs merveilleux conseils.

Aux petits :≪ Amel, Marwa, Radhia, Mohamd, Hadil, Lamisse, Rahma, Annes, Ayache, Abd almoumin, Hattem ≫

À tout ma famille,
À mes amis,

Et à tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire,

Et mes collègues de la promotion 2018.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Tout d'abord, nous tenons surtout à adresser nos plus vifs remerciements à notre encadreur **Dr SILABEDI Nouredine** qui nous a permis de réaliser ce travail sous sa direction. Nous ne saurons jamais oublier sa disponibilité, son assistance et ses conseils judicieux pour nous.

Nous voudrions remercier également **Dr BELAGOUN Abdelghani** et **Dr GHOUDJMIS fatiha**, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter de jures ce travail.

Nous remercions également les responsables de département de mathématique.

Nous remercions aussi **BENABBA Fadhila** ce qui ont nous aider de réaliser ce travail.

Enfin, nous remercions tous les enseignants de la faculté.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Une grande partie des problèmes impliquant des équations différentielles ordinaires ne fournissent pas des conditions initiales, mais des conditions aux limites (aux frontières) où les valeurs de la solution sont imposées.

Le principe de la méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées par les approximations qui conduit à des systèmes linéaires.

Dans ce mémoire on étudie la méthode des différences finies en dimension un et deux et on prolonge cette étude sur les problèmes d'évolution.

Dans le premier chapitre, on expose la méthode des différences finies pour un problème aux limites en dimension un suivant d'un problème aux limite en dimension deux.

Ensuite, dans le deuxième chapitre on traite le problème aux limites d'évolution (le temps intervient comme variable), en prenant deux problèmes types à savoir : équation de la chaleur en dimension un et l'équation des ondes en dimension un.

Enfin, dans le troisième chapitre on applique la méthode sur les problèmes d'évolution où la variable de l'espace appartient à l'espace de dimension deux.

Chapitre 1

Méthode des différences finies pour un problème aux limites stationnaire

1.1 Méthode des différences finies pour un problème aux limites en dimension un

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c , $f \in \varphi^0 (\ [0,1] \ )$ et deux constantes α et β, trouver une fonction $u \in \varphi^2 (\ [0,1] \ )$ qui vérifie :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \quad , \ 0 < x < 1, \\ \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases}$$

Un tel problème est appelé problème aux limites car la fonction inconnue doit satisfaire les conditions aux limites :

$$u(0) = \alpha,$$
$$u(1) = \beta,$$

Posées à la frontière de l'intervalle ouvert sur lequel l'équation différentielle doit être satisfaite.

Sauf dans quelques très rares cas, on ne connait pas de formule qui permettrait de calculer directement la valeur de la solution en un point quelconque de l'intervalle $[0,1]$.

Le problème se pose donc de trouver un moyen d'approcher les valeurs de la solution d'aussi prés qu'on veut. Une méthode pour y parvenir est la méthode des différences finies, que nous allons maintenant décrire.

Etant donné un entier

$$N \geq 1,$$

on pose

$$h = \frac{1}{N+1},$$

et on définit un maillage uniforme de pas h de l'intervalle $[0, 1]$ comme étant l'ensemble des points

$$x_i = ih, \ 0 \leq i \leq N + 1$$

(remarquer que $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$), appelés les nœuds du maillage.

Il est entendu une fois pour toutes que le pas h est destiné à tendre vers zéro, ce qui signifie qu'il peut être rendu aussi petit qu'on veut.

La méthode des différences finies est un moyen d'obtenir une approximation de la solution φ aux nœuds du maillage. Autrement dit on recherche un vecteur

$$u_h = (u_1 \ u_2 ... u_N) \in \mathbb{R}^N$$

tel que u_i soit "voisin" de $\varphi(x_i)$,

$$\varphi(x_0) = \alpha,$$

et

$$\varphi(x_{N+1}) = \beta,$$

la qualité de l'approximation étant d'autant meilleure que le pas h est petit.

Supposant que la solution φ 4 fois continument dérivable sur l'intervalle $[0, \ 1]$.

La formule de **Taylor** permet d'écrire pour $i = 1, 2, 3, ..., N$:

$$\varphi\left(x_{i+1}\right) = \varphi\left(x_i\right) + h\varphi'\left(x_i\right) + \tfrac{h^2}{2}\varphi''\left(x_i\right) + \tfrac{h^3}{6}\varphi\left(x_i\right) + \tfrac{h^4}{24}\varphi\left(x_i + \theta_i^+ h\right),$$

et

$$\varphi\left(x_{i-1}\right) = \varphi\left(x_i\right) - h\varphi'\left(x_i\right) + \tfrac{h^2}{2}\varphi''\left(x_i\right) - \tfrac{h^3}{6}\varphi\left(x_i\right) + \tfrac{h^4}{24}\varphi\left(x_i + \theta_i^- h\right),$$

avec

$$-1 < \theta_i^- < 0 < \theta_i^+ < 1,$$

d'où l'on déduit :

$$-\varphi\left(x_{i+1}\right) + 2\varphi\left(x_i\right) - \varphi\left(x_{i-1}\right) = -h^2\varphi''\left(x_i\right) - \frac{h^4}{24}\left(\varphi^4\left(x_i + \theta_i^- h\right)\varphi^4\left(x_i + \theta_i^+ h\right)\right).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\left(\varphi^4\left(x_i + \theta_i^- h\right) + \varphi^4\left(x_i + \theta_i^+ h\right)\right) = 2\varphi^4\left(x_i + \theta_i h\right).$$

