République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

GUEDJAL Merzaka

Titre :

Equations Intégrales de Fredholm de Seconde Espace et Méthode de Collocation

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BELAGOUN Abdelghani**	UMKB	Président
Dr.	**CHEMCHEM Madani**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BOUZIANE Nadjet**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

Mon très cher Père et Ma très chère Mère

En témoignage de ma reconnaissance envers le soutien, les sacrifies et tous les efforts qu'ils ont fait pour mon éducation ainsi que ma formation.

A

Celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout long de Ce projet : Mes oncles et Mes tantes surtout ma tante ***SALIMA*** et bien A mes soeurs ***MALIKA***, ***SOUHILA***, ***MARWA***, ***Wahib*** et bien sur

A

Mon frère ***MOUHAMED*** et ***MONDHER*** sans oublié ma ***GRAND-MÈRE*** et toute la famille ***GUEDJAl***, A Mon triôme Karima et Asma et Hanane et Fadhila et Khulood et Salma et Mes Amis.

Et

à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je Vous Dis Merci.

REMERCIEMENTS

Merci à notre"**Dieu**", notre guide, notre force, et la raison de notre existante. C'est lui nous a fait comprendre le but de cette vie, et qui nous a donné le pouvoir d' apprécier les choses. Merci d'être la dans les moments les plus difficiles.

Nos tient à remercier sincèrement nos ancadreur ‹‹**Chemchem Madani››,** s'est toujours

montre à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer.

Nos tient à remercier le chef de département ‹‹**Dr Hafayed Mokhtar**››.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour

l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce

travail

‹‹**Dr. BELAGOUN Abdelghani**›› et ‹‹**Dr..BOUZIAME Nadjet**››

Nos grands remerciements aussi à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation au département de mathématique.

En fin, nous remercion nos amis pour leur aide, leur soutien et leur compréhension.

A tout pour tout

Merci

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Liste des figures **v**

Introduction **1**

1 Equations intégrales linéaires **3**

1.1 Notions fondamentales et définitions : 3

1.1.1 Opérateur intégral linéaire : 4

1.1.2 Opérateur compact : 4

1.1.3 Equations aux Opérateurs Compacts : 4

1.2 Equations Intégrales Linéaires 5

1.3 Equation intégrales de Fredholm : 6

1.3.1 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Fredholm 8

1.3.2 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm 10

1.3.3 Résolution analytique des Equations Intégrales de Fredholm 13

2 Résolution Numérique des équations intégrales de Fredholm **24**

2.1 Méthodes de projection 24
2.2 Interpolation polynômiale de lagrange 27
2.3 Méthodes de Collocation 28
2.3.1 Solution avec des Méthodes de Collocation 30
2.3.2 Interpolation linéaire par morceaux 32
2.4 Méthodes de Nyström : 33
2.5 Exemples Numériques et Résultats 34
2.5.1 Polynômes Eulera 34
2.5.2 Polynômes de Chebyshev 35

Bibliographie **39**

Annexe B : Abréviations et Notations **40**

Liste des tableaux

2.1 Comparaison numérique des solutions approchées de l'équation intégrale de Fredholm et solution exacte par la méthode de collocation de Eulera 35

2.2 Comparaison numérique des solutions approchées de l'équation intégrale de Fredholm et solution exacte par la méthode de collocation de Chebyshev . 38

Introduction

Les équations intégrales linéaires de Fredholm sont issues de plusieurs domaines de la recherche scientifique. Ou naturellement par modélisation mathématique des différents problèmes issus de la physique mathématique.

Comme la résolution analytique de ce type des équations est souvent n'est pas évidente et même impossible parfois, les gens sont plus intéressés par la résolution numérique, les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques.

Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre des méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique Cependant, le but de notre recherche et d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon deux grands axes.

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout d'exhiber des méthodes d'approximation efficaces L'analyse numérique.

Ainsi notre mémoire se compose de deux chapitres :

Le premier chapitre : aborde des notations sur les équations intégrales linéaires et équation intégrale de Fredholm, ainsi que la relation entre les équations différentielles et les Equation Intégrale, on étudie l'existence et unicité de la solution d'une équation de Fredholm de seconde espèce, et les méthodes analytiques de résolutions des Equations Intégrales. Parmi ces méthodes : Méthode de Fredholm, Méthode des Noyaux itérés, Méthode des noyaux dégénérés.

Le deuxième chapitre : on présente les méthodes de résolution numérique de l'équation intégrale équation de Fredholm de seconde espèce, et nous avons utilisés les méthodes de collocation, et quelques exemples numériques qui confirment les résultats théoriques obtenues.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires

1.1 Notions fondamentales et définitions :

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C([a,b])$ ou $L^2([a,b])$des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_a^b \varphi(x) v(x) \, dx,$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| .$$

1.1.1 Opérateur intégral linéaire :

Soit K :$C[a,b] \to C[a,b]$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C[a,b]$ est défini par la formule suivante :

$$A : C[a,b] \to C[a,b]$$
$$\varphi \to A\varphi$$
$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Dans ce contexte la fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral A.

1.1.2 Opérateur compact :

Théorème 1.1.1 *Soit A un opérateur borné de $C[a,b]$ dans $C[a,b]$, à image $A(x)$ de dimension finie. Alors A est compact.*

Théorème 1.1.2 *L'opérateur intégral défini en* (1.1.1) *est compact sur* $(C[a,b], \|.\|_\infty)$.

1.1.3 Equations aux Opérateurs Compacts :

Définition 1.1.1 *L'équation définit par :*

$$A\varphi = f$$

est dite une équation de première espèce .
Si l'équation est définit par :

$$\varphi - A\varphi = f\ .$$

Cette équation est dite une équation de deuxième espèce .Où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue .
Si $f = 0$, l'équation est une équation homogène .

Sinon cette équation est dite équation non-homogène .

1.2 Equations Intégrales Linéaires

Définition 1.2.1 ***(Equation intégrale de Fredholm)***

On appelle équation intégrale de Fredholm une équation , à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{1.1}$$

où f, K sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation 1.1 s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{1.2}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = 1$, l'équation 1.1 s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 1$, donc la formule 1.1 est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Définition 1.2.2 ***(Equation intégrale de Volterra)*** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{1.4}$$

i) *On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x)=0$, donc l'équation 1.4 s'écrit*

$$f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{1.5}$$

ii) *On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x)=1$, donc l'équation 1.4 s'écrit*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1.6}$$

iii) *Si $h(x)\neq 0$ et $h(x)\neq 1$, donc la formule 1.4 est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.*

Remarque 1.2.1 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition*

$$K(x,t)=0\ ,\ \textit{pour } x<t.$$

1.3 Equation intégrales de Fredholm :

Notions fondametanles

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1.7}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a,b) et λ un facteur numérique.
La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale 1.7, on suppose que le noyau $K(x,t)$ est défini dans le carré $\Omega\{a\leq x\leq b, a\leq t\leq b\}$ du plan (x,t) et continu dans Ω,

ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt$$

soit finie.

Si $f(x) \not\cong 0$, l'équation 1.7 est dit non homogène, dans le cas contraire l'équation intégrale 1.7 s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{1.8}$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)\,. \tag{1.9}$$

Où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Les bornes a et b dans les équations 1.7 ,1.8 et 1.9 peuvent être aussi bien finies qu'infinies.

On appelle solution des équations intégrales 1.7, 1.8 et 1.9, toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in (a,b)$.

Exemples des Equations intégrale de Fredholm

Equations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce $\varphi(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)\,\varphi(t)\,dt$, $0 = x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)\,\varphi(t)\,dt$.

Equations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)\,\varphi(t)\,dt$, $0 = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)\,\varphi(t)\,dt$.

1.3.1 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Fredholm

Les problèmes de valeur initiale dans des équations différentielles ordinaires conduisent à une équation intégrale de type de Volterra les problèmes de la valeur limite dans l'équations différentielle ordinaires associer au type de Fredholm les équations intégrales que nous étudions illustrer cette équivalence par le problème

$$u'' + \alpha_1 u' + \alpha_2 u = v \tag{1.10}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ avec les coefficients α_1, α_2, $v \in C[0,1]$on utilise les conditions suivent

$$u\,(0) = u_0,\ u\,(1) = u_1 \tag{1.11}$$

l'idée générale dans l'application des équations intégrales dans le traitement des problèmes est de transformer d'une manière équivalente alors le problème des bornes de l'équation intégral et de résoudre l'équation intégrale.

Soit u continus et différentiable, avec $\varphi = -u''$, alors par l'intégration partielle, nous trouvons

$$u\,(x) = u\,(0) + u'\,(0)\,x - \int_0^x (x-t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

et

$$u\,(x) = u\,(1) - u'\,(1)\,(1-x) + \int_x^1 (x-t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

et

$$0 = \int_0^1 \varphi\,(t)\,dt + u'\,(1) - u'\,(0)$$

multipliant la première équation par $(1-x)$, la seconde par x et le troisième $(1-x)x$ et puis en s'ajoutant nous obtenons

$$u(x) = u(0)(1-x) + u(1)x + \int_0^x (1-x)t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)\varphi(t)\,dt \tag{1.12}$$

differencier cette équation donne

$$u'(x) = u(1) - u(0) - \int_0^x t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt \tag{1.13}$$

maintenant u soit une solution de les bornes intégrale alors, en utilisant la condition $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$ et l'équation différentielle $\varphi = \alpha_1 u' + \alpha_2 u - v$ de 1.12, 1.13 nous déduisons l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), x \in [0,1] \tag{1.14}$$

avec le noyau

$$K(x,t) = \begin{cases} t\left[\alpha_2(x)(1-x) - \alpha_1(x)\right] & t < x \\ (1-t)\left[\alpha_2(x)x + \alpha_1(x)\right] & x < t \end{cases}$$

et

$$f(x) = (u_1 - u_0)\alpha_1(x) + \left[u_0(1-x) + u_1 x\right]\alpha_2(x) - v(x), \quad x \in [0,1]$$

soit $\varphi \in C[0,1]$ est une solution de l'équation intégrale. On définie u comme une fonction continue différentiable d'ordre 2 par

$$u(x) = u_0(1-x) + u_1 x + \int_0^x (1-x)t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)\varphi(t)\,dt, x \in [0,1].$$

Puis $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$ et par la construction de l'équation intégrale il y a donc $-u'' = \varphi = \alpha_1 u' + \alpha_2 u - v$.Par conséquent, le problème de les bornes intégrale et l'équation intégrale sont équivalents.

Puisque le noyau K est continu sur $0 < t < x < 1$ et sur $0 < x < t < 1$ il est faiblement singulier avec $\alpha = 1$. D'où l'alternative de Fredholm est valable pour l'équation intégrale 1.14

1.3.2 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

Contraction de l'opérateur :

Soit l'opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \ .$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de 'Neumann' pourvu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| < 1$.