Avec

$$|\theta_i| \leq \max\left\{\theta_i^+, \theta_i^-\right\} < 1.$$

De sorte qu'on obtient finalement

$$-\varphi''\left(x_i\right) = \frac{-\varphi\left(x_{i-1}\right) + 2\varphi\left(x_i\right) - \varphi\left(x_{i-1}\right)}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}\left(x_i + \theta_i h\right),$$

avec

$$|\theta_i| < 1,\ 1 < i < N.$$

Posons :

$$\varphi_i = \varphi\left(x_i\right),$$

$$c_i = c\left(x_i\right)$$

$$f_i = f\left(x_i\right)$$

et exprimons que la fonction φ et solution du problème aux points

$$x_i,\ 1 \leq i \leq N$$

en remplaçant les valeurs $-\varphi''(x_i)$ par les expressions ci-dessus et en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} -\dfrac{\alpha}{h^2} + \dfrac{2\varphi_1 - \varphi_2}{h^2} + c_1\varphi_1 = f_1 - \dfrac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h), \\ \dfrac{-\varphi_{i-1} + 2\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h^2} + c_i\varphi_i = f_i - \dfrac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h), \qquad 2 \leq i \leq N-1 \\ \dfrac{-\varphi_{N-1} + 2\varphi_N}{h^2} - \frac{\beta}{h^2} + c_N\varphi_N = f_N - \dfrac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h). \end{cases}$$

Le système d'équation ci-dessous s'écrit sous la forme matricielle :

$$A_h\varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi),$$

en posant :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 + c_1h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + c_2h^2 & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 2 + c_{N-1}h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 + c_Nh^2 \end{bmatrix},$$

avec :

$$\varphi_h = (\varphi_1,\ \varphi_2, ..., \varphi_{N-1}, \varphi_N)$$
$$b_h = \left(f_1 + \tfrac{\alpha}{h^2} f_2, ..., f_{N-1},\ f_N + \tfrac{\beta}{h^2}\right)$$

et

$$\varepsilon_h(\varphi) = \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} \varphi^{(4)}(x_1+\theta_1 h) \\ \varphi^{(4)}(x_2+\theta_2 h) \\ \vdots \\ \varphi^{(4)}(x_{N-1}+\theta_{N-1} h) \\ \varphi^{(4)}(x_N+\theta_N h) \end{pmatrix}.$$

La méthode repose sur la remarque suivante : le vecteur $\varepsilon_n(\varphi)$ étant d'autant plus "petit" que le pas h est petit (du fait du facteur h^2), on est naturellement conduit à le négligé et à définir le problème discret ,associé au problème aux limites considéré et correspondant au pas h :

Trouver un vecteur

$$U_h \in \mathbb{R}^N$$

solution de l'équation matricielle :

$$A_h.U_h = b_h.$$

Théor■me 1.1.1 *Si $c(x) > 0$ alors la matrice A_h du système linéaire est à diagonale dominante et le système admet une solution unique.*

Théor■me 1.1.2 *On suppose que la fonction $c(x) \geq 0$. Si la solution φ du problème aux limites vérifie*

$$\varphi \in \varphi\left(\ ^{(4)}[0,1]\ \right)$$

on a la majoration :

$$\max|U_i - \varphi(x_i)| = \|U_h - \varphi\|_\infty \leq \left\{\frac{1}{96}\sup_{0\leq X\leq 1}\left|\varphi^{(4)}(x)\right|\right\}.h^2.$$

1.2 Méthode des différences finies pour un problème aux limites en dimension deux

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ très régulière (Ω supposé être localement d'une seul côté de Γ de classe C^∞).

On se donne des fonctions

$$f \in \varphi^0\left(\bar{\Omega}\right), g \in \varphi^0\left(\bar{\Omega}\right) \text{ et } a \in C^0\left(\bar{\Omega}\right);$$

on suppose dans tout ce qui suit que l'on a :

$$\forall x \in \Omega,\ a(x) \geq 0.$$

On considère le problème suivant :

Trouver une fonction

$$u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},$$

solution de :

$$\begin{cases} -\triangle u(x) + a(x) u(x) = f(x) & , \ x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & , \ x \in \Gamma, \end{cases}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Il s'agit d'un nouvel exemple de problème aux limites, la fonction inconnue devant satisfaire la condition aux limites

$$u = g$$

à la frontière Γ, ce problème a une solution et une seule, continue sur $\bar{\Omega}$ et deux fois continument dérivable sur Ω .Nous noterons φ cette solution.

Comme en dimension un, la méthode des différences finies fournit une approximation de la solution en un nombre fini de points de l'ouvert Ω.

Pour cela, on commence par établir un maillage uniforme du plan, de même pas h dans les deux directions, dont les nœuds sont les points

$$(ih, \; jh) \text{ tel que } (i, \; j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Appelons Ω_h l'ensemble des nœuds du maillage qui appartiennent à Ω, et Γ_h l'ensemble des points du plan qui sont à l'intersection de la frontière Γ et d'une ligne horizontale ou\et verticale du maillage (il n'y a aucune raison pour que les points de Γ_h soient des nœuds du maillage).

Le problème discret consiste à trouver une approximation de la solution aux points de Ω_h.

Pour commencer, on numérote ces points de la gauche vers la droite et du haut vers le bas (ou du bas vers le haut).

Comme indiqué à la figure :

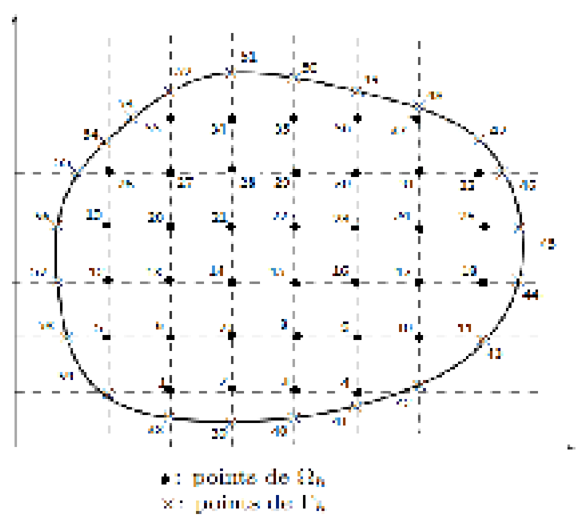


Fig. 1.1 – Le maillage

La première étape de la méthode consiste a obtenir une expression du Laplacien partielles par des quotients "aux différences finies" appropriés :

Soit P un point de Ω_h, et soit P_i, tel que

$$1 \leq i \leq 4$$

les quatres points de $\Omega_h \cup \Gamma_h$ les plus voisins dans les quatres directions, disposés comme à la figure :

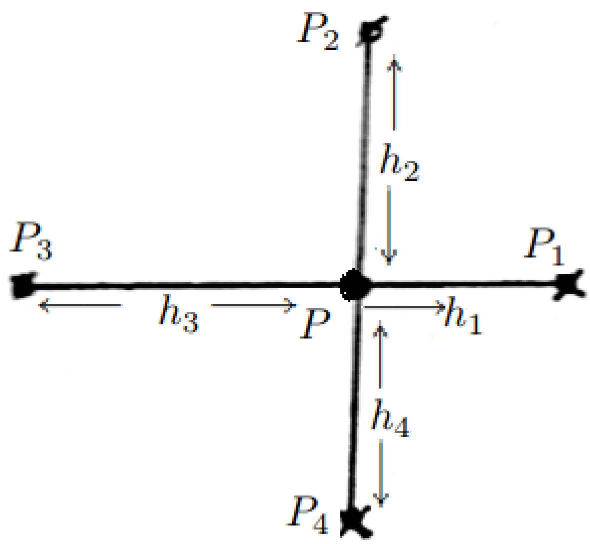


FIG. 1.2 – les directions

On notera h_i la distance du point P au points P_i.

Si :

$$h_1 = h_3,$$

l'approximation de :

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(p),$$

est tout trouvée, à savoir :

$$-\frac{\varphi(p_3) + 2\varphi(p) - \varphi(p_1)}{h_1^2}.$$

Sinon, on cherche une combinaison linéaire des trois valeurs : $\varphi(p_3), \varphi(p), \varphi(p_1),$

de telle façon que :

$$\alpha_1\varphi(p_3)+\alpha\varphi(p)+\alpha_3\varphi(p_3)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(p)+(\text{ termes avec dérivées d'ordre}\geq 3).$$

En supposant la solution φ suffisamment régulière, on peut écrire :

$$\varphi(p_1)=\varphi(p)+h_1\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x_1}+\tfrac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_1^2}(p)+\tfrac{h_1^3}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}(Q_1)\quad,\ Q_1\in\,]p,p_1[\,,$$

et

$$\varphi(p_3)=\varphi(p)+h_3\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x_1}+\tfrac{h_3^2}{2}\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_1^2}(p)+\tfrac{h_3^3}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}(Q_3)\quad,\ Q_3\in\,]p,p_3[\,.$$

On est ainsi conduit à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha+\alpha_3=0 & ,\ \text{coefficients de } \varphi(p)\,,\\[2ex] \alpha_1h_1-\alpha_3h_3=0 & ,\ \text{coefficients de } \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p)\,,\\[2ex] \alpha_1\frac{h_1^2}{2}+\alpha_3\frac{h_3^2}{2}=-1 & ,\ \text{coefficients de } \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(p)\,,\end{cases}$$

de solution

$$\alpha_1=\frac{-2}{h_1(h_1+h_3)},\quad \alpha_2=\frac{2}{h_1h_3},\quad \alpha_3=\frac{-2}{h_3(h_1+h_3)}.$$

On obtient de cette façon :

$$\begin{aligned}-\tfrac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_1^2}(p)\ &=-\frac{2}{h_1(h_1+h_3)}\varphi(p_1)+\frac{2}{h_1h_3}\varphi(p)-\frac{-2}{h_1(h_1+h_3)}\varphi(p_3)\\ &-\frac{h_1^2}{3(h_1+h_3)}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}(Q_1)+\frac{h_3^2}{3(h_1+h_3)}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_3^1}(Q_3)\,.\end{aligned}$$