Série de Neumann

Théorème 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique sur X. Alors $I-A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Preuve. Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}$$

dans l'espace de Banach $L(X)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$$

avec $\|S\|\leq(1-\|A\|)^{-1}$, de plus S est l'inverse de $I-A$, En effet, en utilisant les notations $A^0=I$, $A^k=AA^{k-1}$ on peut voir que :

$$(I-A)\,S=(I-A)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=\lim_{n\to\infty}\left(I-A^{n+1}\right)=I$$

aussi

$$S\,(I-A)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k\,(I-A)=\lim_{n\to\infty}\left(I-A^{n+1}\right)=I,$$

puisque $\|A^{n+1}\|\leq\|A\|^{n+1}\to0$, lorsque $n\to\infty$ ■

Théorème 1.3.2 *Sous les hypothèses du théorème* (1.3.1)*, la méthode des approximations successives*

$$\varphi_{n+1}=A\varphi_n+f,\quad n=0,1,2\ldots,$$

où φ_0 est arbitraire dans X, converge vers l'unique solution φ de l'équation $\varphi-A\varphi=f$ pour toute $f\in X$.

Preuve. Il est aisé de voir que :

$$\varphi_n=A^n\varphi_0+\sum_{k=0}^{n-1}A^kf,\quad n=1,2,\ldots$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\sum_{k=0}^{\infty}A^kf=(I-A)^{-1}\,f.$$

■

Corollaire 1.3.1 *Soit K un noyau continu vérifiant :*

$$\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |K(x,t)|\,dt<1$$

alors, l'équation intégrale de seconde espèce :

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x)\,,\quad x\in[a,b]$$

admet une unique solution $\varphi\in C([a,b])$ pour toute $f\in C([a,b])$. De plus, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x)=\int_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt+f(x)\,,\ n=1,2\ldots$$

converge uniformément vers cette solution pour tout φ_0 arbitraire dans $C([a,b])$

Corollaire 1.3.2 *Soit $A:X\to X$ un opérateur linéaire compact sur un espace normé X.*

Si l'équation homogène

$$\varphi-A\varphi=0 \tag{1.15}$$

admet uniquement la solution triviale $\varphi=0$, alors pour toute $f\in X$, l'équation inhomogène

$$\varphi-A\varphi=f.$$

Admet une solution unique $\varphi\in X$, dépendante de f.

Alternative de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm on a les théorèmes suivants :

Théorème 1.3.3 *L'équation linéaire non homogène de seconde espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x.t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.16}$$

admet une solution unique quelle que soit $f(x)$ $(f \in L^2(a,b))$, *ou bien l'équation homogène correspondant*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0. \tag{1.17}$$

A au moins une solution non triviale, i.e. non identiquement nulle.

Remarque 1.3.1 *Dans la pratique, l'alternative de Fredholm est plus important .Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donnée 1.16 a une solution, on démontre parfois plus facilement que l'équation homogène correspondant 1.17 n'ont pas d'autres solution que les solutions triviales. Il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'équation 1.16 admet bien une solution.*

1.3.3 Résolution analytique des Equations Intégrales de Fredholm

Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1.18}$$

est donnée par la formule suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt \tag{1.19}$$

où $R(x,t,\lambda)$ est la résolvante de Fredholm de l'équation 1.18 est définie par l'égalité :

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.20}$$

$D(x,t,\lambda)$: le mineur du déterminant de Fredholm.

$D(\lambda)$: le déterminant de Fredholm.

Est $D(\lambda) \neq 0$, $D(x,t,\lambda)$, $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ.

$$D(x,t,\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n \tag{1.21}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \tag{1.22}$$

avec les coefficients ainsi définies :

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & K(x,t_2) & \cdots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{1.23}$$

et

$$B_0(x,t) = K(x,t)$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & K(t_1,t_3) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & K(t_2,t_3) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & K(t_3,t_3) & \cdots & K(t_3,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & K(t_n,t_3) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{1.24}$$

si $K(x,t)$ est borné ou si $\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$ est finie, les séries 1.21 et 1.22 converge quel que soit λ. et la résolvante est comme suit :

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

la solution est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)\, dt.$$

Exemple 1.3.1 *A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau $K(x,t) = x \exp(t)$, $a = 0$, $b = 1$.*

Solution 1.3.1 *On a $B_0(x,t) = x \exp(t)$. Ensuite,*

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} x \exp(t) & x \exp(t_1) \\ t_1 \exp(t) & t_1 \exp(t_1) \end{vmatrix} dt = 0$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} x \exp(t) & x \exp(t_1) & x \exp(t_2) \\ t_1 \exp(t) & t_1 \exp(t_1) & t_1 \exp(t_2) \\ t_2 \exp(t) & t_2 \exp(t_1) & t_2 \exp(t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

Puisque les déterminants sous $\int$ sont nuls. Il est évident que tous les $B_n(x,t)$ suivants sont nuls eux aussi.

Trouvons les coefficients C_n :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1)\, dt_1 = \int_0^1 t_1 \exp(t_1)\, dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 \exp(t_1) & t_1 \exp(t_2) \\ t_2 \exp(t_1) & t_2 \exp(t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Evidemment, tous les C_n suivants sont nuls .

Dans notre cas, nous avons conformément aux formules 1.22 et 1.23 :

$$D(x,t,\lambda) = K(x,t) = x\exp(t), \qquad D(\lambda) = 1-\lambda$$

donc

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x\exp(t)}{1-\lambda}$$

appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 x\exp(t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad (\lambda \neq 1)$$

d'après la formule 1.19

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x\exp(t)}{1-\lambda} f(t)\,dt$$

en particulier, nous obtenons pour $f(x) = \exp(-x)$

$$\varphi(x) = \exp(-x) + \frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Remarque 1.3.2 *Le calcul des coefficients $B_n(x,t)$ et C_n des séries 1.21 et 1.22 par les formules 1.23 et 1.24 n'est possible que dans des cas très rares, mais ces formules entraînent les relations de récurrence suivantes :*

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)\,B_{n-1}(s,t)\,ds \tag{1.25}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\,ds. \tag{1.26}$$

Sachant que $C_0 = 1$ et $B_0(x,t) = K(x,t)$, les formules 1.25 et 1.26 permettent de trouver de proche en proche C_1, $B_1(x,t)$, C_2, $B_2(x,t)$, C_3, et ainsi de suite.