Ainsi qu'une expression analogue pour la dérivée partielle

$$\begin{aligned} -\tfrac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_2^2}(p) &= -\frac{2}{h_2(h_2+h_4)}\varphi(p_1)+\frac{2}{h_2h_4}\varphi(p)-\frac{-2}{h_2(h_2+h_4)}\varphi(p_3) \\ &-\frac{h_2^2}{3(h_2+h_4)}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^3}(Q_1)+\frac{h_3^2}{3(h_2+h_4)}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^3}(Q_3). \end{aligned}$$

En négligeant, comme en dimension un, les termes faisant intervenir les dérivées d'ordre ≥ 3 de la fonction φ, on définit le Laplacien approché comme l'opérateur linéaire Δ_h qui, à toute fonction u définie sur l'ensemble $\Omega_h \cup \Gamma_h$ associé la fonction

$$\Delta_h u$$

définie sur l'ensemble Ω_h par :

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi(p_1)+\alpha\varphi(p)+\alpha_3\varphi(p_3) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(p)+(\text{ terme} \geq 3\ )\ d, \\ \varphi(p_1)=\varphi(p)+h_1\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x_1}+\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_1^2}(p)+\frac{h_1^3}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}(Q_1), \quad Q_1 \in]\ p, p_1\ [, \\ \alpha_1\varphi(p_1)=\alpha_1\varphi(p)+\alpha_1h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p)+\alpha_1\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+..., \\ \alpha_3\varphi(p_3)=\alpha_3\varphi(p)+\alpha_3h_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p)+\alpha_3\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+..., \\ \alpha_1\varphi(p_1)+\alpha_3\varphi(p_3)-(\alpha_1+\alpha_3)\varphi(p)=(\alpha_1+\alpha_3)h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{h_1^2}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+...., \end{cases}$$

avec :

- $\alpha=-\alpha_1-\alpha_3 \Leftrightarrow \alpha+\alpha_1+\alpha_3=0$,
- $\alpha_1+\alpha+\alpha_3=0$,
- $\alpha_1h_1-\alpha_3h_3=0$,
- $\alpha_1\frac{h_1^2}{2}+\alpha_3\frac{h_3^2}{2}=-1$,
- $\alpha=(\alpha_1+\alpha_3)$,
- $\alpha_1=\frac{\alpha_3h_3}{h_1}$,

- $\alpha_3 \frac{h_3}{h_1} . \frac{h_1^2}{2} + \alpha_3 \frac{h_3^2}{2} = -1,$
- $\alpha_3 \left(\frac{h_3 h_1}{2} + \frac{h_3^2}{2} \right) = -1,$
- $\alpha_3 \left(\frac{h_3 h_1 + h_3^2}{2} \right) = -1 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-2}{h_3 h_1 + h_3^2} \quad \alpha_1 = \frac{-2}{h_1(h_1+h_3)} = \frac{-2h_3 - 2h_1}{h_1 h_3 (h_1+h_3)} = \frac{-2}{h_1 h_3},$

$$\begin{aligned} \Delta_h u(p) &= \tfrac{2}{h_1(h_1+h_3)} u(p_1) + \tfrac{2}{h_2(h_2+h_4)} u(p_2) + \tfrac{2}{h_3(h_3+h_1)} u(p_3) \\ &+ \tfrac{2}{h_4(h_4+h_2)} u(p_4) - \left\{ \tfrac{2}{h_1 h_3} + \tfrac{2}{h_2 h_4} \right\} u(p), \ p \in \Omega_h, \end{aligned}$$

définition qui se simplifie en :

$$\Delta_h u(p) = \frac{u(p_1) + u(p_2) + u(p_3) + u(p_4) - 4u(p)}{h^2},$$

lorsque :

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h.$$

Une fois le Laplacien approché défini, le problème discret associé au problème aux limites considéré et au maillage choisi consiste à trouver une fonction U_h définie sur l'ensemble discret $\Omega_h \cup \Gamma_h$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta U_h(p) + a(p) U_h(p) = f(p) & , \ p \in \Omega_h, \\ \\ U_h(p) = g(p) & , \ p \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Dis que l'on a choisi un numérotage des nœuds de Ω_h et Γ_h, les deux relations précédentes s'écrivent sous la forme d'un système linéaire

$$A_h U_h = b_h.$$

Le vecteur U_h ayant pour composantes les valeurs

$$U_h(p), \ p \in \Omega_h$$

Rangées dans l'ordre considéré par le numérotage.

Théor■me 1.2.1 *Autrement dit si :*

$$p_1,\ ...,\ p_N \text{ les points de } \Omega_h,$$

alors :

$$U_h = \left(U_h\left(p_1\right),\ ...,\ U_h\left(p_N\right)\right).$$

Théor■me 1.2.2 *Le problème approché admet une solution unique.*
De plus si on suppose que la solution U vérifie $U \in \varphi^4\left(\bar{\Omega}\right)$, on a :

$$\max_{p_i \in \Omega_h} \left|U\left(p_i\right) - U_h\left(p_i\right)\right| \leq \varphi\left(h\right).h^2$$

Exemple 1.1 *Soit l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^n_{xx} + u^n_{yy} = 0$$

définit dans un carré tel que :$0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 3$; et vérifiant les conditions aux limites suivante :

$$\begin{cases} u\left(0,\ y\right) = 0; \\ u\left(3,\ y\right) = 27 - 9y^2; \\ u\left(x,\ 0\right) = x^3; \\ u\left(x,\ 3\right) = x^3 - 27x. \end{cases}$$

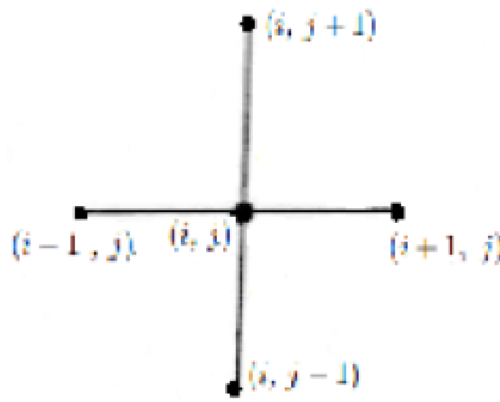
Traitons le problème de Dirichlet définit ci-dessus par la méthode des différences finies, en prenant le pas $h = k = 1$.
On remarque que le pas de maillage est le même suivant les deux axes Ox et Oy.
Pour les points intérieurs du maillage on pose :

$$u^{"}_{xx} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right), u^{"}_{yy} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right),$$

comme $u^n_{xx} + u^n_{yy} = 0$*, On en déduit le schéma de calcul, en faisant la somme :*

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,\ j} + u_{i-1,\ j} + u_{i,\ j+1} + u_{i,\ j-1}\right).$$

On voit immédiatement que la valeur de la fonction $u(x,\ y)$ *au points* $(i,\ j)$ *est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points* $(i+1,\ j)$, $(i-1,\ j)$, $(i,\ j+1)$ *et* $(i,\ j-1)$ *selon la maille de calcule suivant :*



Ce qui se traduit encore par le diagramme :

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} u = 0,$$

comme $h = 1$*, on un maillage* 3×3 *:*

Les quantités :

$u_{10} = 1,\ u_{20} = 8,\ u_{30} = 27$ *(d'après la condition au limite :* $u(x,\ 0) = x^3$ *)* ;

$u_{01} = 0,\ u_{02} = 0,\ u_{03} = 0,$ *(d'après la condition au limite :* $u(0,\ y) = 0$ *)* ;

$u_{01} = 0,\ u_{02} = 0,\ u_{03} = 0,$ *(d'après la condition au limite :* $u(3,\ y) = 27 - 9y^2$ *)* ;

$u_{01} = 0,\ u_{02} = 0,\ u_{03} = 0,$ *(d'après la condition au limite :* $u(x,\ 3) = x^3 - 27x$ *)* ;

L'application de ce schéma aux points intérieurs du domaine donne un système de quatre équations linéaires avec quatre inconnues : $u_{11} = v_1$, $u_{12} = v_3$, $u_{21} = v_2$, $u_{22} = v_4$ *:*

$$\begin{cases} 4u_{11} = u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} = u_{12} + u_{21} + 1 \\ 4u_{21} = u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} = u_{11} + u_{22} + 26 \\ 4u_{12} = u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} = u_{11} + u_{22} - 26 \\ 4u_{22} = u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} = u_{12} + u_{21} - 55 \end{cases}$$

La matrice de ce système est une matrice à diagonale dominante :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ -26 \\ -55 \end{pmatrix}$$

Donc, on peut appliquer l'une des méthodes itératives des approximations successives.
*Pour résoudre ce système, on utilise la méthode de **Gauss**, on trouve :*

$$u_{11} = v_1 = -1,875 \approx -2, u_{12} = v_3 = -10.938 \approx -11,$$

$$u_{21} = v_2 = 2.062 \approx 2, u_{22} = v_4 = -15.969 \approx -16.$$

Si la solution exacte de ce problème $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
Pour estimer les résultats obtenus calculons la solution exacte : $u_{11} = u(1,\ 1) = -2$,
$u_{12} = u(1,\ 2)$, $u_{21} = u(2,\ 1)$, $u_{22} = u(2,\ 2) = -16$.
On remarque que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la solution exacte.

Chapitre 2

Méthode des différences finies pour un problème aux limites d'évolution

2.1 L'équation de la chaleur en dimension un

Considérons le problème suivant :

Etant donné une fonction f suffisamment régulière sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & , \ 0 < \ x < 1, \ t > 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & , \ 0 \leq x \leq 1 \qquad \text{(condition initiales),} \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \ t \geq 0 \qquad \text{(conditions aux limites).} \end{cases}$$

Il s'agit là d'un nouvel exemple de problème aux limites, puisque les relations

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{ pour } t \geq 0,$$

sont effectivement des conditions aux limites. Mais on notera que ce problème est assorti de surcroit de la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq 1,$$

caractéristique d'un problème d'évolution c'est -à-dire où le temps intervient.

On démontre que si f et u_0 sont suffisamment régulières (et si u_0 satisfait la condition naturelle de compatibilité $u_0(0) = u_0(1) = 0$) que ce problème admet une solution et une seule, continue sur l'ensemble $[0,1] \times \mathbb{R}_+$.