Méthode des Noyaux itérés (Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés)

Soit l'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1.27}$$

on pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\,\lambda^n \tag{1.28}$$

avec $\psi_n(x)$ définis par les formules

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\,\psi_1(x)\,dt = \int_a^b K_2(x,t)\,f(t)\,dt$$

et ainisi de suite ici on a

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)\,K_1(z,t)\,dz$$

et en général

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)\,K_{n-1}(z,t)\,dz \;\; n = 2,3,\ldots,\text{avec} \;\; K_1(x,t) \equiv K(x,t) \tag{1.29}$$

les fonctions $K_n(x,t)$ définies par les formules 1.29 s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s)\,K_{n-m}(s,t)\,ds \;,\; \text{où } m \leq n \;. \tag{1.30}$$

Définition 1.3.1 *La résolvante de l'équation intégrale 1.27 est définie en fonction des* *noyaux itérés de la façon suivante :*

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\,\lambda^{n-1}, \tag{1.31}$$

le second membre est la série de Neumann du noyau $K(x,t)$. *Cette série converge pour* $|\lambda| < \frac{1}{B}$, *avec*

$$\left(B = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = \|K\|_{L^2\left((a,b)^2\right)} \tag{1.32}$$

la solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce 1.27 s'exprime par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt. \tag{1.33}$$

La borne 1.32 est essentielle pour la convergence de le série 1.31.

Exemple 1.3.2 *Trouver les itérés du noyau* $K(x,t) = x - t$ *si* $a = 0, b = 1$

Solution 1.3.2 *Utilisant les formules 1.29 on obtient de proche en proche les noyaux itérés :*

$$K_1(x,t) = x - t,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{x-t}{12},$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

1. pour $n = 2k-1$:

$$K_{2k-1}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t),$$

2. pour $n = 2k$:

$$K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right), où k = 1, 2, 3\ldots$$

Illustrons sur un exemple la construction de la résolvante d'une équation intégrale à l'aide des noyaux itérés.

Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1.34}$$

ici $K(x,t) = xt$, $a = 0$, $b = 1$. Cherchons les itérés successifs :

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= xt \\
K_2(x,t) &= \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3} \\
K_3(x,t) &= \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^2} \\
&\dots \\
K_n(x,t) &= \frac{xt}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

selon la formule 1.31

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\,\lambda^{n-1} = xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda},\ \text{où}\ |\lambda| < 3$$

en vertu de la formule 1.34 la solution 1.35 s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\,dt.$$

En particulier, pour $f(x) = x$ on a $\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$, avec $\lambda \neq 3$

Méthode des noyaux dégénérés

Définition 1.3.2 *Le noyaux $K(x,t)$ d'une équation intégrale Fredholm de second espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par* *des fonctions de t seul, i.e.il est de la forme :*

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\,v_k(t) \tag{1.35}$$

les fonctions $u_k(x)$ et $v_k(t)\,(k=1,2,\dots n)$ seront continues dans le carré fondamental $a\leq x,\ t\leq b$ et linéairement indépendantes. L'équation intégrale à noyau dégénéré 1.35

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\,v_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1.36}$$

se résout comme suit .

Récrivons 1.36 :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\int_a^b v_k(t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.37}$$

et introduisons les notation

$$\int_a^b v_k(t)\,\varphi(t)\,dt=\alpha_k \quad (k=1,2,\dots,n) \tag{1.38}$$

l'égalité 1.37 devient alors

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k(x) \tag{1.39}$$

avec α_k des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue) .

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la recherche des constantes $\alpha_k\,(k=1,2,\dots,n)$. Après avoir parté 1.39 dans l'équation intégrale 1.36 effectué des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha_i-\int_a^b v_i(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k(t)\right]dt\right\}u_i(x)=0$$

las fonction $u_i(x)\,(i=1,2,\ldots,n)$ étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$\alpha_i - \int_a^b v_i(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k(t)\right]dt = 0$$

ou

$$\alpha_i - \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_a^b u_k(t)\,v_i(t)\,dt = \int_a^b v_i(t)\,f(t)\,dt \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations

$$C_{ik} = \int_a^b u_k(t)\,v_i(t)\,dt$$
$$f_i = \int_a^b v_i(t)\,f(t)\,dt$$

nous obtenons

$$\alpha_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} C_{ik}\alpha_k = f_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

ou, sous forma développée,

$$\begin{cases} (1-\lambda C_{11})\,\alpha_1 - \lambda C_{12}\alpha_2 - \ldots - \lambda C_{1n}\alpha_n = f_1 \\ -\lambda C_{21}\alpha_1 + (1-\lambda C_{22})\,\alpha_2 - \ldots - \lambda C_{2n}\alpha_n = f_2 \\ \ldots \\ -\lambda C_{n1}\alpha_1 - \lambda C_{n2}\alpha_2 - \ldots (1-\lambda C_{nn})\,\alpha_n = f_n \end{cases} \tag{1.40}$$

pour trouver les α_k, nous avons donc un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda C_{11} & -\lambda C_{12} & \ldots & -\lambda C_{1n} \\ -\lambda C_{21} & 1-\lambda C_{22} & \ldots & -\lambda C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda C_{n1} & -\lambda C_{n2} & \ldots & 1-\lambda C_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système 1.40 admet une solution unique $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obtenue moyennant les formules de Cramer

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda C_{11} & \ldots & -\lambda C_{1k-1} f_1 - \lambda C_{1k+1} & \ldots & -\lambda C_{1n} \\ -\lambda C_{21} & \ldots & -\lambda C_{2k-1} f_2 - \lambda C_{2k+1} & \ldots & -\lambda C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda C_{n1} & \ldots & -\lambda C_{nk-1} f_n - \lambda C_{nk+1} & \ldots & 1-\lambda C_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.42}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$.