Et suffisamment régulière sur l'ensemble :

$$]0,1[\times \{t \in \mathbb{R},\, t > 0\}$$

pour que l'équation aux dérivées partielles considérée y ait un sens.

On notera cette solution φ. Pour discrétiser ce problème par une méthode de différences finies, établissant un maillage de pas

$$h = \frac{1}{N+1}, \quad N : \text{entier} \geq 1,$$

pour la variable x et de pas Δt pour la variable t.

Les pas h et Δt sont destinés à tendre vers 0. (FIG 2.1)

Notons u_i^n une approximation (à trouver) de la solution au point

$$(ih\ ,\ n\Delta t).$$

Les considérations du chapitre1 nous conduisent à approcher

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(ih\ ,\ n\Delta t)$$

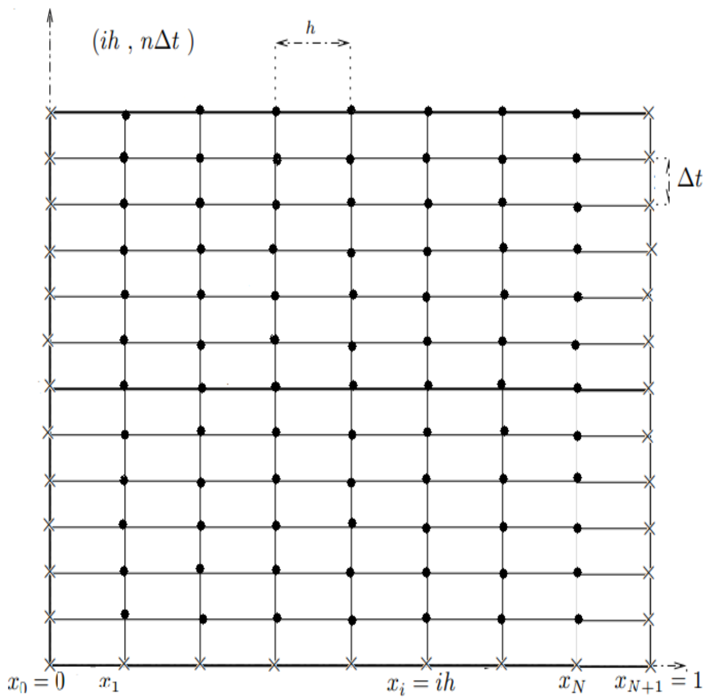


FIG. 2.1 – Domaine d'étude

par :

$$\frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2},$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(ih,\ n\Delta t\right),$$

et par :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\ \text{(schéma I)}$$

ou

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}\ \text{(schéma II)}.$$

Le problème discret associé au schéma I s'écrit : trouver des nombres

$$u_i^n,\ 0 \leq i \leq N+1, n \geq 0$$

solution de :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + \left(\frac{-u_{i-1}^n+2u_i^n-u_{i+1}^n}{h^2}\right) = f\left(ih,\ n\Delta t\right) & ,1 \leq i \leq N,\, n \geq 0, \\ \\ u_i^0 = u_0\left(ih\right) & ,\ 1 \leq i \leq N, \\ \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 & ,\ n \geq 0. \end{cases}$$

Définissons les vecteurs :

$$u^n = \left(u_i^n\right)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

et

$$f^n = f\left(ih,\ n\Delta t\right)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

Le problème discret s'écrit sous la forme matricielle : trouver des vecteurs u^n $n \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + Au^n = f^n & ,\ n \geq 0, \\ \\ u^0 & \text{donné.} \end{cases}$$

où la matrice A d'ordre N est donné par l'expression :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur u^{n+1} est donc donné explicitement à partir du vecteur u^n par la formule

$$u^{n+1} = (I - \Delta t.A)\, u^n + \Delta t.f^n n \geq 0$$

De façons plus précise, chaque composante u_i^{n+1} du vecteur u^{n+1} est obtenue explicitement à partir des seules composantes u_{i-1}^n , u_i^n et u_{i+1}^n du vecteur u^n supposé déjà calculer (on rappelle que $u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \quad , n \geq 0$).
Soit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + Au^n = f^n & , \; n \geq 1, \\ \\ u^0 & \text{donné.} \end{cases}$$

Contrairement au cas du schéma I, on ne peut pas calculer directement une composantes u_i^n du vecteurs u^n puisque la relation où elle apparait fait également intervenir les composantes u_{i-1}^n et u_{i+1}^n du même vecteur : on calcule le vecteur u^n à partir du vecteur u^{n-1} en résolvant un système linéaire , à savoir

$$(I + \Delta t.A)\, u^n = u^{n-1} + \Delta t.f^n,$$

et c'est la raison pour laquelle le schéma II est dire implicite.
La mise en œuvre du schéma II conduit donc à la résolution d'une suite de système linéaire, de même matrice

$$(I + \Delta t.A)$$

tridiagonale symétrique définie positive.

Mentionnons que le schéma implicite II est meilleur que le schéma explicite I du point de vue de la stabilité.

2.2 L'équation des ondes en dimension un

Etant donné $f \in \varphi^0([0,1] \times \mathbb{R}_+)$, c : constante $\neq 0$.