L'équation intégrale 1.36 a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(x).$$

Avec les coefficients α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ donnés par les formules 1.42.

Exemple 1.3.3 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t\right) \varphi(t)\, dt = x. \tag{1.43}$$

Solution 1.3.3 *Mettons cette équation sous la forme*

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)\, dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt + x$$

et introduisons les notations

$$\alpha_1 = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt, \quad \alpha_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)\, dt, \quad \alpha_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt \tag{1.44}$$

où α_1, α_2, α_3 sont les constantes inconnues. L'équation 1.43 a alors la forme

$$\varphi(x) = \alpha_1 \lambda x + \alpha_2 \lambda \sin x + \alpha_3 \lambda \cos x + x \tag{1.45}$$

portons 1.45 dans les égalités 1.44, il vient

$$\alpha_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt\right)-\alpha_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t dt-\alpha_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt=\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt$$
$$-\alpha_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt+\alpha_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin t dt\right)-\alpha_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos t dt=\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt$$
$$-\alpha_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt-\alpha_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t dt+\alpha_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt$$

en calculant les intégrales, nous obtenons le système d'équations algébriques en α_1, α_2, α_3 :

$$\begin{cases} \alpha_1-\lambda\pi\alpha_3=0 \\ \alpha_2+4\lambda\pi\alpha_3=0 \\ -2\lambda\pi\alpha_1-\lambda\pi\alpha_2+\alpha_3=2\pi \end{cases} \tag{1.46}$$

le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda)=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0$$

le système 1.46 admet solution unique

$$\alpha_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\ \alpha_2=\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\ \alpha_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

En portant dans 1.42 les valeurs obtenues de α_1, α_2, α_3 nous aboutissons à la solution de l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\left(\lambda\pi x-4\lambda\pi\sin x+\cos x\right)+x.$$

Chapitre 2

Résolution Numérique des équations intégrales de Fredholm

2.1 Méthodes de projection

Soit X un espace de Banach, et soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite finie de sous-espaces de dimension n .Soit $P_n : X \to X_n$ un opérateur linéaire borné tel que

$$P_n\varphi = \varphi \ , \varphi \in X_n$$

ceci implique que $P_n^2 = P_n$, donc

$$\|P_n\| = \left\|P_n^2\right\| \leq \|P_n\|^2$$

par conséquent

$$\|P_n\| \geq 1$$

pour résouder l'équation

$$(I - \lambda K)\,\varphi = f \tag{2.1}$$

il suffit de résoudre le problème

$$P_n (I - \lambda K) \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in X_n \tag{2.2}$$

en effet si φ_n est une solution de 2.2, et en tenant compte que $P_n \varphi_n = \varphi_n$ il vient

$$P_n (I - \lambda K) \varphi_n = \varphi_n - \lambda P_n K \varphi_n = (I - \lambda P_n K) \varphi_n, \quad \varphi_n \in X_n \tag{2.3}$$

donc l'équation 2.2 peout être écrite sous la forme

$$(I - \lambda P_n K) \varphi_n = P_n f, \, \varphi_n \in X_n \tag{2.4}$$

on remarque que tout solution de 2.2 est une solution de l'équation 2.4.

On note si 2.2 a une solution $\varphi_n \in X_n$ alors elle vérifie

$$\varphi_n = [P_n f + \lambda P_n K \varphi_n] \in X_n$$

et comme $P_n \varphi_n = \varphi_n$ alors :

$$(I - \lambda P_n K) \varphi_n = P_n (I - \lambda K) \varphi_n$$

et donc l'équation 2.4 implique l'équation 2.2 .

Calculons $(I - \lambda P_n K)$, on a

$$(I - \lambda P_n K) = (I - \lambda K) + (\lambda K - \lambda P_n K)$$

donc

$$(I - \lambda P_n K) = (I - \lambda K) \left[I + (I - \lambda K)^{-1} (\lambda K - \lambda P_n K) \right]. \tag{2.5}$$

Nous utilisons 2.5 dans le théorème suivant

Théorème 2.1.1 *Soit $K : X \to X$, un opérateur borné et X un espace de Banach, tel que*

$$(I - P_n K) : X \to X$$

avce

$$\lim_{n\to\infty} \|K - P_n K\| = 0$$

donc ce cas, pour tout n assez grand, par exemple, $n \geq N$, l'opérateur $(\lambda - P_n K)^{-1}$: $X \to X$, existe et borné en outre, il est uniformément borné c'est à dire

$$\sup_{n\geq N} \left\|(\lambda - P_n K)^{-1}\right\| < \infty \tag{2.6}$$

pour les solutions φ_n (pour n assez grand) des équations 2.4 et 2.1 respectivement, nous avons

$$\varphi - \varphi_n = \lambda (\lambda - P_n K)^{-1} (\varphi - P_n \varphi) \tag{2.7}$$

et on l'estimation de l'erreur $\varphi - \varphi_n$ donnée par

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - P_n K\|} \|\varphi - P_n\varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq |\lambda| \left\|(\lambda - P_n K)^{-1}\right\| \|\varphi - P_n\varphi\| . \tag{2.8}$$

Cela conduit à la conclusion que $\|\varphi - \varphi_n\|$ converge vers zéro exactement à la même vitesse que $\|\varphi - P_n\varphi\|$.

Lemme 2.1.1 *Soit X et Y deux espaces de Banach et $A_n : X \to Y$ $(n \geq 1)$ une suite d'opérateurs linéaires bornés. Supposons que $A_n\varphi \to \varphi \in X$ .Alors la convergence est uniforme sur les sous-ensembles compacts de X .*

Lemme 2.1.2 *Soit X un espace de Banach et soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une famille de projections bornées sur X avec*

$$P_n\varphi \to \varphi \text{ quand } n \to \infty, \quad \varphi \in X \tag{2.9}$$

si l'opérateur $K : X \to X$ est compact, alors :

$$\|K - P_nK\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

2.2 Interpolation polynômiale de lagrange

Soit φ une fonction continue sur $[a, b]$, et soit :

$$\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$$

une partition de l'intervalle $[a, b]$, alors on choisi $X = C\,[a, b]$, l'espace des fonctions continues : $X_{n+1} = P_n$, l'espace des polynômes de degré plus n. Alors l'interpolation de lagrange de degré n de la fonction φ est défini par :

$$p_n\left(x_i\right) = \varphi\left(x_i\right), \quad 0 \leq i \leq n, \quad p_n \in P_n$$

l'interpolation fonctionnelle linéaire est donnée par :

$$l_i\varphi = \varphi\left(x_i\right),\ 0 \leq i \leq n$$

on choisi $\nu_j\left(x\right) = x^j$, $0 \leq i \leq n$ comme base de P_n, alors

$$\det\left(l_i\nu_j\right)_{(n+1)(n+1)} = \prod_{,j>i}^{n}\left(x_j - x_i\right) \neq 0$$

est appelé déterminant de Vandermonde, telle que les formules

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) \psi_i(x), \quad \psi_i(x) = \prod_{\substack{,j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}.$$

Sont appelées les formules d'interpolation polynômiale de Lagrange.

2.3 Méthodes de Collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation opérateur

$$\varphi(x) - A\varphi(x) = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{2.10}$$

avec l'opérateur linéaire A donnée par

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi(t) \, dt$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation 2.10 soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En paratique, nous choisissons une suite de sous espaces $Xn \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a,b])$ ou de $L^2([a,b])$. Soit $\{\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n\}$ une base de X_n. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, nous introduisons un opérateur de projection $P_n : X \to X_n$ avec $X = C([a,b])$ soit $\varphi \in C([a,b])$ on défini $P_n\varphi$ comme élément de X_n l'interpolation de φ aux points $\{x_1 \ldots x_n\}$

$$P_n\varphi(x) = \lambda\varphi_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j(x) \tag{2.11}$$

donc

$$P_n\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K(x_i,t)\,\psi_j(t)\,dt + f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda c_j \psi_j(x_i) \quad i = 1,\dots n$$

en posant $\alpha_j = \lambda c_j$, on peut écrire

$$P_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x)\,, \quad x \in [a,b]$$

les coefficients (α_j) sont déterminés par la résolution du système

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x) \quad x \in [a,b]$$

cette fonction dans l'équation 2.10 et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_a^b K(x,t)\,\psi_j(t)\,dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^b K(x,t)\,\psi_j(t)\,dt \right\} - f(x)\,,\ x \in [a,b]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

soit nul sur un système de nœuds $x_1, \dots x_n \in [a,b]$, (i.e, aux points de collocation) ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire.

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^b K(x_i,t)\,\psi_j(t)\,dt \right\} \alpha_j = f(x_i)\,, i = 1,\dots,n \tag{2.13}$$

de la forme $\Psi_n X = f_n$. Évidemment ce système admet une solution unique si le

$$\det\left[\psi_j(x_i)\right] \neq 0. \tag{2.14}$$

Ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

Il faut noter que cette condition implique que le système des fonctions $\{\psi_1 \dots \psi_n\}$constitue un système linéairement indépendant .

Si on considère le système $\{1, x, \dots x^n\}$ des monômes linéairement indépendants, alors on obtient le déterminant de Vandermonde .

Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, soit $l_i \in X_n$ telle que :

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \;\; i \neq j \end{cases} \tag{2.15}$$

d'où

$$P_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \, l_j(x) \quad x \in [a, b] \tag{2.16}$$

le système $\{l_1, l_2, \dots l_n\}$ est appelé la base des fonctions de Lagrange vérifiant :

$$\|P_n\| = \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=1}^{n} |l_j(x)| \, . \tag{2.17}$$

Si on prend $X_n = span\{1, x, \dots, x^n\}$, alors la base des fonctions de Lagrange est donnée par :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

2.3.1 Solution avec des Méthodes de Collocation

on va choisir des nœuds de points distincts $x_1, x_2, \dots x_n \in [a, b]$ telle que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, 2 \dots n \tag{2.18}$$

qui vont déterminer les coefficients $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j (x_i) - \lambda \int_a^b K (x_i, t) \psi_j (t) \, dt \right\} \alpha_j = f (x_i) , \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.19}$$

définir les matrices

$$\psi = (\psi_{ji}) = \psi_j (x_i)$$

et

$$K = (K_{ji}) = \int_a^b K (x_i, t) \psi_j (t) \, dt$$

si la $\det (\psi - K) \neq 0$, nous pouvons nous assurer qu'il existe une solution du système linéaire 2.19 et par conséquent la solution approximative $\varphi_n (x)$ comme une combinaison linéaire

$$\varphi_n (x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j (x)$$

pour qui

$$\varphi_n (x_i) - \int_a^b K (x_i, t) \varphi_n (t) \, dt = f (x_i) , \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

en fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(\psi - K) \alpha = F \tag{2.20}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)^T$ et $F = (f (x_1) , f (x_2) , \ldots , f (x_n))^T$ .Pour le déterminant du système 2.20 est différent de zéro $\det (\psi - K) \neq 0$, alors il a une solution unique

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)^T = (\psi - K)^{-1} F$$

la solution approximative correspondante

$$\varphi_n (x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j (x) .$$

A propriété que son résidu $r_n(x)$ disparaît aux nœuds sélectionnés x_i .