Trouver une fonction $u(x,t)$ définie pour $0 \leq x \leq 1$ et $t \geq 0$ qui soit solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & , \ 0 \leq x \leq 1, \, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \ t \geq 0 \qquad \text{(conditions aux limites)}, \\ u(x,0) = u_0(x) & , \ 0 \leq \ x \leq 1 \qquad \text{(conditions initiales)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & , \ 1 \leq x \leq 1 \qquad \text{(conditions initiales)}. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un nouvel exemple de problème aux limites d'évolution, assorti cette fois de deux conditions initiales.

Pour discrétiser ce problème par une méthode de différences finies, on établit le même maillage qu'au problème de l'équation de la chaleur.

La discrétisation la plus naturelle consiste à trouver des nombres

$$u_i^n, \ 0 \leq i \leq N+1, \ n \geq 0$$

solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(\frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2}\right) = f(ih, n\Delta t) & , \ 1 \leq i \leq N \ , \ n \geq 1, \\ u_i^0 = u_0(ih) & , \ 1 \leq i \leq N, \\ u_i^1 = u_0(ih) + \Delta t u_1(ih) & , \ 1 \leq i \leq N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 & , \ n \geq 0, \end{cases}$$

soit encore, sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\left(\frac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + Au^n = f^n & , n \geq 1, \\ \\ u^0,\, u^1 & \text{donnés.} \end{cases}$$

C'est le schéma explicite.

On peut prendre le schéma implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\left(\frac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + Au^{n+1} = f^n & , n \geq 1, \\ \\ u^0,\, u^1 & \text{donnés,} \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} \left(I + c^2\Delta t^2.A\right) u^{n+1} = c^2\Delta t^2 f^n + 2u^n - u^{n-1} & , n \geq 1, \\ \\ u^0 \ ,\, u^1 & \text{donnés.} \end{cases}$$

Dont la progression requiert la résolution d'une suite de système linéaire de même matrice

$$\left(I + c^2\Delta t^2.A\right),$$

tridiagonale symétrique définie positive.

Mais on préfère généralement un schéma implicite basé sur :

$$u^n = \frac{u^{n+1}+u^{n-1}}{2}$$

$$2u^n = u^{n+1} + u^{n-1} \Leftrightarrow 4u^n = u^{n+1} + u^{n-1} + 2u^n,$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2}\right)+\frac{1}{4}\left(Au^{n+1}+2Au^n+Au^{n-1}\right)=f^n & , n\geq 1, \\ \\ u^0,\, u^1 & \text{donnés.} \end{cases}$$

Dont la progression aussi requiert la résolution d'une suite de systèmes linéaires de même matrice

$$\left(I+\frac{1}{4}.c^2\Delta t^2 A\right),$$

à nouveau tridiagonale symétrique définie positive.

Chapitre 3

Les équations en dimension 2 d'évolution

3.1 L'équation de la chaleur en dimension 2

Considérons le problème suivant sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ.

Trouver $u(x,t)$ définie pour : $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq 0$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & ,\ x \in \Omega\ ,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & ,\ x \in \bar{\Omega} \qquad \text{(condition initiale)}, \\ u(x,t) = g(x,t) & ,\ x \in \Gamma\ ,\ t \geq 0 \quad \text{(condition aux limites)}. \end{cases}$$

Les fonctions f, u_0, g, étant données. On peut approcher de tels problèmes aux limites d'évolution par des méthodes de différences finies, l'approximation du Laplacien Δ se faisant alors comme il a été indiqué avant par l'opérateur Δ_h. Ainsi schéma explicite

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u(p,\ (n+1)\Delta t) - u(p,\ n\Delta t)}{\Delta t}\right) + \Delta_h u(p,\ n\Delta t) = f(p,\ n\Delta t) & ,\ n \geq 0 \quad ,\ p \in \Omega_h, \\ u(p,\ 0) & \text{donné} \quad p \in \Omega_h \end{cases}$$

Pour :

$$1 \leq i,\ j \leq N$$

Posons :

$$\begin{cases} p = (ih,\ jh)\,, \\ u\,(p,\ \ (n+1)\,\Delta t) = u_{i,\ j}^{n+1}, \\ u\,(p,\ n\Delta t) = u_{i,\ j}^{n}, \\ f\,(p,\, n\Delta t) = f_{i,\ j}^{n}. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u_{i\ j}^{n+1} - u_{i,\ j}^{n}}{\Delta t}\right) + \Delta_h u_{i,j}^{n} = f_{i,\ j}^{n} \quad ,\ n \geq 0, \\ u_{i,\ j}^{0} \qquad \text{donné} \qquad 1 \leq i\ ,\ j \leq N. \end{cases}$$

Schéma implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u_{i\ j}^{n} - u_{i,\ j}^{n-1}}{\Delta t}\right) + \Delta_h u_{i,\ j}^{n} = f_{i,\ j}^{n} \quad ,\ n \geq 0 \\ u_{i,\ j}^{0} \qquad \text{donné} \quad 1 \leq i,\, j \leq N. \end{cases}$$

3.2 L'équation des ondes en dimension 2

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t) - \Delta u(x,\ t) = f(x) & ,\ x \in \Omega \quad t > 0, \\ u(x,\ 0) = u_0(x) & ,\ x \in \bar{\Omega} \quad ,\ \text{(condition initiale)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = u_1(x) & ,\ x \in \bar{\Omega} \quad ,\ \text{(condition initiale)}, \\ u(x,\ t) = g(x) & ,\ x \in \Gamma \quad ,\ t \geq 0 \text{ (condition aux limites)}. \end{cases}$$