2.3.2 Interpolation linéaire par morceaux

Soit $D = [a, b]$, $n > 0$, $h = \frac{(b-a)}{n}$, et $x_i = a + ih$,$i = 0, \ldots, n$. Le sous-espace que nous prenons pour être l'ensemble de toutes les fonctions qui sont linéaires par morceaux sur $[a, b]$ avec des points d'arrêt $\{x_0 \ldots x_n\}$ de dimension $n+1$.

Introduire les fonctions de base de Lagrange pour l'interpolation linéaire par morceaux :

$$l_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_i|}{h} & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.21}$$

avec l'ajustement évident de la définition de, $l_0(x)$ et $l_n(x)$ .On défini un opérateur de projection

$$P_n\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, l_i(x) \quad x \in [a, b] \tag{2.22}$$

maintenant, le système linéaire 2.19 prend la forme la plus simple

$$\varphi_n(x_i) - \lambda \sum_{j=0}^{n} \varphi_n(x_j) \int_a^b K(x_i, t)\, l_j(t)\, dt = f(x_i)\,, i = 0, \ldots n \tag{2.23}$$

et nous pouvons simplifier l'intégrale pour $j = 1, \ldots n-1$,

$$\int_a^b K(x_i, t)\, l_j(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, t)(t - x_{j-1})\, dt + \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, t)(x_j - t)\, dt. \tag{2.24}$$

Les intégrales pour $j = 0$ et $j = n$ sont modifiés en conséquence. Ceux-ci doivent généralement être calculés numériquement, et en utilisant la méthode de quadrature avec la règle des trapèzes.

2.4 Méthodes de Nyström :

a) Principe des Méthodes de Nyström :

Les méthode de Nyström utilisant les formules des quadratures consistent à construire la solution d'une équation intégrale en se basant sur la formule suivante :

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(x_i) + \varepsilon_n[\varphi] \tag{2.25}$$

telle que : $x_i (i = 1, 2, \ldots n)$: Les nœuds d'interpolation de la quadrature .

$A_i (i = 1, 2, \ldots n)$: Les coefficients numériques indépendants de $\varphi(x)$

$\varepsilon_n[\varphi]$: L'erreur de troncateur de la formule 2.25, telle que :

$$A_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = b - a$$

Pour la règle des trapèzes on a :

$$A_1 = A_n = \frac{1}{2}h, \quad A_2 = A_3 \ldots = A_{n-1} = h$$
$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, \ldots, n$$
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{2(n-1)}(\varphi(a) + \varphi(b)) + \frac{b-a}{n-1}\sum_{i=2}^{i=n-1} \varphi(a + h(i-1))$$

b) Application de la Méthode de Nyström :

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm de 2^{eme} espèce :

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{2.26}$$

en posant :$x = x_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ on obtient

$$\varphi(x_i) = \int_a^b K(x_i, t)\,\varphi(t)\,dt + f(x_i), \quad a \leq x \leq b$$

et par la formule de quadrature on obtient le système d'équations linéaires

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \varphi_j + f_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

et on déduit la solution approximative de l'équation 2.26 donnée par :

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) + f(x)$$

2.5 Exemples Numériques et Résultats

2.5.1 Polynômes Eulera

Les énième polynômes Eulera $\psi_n(t)$ sont définis par $\psi_0(t) = 1$ et la récurions suivante

$$\psi_n(t) = 2t^n - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \psi_j(t)$$

notant que le polynôme $\psi_n(t)$ d'Eulera est des polynômes avec des coefficients rationnels

$$\begin{aligned}
\psi_0(t) &= 1 \\
\psi_1(t) &= t - \frac{1}{2} \\
\psi_2(t) &= t^2 - t \\
\psi_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4} \\
\psi_4(t) &= t^4 - 2t^3 + \frac{2}{3}t \\
\psi_5(t) &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et admet également les égalités

$$\psi_n(t+x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \psi_n(t)\, x^{n-j} \quad \text{et} \quad \psi_n(t+1) + \psi_n(t) = 2t^n.$$

Exemple 2.5.1 *On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) - \int_0^{\pi} (\cos x - \cos t)\, \varphi(t)\, dt = \sin t \quad , \quad 0 \leq x \ ,t \leq \pi$$

où la fonction $f(x)$ est choisie pour que la solution exacte soit donnée pare

$$\varphi(t) = \sin t + \frac{4}{2-\pi^2} \cos t + \frac{2\pi}{2-\pi^2} \quad .$$

La solution approximative $\varphi_n(t)$ de $\varphi(t)$ est obtenue par la méthode de la série Eulera tronquée, est obtenue par la solution du système d'équations linéaires pour $N = 8$

Points de t	Solution exacte φ	Solution approximative φ_n	Erreur
0.000	$-1.306e+000$	$-1.306e+000$	$1.758e-004$
0.785	$-4.507e-001$	$-4.508e-001$	$1.558e-004$
1.570	$2.015e-001$	$2.014e-001$	$1.074e-004$
2.355	$2.681e-001$	$2.680e-001$	$5.908e-005$
3.140	$-2.901e-001$	$-2.901e-001$	$3.904e-005$

Tab. 2.1 – Comparaison numérique des solutions approchées de l'équation intégrale de Fredholm et solution exacte par la méthode de collocation de Eulera

2.5.2 Polynômes de Chebyshev

Pour cette étude, nous remplaçons la fonction $\varphi(t)$ par les quatre polynôme de Chebyshev et comparons la précision de l'estimation de la fonction inconnue

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} K(t,x)\, \varphi(t)\, dt = f(x)\,. \tag{2.27}$$

Discrétisation de l'équation intégrale

Dans cette section, nous appliquons une méthode de collocation à l'équation 2.27 de la convertir en un système d'équations linéaires .Pour ce dernier en utilisant un polynômes de Chebyshev, nous approchons l'inconnu $\varphi(t)$ tel que

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x) \tag{2.28}$$

où $\psi_n(x)$ représente le nième polynôme de Chebyshev de la première, deuxième, troisième ou quatrième sorte. Donc, que ces séries se comportent comme des séries de Fourier .Ainsi, en particulier, cette série converge point à φ sur $[-1,1]$ si φ est continu là-bas, alors que la convergence est uniforme si φ satisfait à une condition de Dini-Lipchitz ou est de variation bornée, Alors les troncatures de la série fournissent des polynômes avec de bonnes propriétés d'approximation sur l'intervalle $[-1,1]$.
Les quatre polynômes de Chebyshev avec l'intervalle d'orthogonalité $[-1,1]$

Polynôme de Chebyshev du quatrième type ψ_n

$$\psi_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}, \; x = \cos\theta$$

la formule de récurrence à trois termes satisfaite par les polynômes de Chebyshev est la traduction de l'identité trigonométrique élémentaire

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$
$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta$$

qui devient

$$\begin{cases} \psi_n(x) = 2x\psi_{n-1}(x) - \psi_{n-2}(x) \\ \psi_0(x) = 1, \;\; \psi_1(x) = 2x+1 \end{cases}$$

en substituant la relation 2.28 dans l'équation 2.27, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x) - \int_{-1}^{1} K(t,x) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x)\, dt = f(x) \tag{2.29}$$

et nous pouvons prendre comme points de collocation, les points

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n} \qquad i = 0, 1 \ldots n \tag{2.30}$$

et définir le résiduel comme

$$r_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \psi_j(x) - \int_{-1}^{1} K(x,t) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(t)\, dt - f(x) \tag{2.31}$$

ensuite, en imposant des conditions aux points de collocation

$$r_n(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, 2 \ldots, n \;.$$

L'équation intégrale 2.29 est convertie en un système d'équations linéaires.

Exemple 2.5.2 *On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm :*

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} \exp\left(2x - \frac{5}{4}t\right) \varphi(t)\, dt = \exp(2x)\left(-1 - 3\exp\left(\frac{1}{3}\right) + 3\exp\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

où la fonction $f(x)$ est choisie pour que la solution $\varphi(t)$ soit donnée par

$$\varphi(t) = \exp(2t) \quad .$$

La solution approximative $\varphi_n(t)$ de $\varphi(t)$ est obtenue par la solution du système d'équations linéaires pour $N = 10$.

Points de t	Solution exacte φ	Solution approximative φ_n	Erreur
-1.0000	$1.353353e-001$	$1.353353e-001$	$2.915452e-008$
-0.8000	$2.018965e-001$	$2.018965e-001$	$4.349344e-008$
-0.6000	$3.011942e-001$	$3.011941e-001$	$6.488458e-008$
-0.4000	$4.493290e-001$	$4.493289e-001$	$9.679642e-008$
-0.2000	$6.703200e-001$	$6.703199e-001$	$1.444033e-007$
0.0000	$1.000000e+000$	$9.999998e-001$	$2.154244e-007$
0.2000	$1.491825e+000$	$1.491824e+000$	$3.213754e-007$
0.4000	$2.225541e+000$	$2.225540e+000$	$4.794358e-007$
0.8000	$3.320117e+000$	$3.320116e+000$	$7.152342e-007$
0.8000	$4.953032e+000$	$4.953031e+000$	$1.067004e-006$
1.0000	$7.389056e+000$	$7.389055e+000$	$1.591783e-006$

Tab. 2.2 – Comparaison numérique des solutions approchées de l'équation intégrale de Fredholm et solution exacte par la méthode de collocation de Chebyshev

Bibliographie

[1] Krasnov.M, Kissélev.A, Makarenko.G, Équations Intégrales . Edition Mir Moscou.Traduction Française Editions Mir 1977

[2] Mostefa Nadir and Mustapha Dilmi, Eulera Series Solutions For Linear Integral Equations, Article 11, pp.1-7, 2017

[3] Mostefa Nadir, Equations With Application of the four Chebyshev Polynomials, Article 4-2014.

[4] Njood Asad Abdulrahman Rihan, Numerical Treatment of the Fredholm Integral Equations of the Second Kind, 2013

[5] Rahmoune Azedine, Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utiisant des Fonctions Spéciales (Thèse de Doctorat), (2011)

[6] Rachid Lamri, Resolution des Equation Integro-Differentille de type Volterra , (2013)

[7] Raimer Kress, Linear Integral Equations Second Edition ,

[8] Remili Omar el Houari, Equation Integrales de Frontiere Exemples de Reslution Numerique (Diplome de Magister) .

[9] Soufiane Benyoussef, Résolution Numérique des Équations Intégro-Différentielles de Fredholm, 2014.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$K(x,t)$	:	Noyau de l'équation intégrale
φ	:	La fonction inconnue dans l'équation intégrale
φ_n	:	Solution approchée
λ	:	Constant
ψ	:	Un base de X_n
I	:	La matrice identitie
$R(x,t,\lambda)$	:	estlarésolvante de Fredholm
$D(x,t,\lambda)$	:	Le mineur du déterminant de Fredholm
$D(\lambda)$	:	Le déterminant de Fredholm
ε	:	L'erreur
P_n	:	opérateur projections