Schéma explicite :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\left(\frac{u_{i,\ j}^{n+1} - 2u_{i,\ j}^{n} + u_{i,\ j}^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + \Delta_h u_{i,\ j}^{n} = f_{i,\ j}^{n} & ,n\ \geq 1, \\ u_{i,\ j}^{0} & \text{donné} \quad 1 \leq i\ ,\ j \leq N. \end{cases}$$

Schéma implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,\ j}^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + \Delta_h u_{i,j}^{n} = f_{i,j}^{n} & ,\ n \geq 1, \\ u_{i,\ j}^{0},\ u_{i,\ j}^{1} & \text{donnés} \quad 1 \leq i\ ,\ j \leq N. \end{cases}$$

Ou bien

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u_{i,\ j}^{n+1} - 2u_{i,\ j}^{n} + u_{i,\ j}^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\Delta_h u_{i-1,\ j}^{n} + 2\Delta_h u_{i,\ j}^{n} + \Delta_h u_{i+1,\ j}^{n}\right) = f_{i,\ j}^{n} & ,\ n \geq 1, \\ u_{i,\ j}^{0},\ u_{i,\ j}^{1} & \text{donnés} \quad 1 \leq i\ ,\ j \leq N. \end{cases}$$

$$\left(u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,\ j}^{n-1}\right) + c^2\Delta t^2 \Delta_h u_{i,j}^{n} = c^2 \Delta t^2 f_{i,\ j}^{n}$$
$$u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,\ j}^{n-1} + (2 + c^2\Delta t^2 \Delta_h) u_{i,j}^{n} = c^2 \Delta t^2 f_{i,\ j}^{n}$$

On a :

$$\Delta_h u(p) = \frac{u(p_1) + u(p_2) + u(p_3) + u(p_4) - 4u\,(p)}{h^2}$$

Donc :

$$\left(u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,\,j}^{n-1}\right) + c^2\Delta t^2 (\frac{u(p_1) + u(p_2) + u(p_3) + u(p_4) - 4u\,(p)}{h^2}) = c^2\Delta t^2 f_{i,\,j}^{n}$$

$$u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,\,j}^{n-1} + 2u_{i,j}^{n} + c^2\Delta t^2 (\frac{u_{i,\,j+1}^{n} + u_{i,\,j-1}^{n} + u_{i-1,\,j}^{n} + u_{i+1,\,j}^{n} - 4u_{i,\,j}^{n}}{h^2}) = c^2\Delta t^2 f_{i,\,j}^{n}$$

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,\,j}^{n-1} + u_{i,j}^{n}(2 - \frac{4c^2\Delta t^2}{h^2}) + \frac{c^2\Delta t^2}{h^2}(u_{i,\,j+1}^{n} + u_{i,\,j-1}^{n} + u_{i-1,\,j}^{n} + u_{i+1,\,j}^{n}) = c^2\Delta t^2 f_{i,\,j}^{n} & ,\, n \geq 1, \\ u_{i,\,j}^{0},\, u_{i,\,j}^{1} \qquad \text{donnés} & 1 \leq i\ ,\, j \leq N \end{cases}$$

Conclusion

On a utiliser la méthode des différences finies pour l'approximation des deux types d'équation aux dérivées partielles à savoir l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.La méthode est simple à mise en œuvre pour la variable temps car le maillage est uniforme c'est-à-dire la frontière est parallèle par morceaux aux l'axe des cordonnées, mais pour la variable espace elle impliquées à sa mise en œuvre car le maillage généralement n'est pas uniforme, dans ce cas il est préférable d'employer la méthode des élément finis pour la variable espace.

Bibliographie

[1] Curtis, F. Gelard, Patrik O. Wheatly : *Applied Numerical Analysis.* Third Eddition, Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Daveu Cheristian : *Méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles.* Université de Cergy -Pontoise, Département de mathématiques ; 95302, Cergy- pontoise, cedex France.

[3] Eric Goncalvès (2005) : *Résolution numérique discrétisation des EDP et EDO.* Institut national polytechnique de Grenoble.

[4] KADJA, M. (2000) : *Résolution Numérique des Equations aux dérivées partielles : Méthode des différences finies ; Cours et exercices Résolus.* Première édition O.P.U, Constantine.

[5] Khaled Saleh : *Introduction à la méthode des éléments finis.* Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 4 place Jussieu, 75005 Paris V, France.

[6] Miloud, T.A. (2007) : *Méthodes Numérique : Tome 1 Méthode des différences finies Méthodes intégrales et variationnelles.* O.P.U, Alger.

[7] Reinhard, H. (2001) : *Equation aux dérivées partielles : Introduction*, Dunod Paris.

[8] Sibony M, Mardon J.C (1988) : *Actualisés scientifiques et industrielles (num 1406) : Analyse Numérique 2 : Approximations et équations différentielles.* Paris Hermann.

[9] Soudani, A. (2015) : *Calcul Numérique : Partie I Cours d'Analyse Numérique.* O.P.U.